F762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

1
ANUL XV
1964

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

— Acad. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
— Acad. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
— Acad. G. VRĂNCEANU;
— Acad. AL. GHIKA;
— Acad. CAIUS IACOB;
— Acad. TIBERIU POPOVICIU;
— Acad. M. HAIMOVICI;
— Acad. GH. MIHOC;
— CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

APARE
DE ZECE ORI PE AN

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

TOM. 15 Nr. 1
1964

MŰSZAKI KÖNYVTÁR
1883

SUMAR

Pag.

G. CAMENSCHI şi N. ŞANDRU, Acţiunea unui izvor termic şi a unui cîmp termic discontinuu în interiorul semiplanului elastic cu frontiera încastrată 3
G. G. VRĂNCEANU, Interpretări geometrice în teoria proceselor Markov 15
M. P. MIHĂILESCU, O metodă de aproximare a deformării curbelor de încărcare. I 45
I. SUCIU, Algebre Banach analitice 55
P. CONSTANTINESCU, C. LULEA şi S. NICULESCU, Algoritm pentru determinarea nucleului grafului asociat jocului NIM 77
KECS WILHELM, Asupra unor aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în mecanica teoretică şi aplicată 83
MARCEL N. ROŞCULEŢ, Contribuţii la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip parabolic. VI. Problema lui Cauchy pentru ecuaţia $\frac{\partial u}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial u}{\partial y^k}\right)$. 97
NOTE ISTORICE 137
RECENZII 139

REDACŢIA: str. MIHAIL EMINESCU, 47

ACȚIUNEA UNUI IZVOR TERMIC ȘI A UNUI CÎMP TERMIC DISCONTINUU ÎN INTERIORUL SEMIPLANULUI ELASTIC CU FRONTIERA ÎNCASTRATĂ

DE

G. CAMENSCHI și N. ȘANDRU

1. Ecuațiile termoelasticității în cazul stării de deformație plană și a unui cîmp termic staționar sînt

$$\nabla^2 T = -\frac{W}{\lambda}, \tag{1}$$

$$u_{i,kk} + \frac{1+\nu}{1-\nu} u_{k,ki} = \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \alpha_t T_{,i} \quad (i, k = 1, 2), \tag{2}$$

unde $T = T(x_1, x_2)$ este temperatura, $u_i = u_i(x_1, x_2)$ sînt componentele deplasării elastice, λ coeficientul de conducție termică, W — debitul unității de volum în cazul în care în masa mediului sînt repartizate izvoare de căldură, α_t — coeficientul de dilatație iar ν — coeficientul lui Poisson.

Soluția ecuației (2) se poate determina sub forma

$$u_i = \bar{u}_i + \bar{\bar{u}}_i,$$

unde $\bar{u}_i$ este soluția particulară a ecuației neomogene iar $\bar{\bar{u}}_i$ este soluția generală a ecuației omogene.

Pentru găsirea soluției particulare a ecuației (2) introducem potențialul termoelastic de deplasare $\Phi(x_1, x_2)$ prin relațiile

$$u_i = \Phi_{,i} \quad (i = 1, 2). \tag{3}$$

Cu aceasta ecuația (2) devine

$$\nabla^2 \Phi = (1+\nu)\alpha_t T, \tag{4}$$

componentele tensiunii fiind date de

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2G\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} - \delta_{ij}\, \nabla^2\right)\Phi. \tag{5}$$

Pentru determinarea lui $\bar{\bar{u}}_i$, respectiv $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$, folosim funcţia de tensiune a lui Airy determinată cu ajutorul condiţiilor la limită.

2. Fie planul elastic acţionat în originea sistemului de axe de un izvor termic de intensitate $W = 1$.

Ecuaţiile (1) şi (4) ne conduc la

$$\nabla^2\nabla^2\,\Phi\,(x_1, x_2) = -\frac{(1+\nu)\alpha_t}{\lambda}\,\delta\,(x_1, x_2), \tag{6}$$

unde prin δ am însemnat funcţia lui Dirac.

Folosind reprezentarea cu ajutorul integralei Fourier a funcţiei lui Dirac vom avea

$$\nabla^2\nabla^2\,\Phi = -\frac{K}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\alpha x_1 \cos\beta x_2\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta, \tag{7}$$

cu notaţia $K = \dfrac{1+\nu}{\lambda}\,\alpha_t$.

Pentru funcţia Φ obţinem

$$\Phi\,(x_1, x_2) = -\frac{K}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x_1 \cos\beta x_2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta. \tag{8}$$

Starea de tensiune corespunzătoare va fi

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -2G\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} = -\frac{2GK}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\beta^2\cos\alpha x_1 \cos\beta x_2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = \frac{GK}{2\pi}\left(\ln r + \frac{x_2^2}{r^2}\right),\\
\sigma_{22} &= -2G\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} = -\frac{2GK}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\alpha^2\cos\alpha x_1 \cos\beta x_2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = \frac{GK}{2\pi}\left(\ln r + \frac{x_1^2}{r^2}\right),\\
\sigma_{12} &= 2G\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\,\partial x_2} = -\frac{2GK}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\alpha\beta\sin\alpha x_1 \sin\beta x_2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta =\\
&= -\frac{GK}{2\pi}\,\frac{x_1\,x_2}{r^2},
\end{aligned} \tag{9}$$

iar pentru starea de deplasare găsim

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = \frac{K}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x_1 \cos\beta x_2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = -\frac{K}{4\pi}\,x_1\ln r,\\
u_2 &= \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = \frac{K}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\beta\cos\alpha x_1 \sin\beta x_2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = -\frac{K}{4\pi}\,x_2\ln r,
\end{aligned} \tag{10}$$

cu notaţia $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$.

Dacă izvorul termic este plasat în punctul (a, b) atunci în formulele (9) şi (10) vom înlocui pe x_1 şi x_2 prin $(x_1 - a)$ şi $(x_2 - b)$.

3. Fie semiplanul elastic $x_2 \geqslant 0$ avînd frontiera $x_2 = 0$ încastrată, acţionat de un izvor termic de intensitate $W = 1$ plasat în punctul $(0, b)$. Introducem un izvor negativ în punctul $(0, -b)$. Starea de deplasare corespunzătoare va fi

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= -\frac{K}{4\pi} x_1 \ln \frac{r_1}{r_2}, \\ \bar{u}_2 &= -\frac{K}{4\pi} [(x_2 - b) \ln r_1 - (x_2 + b) \ln r_2], \end{aligned} \tag{11}$$

notînd $r_{1,2} = [x_1^2 + (x_2 \mp b)^2]^{1/2}$.

Pe frontiera $x_2 = 0$ avem

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= 0, \\ \bar{u}_2 &= \frac{Kb}{4\pi} \ln (x_1^2 + b^2). \end{aligned} \tag{12}$$

Vom introduce sistemul de deplasări $\bar{\bar{u}}_1$, $\bar{\bar{u}}_2$ care să verifice ecuaţiile de echilibru iar pe frontieră să anuleze deplasările (12),

$$\begin{aligned} \bar{\bar{u}}_1 \big|_{x_2=0} &= 0, \\ \bar{\bar{u}}_2 \big|_{x_2=0} &= -\frac{Kb}{4\pi} \ln (x_1^2 + b^2). \end{aligned} \tag{13}$$

Alegem funcţia de tensiune

$$F(x_1, x_2) = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} [A(\alpha) + \alpha x_2 B(\alpha)] e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 \, d\alpha, \tag{14}$$

care ne conduce la starea de deplasare

$$\begin{aligned} E\bar{\bar{u}}_1 &= \int_0^\infty \{A(1 + \nu) + B[\alpha x_2 (1 + \nu) - 2]\} e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 \, d\alpha, \\ E\bar{\bar{u}}_2 &= \int_0^\infty \{A(1 + \nu) + B[\alpha x_2 (1 + \nu) + 1 - \nu]\} e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 \, d\alpha. \end{aligned} \tag{15}$$

Condiţiile la limită (13) conduc la

$$\begin{aligned} A(1 + \nu) - 2B &= 0, \\ A(1 + \nu) + B(1 - \nu) &= \frac{EKb}{2\pi} \cdot \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha b}, \end{aligned} \tag{16}$$

de unde obținem

$$A = \frac{EK}{\pi(3-\nu)(1+\nu)}\, b\, \frac{1}{\alpha}\, \mathrm{e}^{-\alpha b}, \quad B = \frac{EK}{2\pi(3-\nu)}\, b\, \frac{1}{\alpha}\, \mathrm{e}^{-\alpha b},$$

astfel încît avem

$$\begin{aligned} \bar{\bar{u}}_1 &= \frac{K}{2\pi}\,\frac{1+\nu}{3-\nu}\, b\, \frac{x_1 x_2}{r_2^2}, \\ \bar{\bar{u}}_2 &= -\frac{K}{2\pi}\, b \ln r_2 + \frac{K}{2\pi}\,\frac{1+\nu}{3-\nu}\, b\, \frac{x_2(x_2+b)}{r_2^2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Starea de deplasare va fi dată de

$$\begin{aligned} u_1 &= \bar{u}_1 + \bar{\bar{u}}_1 = -\frac{K}{4\pi}\, x_1 \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{K}{2\pi}\,\frac{1+\nu}{3-\nu}\, b\, \frac{x_1 x_2}{r_2^2}, \\ u_2 &= \bar{u}_2 + \bar{\bar{u}}_2 = -\frac{K}{4\pi}\,[(x_2-b)\ln r_1 - (x_2+b)\ln r_2 + \\ &\quad + 2b \ln r_2] + \frac{K}{2\pi}\,\frac{1+\nu}{3-\nu}\, b\, \frac{x_2(x_2+b)}{r_2^2}. \end{aligned} \tag{18}$$

Starea de tensiune corespunzătoare lui (14) va fi

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_{11} &= -\frac{EKb}{\pi} \cdot \frac{1}{(3-\nu)(1+\nu)}\,\frac{x_2+b}{r_2^2} + \frac{EKb}{2\pi}\,\frac{1}{3-\nu}\,\frac{x_2[(x_2+b)^2 - x_1^2]}{r_2^4}, \\ \bar{\bar{\sigma}}_{22} &= -\frac{EKb}{\pi}\,\frac{1}{(3-\nu)(1+\nu)}\,\frac{x_2+b}{r_2^2} - \frac{EKb}{2\pi}\,\frac{1}{3-\nu}\,\frac{x_2[(x_2+b)^2 - x_1^2]}{r_2^4}, \\ \bar{\bar{\sigma}}_{12} &= -\frac{EKb}{2\pi}\,\frac{1-\nu}{(3-\nu)(1+\nu)}\,\frac{x_1}{r_2^2} - \frac{EKb}{\pi}\,\frac{1}{3-\nu}\,\frac{x_1 x_2 (x_2+b)}{r_2^4}. \end{aligned} \tag{19}$$

Starea de tensiune se obține adăugînd la (19) tensiunea corespunzătoare lui (11), adică

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \bar{\sigma}_{11} + \bar{\bar{\sigma}}_{11} = \frac{GK}{2\pi}\left(\ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{(x_2-b)^2}{r_1^2} - \frac{(x_2+b)^2}{r_2^2}\right) - \\ &\quad - \frac{EKb}{\pi(3-\nu)(1+\nu)}\,\frac{x_2+b}{r_2^2} + \frac{EKb}{2\pi(3-\nu)}\,\frac{x_2[(x_2+b)^2 - x_1^2]}{r_2^4}, \\ \sigma_{22} &= \bar{\sigma}_{22} + \bar{\bar{\sigma}}_{22} = \frac{GK}{2\pi}\left(\ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{x_1^2}{r_1^2} - \frac{x_1^2}{r_2^2}\right) - \end{aligned}$$

$$-\frac{EKb}{\pi(3-\nu)(1+\nu)}\,\frac{x_2+b}{r_2^2}-\frac{EKb}{2\pi(3-\nu)}\,\frac{x_2\left[(x_2+b)^2-x_1^2\right]}{r_2^4}, \qquad (20)$$

$$\sigma_{12}=\bar{\sigma}_{12}+\bar{\bar{\sigma}}_{12}=-\frac{GK}{2\pi}\left(\frac{x_1(x_2-b)}{r_1^2}-\frac{x_1(x_2+b)}{r_2^2}\right)-$$

$$-\frac{EKb(1-\nu)}{2\pi(3-\nu)(1+\nu)}\,\frac{x_1}{r_2^2}-\frac{EKb}{\pi(3-\nu)}\,\frac{x_1x_2(x_2+b)}{r_2^4}.$$

În secțiunea de încastrare apar tensiunile

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{22}(x_1,0)&=-\frac{EK}{\pi(3-\nu)(1+\nu)}\,\frac{b^2}{x_1^2+b^2},\\ \sigma_{12}(x_1,0)&=\frac{EK}{\pi(3-\nu)(1+\nu)}\,\frac{bx_1}{x_1^2+b^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Variația acestor tensiuni este reprezentată în figura 1.

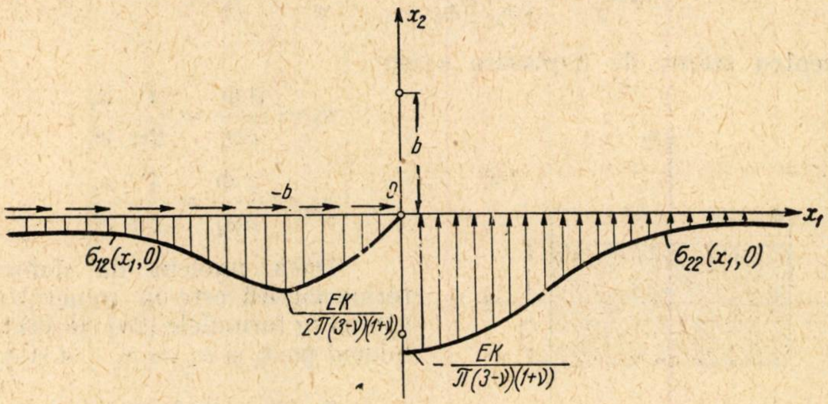


Fig. 1

4. Să considerăm în planul elastic un domeniu D în care temperatura este egală cu T iar în afara acestui domeniu $T=0$. Potențialul termoelastic de deplasare satisface în acest caz ecuația

$$\nabla^2\Phi=\begin{cases}(1+\nu)\,\alpha_t\,T & \text{în } D,\\ 0 & \text{în exteriorul lui } D.\end{cases} \qquad (22)$$

Fie în originea sistemului de axe a planului elastic un nucleu de deformație termoelastică.

Ecuația (22) în acest caz, devine

$$\nabla^2\Phi=\Gamma\,\delta\,(x_1,\,x_2), \qquad (23)$$

cu notația $\Gamma=(1+\nu)\,\alpha_t$.

Folosind reprezentarea integrală a funcţiei lui Dirac putem scrie

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\Gamma}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos \alpha x_1 \cos \beta x_2 \, d\alpha \, d\beta \tag{24}$$

Pentru funcţia Φ găsim

$$\Phi = - \frac{\Gamma}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x_1 \cos \beta x_2}{\alpha^2 + \beta^2} \, d\alpha \, d\beta. \tag{25}$$

Starea de tensiune corespunzătoare va fi

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= - 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = \frac{G\Gamma}{\pi} \frac{x_2^2 - x_1^2}{r^2}, \\ \sigma_{22} &= - 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = \frac{G\Gamma}{\pi} \frac{x_1^2 - x_2^2}{r^2}, \\ \sigma_{12} &= 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \, \partial x_2} = - \frac{2G\Gamma}{\pi} \cdot \frac{x_1 x_2}{r^2}, \end{aligned} \tag{26}$$

iar pentru starea de deplasare avem

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x_1}{r^2}, \\ u_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x_2}{r^2}. \end{aligned} \tag{27}$$

Dacă nucleul de deformaţie termoelastică este în punctul (a, b), atunci în formulele (26) şi (27) vom înlocui pe x_1 şi x_2 cu $x_1 - a$ şi $x_2 - b$.

5. Să considerăm acum cazul unui dreptunghi de laturi $2a$ şi $2b$ în interiorul căruia $T = 1$ iar în exteriorul acestui dreptunghi $T = 0$ (fig. 2).

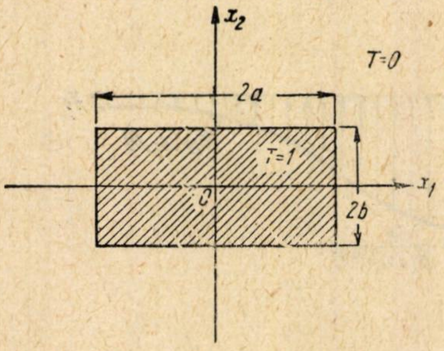


Fig. 2

Pentru starea de tensiune avem

$$\sigma_{ij} = - \frac{2G\Gamma}{\pi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} - \delta_{ij} \nabla^2 \right) \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos \alpha (x_1 - \xi) \cos \beta (x_2 - \eta)}{\alpha^2 + \beta^2} \, d\alpha \, d\beta \right\} d\xi \, d\eta. \tag{28}$$

adică

$$\sigma_{11} = - \frac{G\Gamma}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{x_1 - a}{x_2 - b} + \operatorname{arctg} \frac{x_1 + a}{x_2 + b} - \operatorname{arctg} \frac{x_1 + a}{x_2 - b} - \right.$$

$$- \operatorname{arctg} \frac{x_1 - a}{x_2 + b}\Bigg],$$

$$\sigma_{22} = -\frac{G\Gamma}{\pi}\Bigg[\operatorname{arctg}\frac{x_2 - b}{x_1 - a} + \operatorname{arctg}\frac{x_2 + b}{x_1 + a} - \operatorname{arctg}\frac{x_2 + b}{x_1 - a} -$$

$$- \operatorname{arctg}\frac{x_2 - b}{x_1 + a}\Bigg], \tag{29}$$

$$\sigma_{12} = \frac{G\Gamma}{\pi}\ln\frac{r_1 r_2}{\bar{r}_1 \bar{r}_2},$$

cu notația

$$r_1 = [(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2]^{1/2}, \qquad \bar{r}_1 = [(x_1 + a)^2 + (x_2 - b)^2]^{1/2},$$

$$r_2 = [(x_1 + a)^2 + (x_2 + b)^2]^{1/2}, \qquad \bar{r}_2 = [(x_1 - a)^2 + (x_2 + b)^2]^{1/2}.$$

6. Fie semiplanul elastic $x_2 \geqslant 0$, avînd frontiera încastrată și un nucleu de deformație termoelastică în punctul $(0,\ b)$.

Introducem un nucleu negativ în punctul $(0,\ -b)$ și scriem starea de deplasare corespunzătoare

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{x_1}{r_1^2} - \frac{x_1}{r_2^2}\right],\\ \bar{u}_2 &= \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{x_2 - b}{r_1^2} - \frac{x_2 + b}{r_2^2}\right].\end{aligned} \tag{30}$$

Pentru $x_2 = 0$ avem

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= 0,\\ \bar{u}_2 &= -\frac{\Gamma}{\pi}\frac{b}{x_1^2 + b^2}.\end{aligned} \tag{31}$$

Considerăm un sistem de deplasări $\bar{\bar{u}}_1$, $\bar{\bar{u}}_2$ care să verifice ecuațiile de echilibru iar pe frontieră să anuleze deplasările (31),

$$\begin{aligned}\bar{\bar{u}}_1\,|_{x_2=0} &= 0,\\ \bar{\bar{u}}_2\,|_{x_2=0} &= \frac{\Gamma}{\pi}\cdot\frac{b}{x_1^2 + b^2}.\end{aligned} \tag{32}$$

Alegînd funcția de tensiune (14) și ținînd seama de condițiile la limită găsim

$$F(x_1, x_2) = \frac{\Gamma E}{\pi(3 - \nu)}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\left[\frac{2}{1 + \nu} + \alpha x_2\right] \mathrm{e}^{-\alpha(x_2 + b)} \cos \alpha x_1 \,\mathrm{d}\alpha. \tag{33}$$

Starea de deplasare corespunzătoare va fi

$$\begin{aligned}\overline{\overline{u}}_1 &= \frac{2\,\Gamma(1+\nu)}{\pi\,(3-\nu)}\,\frac{x_1 x_2\,(x_2+b)}{r_2^4},\\ \overline{\overline{u}}_2 &= \frac{\Gamma}{\pi}\,\frac{x_2+b}{r_2^2} + \frac{\Gamma\,(1+\nu)}{\pi\,(3-\nu)}\,\frac{x_2\,[(x_2+b)^2-x_1^2]}{r_2^4};\end{aligned} \tag{34}$$

de asemenea, pentru starea de tensiune obținem

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\sigma}}_{11} &= -\frac{2E\Gamma\nu}{\pi\,(3-\nu)(1+\nu)}\,\frac{(x_2+b)^2-x_1^2}{r_2^4} + \\ &\quad + \frac{2E\Gamma}{\pi\,(3-\nu)}\,\frac{x_2\,(x_2+b)\,[(x_2+b)^2-3x_1^2]}{r_2^6},\\ \overline{\overline{\sigma}}_{22} &= -\frac{2E\Gamma}{\pi\,(3-\nu)\,(1+\nu)}\,\frac{(x_2+b)^2-x_1^2}{r_2^4} - \\ &\quad - \frac{2E\Gamma}{\pi\,(3-\nu)}\,\frac{x_2\,(x_2+b)\,[(x_2+b)^2-3x_1^2]}{r_2^6},\\ \overline{\overline{\sigma}}_{12} &= -\frac{2E\Gamma\,(1-\nu)}{\pi\,(3-\nu)\,(1+\nu)}\,\frac{x_1\,(x_2+b)}{r_2^4} - \\ &\quad - \frac{2E\Gamma}{\pi\,(3-\nu)}\,\frac{x_1\,x_2\,[3\,(x_2+ \quad {}^{2}-x_1^2]}{r_2^6}.\end{aligned} \tag{35}$$

Tensiunea totală va fi dată de

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{G\Gamma}{\pi}\left[\frac{(x_2-b)^2-x_1^2}{r_1^4} - \frac{(x_2+b)^2-x_1^2}{r_2^4}\right] - \\ &\quad - \frac{2E\Gamma\nu}{\pi\,(3-\nu)(1+\nu)}\,\frac{(x_2+b)^2-x_1^2}{r_2^4} + \\ &\quad + \frac{2E\Gamma}{\pi\,(3-\nu)}\,\frac{x_2\,(x_2+b)\,[(x_2+b)^2-3x_1^2]}{r_2^6},\\ \sigma_{22} &= \frac{G\Gamma}{\pi}\left[\frac{x_1^2-(x_2-b)^2}{r_1^4} - \frac{x_1^2-(x_2+b)^2}{r_2^4}\right] - \\ &\quad - \frac{2E\Gamma}{\pi\,(3-\nu)(1+\nu)}\,\frac{(x_2+b)^2-x_1^2}{r_2^4} - \\ &\quad - \frac{2E\Gamma}{\pi\,(3-\nu)}\,\frac{x_2\,(x_2+b)\,[(x_2+b)^2-3x_1^2]}{r_2^6},\end{aligned} \tag{36}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{2G\Gamma}{\pi}\left[\frac{x_1(x_2-b)}{r_1^4} - \frac{x_1(x_2+b)}{r_2^4}\right] -$$

$$-\frac{2E\Gamma(1-\nu)}{\pi(3-\nu)(1+\nu)}\,\frac{x_1(x_2+b)}{r_2^4} - \frac{2E\Gamma}{\pi(3-\nu)}\,\frac{x_1 x_2[3(x_2+b)^2 - x_1^2]}{r_2^6},$$

iar starea de deplasare

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\Gamma}{2\pi}\left(\frac{x_1}{r_1^2} - \frac{x_1}{r_2^2}\right) + \frac{2\Gamma(1+\nu)}{\pi(3-\nu)}\,\frac{x_1x_2(x_2+b)}{r_2^4}, \\ u_2 &= \frac{\Gamma}{2\pi}\left(\frac{x_2-b}{r_1^2} + \frac{x_2+b}{r_2^2}\right) + \frac{\Gamma(1+\nu)}{\pi(3-\nu)}\,\frac{x_2[(x_2+b)^2 - x_1^2]}{r_2^4}. \end{aligned} \tag{37}$$

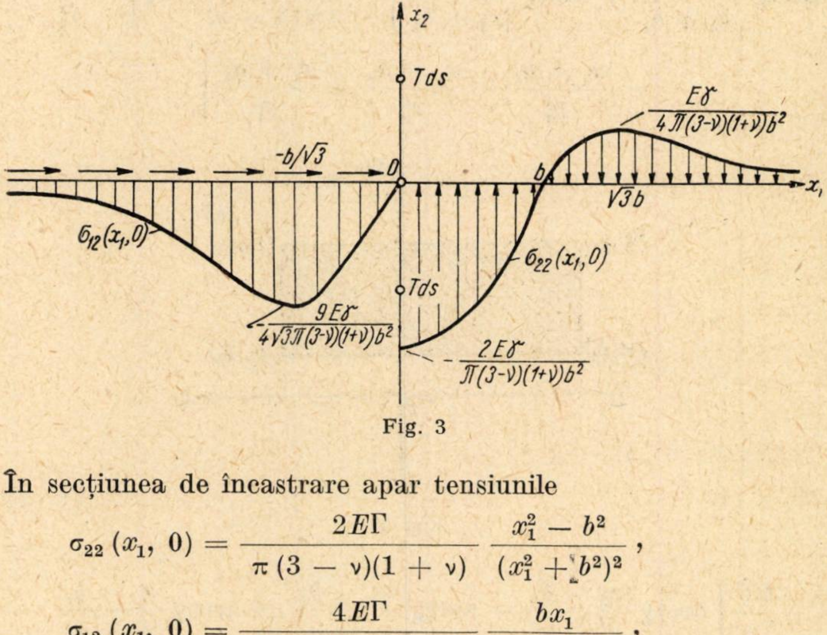


Fig. 3

În secţiunea de încastrare apar tensiunile

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x_1, 0) &= \frac{2E\Gamma}{\pi(3-\nu)(1+\nu)}\,\frac{x_1^2 - b^2}{(x_1^2 + b^2)^2}, \\ \sigma_{12}(x_1, 0) &= \frac{4E\Gamma}{\pi(3-\nu)(1+\nu)}\,\frac{bx_1}{(x_1^2 + b^2)^2}, \end{aligned} \tag{38}$$

a căror variaţie este reprezentată în figura 3.

7. Dacă $T = 1$ pe un dreptunghi de laturi $(a_2 + a_1)$ şi $(b_2 - b_1)$ al semiplanului cu frontiera încastrată (fig. 4) se obţine starea de tensiune

$$\sigma_{ij} = -\frac{2G\Gamma}{\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} - \delta_{ij}\nabla^2\right)\times$$

$$\times\int_{-a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\cos\alpha(x_1-\xi)\,[\cos\beta(x_2-\eta) - \cos\beta(x_2+\eta)]}{\alpha^2+\beta^2}\,d\alpha\,d\beta +\right.$$

$$\left.+\frac{1+\nu}{3-\nu}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\left(\frac{2}{1+\nu} + \alpha x_2\right)e^{-\alpha(x_2+\eta)}\cos\alpha(x_1-\xi)\right\}d\xi\,d\eta. \tag{39}$$

Efectuînd calculele vom avea

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = -\frac{G\Gamma}{\pi}\Bigg[&\operatorname{arctg}\frac{x_1-a_2}{x_2-b_2}-\operatorname{arctg}\frac{x_1-a_2}{x_2-b_1}+\operatorname{arctg}\frac{x_1-a_2}{x_2+b_2}-\\ &-\operatorname{arctg}\frac{x_1-a_2}{x_2+b_1}-\operatorname{arctg}\frac{x_1+a_1}{x_2-b_2}+\operatorname{arctg}\frac{x_1+a_1}{x_2-b_1}-\operatorname{arctg}\frac{x_1+a_1}{x_2+b_2}+\\ &+\operatorname{arctg}\frac{x_1+a_1}{x_2+b_1}\Bigg]-\frac{4\nu G\Gamma}{\pi(3-\nu)}\Bigg[\operatorname{arctg}\frac{x_1-a_2}{x_2+b_2}-\operatorname{arctg}\frac{x_1+a_1}{x_2+b_2}-\\ &-\operatorname{arctg}\frac{x_1-a_2}{x_2+b_1}+\operatorname{arctg}\frac{x_1+a_1}{x_2+b_1}\Bigg]+\frac{2G\Gamma(1+\nu)}{\pi(3-\nu)}x_2\Bigg[\frac{x_1-a_2}{r_3^2}-\\ &-\frac{x_1+a_1}{r_3^2}-\frac{x_1-a_2}{r_4^2}+\frac{x_1+a_1}{r_4^2}\Bigg],\end{aligned}$$

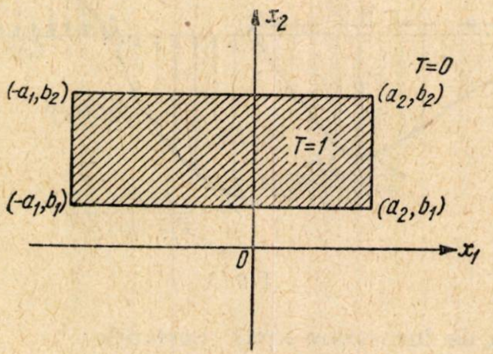


Fig. 4

$$\begin{aligned}\sigma_{22} = -\frac{G\Gamma}{\pi}\Bigg[&\operatorname{arctg}\frac{x_2-b_2}{x_1-a_2}-\operatorname{arctg}\frac{x_2-b_1}{x_1-a_2}+\operatorname{arctg}\frac{x_2+b_2}{x_1-a_2}-\\ &-\operatorname{arctg}\frac{x_2+b_1}{x_1-a_2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{x_2-b_2}{x_1+a_1}+\operatorname{arctg}\frac{x_2-b_1}{x_1+a_1}-\operatorname{arctg}\frac{x_2+b_2}{x_1+a_1}+\\ &+\operatorname{arctg}\frac{x_2+b_1}{x_1+a_1}\Bigg]-\frac{4\,G\Gamma}{\pi(3-\nu)}\Bigg[\operatorname{arctg}\frac{x_1-a_2}{x_2+b_2}-\operatorname{arctg}\frac{x_1+a_1}{x_2+b_2}-\\ &-\operatorname{arctg}\frac{x_1-a_2}{x_2+b_1}+\operatorname{arctg}\frac{x_1+a_1}{x_2+b_1}\Bigg]-\frac{2\,G\Gamma(1+\nu)}{\pi(3-\nu)}x_2\Bigg[(x_1-a_2)\left(\frac{1}{r_3^2}-\right.\\ &\left.-\frac{1}{r_4^2}\right)+(x_1+a_1)\left(\frac{1}{r_4^2}-\frac{1}{r_3^2}\right)\Bigg],\end{aligned}\tag{40}$$

$$\sigma_{12}=\frac{G\Gamma}{\pi}\ln\frac{r_1^2\bar{r}_1^2 r_3^2\bar{r}_4^2}{r_2^2\bar{r}_2^2 r_3^2 r_4^2}-\frac{G\Gamma(1-\nu)}{\pi(3-\nu)}\ln\frac{r_3^2\bar{r}_4^2}{\bar{r}_3^2 r_4^2}+$$

$$+\frac{2G\Gamma(1+\nu)}{\pi(3-\nu)}x_2\left[(x_2+b_2)\left(\frac{1}{r_3^2}-\frac{1}{\bar{r}_3^2}\right)+(x_2+b_1)\left(\frac{1}{\bar{r}_4^2}-\frac{1}{r_4^2}\right)\right],$$

unde am notat

$$\begin{aligned} r_1&=[(x_1-a_2)^2+(x_2-b_2)^2]^{1/2}, & \bar{r}_1&=[(x_1+a_1)^2+(x_2-b_1)^2]^{1/2},\\ r_2&=[(x_1-a_2)^2+(x_2-b_1)^2]^{1/2}, & r_2&=[(x_1+a_1)^2+(x_2-b_2)^2]^{1/2},\\ r_3&=[(x_1-a_2)^2+(x_2+b_2)^2]^{1/2}, & \bar{r}_3&=[(x_1+a_1)^2+(x_2+b_2)^2]^{1/2},\\ r_4&=[(x_1-a_2)^2+(x_2+b_1)^2]^{1/2}, & \bar{r}_4&=[(x_1+a_1)^2+(x_2+b_1)^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

În felul acesta am determinat starea de solicitare provocată de acțiunea unui izvor termic, a unui nucleu de deformație termoelastică și a unui cîmp termic uniform distribuit pe un dreptunghi în interiorul semiplanului elastic cu frontiera încastrată.

Primită la redacție la 28 mai 1963

BIBLIOGRAFIE

1. E. MELAN, H. PARKUS, *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*, Springer-Verlag, Wien, 1953.
2. ВИТОЛЬД НОВАЦКИЙ, *Вопросы термоупругости*. Изд. АН СССР, Москва, 1962.
3. P. P. TEODORESCU, *Probleme plane în teoria elasticității*. Edit. Acad. R.P.R., București. 1961, I.

INTERPRETĂRI GEOMETRICE ÎN TEORIA PROCESELOR MARKOV

DE

G. G. VRĂNCEANU

În lucrarea de față ne propunem să studiem unele aspecte ale teoriei proceselor Markov utilizînd unele interpretări geometrice.

O parte din rezultatele obținute au fost deja publicate împreună cu prof. G. Vrănceanu [1] iar altele au fost comunicate la ,,Colocviul de Geometrie'' de la Kiev din mai 1962, la ,,Colocviul de Teoria probabilităților'' de la Brașov din octombrie 1962 și la ,,Conferința romîno-bulgară'' din mai 1963.

Lucrarea este împărțită în două capitole.

Capitolul I este consacrat proceselor [1]) Markov simple cu o mulțime cel mult numărabilă de stări. În § 1 se arată cum se pot interpreta rezultatele lui M. Fréchet [2], utilizînd un sistem (μ) de n vectori și dualul său (λ) precum și sistemele derivate corespunzătoare $(\mu)'$ și $(\lambda)'$.

În § 2 se tratează diferite exemple de procese Markov, se regăsesc astfel pentru $n = 2$ formulele lui M. Fréchet și se determină o clasă de procese Markov cu trei stări. Pentru n arbitrar, se găsește o clasă de vectori care generează probabilitățile fundamentale (depinzînd de n funcții arbitrare, clasă care din anumite puncte de vedere este cea mai generală).

În capitolul II sînt studiate procesele Markov multiple.

Pentru a putea obține ecuațiile diferențiale corespunzătoare, se punea problema găsirii unui analog al relației lui Chapman-Kolmogorov, care joacă un rol central în teoria proceselor Markov simple. Generalizînd relația clasică a lui Chapman pentru un lanț Markov simplu, O. Onicescu [3] a dat relația funcțională care trebuie să o satisfacă probabilitățile fundamentale ale unui lanț Markov multiplu. Pornind de la această relație, R. Theodorescu [4] a dat relația funcțională analogă celei lui Chapman-Kolmogorov, verificată de probabilitățile fundamentale ale unui proces Markov multiplu. Această relație funcțională i-a permis lui R. Theodorescu să stabilească ecuațiile diferențiale ale unui proces Markov multiplu.

---

[1]) Spre deosebire de lanț, prin proces vom înțelege întotdeauna o evoluție cu parametru continuu.

În § 1 se arată cum se poate atașa un transport paralel acestor ecuații, introducînd noțiunea de conexiune probabilistică. Ținînd seama de această interpretare geometrică, se dau o serie de rezultate privind soluția relației funcționale fundamentale, cît și unele proprietăți privind structura transformărilor punctuale corespunzătoare. Paragraful 2 este consacrat studiului grupurilor probabilistice de transformări care lasă invariantă bisectoarea axelor de coordonate care se obține presupunînd că toate coordonatele sînt egale; se face astfel legătura cu studiul grupurilor axiale.

Lucrarea a făcut obiectul tezei mele de aspirantură sub conducerea acad. prof. G. Mihoc.

CAPITOLUL I

PROCESE MARKOV SIMPLE

§ 1. SISTEM DE VECTORI ASOCIAT

Să considerăm un proces Markov simplu cu n stări. Se știe [4] că un astfel de proces este caracterizat de o repartiție inițială și de o matrice de trecere formată din elemente nenegative

$$P(s,\ t) = \| P^i_j\ (s,\ t) \|\ ^{2)}, \qquad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n,$$

care se bucură de proprietatea

$$\sum_{j=1}^{n} P^i_j (s,\ t) = 1 \tag{1}$$

și

$$P^i_j (s, t) = \sum_{k=1}^{n} P^i_k (s, u)\ P^k_j (u, t), \qquad s \leqslant u < t \tag{2}$$

Trebuie să presupunem de asemenea că

$$P^i_j\ (s,\ s) = \delta^i_j \tag{3}$$

δ^i_j fiind simbolul lui Kroneckér.

Rezultă că determinarea proceselor Markov simple cu o mulțime finită de stări revine la a găsi soluțiile pozitive $P^i_j(s,\ t)$ ale ecuațiilor (1), (2) și (3).

---

²) Folosim notația $P^i_j\ (s,\ t)$ în loc de $P_{ij}\ (s,\ t)$ pentru a fi de acord cu interpretarea geometrică ce o considerăm în această lucrare.

Formulele lui Fréchet. Este de observat că în timp ce ecuațiile (1) sînt ecuații liniare, ecuațiile (2) sînt ecuații funcționale și rezolvarea acestor ecuații se datorește în primul rînd lui Fréchet [1] care a arătat că presupunînd că $P^i_j\,(s,\ t)$ sînt funcții continue, atunci avem soluția sub forma

$$P^i_j\,(s,\ t) = \mu^i_a\,(s)\ \lambda^a_j\,(t), \tag{4}$$

unde determinantul $\Delta = |\mu^i_a\,(s)|$ este diferit de zero și unde λ^a_j sînt reciprocii determinantului Δ, deci avem condițiile

$$\mu^i_a\,(s)\,\lambda^a_j\,(s) = \delta^i_j. \tag{5}$$

În cele ce urmează vom interpreta μ^i_a $(a = 1,\ldots,n)$ drept componentele contravariante ale unui sistem (μ) de n vectori contravarianți independenți în fiecare punct s al unei curbe, s fiind un parametru al curbei.

În acest caz λ^a_j $(a = 1,\ldots,n)$ sînt componentele covariante al unui sistem (λ) de n vectori covarianți independenți, sistemele (μ) și (λ) fiind duale unul altuia. Avem deci :

TEOREMA 1. *Fiind dat un sistem de probabilități fundamentale $P^i_j\,(s, t)$, rezultă un sistem (μ) de vectori independenți astfel că $P^i_j\,(s,\ t)$ se exprimă prin formulele (4), unde λ^a_j sînt componentele sistemului dual (λ) al sistemului (μ).*

Să observăm acum că probabilitățile fiind definite de formulele (4), ecuațiile (1) ne spun că avem

$$\mu^i_a\,(s) \sum_{j=1}^{n} \lambda^a_j\,(t) = 1. \tag{6}$$

Notînd cu

$$c^a\,(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^a_j\,(t) \tag{7}$$

și înmulțind ecuațiile (6) cu $\lambda^b_i\,(s)$ și sumînd obținem

$$c^a\ (t) = c^a\ (s),$$

deci c^a sînt constante [3]) și prin urmare avem

$$\mu^i_a\,(s)\,c^a = 1,$$

deci constantele c^a nu pot fi toate nule.

Să observăm acum că formulele (4) sînt invariante la o transformare liniară :

$$\overline{\lambda}{}^a_j = c^a_b\ \lambda^b_j,\ \mu^i_a = c^b_a\ \overline{\mu}{}^i_b, \tag{7'}$$

unde c^a_b sînt constante.

---

[3]) M. Fréchet, *Op. cit.*, p. 276.

Printr-o asemenea transformare avem

$$\bar{c}^a = \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}^a_j = c^a_b\, c^b,$$

deci $\bar{c}^a$ se comportă față de o transformare liniară (7′) ca un vector contravariant.

Putem deci să utilizăm constantele c^a_b pentru a reduce constantele c^a la o formă canonică, de exemplu să avem $c^a = \delta^a_1$, formă indicată de Fréchet, ceea ce revine a avea condițiile

$$\mu^i_1 = 1, \sum_{j=1}^{n} \lambda^a_j = \delta^a_1, \tag{7''}$$

și primele din aceste condiții ne spun că vectorul 1 are toate componentele egale cu unitatea.

Se poate de asemenea presupune că toate componentele c^a sînt egale cu unitatea și în acest caz vectorii μ^i_a satisfac la condițiile

$$\sum_{a=1}^{n} \mu^i_a = 1 \tag{8}$$

în timp ce vectorii duali λ^a_i satisfac la condițiile

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^a_i = 1. \tag{8'}$$

În cele ce urmează vom utiliza mai ales această formă canonică, datorită simetriei formulelor și analogiei ei cu formula (1) la care satisfac probabilitățile fundamentale.

Se poate de altfel observa că se poate trece de la formulele (8) la primele formule (7″), $\bar{\mu}^i_1 = 1$, făcînd transformarea de vectori

$$\mu^i_1 = \bar{\mu}^i_1 - \mu^i_2 - \ldots - \bar{\mu}^i_n,\ \mu^i_a = \bar{\mu}^i_a \qquad (a > 2).$$

Transformările (7′) care păstrează condițiile (8) satisfac la condiția

$$\sum_{a=1}^{n} c^a_b = 1. \tag{9}$$

Pe de altă parte, în formulele (7′) nu putem presupune că ar exista funcții de variabilele s sau t, deoarece atunci formulele (4) nu ar fi invariante. Rezultă deci

TEOREMA 2. *La orice sistem de probabilități fundamentale se asociază un sistem de vectori* (μ) *ce satisfac la condițiile* (8) *și acest sistem de vectori este determinat abstracție făcînd de o transformare liniară cu coeficienți constanți* :

$$\mu^i_a = c^b_a\, \bar{\mu}^i_b, \tag{9'}$$

unde c^a_b *satisfac ecuațiile* (9).

Desigur, reciproca nu este adevărată. Fiind dat sistemul de vectori (μ) satisfăcînd condițiile (8), pentru ca acești vectori să definească un sistem de probabilități fundamentale, trebuie să fie verificate de asemenea condițiile

$$P_j^i(s, t) \geqslant 0.$$

Cum pe de altă parte avem $P_j^i(s, s) = \delta_j^i$, rezultă că trebuie să ne asigurăm că pentru $t > s$ să avem cel puțin pentru t destul de aproape de s condițiile

$$P_j^i(s, t) \geqslant 0, \ (i \neq j).$$

Teorema lui Kolmogorov. Pentru a găsi condițiile necesare și suficiente pentru ca sistemul de vectori (μ) să poată defini un sistem de probabilități, să considerăm sistemul derivat al sistemului (μ) deci vectorii $(\mu_a^i)'$, derivarea făcîndu-se în raport cu variabila s. Putem atunci să exprimăm sistemul derivat $(\mu)'$ cu ajutorul sistemului (μ) prin formule de forma

$$(\mu_a^i)' = \Gamma_j^i \, \mu_a^j, \tag{9''}$$

unde Γ_j^i sînt funcții de variabila s, definite de altfel de formulele

$$\Gamma_j^i = (\mu_a^i)' \, \lambda_j^a.$$

Ținînd seamă de formulele (8), rezultă că Γ_j^i satisfac la condițiile

$$\sum_{j=1}^{n} \Gamma_j^i = 0. \tag{10}$$

Să considerăm de asemenea sistemul derivat dual $(\lambda)'$. Derivînd formulele (4′) și ținînd seama de (10), obținem formulele

$$(\lambda_j^a)' = - \Gamma_j^k \, \lambda_k^a. \tag{10'}$$

Rezultă deci că derivînd formulele (4) în raport cu t, considerînd s fix, obținem

$$\frac{\mathrm{d}P_j^i(s, t)}{\mathrm{d}t} = \mu_a^i(s) \frac{\mathrm{d}\lambda_j^a(t)}{\mathrm{d}t} = - \Gamma_j^k(t) \, \mu_a^i(s) \, \lambda_k^a,$$

ceea ce ne dă

$$\left(\frac{\mathrm{d}P_j^i(s, t)}{\mathrm{d}t} \right)_{t=s} = - \Gamma_j^i(s).$$

Rezultă deci că probabilitățile $P_j^i(s, t)$, $(i \neq j)$, vor fi pozitive pentru $t > s$ dacă

$$\Gamma_j^i(s) \leqslant 0, \ (i \neq j). \tag{10''}$$

Avem deci teorema lui Kolmogorov [6] sub forma următoare :

TEOREMA 3. *Condiția necesară și suficientă ca sistemul de vectori satisfăcînd la condițiile* (8) *să poată defini un sistem de probabilități în* *vecinătatea punctului* s, *este ca în acest punct cantitățile* $\Gamma^i_j(s)$, $(i \neq j)$, *să fie toate nepozitive.*

Ținînd seama de relațiile (10), rezultă atunci că Γ^i_i trebuie să fie pozitive sau nule. Considerînd de asemenea derivata determinantului $\Delta = |\mu^i_a|$, obținem, ținînd seama de (9''),

$$\Delta' = \Delta \sum_{i=1}^{n} \Gamma^i_i.$$

Cum suma cantităților Γ^i_i nu poate fi nulă decît dacă toate cantitățile Γ^i_i și deci toate cantitățile Γ^i_i $(i \neq j)$ sînt nule, în care caz μ^i_a sînt constante, rezultă că determinantul Δ nu poate fi constant, pentru un sistem de probabilități P^i_j ce depind de s, deci nu se reduc la δ^i_j.

Să dăm acum o altă formă teoremei lui Kolmogorov. În adevăr, putem observa că se poate obține o soluție a ecuațiilor (8) în cazul general $n = m^\nu$, punînd

$$\begin{aligned} \mu^i_a &= \frac{1}{n} - m^i_a, \quad (i \neq a), \\ \mu^i_i &= \frac{1}{n} + \sum_{a \neq i} m^i_a \end{aligned} \tag{11}$$

și în acest caz determinantul Δ este nul pentru valorile nule ale celor $n\,(n-1)$ funcții m^i_a.

Să arătăm că teorema lui Kolmogorov se poate exprima numai cu ajutorul acestor $n(n-1)$ funcții m^i_a $(i \neq a)$, și a cantităților Γ^i_j, $(i \neq j)$.

Pentru aceasta să observăm că, ținînd seama de condițiile (9'') și de ecuațiile (11) pentru $i \neq a$, obținem

$$-(m^i_a)' = \sum_{j \neq a} \Gamma^i_j \left(\frac{1}{n} - m^j_a\right) + \Gamma^i_a \left(\frac{1}{n} + \sum_{b \neq a} m^a_b\right),$$

unde i și a sînt indici ficși diferiți. Aceste formule, ținînd seama de (10), se scriu

$$(m^i_a)' = \sum_{j \neq i \neq a} \Gamma^i_j m^j_a - \Gamma^i_a \sum_{b \neq a} m^a_b - m^i_a \sum_{j \neq i} \Gamma^i_j. \tag{12}$$

Ecuațiile (12) reprezintă un sistem de $n(n-1)$ ecuații diferențiale în necunoscutele m^i_a, $(i \neq a)$. Pentru ca sistemul de vectori (μ) dat de formulele (11) să poată defini un sistem de probabilități, trebuie ca în sistemul (12) Γ^i_j, $(i \neq j)$, să fie nepozitive.

Avem deci

TEOREMA 4. *Condiția necesară și suficientă pentru ca vectorii definiți de formulele* (*11*) *să constituie un sistem de vectori probabilistic este ca* m^i_a *să fie soluții ale sistemului de ecuații diferențiale* (*12*) *în care* Γ^i_j, $(i \neq j)$, *sînt cantități nule sau negative.*

Cazul funcțiilor nederivabile. În această teoremă se presupune că m_a^i și deci μ_a^i sînt funcții derivabile. Se poate da însă o condiție pentru ca sistemul de vectori (μ) să fie probabilistic fără să se utilizeze noțiunea de derivată.

Într-adevăr, înmulțind formulele (4) cu $\mu_b^i(t)$ și sumînd în raport cu j se obține

$$\sum_{j=1}^{n} P_j^i(s, t)\, \mu_b^j(t) = \mu_b^i(s). \tag{13}$$

Să presupunem în aceste formule $i \neq a$. Atunci (13) se scriu, ținînd seama de (11):

$$\sum_{j \neq i \neq b} P_j^i\,[m_b^i(t) - m_b^j(t)] + P_b^i \left| \sum_{a \neq b} m_b^a(t) + m_b^i(t) \right| = m_b^i(t) - m_b^i(s), \tag{13'}$$

în care intervin numai probabilitățile $P_j^i(s, t)$, $(i \neq j)$. Pentru un i fix, acestea constituie $n - 1$ ecuații în cantitățile $P_j^i(s, t)$, $(i \neq j)$ și prin urmare avem

TEOREMA 5. *Condiția necesară și suficientă ca un sistem de vectori* (μ) *să fie probabilistic este ca el să fie dat de formulele* (*11*) *iar soluțiile* P_j^i $(i \neq j)$ *ale ecuațiilor* (*13'*) *să fie toate pozitive pentru* $(s \leqslant t)$.

Probabilități staționare. Fiind dat un sistem de probabilități fundamentale

$$P_j^i(s, t) = \mu_a^i(s)\, \lambda_j^a(t), \tag{14}$$

matricea formată cu $P_j^i(s, t)$ se zice că constituie o matrice de trecere. Dacă una din variabile este considerată fixă iar cealaltă este considerată variabilă, obținem o familie de matrici de trecere depinzînd de un parametru. Dacă s are o valoare fixă, de exemplu zero, avem atunci pentru t pozitiv o familie de matrici stocastice depinzînd de parametrul t

$$P_j^i(0, t) = Q_j^i(t) = \mu_a^i(0)\, \lambda_j^a(t). \tag{14'}$$

Să vedem în ce condiții matricile $\| Q_j^i(t) \|$ satisfac condiției de aditivitate

$$Q_j^i(u + t) = Q_k^i(u)\, Q_j^k(t) \tag{15}$$

și să arătăm că această condiție se transformă într-o condiție relativă la sistemele de vectori (μ), (λ).

În adevăr, să presupunem că matricea $\| \mu_a^i(0) \|$ este matricea unitate, ceea ce se poate întotdeauna presupune făcînd o transformare (7'). În adevăr, dacă $\mu_a^i(0)$ nu ar fi matricea unitate, atunci făcînd transformarea

$$\mu_a^i(0) = c_a^b\, \overline{\mu}_b^i(0)$$

matricea $\| \overline{\mu}_b^i(0) \|$ devine matricea unitate dacă luăm $c_b^i = \mu_a^i(0)$.

Presupunînd deci $\| \mu_a^i(0) \|$ matricea unitate, formulele (14') devin

$$Q_j^i(t) = \lambda_j^a(t)$$

și deci rezultă că ecuațiile (15) sînt verificate dacă satisfac condițiile

$$\lambda_j^i(u + t) = \lambda_k^i(u)\, \lambda_j^k(t). \tag{16}$$

Aceste condiții fiind verificate, să presupunem că dăm lui t valoarea $-u$, deci că $t + u = 0$. În primul membru al ecuațiilor (16) avem $\lambda_j^i(0)$, deci matricea $\| \lambda_j^i(0) \|$ este matricea unitate astfel că formulele (16) ne dau

$$\lambda_k^i(u)\, \lambda_j^k(-u) = \delta_j^i.$$

Pe de altă parte, avem formulele (4′), deci

$$\lambda_k^i(u)\, \mu_j^k(u) = \delta_j^i.$$

Rezultă deci că avem

$$\mu_j^k(u) = \lambda_j^k(-u).$$

Deci sistemele duale (λ), (μ) se obțin unul din altul prin schimbarea semnului variabilei.

Să derivăm acum ecuațiile (16) în raport cu u. Avem

$$[\lambda_j^i(u + t)]' = [\lambda_k^i(u)]'\, \lambda_j^k(t).$$

Ținînd seama de (10′), aceste formule se scriu

$$\Gamma_s^i(u + t)\, \lambda_j^s(u + t) = \Gamma_s^i(u)\, \lambda_k^s(u)\, \lambda_j^k(t)$$

ceea ce ne dă, ținînd seama de (16),

$$\Gamma_j^i(u) = \Gamma_j^i(u + t).$$

Deci cantitățile Γ_j^i sînt constante.

Obținem deci:

TEOREMA 6. *Dacă probabilitățile $P_j^i(t)$ satisfac ecuațiile funcționale (15), atunci Γ_j^i din formulele (9″) și (10′) sînt constante.*

Procesul este în acest caz staționar.

Să revenim acum la formulele (14) și să punem $t = s + u$. Avem atunci

$$P_j^i(s,\ s + u) = \mu_a^i(s)\, \lambda_j^a(s + u),$$

dar, ținînd seama de (16), rezultă

$$P_j^i(s,\ s + u) = \mu_a^i(s)\, \lambda_k^a(s)\, \lambda_j^k(u) = \lambda_j^i(u),$$

care ne arată că probabilitățile fundamentale depind numai de variabila u, deci ele depind numai de diferența $t-s$.

Să presupunem că luăm ca sistem de vectori λ_k^i, sistemul

$$\lambda_i^i = \frac{1}{n} - \sum_{a \neq i} n_a^i,\ \ \lambda_a^i = \frac{1}{n} + n_a^i,\ (i \neq a).$$

În acest caz ecuațiile (16) se scriu

$$\begin{aligned} n_j^i(u + t) = n_k^i(u)\, n_j^k(t) + \Big[1 - \sum_{a \neq i} n_a^i(u)\Big]\, n_j^i(t) + \\ + n_j^i(u) \Big[1 - \sum_{a \neq j} n_a^j(t)\Big],\ (i \neq j) \end{aligned} \tag{17}$$

şi avem un sistem de ecuaţii funcţionale în necunoscutele n_j^i, $(i \neq j)$. Dacă sîntem în cazul $n = 2$, putem lua

$$n_2^1 = \alpha,\ n_1^2 = \beta$$

şi ecuaţiile (17) se scriu

$$\alpha(u + t) = [1 - \alpha(u)]\,\alpha(t) + [1 - \beta(t)]\,\alpha(u),$$
$$\beta(u + t) = [1 - \beta(u)]\,\beta(t) + [1 - \alpha(t)]\,\beta(u).$$

§ 2. EXEMPLE DE PROCESE MARKOV

Cazul $n = 2$. Să utilizăm rezultatele de la paragraful 1 pentru a găsi probabilităţile fundamentale pentru $n = 2$. În acest caz putem lua ca formule (11):

$$\mu_1^1 = \frac{1}{2} + \varphi,\ \mu_2^1 = \frac{1}{2} - \varphi,$$
$$\mu_1^2 = \frac{1}{2} - \psi,\ \mu_2^2 = \frac{1}{2} + \psi.$$

Prin urmare avem $\Delta = \varphi + \psi$ şi obţinem

$$\lambda_1^1 = \frac{\frac{1}{2} + \psi}{\Delta},\ \lambda_1^2 = -\frac{\frac{1}{2} - \psi}{\Delta},$$
$$\lambda_2^1 = -\frac{\frac{1}{2} - \varphi}{\Delta},\ \lambda_2^2 = \frac{\frac{1}{2} + \varphi}{\Delta},$$

iar probabilităţile fundamentale sînt date, ţinînd seama de (4), de formulele lui Fréchet [4])

$$\begin{aligned} P_1^1(s, t) &= \frac{\varphi(s) + \psi(t)}{\varphi(t) + \psi(t)},\ P_2^1(s, t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{\varphi(t) + \psi(t)},\\ P_1^2(s, t) &= \frac{\psi(t) - \psi(s)}{\varphi(t) + \psi(t)},\ P_2^2(s, t) = \frac{\varphi(t) + \psi(s)}{\varphi(t) + \psi(t)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Aceste formule ne arată că presupunînd că φ, ψ sînt funcţii pozitive în punctul s, formulele (18) definesc un sistem de probabilităţi pentru $t > s$ dacă aceste funcţii sînt nedescrescătoare. De asemenea dacă φ şi ψ sînt negative în punctul s, ele definesc un sistem de probabilităţi, dacă sînt funcţii necrescătoare.

---

[4]) Fréchet, *Op. cit.*, pag. 242.

Cazul $n = 3$. Să considerăm acum cazul $n = 3$. Putem atunci să scriem formulele (11) sub forma

$$\begin{gathered}\mu_1^1 = \frac{1}{3} + \varphi + u,\ \mu_2^1 = \frac{1}{3} - \varphi,\ \mu_3^1 = \frac{1}{3} - u \\ \mu_1^2 = \frac{1}{3} - \psi,\ \mu_2^2 = \frac{1}{3} + \psi + v,\ \mu_3^2 = \frac{1}{3} - v \\ \mu_1^3 = \frac{1}{3} - \theta,\ \mu_2^3 = \frac{1}{3} - w,\ \mu_3^3 = \frac{1}{3} + \theta + w\end{gathered} \tag{19}$$

iar formulele (12) devin

$$\begin{aligned} \varphi' &= \Gamma_3^1 (w - \varphi) - \Gamma_2^1 (v + \varphi + \psi), \\ u' &= \Gamma_2^1 (v - u) - \Gamma_3^1 (u + w + \theta), \\ \psi' &= \Gamma_3^2 (\theta - \psi) - \Gamma_1^2 (u + \varphi + \psi), \\ v' &= \Gamma_1^2 (u - v) - \Gamma_3^2 (u + v + \theta), \\ \theta' &= \Gamma_2^3 (\psi - \theta) - \Gamma_1^3 (u + \varphi + \theta), \\ w' &= \Gamma_1^3 (\varphi - w) - \Gamma_2^3 (v + w + \theta). \end{aligned} \tag{20}$$

Avem deci

TEOREMA 7. *Cel mai general sistem de vectori probabilistic pentru* $n = 3$ *se obține considerînd soluțiile sistemului* (20) *de șase ecuații diferențiale liniare, unde* Γ_2^1, Γ_3^1, Γ_1^2, Γ_3^2, Γ_1^3, Γ_2^3 *sînt funcții reale nepozitive oarecare în variabila* s *iar sistemul de vectori este dat de relațiile* (19).

Dacă Γ_2^1, Γ_3^1, Γ_1^2, Γ_3^2, Γ_1^3, Γ_2^3 sînt constante negative sau nule, obținem un proces staționar cu trei stări.

Să arătăm că integrarea sistemului (20) se reduce la integrarea a două sisteme de ecuații diferențiale liniare și omogene cu două necunoscute și la două cuadraturi.

În adevăr, să luăm în sistemul (20) ca nouă necunoscută pe

$$x = \varphi - w. \tag{21}$$

Derivînd această relație și ținînd seama de expresiile lui φ' și w' obținem

$$x' = -(\Gamma_2^1 + \Gamma_3^1 + \Gamma_1^3)x + (\Gamma_2^3 - \Gamma_2^1)(v + w + \psi).$$

Dacă luăm acum ca nouă necunoscută pe

$$y = v + w + \psi, \tag{21'}$$

rezultă

$$x' = -(\Gamma_2^1 + \Gamma_3^1 + \Gamma_1^3)\, x + (\Gamma_2^3 - \Gamma_2^1)\, y.$$

Dacă derivăm acum pe y și ținem seama de (20) găsim

$$y' = -(\Gamma_1^2 + \Gamma_3^2 + \Gamma_2^3)\, y + (\Gamma_1^3 - \Gamma_1^2)\, x.$$

Rezultă că x, y sînt soluții ale unui sistem liniar și omogen de ordinul întîi dat de ecuațiile:

$$\begin{aligned} x' &= (\Gamma_2^3 - \Gamma_2^1)\, y - (\Gamma_2^1 + \Gamma_3^1 + \Gamma_1^3)\, x, \\ y' &= (\Gamma_1^3 - \Gamma_1^2)\, x - (\Gamma_1^2 + \Gamma_3^2 + \Gamma_2^3)\, y. \end{aligned} \tag{22}$$

Dacă luăm ca noi variabile

$$\xi = v - u, \ \eta = u + w + \theta \tag{23}$$

și derivăm ținînd seama de (20), obținem pentru ξ' și η' sistemul

$$\begin{aligned} \xi' &= (\Gamma_3^1 - \Gamma_3^2)\, \eta - (\Gamma_2^1 + \Gamma_1^2 + \Gamma_3^2)\, \xi, \\ \eta' &= (\Gamma_2^1 - \Gamma_2^3)\, \xi - (\Gamma_2^1 + \Gamma_1^3 + \Gamma_2^3)\, \eta. \end{aligned} \tag{24}$$

Ecuațiile (21), (21′) și (23) ne arată că putem considera ca noi necunoscute x, y, ξ, η, u, w în loc de φ, v, ψ, θ, u, w, deoarece avem

$$\begin{aligned} \varphi &= x + w, \ v = \xi + u, \\ \psi &= y - \xi - u - w, \ \theta = \eta - u - w. \end{aligned} \tag{24'}$$

Pe de altă parte, formulele (20) ne dau pentru u', w':

$$\begin{aligned} u' &= \Gamma_2^1\, \xi - \Gamma_3^1\, \eta, \\ w' &= \Gamma_1^3\, x - \Gamma_2^3\, y. \end{aligned} \tag{25}$$

Rezultă deci că integrarea sistemului probabilistic (20) pentru $n = 3$ se reduce la integrarea sistemelor (22), (24) de două ecuații liniare și omogene și la două cvadraturi (25).

Să considerăm acum unele cazuri particulare. Dacă $\Gamma_2^1 = \Gamma_2^3$, atunci prima ecuație a sistemului (22) se integrează prin cvadraturi și avem

$$x = A\, \mathrm{e}^{-\int_0^s (\Gamma_2^1 + \Gamma_3^1 + \Gamma_1^3)\, ds}.$$

Din ultima ecuație (24) rezultă

$$\eta = B\, \mathrm{e}^{-\int_0^s (\Gamma_3^1 + \Gamma_1^2 + \Gamma_2^3)\, ds}$$

iar celelalte sînt ecuații liniare în y și ξ.

Dacă $\Gamma_2^1 = \Gamma_2^3$ și $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$, obținem pe lîngă x și η pe

$$\xi = C\, \mathrm{e}^{-\int_0^s (\Gamma_2^1 + \Gamma_1^2 + \Gamma_3^2)\, ds}.$$

Dacă $\Gamma_2^1 = \Gamma_2^3$, $\Gamma_3^1, = \Gamma_1^2 = \Gamma_1^3$, sistemul (20) se integrează printr-o singură cvadratură și avem

$$y = D\,\mathrm{e}^{-\int_0^s (\Gamma_1^2 + \Gamma_3^2 + \Gamma_2^3)\,ds}.$$

Dacă Γ_2^1, Γ_3^1, Γ_1^2, Γ_3^2, Γ_1^3, Γ_2^3 sînt constante, sistemul depinde de ecuația caracteristică care este aceeași pentru ambele sisteme (22) și (24):

$$\rho^2 + (\Gamma_2^1 + \Gamma_3^1 + \Gamma_1^2 + \Gamma_3^2 + \Gamma_1^3 + \Gamma_2^3)\,\rho + \Gamma_2^1\,\Gamma_3^2 + \Gamma_2^1\,\Gamma_2^3 +$$
$$+ \Gamma_3^1\,\Gamma_1^2 + \Gamma_3^1\,\Gamma_3^2 + \Gamma_3^1\,\Gamma_2^3 + \Gamma_1^3\,\Gamma_1^2 + \Gamma_1^3\,\Gamma_3^2 + \Gamma_1^2\,\Gamma_2^3 = 0$$

Să observăm acum că sistemul (22) re reduce la o ecuație a lui Riccati punînd $Y = \dfrac{y}{x}$. În adevăr, dacă derivăm și ținem seama de (21), (21′), deducem

$$Y' = (\Gamma_2^1 - \Gamma_2^3)\,Y^2 + (\Gamma_2^1 + \Gamma_3^1 + \Gamma_1^3 - \Gamma_1^2 - \Gamma_3^2 - \Gamma_2^3)\,Y + \Gamma_1^3 - \Gamma_1^2. \qquad (26)$$

De asemenea, sistemul (24) se reduce la o ecuație Riccati punînd $Z = \dfrac{\xi}{\eta}$, deoarece derivînd pe Z' și ținînd seama de (24), rezultă

$$Z' = (\Gamma_2^3 - \Gamma_2^1)\,Z^2 + (\Gamma_3^1 + \Gamma_1^3 + \Gamma_2^3 - \Gamma_2^1 - \Gamma_1^2 - \Gamma_2^3)\,Z + \Gamma_3^1 - \Gamma_1^3. \qquad (26')$$

Să observăm că dacă facem transformarea

$$Z = -\,Y - 1,$$

ecuația (26′) se transformă în (26), deci integrarea sistemului (20) depinde de integrarea unei singure ecuații Riccati.

Avem deci

TEOREMA 8. *Integrarea sistemului probabilistic* (*20*) *se reduce la integrarea unei singure ecuații Riccati* (*26*) *și la cvadraturi.*

În adevăr, să presupunem că cunoaștem pe Y, soluție a ecuației (26). În acest caz avem $y = Yx$, iar x este definit de prima ecuație (22) care se scrie

$$x' = x\,[(\Gamma_2^3 - \Gamma_2^1)\,Y - (\Gamma_2^1 + \Gamma_3^1 + \Gamma_1^3)]$$

deci x se obține printr-o cvadratură. În mod analog se obțin celelalte funcții.

Cazul particular $n = 3$. Vom trata acum cazul particular cînd $u = \varphi$, $v = \psi$, $w = \theta$, deci cazul în care determinantul $\Delta = |\mu_a^i|$ se scrie

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} + 2\,\varphi & \dfrac{1}{3} - \varphi & \dfrac{1}{3} - \varphi \\ \dfrac{1}{3} - \varphi & \dfrac{1}{3} + 2\,\psi & \dfrac{1}{3} - \psi \\ \dfrac{1}{3} - \theta & \dfrac{1}{3} - \theta & \dfrac{1}{3} + 2\,\theta \end{vmatrix} \qquad (27)$$

și vom arăta că în acest caz probabilitățile fundamentale se obțin explicit în funcție de φ, ψ, θ.

Avem în acest caz

$$\Delta = 3\,(\varphi\,\psi + \psi\,\theta + \theta\,\varphi)$$

Calculînd acum valorile lui λ_j^i, $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$, obținem

$$\lambda_1^1 = \frac{\psi + \theta + 3\,\psi\theta}{\Delta}, \quad \lambda_1^2 = \frac{3\,\psi\,\theta - \theta}{\Delta}, \quad \lambda_1^3 = \frac{3\,\psi\,\theta - \psi}{\Delta}$$

$$\lambda_2^1 = \frac{3\,\varphi\,\theta - \theta}{\Delta}, \quad \lambda_2^2 = \frac{\varphi + \theta + 3\,\varphi\,\theta}{\Delta}, \quad \lambda_2^3 = \frac{3\,\psi\,\theta - \varphi}{\Delta}$$

$$\lambda_3^1 = \frac{3\,\varphi\,\psi - \psi}{\Delta}, \quad \lambda_3^2 = \frac{3\,\varphi\,\psi - \varphi}{\Delta}, \quad \lambda_3^3 = \frac{\varphi + \psi + 3\,\varphi\psi}{\Delta}$$

astfel că aplicînd formula (4) obținem

$$\begin{aligned}
P_1^1(s,t) &= \frac{\theta(t)\,\psi(t) + \varphi(s)\,[\theta(t) + \psi(t)]}{\Delta},\\
P_2^1(s,t) &= \frac{\theta(t)\,[\varphi(t) - \varphi(s)]}{\Delta},\\
P_3^1(s,t) &= \frac{\psi(t)\,[\varphi(t) - \varphi(s)]}{\Delta},\\
P_1^2(s,t) &= \frac{\theta(t)\,[\psi(t) - \psi(s)]}{\Delta},\\
P_2^2(s,t) &= \frac{\varphi(t)\,\theta(t) + \psi(s)\,[\theta(t) + \varphi(t)]}{\Delta}, \qquad (28)\\
P_3^2(s,t) &= \frac{\varphi(t)\,[\psi(t) - \psi(s)]}{\Delta},\\
P_1^3(s,t) &= \frac{\psi(t)\,[\theta(t) - \theta(s)]}{\Delta},\\
P_2^3(s,t) &= \frac{\varphi(t)\,[\theta(t) - \theta(s)]}{\Delta},\\
P_3^3(s,t) &= \frac{\varphi(t)\,\psi(t) + \theta(s)\,[\varphi(t) + \psi(t)]}{\Delta},
\end{aligned}$$

unde $\Delta = \Delta(t)$, ceea ce ne arată că $P_j^i\ (i,\ j, = 1,\ 2,\ 3)$ sînt într-adevăr pozitive, dacă φ, ψ, θ sînt pozitive crescătoare sau negative descrescătoare.

Cazul general $n = 3$. Să observăm acum că sistemul (20) se poate rezolva în raport cu Γ_2^1, Γ_3^1, Γ_1^2, Γ_3^2, Γ_1^3, Γ_2^3 şi obţinem

$$\begin{aligned}
\Gamma_2^1 &= -\frac{1}{\Delta}[\varphi' u - \varphi u' + \varphi'(\theta + w) + u' w],\\
\Gamma_3^1 &= -\frac{1}{\Delta}[u' \varphi - u\varphi' + u'(\varphi + v) + \varphi' v],\\
\Gamma_1^2 &= -\frac{1}{\Delta}[\psi' v - \psi v' + \psi'(\theta + w) + v' \theta],\\
\Gamma_3^2 &= -\frac{1}{\Delta}[v' \psi - v \psi' + v'(\varphi + u) + \psi' u],\\
\Gamma_1^3 &= -\frac{1}{\Delta}[\theta' w - \theta w' + \theta'(\psi + v) + \psi w'],\\
\Gamma_2^3 &= -\frac{1}{\Delta}[w' \theta - w \theta' + w'(\varphi + u) + \varphi \theta'],
\end{aligned} \tag{29}$$

unde $\Delta = \varphi(\theta + v + w) + \psi(\theta + u + w) + \theta v + uv + uw$.

Rezultă că obţinem un sistem probabilistic pentru $n = 3$, dacă luăm un sistem de funcţii φ, ψ, θ, u, v, w pozitive, cu condiţia ca numărătorii să fie de asemenea pozitivi. Or, se observă că aceşti numărători au numai termeni pozitivi dacă φ, ψ, θ, u, v, w sînt funcţii crescătoare, în afară de termenii

$$\varphi' u - \varphi u', \quad \psi' v - \psi v', \quad \theta' w - \theta w' \tag{30}$$

care apar în Γ_2^1, Γ_1^2, Γ_1^3 respectiv cu semnul plus în timp ce în Γ_3^1, Γ_3^2, Γ_2^3 apar cu semnul minus.

Deci în cazul în care aceşti termeni sînt nuli, sistemul este probabilistic dacă funcţiile φ, ψ, θ, u, v, w sînt sau pozitive nedescrescătoare, sau negative, necrescătoare. A spune că termenii (30) sînt nuli, înseamnă că rapoartele $\frac{\varphi}{u}$, $\frac{\psi}{v}$, $\frac{\theta}{w}$ sînt constante. Putem deci lua

$$\begin{aligned}
\varphi &= \alpha\,\Phi, \quad u = \beta\,\Phi,\\
\psi &= \gamma\,\Psi, \quad v = \delta\,\Psi,\\
\theta &= \lambda\,\Theta, \quad w = \mu\,\Theta,
\end{aligned} \tag{31}$$

unde α, β, γ, δ, λ μ sînt constante pozitive iar Φ, Ψ, Θ sînt funcţii oarecare; în acest caz formulele (29) se scriu

$$\Gamma_2^1 = -\frac{(\alpha\lambda + \alpha\mu + \beta\mu)\,\Phi'\Theta}{\Delta},$$

$$\Gamma^1_3 = -\frac{(\beta\gamma + \beta\delta + \alpha\delta)\,\Phi'\Psi}{\Delta},$$

$$\Gamma^2_1 = -\frac{(\gamma\alpha + \gamma\mu + \delta\lambda)\,\Psi'\Theta}{\Delta},$$

$$\Gamma^2_3 = -\frac{(\delta\alpha + \delta\beta + \gamma\beta)\,\Psi'\,\Phi}{\Delta},$$

$$\Gamma^3_1 = -\frac{(\lambda\gamma + \lambda\delta + \gamma\delta)\,\Theta'\Psi}{\Delta},$$

$$\Gamma^3_2 = -\frac{(\alpha\mu + \beta\mu + \alpha\lambda)\,\Theta'\,\Phi}{\Delta},$$

unde $\Delta = (\alpha\lambda + \beta\mu + \alpha\mu)\,\Phi\Theta + (\alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta)\,\Phi\Psi + (\gamma\lambda + \lambda\mu + \delta\lambda)\,\Psi\Theta$.

Să presupunem acum în formulele (31) că funcțiile Φ, Ψ, Θ sînt egale. Atunci formulele (29) devin

$$\Gamma^1_2 = -\frac{\Phi'\,(\alpha\lambda + \alpha\mu + \beta\mu)}{\Phi(\alpha\lambda + \beta\mu + \alpha\mu + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\lambda + \lambda\mu + \delta\lambda)} = A\,\frac{\Phi'}{\Phi},$$

$$\Gamma^1_3 = -\frac{\Phi'\,(\beta\gamma + \beta\delta + \alpha\delta)}{\Phi(\alpha\lambda + \beta\mu + \alpha\mu + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\lambda + \lambda\mu + \delta\lambda)} = B\,\frac{\Phi'}{\Phi},$$

$$\Gamma^2_1 = -\frac{\Phi'\,(\gamma\lambda + \gamma\mu + \lambda\mu)}{\Phi\,(\alpha\lambda + \beta\mu + \alpha\mu + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\lambda + \lambda\mu + \delta\lambda)} = C\,\frac{\Phi'}{\Phi},$$

$$\Gamma^2_3 = -\frac{\Phi'\,(\alpha\delta + \beta\delta + \beta\gamma)}{\Phi\,(\alpha\lambda + \beta\mu + \alpha\mu + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\lambda + \lambda\mu + \delta\lambda)} = D\,\frac{\Phi'}{\Phi},$$

$$\Gamma^3_1 = -\frac{\Phi'\,(\gamma\lambda + \delta\lambda + \gamma\mu)}{\Phi\,(\alpha\lambda + \beta\mu + \alpha\mu + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\lambda + \lambda\mu + \delta\lambda)} = E\,\frac{\Phi'}{\Phi},$$

$$\Gamma^3_2 = -\frac{\Phi'\,(\alpha\mu + \beta\mu + \alpha\lambda)}{\Phi\,(\alpha\lambda + \beta\mu + \alpha\mu + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\lambda + \lambda\mu + \delta\lambda)} = F\,\frac{\Phi'}{\Phi}.$$

Deci se obține o soluție staționară dacă $\frac{\Phi'}{\Phi}$ este o constantă, deci dacă $\Phi = e^{ks}$, unde k este o constantă. Obținem astfel

TEOREMA 9. *Dacă în formulele* (*31*)

$$\Phi = \Psi = \Theta = e^{ks},$$

se obține o soluție probabilistică staționară dacă k este o constantă pozitivă și α, β, γ, δ, λ, μ sînt constante pozitive.

Cazul n oarecare. Să arătăm acum că formulele (28) se generalizează pentru n oarecare. Pentru aceasta să dăm mai întîi o nouă formă formulelor (28) împărțind și numărătorii și numitorii cu $\varphi(t)\ \psi(t)\ \theta(t)$.

Avem atunci

$$P_1^1(s,\,t)=\frac{\dfrac{1}{\varphi(t)}+\dfrac{\varphi(s)}{\varphi(t)}\left[\dfrac{1}{\theta(t)}+\dfrac{1}{\psi(t)}\right]}{S(t)},\quad S(t)=\frac{1}{\varphi(t)}+\frac{1}{\psi(t)}+\frac{1}{\theta(t)}$$

$$P_1^2(s,\,t)=\frac{\psi(t)-\psi(s)}{\varphi(t)\,\psi(t)\,S(t)}$$

. . . .

Rezultă că notînd $\varphi,\ \psi,\ \theta$ cu $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$, obținem sistemul de probabilități fundamentale luînd

$$\begin{aligned} P_j^i(s,t)&=\frac{\varphi_i(t)-\varphi_i(s)}{\varphi_i(t)\,\varphi_j(t)\,S(t)},\quad (i\neq j),\\ P_i^i(t,s)&=\frac{\varphi_i(s)}{\varphi_i(t)}+\frac{\varphi_i(t)-\varphi_i(s)}{\varphi_i^2(t)\,S(t)}\,; \end{aligned}\tag{32}$$

aceste formule se pot extinde pentru indici variind de la 1 la n în care caz seria S are expresia

$$S=\frac{1}{\varphi_1}+\frac{1}{\varphi_2}+\ldots+\frac{1}{\varphi_n}\cdot\tag{33}$$

Se poate de asemenea presupune că n tinde la infinit cu condiția ca S să fie convergentă.

Să arătăm acum că sistemul definit de determinantul care generalizează (27), și anume

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{n}+(n-1)\,\varphi_1 & \dfrac{1}{n}-\varphi_1 & \ldots\ldots & \dfrac{1}{n}-\varphi_1\\ \dfrac{1}{n}-\varphi_2 & \dfrac{1}{n}+(n-1)\,\varphi_2 & \ldots\ldots & \dfrac{1}{n}-\varphi_2\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ \dfrac{1}{n}-\varphi_n & \dfrac{1}{n}-\varphi_n & \ldots\ldots & \dfrac{1}{n}+(n-1)\,\varphi_n \end{vmatrix},\tag{34}$$

generează probabilitățile (27), $(i,\ j=1,\ldots,n)$, unde φ_i sînt funcții pozitive nedescrescătoare sau negative necrescătoare.

În adevăr, să observăm că în acest caz avem

$$m_a^i=\varphi_i,\ (i\neq a)$$

şi deci ecuaţiile (32) se scriu

$$\varphi_i' = \sum_{j\neq i\neq a} \Gamma_j^i \varphi_j - (n-1)\, \Gamma_a^i \varphi_a - \varphi_i \sum_{j\neq i} \Gamma_j^i$$

ecuaţii care se mai scriu încă sub forma

$$\varphi_i' = \sum_{j\neq i} \Gamma \ \varphi_j - n\, \Gamma_a^i \varphi_a - \varphi_i \sum_{j\neq i} \Gamma_j^i. \tag{35}$$

Fiind date deci două valori *a*, *b* diferite de *i*, rezultă, prin scădere, că trebuie să avem

$$\Gamma_a^i \varphi_a = \Gamma_b^i \varphi_b.$$

Avem deci formule de forma

$$\Gamma_a^i = \frac{k^i}{\varphi_a}$$

care introduse în ecuaţiile (35) ne dau

$$\varphi_i' = (n-1)\, k^i - \varphi_i k^i \sum_{j\neq i} \frac{1}{\varphi_j}\cdot$$

Această formulă se scrie încă sub forma

$$\varphi_i' = -\, \varphi_i k^i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\varphi_j}$$

ceea ce ne dă

$$k^i = -\,\frac{\varphi_i'}{\varphi_i S}$$

şi prin urmare avem formulele

$$\Gamma_a^i = -\,\frac{\varphi_i'}{\varphi_a \varphi_i S},\ (a \neq i), \tag{36}$$

ceea ce ne arată că în adevăr Γ_a^i sînt nepozitive dacă φ_i sînt funcţii pozitive nedescrescătoare şi nu funcţii negative necrescătoare, deci sistemul de vectori (μ) dat de formula (34) este în aceste condiţii un sistem probabilistic.

Pentru a găsi probabilităţile fundamentale să calculăm în primul rînd determinantul Δ dat de formula (34). Pentru aceasta să observăm că dacă adunăm la coloana întîi celelalte coloane şi scădem linia întîi din celelalte linii, obţinem pe Δ ca un determinant de ordinul $n-1$ de forma

$$\begin{vmatrix} (n-1)\,\varphi_2 + \varphi_1 & \varphi_2 - \varphi_1 & \dots & -\varphi_2 + \varphi_1 \\ -\varphi_3 + \varphi_1 & (n-1)\,\varphi_3 + \varphi_1 & \dots & -\varphi_3 + \varphi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n + \varphi_1 & -\varphi_n + \varphi_1 & \dots & (n-1)\,\varphi_n + \varphi_1 \end{vmatrix}.$$

Această formulă ne arată că determinantul Δ este un polinom omogen de gradul $(n-1)$ în $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ şi că coeficientul A al lui φ_1 este

$$A = \begin{vmatrix} (n-1)\,\varphi_2 & -\varphi_2 & \ldots & -\varphi_2 \\ -\varphi_3 & (n-1)\,\varphi_3 & \ldots & -\varphi_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\varphi_n & -\varphi_n & \ldots & (n-1)\,\varphi_n \end{vmatrix}.$$

Dacă în acest determinant adunăm celelalte coloane la coloana întîi iar apoi coloana întîi la celelalte, obţinem

$$A = n^{n-2}\,\varphi_2 \ldots \varphi_n.$$

Ţinînd seama că Δ este o funcţie simetrică de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, rezultă că avem formula

$$\Delta = n^{n-2}\,\varphi_1 \ldots \varphi_n\,S, \left(S = \frac{1}{\varphi_1} + \ldots + \frac{1}{\varphi_n} \right). \tag{37}$$

Deci, determinantul Δ este diferit de zero dacă una din funcţiile $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este nenulă.

Pentru calcularea probabilităţilor P^i_j am putea să calculăm mai întîi sistemul dual (λ^a_i) şi apoi să considerăm formulele (4).

Să utilizăm formulele (18). Ele se scriu în acest caz sub forma

$$\sum_{j \neq i} P^i_j\,\varphi_i(t) - \sum_{j \neq i \neq a} P^i_j\,\varphi_j(t) + (n-1)\,P^i_a\,\varphi_a(t) = \varphi_i(t) - \varphi_i(s), \; (a \neq i)$$

formule care se pot încă scrie sub forma

$$\sum_{j \neq i} P^i_j\,[\varphi_i(t) - \varphi_j(t)] + n\,P^i_a\,\varphi_a(t) = \varphi_i(t) - \varphi_i(s), \; (a \neq i). \tag{38}$$

Aceste formule ne arată că dacă a, b sînt doi indici diferiţi de i, ceea ce poate avea loc dacă $n \geqslant 3$, rezultă că avem

$$P^i_a\,\varphi_a = P^i_b\,\varphi_b, \; (a, \; b \neq i).$$

Putem deci lua

$$P^i_a = \frac{q_i}{\varphi_a}, \; (i \neq a). \tag{39}$$

Ţinînd seama de aceste formule în ecuaţiile (38), obţinem

$$q_i\,\varphi_i(t) \left[S(t) - \frac{1}{\varphi(t)} \right] - (n-1)\,q_i + n\,q_i = \varphi_i(t) - \varphi_i(s)$$

unde $S(t)$ este dat de formula (33). Obţinem

$$q_i = \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(s)}{S(t)\,\varphi_i(t)},$$

prin urmare formulele (39) ne dau

$$P_j^i(s, t) = \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(s)}{\varphi_i(t)\varphi_j(t) S(t)}, \ (i \neq j). \tag{40}$$

Rezultă deci că

$$P_i^i(s, t) = 1 - \sum_{j \neq i} P_j^i(s, t) = \frac{\varphi_i(s)}{\varphi_i(t)} + \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(s)}{\varphi_i(t)\ S(t)}. \tag{40'}$$

Avem prin urmare

TEOREMA 10. *Dacă vectorii* (μ) *sînt definiți de formulele* (*34*), *probabilitățile fundamentale sînt definite de formulele* (*40*), (*40'*).

Avem deci exemple, pentru orice valoare a lui n, de probabilități fundamentale ce depind de n funcții arbitrare $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Este de altfel ușor de observat că obținem un sistem mai general de probabilități luînd

$$\begin{gathered} P_j^i(s, t) = \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(s)}{\varphi_i(t)\ \varphi_j(t)}\ \frac{c_j}{\Sigma(t)}, \ (i \neq j), \ \left(\Sigma(t) = \frac{c_1}{\varphi_1} + \ldots + \frac{c_n}{\varphi_n}\right) \\ P_i^i(s, t) = 1 - \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(s)}{\varphi_i(t)} \left[1 - \frac{c_i}{\varphi_i(t)\ \Sigma(t)}\right], \end{gathered} \tag{41}$$

unde c_j sînt constante pozitive sau nule iar $\varphi_i (i = 1, \ldots, n)$ sînt funcții pozitive nedescrescătoare, sau funcții negative necrescătoare.

Să revenim la cazul formulelor (19) și să observăm că acestea se pot generaliza prin formulele

$$\begin{gathered} P_i^i(s, t) = \frac{\varphi(s) - \varphi_i(t) - \varphi_i(s)}{\varphi(t)}, \\ P_j^i(s, t) = \frac{\varphi_j(t) - \varphi_j(s)}{\varphi(t)}, \ (i \neq j), \end{gathered} \tag{42}$$

unde $\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_n$ iar φ_i sînt funcții pozitive nedescrescătoare sau funcții negative necrescătoare. În adevăr, formulele (42) satisfac evident condițiile (1) și (3). De asemenea avem pentru $i \neq j$

$$P_j^i(s, t) = \sum_{k \neq i \neq j} P_k^i(s, u)\ P_j^k(u, t) + P_i^i(s, u)\ P_j^i(u, t) + P_j^i(s, u)\ P_i^j(u, t),$$

formulă care se scrie, ținînd seama de (20), sub forma

$$P_j^i(s, t) = \left[\sum_{k \neq i \neq j} (\varphi_k(u) - \varphi_k(s)) + \varphi(s) + \varphi_i(u) - \varphi_i(s)\right] \frac{\varphi_j(t) - \varphi_j(u)}{\varphi(u)\ \varphi(t)} +$$

$$+ \frac{[\varphi_j(u) - \varphi_j(s)]\ [\varphi(u) + \varphi_j(t) - \varphi_j(u)]}{\varphi(u)\ \varphi(t)},$$

care ne dă

$$P_j^i(s, t) = \frac{\varphi_j(t) - \varphi_j(s)}{\varphi(t)},$$

deci formulele (2) sînt verificate pentru $i \neq j$.

De asemenea se poate arăta că ele sînt verificate și pentru $i = j$.

Formulele (42) definesc deci un sistem de probabilități fundamentale dacă $\varphi_i(s)$ sînt pozitive nedescrescătoare sau negative necrescătoare.

Să arătăm de asemenea că se obține un sistem probabilistic staționar dacă considerăm funcțiile m_a^i proporționale cu constante înmulțite cu aceeași funcție e^{ks}, adică

$$m_a^i = c_a^i e^{ks},$$

unde c_a^i sînt constante. În adevăr, în acest caz formulele (12) se scriu

$$k c_a^i = \sum_{j \neq i \neq a} \Gamma_j^i c_a^j - \Gamma_a^i \sum_{b \neq a} c_b^a - c_a^i \sum_{j \neq i} \Gamma_j^i$$

și prin urmare Γ_j^i sînt constante, ele trebuind să fie constante nepozitive, caz care a fost considerat pentru $n = 3$.

CAPITOLUL II

PROCESE MARKOV MULTIPLE

§ 1. CONEXIUNI PROBABILISTICE

Să considerăm acum un proces Markov de multiplicitate p cu un număr m de stări depinzînd de un număr oarecare de parametri [8]; să arătăm că unui asemenea proces i se poate asocia un transport paralel [9].

Pentru aceasta să considerăm o varietate $V_p(s^1, \ldots, s^p)$ de dimensiune p și fie P_j^i funcții de două serii de variabile $s^1, \ldots, s^p$; $t^1, \ldots, t^p$ deci funcții de două puncte $P(s)$ și $Q(t)$ ale varietății V_p. Indicii i și j variază de la 1 la n; în cazul probabilistic, $n = m^p$.

Să presupunem de asemenea că $P_j^i(s, t)$ au proprietățile probabilităților fundamentale, deci ele satisfac la ecuațiile funcționale date de O. Onicescu :

$$P_j^i(s, s) = \delta_j^i, \sum_{j=1}^{n} P_j^i(s, t) = 1$$

$$P_j^i(s, t) = P_k^i(s, u) P_j^k(u, t), \quad 0 \leqslant s \leqslant u \leqslant t, \; k = 1, \ldots n, \tag{1}$$

în care însemnăm prin u $(u^1, \ldots, u^p)$ un alt sistem de variabile $s^1, \ldots, s^p$, deci coordonatele unui alt punct din V_p.

Să presupunem că pentru

$$s^1 \leqslant s^2 \leqslant \ldots \leqslant s^p;\ t^1 \leqslant t^2 \leqslant \ldots \leqslant t^p,\ s^i \leqslant t^i$$

avem

$$P_j^i(s,\ t) \geqslant 0. \tag{1'}$$

După rezultatul lui Fréchet [2] și Aczel [10], ecuațiile funcționale (1) au ca și în cazul unei singure variabile soluțiile

$$\begin{gathered} P_j^i(s,\ t) = \mu_a^i(s)\ \lambda_j^a(t),\ \mu_a^i(s)\ \lambda_j^a(s) = \delta_j^i \\ \sum_{a=1}^{n} \mu_a^i(s) = 1, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^a(s) = 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Ultimele două ecuații ne arată că determinantul $\Delta = |\ \mu_a^i(s)\ |$ al celor n funcții $\mu_a^i(s)$ este diferit de zero, căci notînd cu Δ' determinantul $|\lambda_j^a(s)|$ avem $\Delta\ \Delta' = 1$. La fel rezultă că $\lambda_j^a(s)$ sînt reciprocii elementelor determinantului $|\mu_a^i|$, deci avem formulele

$$\mu_b^i(s)\ \lambda_i^a(s) = \delta_b^a.$$

Deci dacă interpretăm pe μ_a^i ca parametrii unui sistem de congruențe independente în spațiu cu n dimensiuni, atunci λ_j^a sînt momentele acestor congruențe. Ca și în cazul unei singure variabile avem deci

TEOREMA 11. *Fiind dat un sistem de n congruențe independente într-un spațiu S_n cu n dimensiuni, unde μ_a^i sînt parametri iar λ_j^a momente presupuse funcții de variabilele $s^1, \ldots, s^p$ satisfăcînd la ultimele ecuații (2), avem o soluție $P_j^i(s,\ t)$ a ecuațiilor (1) dată de primele formule (2).*

De asemenea trebuie să remarcăm că se poate defini un sistem de probabilități prin formulele

$$P_b^a(s,\ t) = \lambda_i^a(s)\ \mu_b^i(t).$$

Se vede deci că a se da probabilitatea fundamentală $P_j^i(s,\ t)$ revine la a se da pe varietatea V_p un determinant $|\lambda_j^a| \neq 0$, satisfăcînd condițiile

$$\lambda_j^a(t) = P_j^i(s,\ t)\ \lambda_i^a(s),\ \sum_{j=i}^{n} \lambda_j^a = 1,$$

ceea ce definește pe λ_j^a cu ajutorul valorilor lor într-un punct.

Notînd cu $x^1, \ldots, x^n$ variabilele în spațiu S_n, aceasta revine la a se da, în S_n, n forme Pfaff $\mathrm{d}u^a$ 5)

$$\mathrm{d}u^a = \lambda_j^a\ \mathrm{d}x^j,\ \sum_{j=i}^{n} \lambda_j^a = 1,$$

---

5) G. Vrănceanu, *Op. cit.*, pag. 151.

unde λ_j^a sînt funcții de variabilele $s^1, \ldots, s^p$, ultima condiție exprimînd faptul că dacă toți $\mathrm{d}x^j$ sînt egali cu $\mathrm{d}t$, acesta este chiar $\mathrm{d}u^a$.

Să presupunem acum că se dau formule de transport prin paralelism ale vectorilor μ_a^i și λ_j^a pe varietatea V_p. Aceasta înseamnă că se dau formule de forma

$$\mathrm{d}\mu_a^i = \Gamma_{k\alpha}^i \, \mu_a^k \, \mathrm{d}s^\alpha, \quad \mathrm{d}\lambda_j^a = - \, \Gamma_{j\alpha}^k \, \lambda_k^a \, \mathrm{d}s^\alpha, \tag{2'}$$

unde $\Gamma_{k\alpha}^i$ sînt funcții de variabilele $s^1, \ldots, s^p$.

Dacă transportul paralel este integrabil, deci dacă avem

$$\Gamma_{j\alpha\beta}^i = \frac{\partial \Gamma_{j\alpha}^i}{\partial s^\beta} - \frac{\partial \Gamma_{j\beta}^i}{\partial s^\alpha} + \Gamma_{k\alpha}^i \, \Gamma_{j\beta}^k - \Gamma_{k\beta}^i \, \Gamma_{j\alpha}^k = 0, \tag{3}$$

ecuațiile cu derivate parțiale

$$\frac{\partial \mu_a^i}{\partial s^\alpha} = \Gamma_{k\alpha}^i \, \mu_a^k, \quad \frac{\partial \lambda_j^a}{\partial s^\alpha} = - \, \Gamma_{j\alpha}^k \, \lambda_k^a, \tag{3'}$$

constituie sisteme complet integrabile, deci ele definesc pe μ_a^i, λ_j^a pentru orice punct $P_j^i(s^1, \ldots, s^p)$ al lui V_p dacă μ_a^i, λ_j^a sînt cunoscute într-un punct.

Deci în cazul cînd transportul paralel este integrabil, $\Gamma_{k\alpha}^i$ sînt definiți prin formulele

$$\Gamma_{k\alpha}^i = \lambda_k^a \frac{\partial \mu_a^i}{\partial s^\alpha} \cdot$$

Ultimele ecuații (2) ne arată că trebuie să avem

$$\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{k\alpha}^i = 0. \tag{3''}$$

Ținînd seama de (3′), obținem formulele

$$\mathrm{d}P_j^i(s, t) = \Gamma_{k\alpha}^i(s) \, \mu_a^k(s) \, \lambda_j^a(t) \, \mathrm{d}s^\alpha - \Gamma_{j\alpha}^k(t) \, \mu_a^i(s) \, \lambda_k^a(t) \, \mathrm{d}t^\alpha$$

sau

$$\mathrm{d}P_j^i(s, t) = \Gamma_{k\alpha}^i(s) \, P_j^k(s, t) \, \mathrm{d}s^\alpha - \Gamma_{j\alpha}^k(t) \, P_k^i(s, t) \, \mathrm{d}t^\alpha, \tag{4}$$

care constituie formulele de transport prin paralelism ale probabilităților fundamentale $P_j^i(s, t)$.

Dacă transportul paralel este integrabil, ecuațiile cu derivate parțiale

$$\frac{\partial P_j^i(s,t)}{\partial s^\alpha} = \Gamma_{k\alpha}^i(s) \, P_j^k(s, t), \quad \frac{\partial P_j^i(s,t)}{\partial t^\alpha} = - \, \Gamma_{j\alpha}^k(t) \, P_k^i(s, t) \tag{4'}$$

constituie un sistem complet integrabil. Aceasta este sistemul dat de R. Theodorescu [4].

Se vede deci că pentru aceste probabilități, indicele i este un indice de contravarianță cînd se derivează în raport cu variabilele s^α în timp ce j este un indice de covarianță cînd se derivează în raport cu variabilele t^α.

Dacă transportul paralel nu este integrabil, ecuațiile (2′) definesc pe μ^i_a, λ^a_j în lungul curbei $C\,[s^i = \varphi^i(s)]$ și atunci ecuațiile (4) definesc pe $P^i_j\,(s,\,t)$ ca funcții de două puncte s, t ale acestei curbe.

Punînd $t^\alpha = s^\alpha + u^\alpha$, rezultă din (1) că u^α sînt variabile pozitive și deci avem formulele

$$P^i_k\,(s,\,t) = P^i_k\,(s,\,s) + \left(\frac{\partial P^i_k\,(s,\,t)}{\partial u^\alpha}\right)_{u^\alpha=0} u^\alpha + \dots$$

sau

$$P^i_k = \delta^i_k + \left(\frac{\partial P^i_k}{\partial u^\alpha}\right)_{u^\alpha=0} u^\alpha + \dots$$

termenii nescriși fiind de ordinul doi în u^α.

Ținînd seama de (1′) rezultă că trebuie să avem

$$\left(\frac{\partial P^i_k}{\partial u^\alpha}\right)_{u^\alpha=0} = \left(\frac{\partial P^i_k}{\partial t^\alpha}\right)_{t^\alpha=s^\alpha} \geqslant 0, \quad (i \neq k).$$

Deoarece cea de-a doua ecuație (4′) ne dă

$$\left(\frac{\partial P^i_k}{\partial t^\alpha}\right)_{t^\alpha=s^\alpha} = -\,\Gamma^i_{k\alpha}\,(s),$$

rezultă condițiile

$$\Gamma^i_{k\alpha}\,(s) \leqslant 0, \quad (i \neq k). \tag{4''}$$

Pe de altă parte, ținînd seama de (3″) care se pot scrie

$$\Gamma^i_{i\alpha} = -\sum_{k\neq i} \Gamma^i_{k\alpha}, \tag{4'''}$$

deducem

$$\Gamma^i_{i\alpha} \geqslant 0.$$

Avem deci

TEOREMA 12. *Transportul paralel* (*4*) *asociat unui proces Markov multiplu satisface condițiile* (*3*), (*3″*), (*4″*).

Ținînd seama că avem formulele

$$\frac{\partial \ln \Delta}{\partial s^\alpha} = \frac{\partial \mu^i_a}{\partial s^\alpha}\,\lambda^a_i,$$

unde $\Delta = |\,\mu^i_a\,|$, rezultă, avînd în vedere (3′),

$$\frac{\partial \ln \Delta}{\partial s^\alpha} = \Gamma^i_{k\alpha}\,\mu^k_a\,\lambda^a_i = \Gamma^i_{i\alpha},$$

deci conexiunea contractată $\Gamma^i_{i\alpha}$ este nulă dacă determinantul Δ este constant. Dar deoarece $\Gamma^i_{i\alpha}$ sînt pentru fiecare i cantități pozitive, rezultă că $\Gamma^i_{i\alpha}$ sînt toate nule și în consecință ținînd seama de (3″) și (4″) este chiar $\Gamma^i_{k\alpha}$ $(i \neq k)$, deci μ^i_a și λ^a_j sînt constante iar $P^i_j = \delta^i_j$. Deoarece $\Gamma^i_{i\alpha}$

pentru orice i sînt cantități nenegative, acest caz poate avea loc numai dacă $\Gamma^i_{i\alpha}$ sînt toate nule, deci $\Gamma^i_{j\alpha}$ $(i \neq j)$ sînt de asemenea nule și conexiunea este nulă.

Să observăm acum că fiind date momentele λ^a_j ale unui sistem de congruențe în S_n, se pot obține momentele și parametrii unui alt sistem de congruențe prin formulele

$$\bar{\lambda}^a_j = c^a_b\, \lambda^b_j, \;\; \mu^i_a = c^b_a\, \bar{\mu}^i_b, \tag{5}$$

unde determinantul $| c^i_b |$ este diferit de zero și c^a_b sînt ele însele funcții de variabilele $s^1, \ldots, s^p$ dar pentru a păstra formulele (2) trebuie ca c^a_b să fie constante care satisfac la condițiile

$$\sum_{b=1}^{n} c^a_b = 1. \tag{5'}$$

Convenim acum să considerăm dx^j și du^a ca variabilele X^j, U^a a două spații centroafine X_n, U_n. Formulele (2′)

$$U^a = \lambda^a_j\, X^j,$$

definesc o transformare între aceste două spații, coordonatele spațiului U_n fiind definite abstracție făcînd de o transformare de forma

$$\overline{U}^a = c^a_b\, U^b, \tag{5''}$$

unde c^a_b sînt constante satisfăcînd la formulele (5′).

În ceea ce privește variabilele X^j din X_n putem presupune că în fiecare punct al lui V_p admit o transformare de forma

$$X'^i = b^i_j\,(s)\, X^j. \tag{5'''}$$

Prin această transformare avem formulele de forma

$$\lambda'^a_k\, b^k_j = \lambda^a_j, \;\; \mu^i_a = b^i_j\, \mu^j_a$$

iar ultimele formule (2) sînt păstrate dacă avem

$$\sum_{j=1}^{n} b^i_j = 1. \tag{5^{\mathrm{IV}}}$$

Rezultă că conexiunea se schimbă după formulele

$$\frac{\partial b^i_j}{\partial s^\alpha} + b^i_k\, \Gamma^k_{j\alpha} = \Gamma'^i_{k\alpha}\, b^k_j.$$

În ceea ce privește probabilitățile fundamentale, ele se transformă după formulele

$$P'^i_k\, b^k_j\,(t) = P^k_j\, b^i_k\,(s),$$

iar P'^i_k satisfac de asemenea formulele (1), deci P'^i_k sînt de asemenea probabilități dacă (1′) sînt satisfăcute.

Dacă se consideră ca transformări (5′) transformarea

$$X'^i = \lambda^a_j(s)\,X^j,$$

deci pentru care $X'^i = U^i$, probabilitățile P'^i_k sînt egale cu δ^i_k deoarece avem formulele

$$P'^a_b = P^k_j\,\lambda^a_k(s)\,\mu^j_b(t) = \delta^a_b.$$

Rezultă

TEOREMA 13. *Componentele pe congruențele* (λ) *ale probabilităților fundamentale* P^i_j *sînt egale cu* δ^i_j.

Fiind dat un sistem de probabilități fundamentale P^i_j există un sistem de congruențe (λ) pe care componentele lui P^i_j sînt egale cu δ^i_j, adică sînt congruențele care intervin în formulele (2) ale lui Fréchet. Rezultă de asemenea că congruențele lui Fréchet sînt definite abstracție făcînd de o transformare (5), (5′). Putem spune că orice sistem P'^l_k de probabilități fundamentale de multiplicitate p se obține dintr-un sistem dat P^i_j cu ajutorul unei transformări (5‴), (5^{IV}).

Numind spațiul U_n cu grup (5′), (5″) spațiu afin-probabilistic, spațiul X_n cu grup (5″), (5^{IV}) este de asemenea în fiecare punct al lui V_p un spațiu afin-probabilistic și avem

TEOREMA 14. *Probabilitățile* P^i_j (s, t) *de multiplicitate* p *determină o familie cu* p *parametri de transformări punctuale între două spații afine probabilistice.*

§ 2. GRUPURI AXIALE

Să observăm acum că grupurile probabilistice (5′), (5″) sau (5‴) (5^{IV}) au proprietatea de a lăsa invariantă bisectoarea axelor de coordonate care se obține presupunînd că toate coordonatele sînt egale.

Să considerăm grupul (5‴) și (5^{IV}) și să presupunem că luăm ca noi variabile

$$y^n = X^n,\ y^k = X^k - X^n,\ (k = 1, \ldots, n-1).$$

În aceste noi variabile, bisectoarea devine axa y^n iar grupul (5‴) și (5^{IV}) devine

$$y'^k = a^k_l\,y^l,\ y'^n = y^n + a_k\,y^k,\ (a_k = b^n_k,\ a^k_l = b^k_l - b^n_l),$$

unde k, l variază de la 1 la $n-1$ și acest grup păstrează evident axa y^n.

Punînd

$$z^k = \frac{y^k}{y^n},\ (k = 1, \ldots, n-1),$$

acest grup devine grupul proiectiv cu $n-1$ variabile

$$z'^k = \frac{a^k_l\,z^l}{1 + a_k\,z^k},$$

grup care conservă originea coordonatelor $z^1 = \ldots = z^{n-1} = 0$.

Se vede că un grup probabilistic în n variabile este echivalent cu un grup proiectiv în $n-1$ variabile şi că conservă originea coordonatelor.

Să notăm acum că Q^i_j componentele într-un sistem de variabile $y^1 \ldots, y^n$ a tensorului P^i_j a probabilităților fundamentale.

Avem formulele

$$Q^k_l = P^k_l - P^n_l,\ Q^n_l = P^n_l,\ Q^n_n = 1,\ Q^k_n = 0.$$

La fel dacă notăm prin Π^i_a, σ^a_j componentele în variabilele y^i ale vectorilor μ^i_a, λ^a_j, găsim că ultimele condiții (2) devin

$$\sum_{a=1}^{n} \Pi^n_a = 1, \sum_{a=1}^{n} \Pi^k_a = 0,\ \sigma^a_n = 1.$$

Deoarece avem evident

$$Q^n_l = \Pi^n_a (s)\, \sigma^a_l (t),\ Q^k_l = \Pi^k_a (s)\, \sigma^a_l (t),\ (k,\ l < n),$$

rezultă formulele

$$P^n_l (s,t) = \Pi^n_a (s)\, \sigma^a_l (t),\ P^k_l (s,t) = [\Pi^k_a (s) + \Pi^n_a (s)]\, \sigma^a_l (t) \qquad (6)$$

şi în consecință avem conform celei de-a doua formule (1)

$$P^n_n (s,t) = 1 - \Pi^n_a (s) \sum_{l=1}^{n} \sigma^a_l (t),\ P^n_k (s,t) = 1 - [\Pi^k_a (s) + \Pi^n_a (s)] \sum_{l=1}^{n} \sigma^a_l (t). \qquad (6')$$

Avem deci

TEOREMA 15. *Fiind dat un sistem de vectori covarianți independenți tip Fréchet* σ^a_j *cu* $\sigma^a_n = 1$ *în fiecare punct al lui* V_p, *avem un sistem de probabilități fundamentale* P^i_j *definite prin formulele* (6), (6′), *unde* Π^i_a *sînt reciprocii determinantului* $|\sigma^a_j|$.

Trebuie să observăm de asemenea că notînd cu $\gamma^i_{j\alpha}$ componentele conexiunii în sistemul de variabile $y^1, \ldots, y^n$, avem formulele

$$\begin{gathered} \gamma^k_{n\alpha} = \gamma^n_{n\alpha} = 0,\ \gamma^n_{l\alpha} = \Gamma^n_{l\alpha} \\ \gamma^k_{l\alpha} = \Gamma^k_{l\alpha} - \Gamma^n_{l\alpha}, \end{gathered} \qquad (6'')$$

astfel că formulele (4″) ne arată că trebuie să avem

$$\gamma^n_{l\alpha} \leqslant 0, \quad \gamma^k_{l\alpha} + \gamma^n_{l\alpha} \leqslant 0, \quad (k \neq l). \qquad (6''')$$

Se vede deci că ecuațiile (3) în conexiunea γ sînt identic verificate dacă $j = n$, şi avem un sistem de ecuații cu derivate parțiale în necunoscutele $\gamma^n_{l\alpha}, \gamma^k_{l\alpha}$ care trebuie să satisfacă la inegalitățile (6‴).

Exemple. Ținînd seama de formulele (4‴), rezultă că ecuațiile (3) pentru $i = j$ sînt o consecință a ecuațiilor $\Gamma^i_{j\alpha\beta} = 0, (i \neq j)$, căci avem

$$\Gamma^i_{i\alpha\beta} = - \sum_{j \neq i} \Gamma^i_{j\alpha\beta}.$$

Pe de altă parte, ecuațiile $\Gamma^i_{j\alpha\beta} = 0$, $(i \neq j)$,pot să se scrie sub forma

$$\frac{\partial \Gamma^i_{j\alpha}}{\partial s^\beta} - \frac{\partial \Gamma^i_{j\beta}}{\partial s^\alpha} + M^i_{j\alpha\beta} = 0,$$

unde $M^i_{j\alpha\beta}$ sînt forme pătratice în $\Gamma^k_{l\lambda}$, $(k \neq l)$. Se vede deci că la o soluție constantă negativă a lui $\Gamma^k_{l\lambda}$, (k $\neq l$), deci la un proces staționar, corespunde o soluție pozitivă $-\Gamma^k_{l\lambda}$ a ecuațiilor (3), deci un sistem de probabilități fundamentale în care variabilele t sînt mai mici decît variabilele s.

Chiar la o soluție negativă $\Gamma^k_{l\lambda}$, (k $\neq l$), în care $\Gamma^k_{l\lambda}$ sînt funcții pozitive de variabilele s, avem o soluție pozitivă $-\Gamma^k_{l\lambda}$ care corespunde la un proces Markov în variabilele s, t schimbate de semn.

Să considerăm acum o soluție particulară a ecuațiilor (3), (4''), (4'''), adică acela în care toate componentele $\Gamma^i_{j\alpha}$, $(i \neq j)$, sînt egale pentru orice α cu derivata unei funcții oarecare $-\frac{f}{n}$ deci avem

$$\Gamma^i_{j\alpha} = -\frac{1}{n} f_\alpha, \quad \Gamma^i_{i\alpha} = \frac{n-1}{n} f_\alpha, \quad (i \neq j), \tag{7}$$

unde f este o funcție pozitivă de variabilele $x^1, \ldots, x^n$.

În acest caz ecuațiile transportului paralel al vectorilor se scriu

$$\frac{\partial \mu^i_a}{\partial s^\alpha} = -\frac{f_\alpha}{n} \sum_{j \neq i} \mu^j_a + \frac{n-1}{n} f_\alpha \, \mu^i_a . \tag{7'}$$

Punînd $\sum\limits_{j=1}^{n} \mu^j_a = \mu_a$ putem scrie aceste ecuații sub forma

$$\frac{\partial \mu^i_a}{\partial s^\alpha} = -\frac{f_\alpha}{n} \mu_a + f_\alpha \mu^i_a .$$

Făcînd suma în raport cu i, rezultă că μ_a sînt constante, deci avem ca soluții pentru μ^i_a;

$$\mu^i_a = \frac{\mu_a}{n} + c^i_a \, e^f, \tag{8}$$

unde c^i_a sînt constante. Ținînd seama de $\sum\limits_{a=1}^{n} \mu^i_a = 1$, constantele $\mu^a_j c^i_a$ trebuie să satisfacă condițiile

$$\sum_{a=1}^{n} \mu_a = n, \quad \sum_{a=1}^{n} c^i_a = 0 .$$

La fel ecuațiile de transport paralel a lui λ_i^a se scriu ținînd seama de $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^a = 1$:

$$\frac{\partial \lambda_j^a}{\partial x^\alpha} = \frac{f_\alpha}{n} - f_\alpha \lambda_j^a, \qquad (\lambda^a = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^a = 1)$$

astfel că se obține

$$\lambda_j^a = \frac{1}{n} + k_i^a \, e^{-f},$$

unde k_i^a sînt constante satisfăcînd la condițiile

$$\sum_{j=1}^{n} k_j^a = 0.$$

Înmulțind formulele (8) și (8″) și sumînd în raport cu indicele *a* se obține

$$\mu_a^i \, \lambda_j^a = \frac{\mu_a}{n} + \frac{\lambda^a c_a^i}{n} e^{f(s)} + \frac{\mu_a k_j^a}{n} e^{--f(s)} + c_a^i \, k_j^a \cdot$$

Deoarece aceste cantități trebuie să fie egale cu δ_j^i, rezultă condițiile

$$\frac{\mu_a}{n} + c_a^i \, k_j^a = \delta_j^i, \quad \mu_a \, k_j^a = 0, \qquad \lambda^a c_a^i = 0. \tag{9}$$

Deci constantele μ_a, c_a^i, k_j^a trebuie să satisfacă la condițiile (8′), (8″), (9).

Ținînd seama de aceste condiții, probabilitățile fundamentale se scriu

$$P_j^i(s,t) = \frac{1}{n} + \left(\delta_j^i - \frac{1}{n} \right) e^{f(s) - f(t)}, \tag{9′}$$

unde f este o funcție crescătoare de variabila s.

Dacă f este o funcție liniară, procesul este staționar iar probabilitățile fundamentale se scriu

$$P_j^i(s,t) = \frac{1}{n} + \left(\delta_j^i - \frac{1}{n} \right) e^{k_\alpha (s^\alpha - t^\alpha)}, \tag{9″}$$

unde k^α sînt constante pozitive.

Avem deci

TEOREMA 10. *Formulele* (9″) *definesc pentru* $n = m^p$ *un proces Markov cu* m *stări de multiplicitate* p *dacă* f *este o funcție crescătoare de variabilele* $s^1, \ldots, s^p$ *și procesul este staționar dacă* f *este o funcție liniară cu coeficienți pozitivi.*

Formulele (9″) ne dau deci un exemplu de proces Markov depinzînd de o funcție arbitrară de p variabile.

În general, dacă avem un sistem $\mu^i_a\,(s^1, \ldots, s^p)$, unde indicii i variază de la 1 la infinit și în care seria

$$\mu^i_1 + \ldots + \mu^i_n + \ldots$$

este convergentă și are ca sumă unu, se poate considera sistemul de cantități λ^a_i asociate și definite de formulele

$$\sum_{a=1}^{\infty} \mu^i_a \lambda^a_j = \delta^i_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^a_j = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^a_i \mu^i_b = \delta^a_b, \quad \sum_{b=1}^{\infty} \mu^i_b = 1$$

și atunci avem ca probabilități fundamentale ale unui proces Markov cu o infinitate numărabilă de stări

$$P^i_j\,(s, t) = \sum_{a=1}^{\infty} \mu^i_a\,(s)\; \lambda^a_j\,(t),$$

numai dacă această serie este convergentă și $P^i_j \geqslant 0$ pentru $t > s$.

Primită la redacție la 30 iunie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. G. Vrănceanu, G. G. Vrănceanu, *Probabilités et transport parallèle*. C.R., t. **255**, 40—41 (1962).
2. M. Fréchet, *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités* **II**, 201—248 (1938).
3. O. Onicescu, *Calculul probabilităților*. Ed. tehnică, București, 1956.
4. R. Theodorescu, *Asupra relațiilor caracteristice ale lanțurilor Markov continue de multiplicitate* p. Bul. științ. Acad. R.P.R., secțiunea de științe mat. și fiz. 7, 763—775 (1955).
5. J. L. Doob, *Stochastic Processes*. New York, John Wiley, 1958.
6. A. Kolomogorov, *Über die analytischen Methoden in der Wahrshein lichkeitsrechnung*. Math. Annalen, **104**, 415—458 (1931).
7. J. Th. Runnenburg, *On Elfeving's Problem of Imbedding a time Discrete Markov Chain in a Time Continuous one for Finitely many States*. Indagationes Mathematicae, Amsterdam **XXIV**, 5, (1962).
8. G. Ciucu și R. Theodorescu, *Procese cu legături complete*. Apendice, p. 203—204. Ed. Academiei, R.P.R., București, 1961.
9. G. Vrănceanu, *Geometrie analitică, proiectivă și diferențială*. vol. I. Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1962.
10. J. Aczel, *Vorlesungen über Functional gleichungen*. Deutscher Verlag, Berlin, 1961, p. 247.

O METODĂ DE APROXIMARE A DEFORMĂRII CURBELOR DE ÎNCĂRCARE. I

DE

M. P. MIHĂILESCU

Un material supus unei stări bidimensionale de tensiune se caracterizează prin curba sa de încărcare, construită în planul celor două tensiuni. Efectuînd o încărcare suplimentară ce provoacă o deformare plastică a materialului, curba de încărcare se va deforma şi ea, mai accentuat în direcţia încărcării şi mai puţin accentuat în direcţia opusă (efectul Bauschinger). S-a constatat experimental că, după un număr determinat de încărcări, în punctul de încărcare apare un vîrf, pe cînd în partea opusă încărcării se obţine în general o deformare mai puţin accentuată şi lipsită de discontinuităţi ale tangentei, ceea ce permite considerarea în mod distinct a deformării celor două părţi ale curbei. Se va face o analogie între deformarea curbei de încărcare şi cea a unui fir flexibil ce este supus acţiunii unei distribuţii de forţe în lungul său, analogie aplicată numai pentru o încărcare simplă. Vom presupune de asemenea că cele două curbe de încărcare, cea iniţială şi cea deformată, posedă două porţiuni comune, situate în jurul direcţiilor ce fac un unghi de 90° cu direcţia de încărcare (fig. 1), şi care intersectează curba în punctele A şi B.

1°. Deformarea curbei ADB. Se consideră curba iniţială ADB sub forma parametrică

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t) \tag{1}$$

şi se presupune că ecuaţia curbei deformate $AD'B$ se scrie sub forma

$$\vec{r}_1\,(t) = \vec{r}(t) - p\,(t) \times \frac{\vec{r}(t)}{\left|\vec{r}(t)\right|}, \tag{2}$$

unde funcția $p(t)$, ce reprezintă distanța, după raza vectoare, între două puncte corespondente ale celor două curbe, trebuie să aibă următoarele proprietăți :

— să se anuleze în punctele A și B (pe direcția perpendiculară pe cea de încărcare) ;

— maximul lui $p(t)$ să fie atins în D', iar valoarea sa să fie egală cu p_0, o mărime obținută experimental (efectul Bauschinger) ;

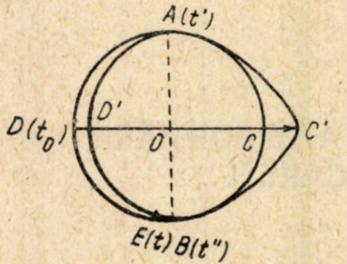


Fig. 1

— $p'(t)$ să se anuleze în cele două puncte A și B, deoarece curba inițială și cea deformată trebuie să fie tangente în aceste puncte (observație experimentală).

Fie t' și t'' valorile parametrului t în A, respectiv B, și t_0 valoarea sa în D.

În general, $t_0-t' \neq t''-t_0$; în acest caz se consideră numai deformarea porțiunii de curbă ADE, unde E corespunde valorii t a parametrului pentru care

$$t_0-t' = t-t_0 \tag{3}$$

iar porțiunea EB se presupune comună celor două curbe, ADB și $AD'B$. Ținînd seama de relația (3), expresia funcției $p(t)$ pe porțiunea de curbă ADE, va fi

$$p(t) = a\ [\cos\ \theta\,(t) + 1] \tag{4}$$

cu

$$\theta\,(t) = \Pi\, \frac{t-t_0}{t_0-t'}\,. \tag{5}$$

În acest caz

$$\left.\begin{aligned} &\theta\,(t') = -\,\Pi, \quad p\,(t') = 0, \\ &\theta\,(t_0) = 0, \quad p\,(t_0) = 2a, \quad \text{deci } a = \frac{p_0}{2}\,, \\ &\theta\,(t'') = \Pi, \quad p\,(t'') = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

iar

$$p'(t) = -\,\frac{p_0}{2} \sin\theta\,(t)\ \cdot\ \theta'(t)$$

și cum

$$\theta'\,(t) = \frac{\Pi}{t_0-t'} = \text{constant,}$$

rezultă

$$\begin{aligned} \theta(t') &= -\Pi, \quad p'(t') = 0, \\ \theta(t'') &= \Pi, \quad p'(t'') = 0, \\ \theta(t_0) &= 0, \quad p'(t_0) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Variația funcției $p(t)$ este reprezentată grafic în figura 2.

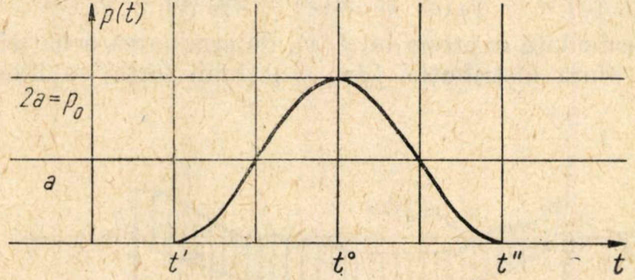


Fig. 2

Ecuația parametrică a curbei deformate se va scrie sub forma

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}(t)\left[1 - \frac{1}{|\vec{r}(t)|}\frac{p_0}{2}\left(\cos \Pi \frac{t - t_0}{t_0 - t'} + 1\right)\right].$$

2°. **Deformarea curbei** *ACB*. Se aproximează deformarea porțiunii de curbă *ACB* cu deformarea unui fir flexibil suspendat în punctele *A* și *B* și a cărei formă inițială este dată de ecuația curbei *ACB*,

$$y = y_0(x) \tag{8}$$

sub acțiunea unei forțe concentrate P, aplicată într-un punct C al curbei, de abscisă x_0. Cu alte cuvinte problema revine la găsirea ecuației formei unui fir flexibil suspendat în A și B, asupra căruia acționează distribuția de forțe $f_0(x)$ a cărei acțiune imprimă firului forma inițială ACB și forța concentrată P în punctul C, a cărei acțiune suplimentară aduce firul în poziția $AC'B$.

Este necesar în primul rînd calculul distribuției de forțe $f_0(x)$, care pentru ușurința calculelor se presupune paralelă cu axa ordonatelor. Condiția ca suma momentelor tuturor forțelor ce acționează asupra porțiunii firului, din stînga unei secțiuni x, față de acea secțiune, să fie nulă :

$$H y_0(x) - G_A x + M(x) = 0, \tag{9}$$

ne dă momentul :

$$M(x) = G_A x - H y_0(x), \tag{10}$$

a cărui expresie este

$$M(x) = \int_0^x (x - u) f_0(u) du, \tag{11}$$

deci

$$M''(x) = f_0(x) = -Hy_0''(x). \tag{12}$$

Dacă se înmulțește ecuația (9) cu un factor constant c, rezultă că sistemul cH, cG_A și $cf_0(x)$ aduce firul la aceeași stare de echilibru ca și sistemul H, G_A, $f_0(x)$, ceea ce înseamnă că în alegerea distribuției $f_0(x)$ se poate face abstracție de factorul H ce apare în expresia (12).

Astfel

$$f_0(x) = -y_0''(x) \text{ și } M(x) = xy_0'(0) - y_0(x). \tag{13}$$

O dată calculată expresia lui $f_0(x)$, determinarea ecuației $y(x)$ a firului, supus în afara distribuției $f_0(x)$ și acțiunii forței suplimentare P, se calculează utilizînd aceeași ecuație a momentelor ca și pentru determinarea lui $f_0(x)$, iar H și G_A devin reacțiunile necunoscute introduse de acțiunea lui P.

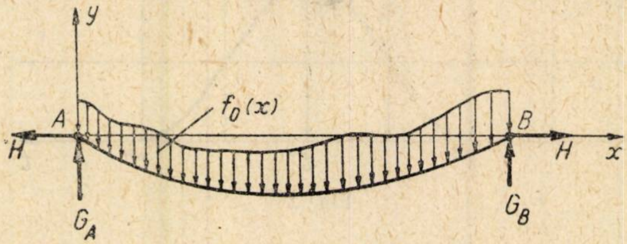


Fig. 3

Atunci

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{H}[G_A \cdot x - M(x)] && \text{pentru } x \leqslant x_0, \\ y(x) &= \frac{1}{H}[G_A \cdot x - M(x) - P(x - x_0)] && \text{pentru } x \geqslant x_0, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

și

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{H}[G_A - M'(x)] && \text{pentru } x \leqslant x_0, \\ y'(x) &= \frac{1}{H}[G_A - M'(x) - P] && \text{pentru } x \geqslant x_0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Reacțiunile se calculează din condițiile ca suma momentelor tuturor forțelor ce acționează asupra firului, față de cele două capete, A și B, să fie nulă; se obține în acest fel

$$\left.\begin{aligned} G_A &= \frac{1}{l}[M_B + P(l - x_0)] = \frac{1}{l}[M(l) + P(l - x_0)], \\ G_B &= \frac{1}{l}[M_A + Px_0]. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Ordonata $y(x)$ dată de ecuațiile (14) este supusă la trei condiții

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y(l) &= 0, \\ y(x_0) &= y^0, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

din care primele două sînt identic satisfăcute, iar a treia ne permite calculul reacțiunii H,

$$H = \frac{1}{y^0}\left[G_A\, x_0 - M(x_0)\right] = \frac{1}{y^\circ}\left\{\frac{x_0}{l}\left[M(l) + P(l-x_0)\right] - M(x_0)\right\}. \tag{18}$$

Introducînd acum valorile lui H și G_A din (16) și (18) în ecuațiile (14), se obține

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{y^\circ\left[xM(l) - lM(x) + xP(l - x_0)\right]}{x_0\, M(l) - l\, M(x_0) + x_0 P(l - x_0)} \quad \text{pentru } x \leqslant x_0, \\ y &= \frac{y^\circ\left[xM(l) - lM(x) + x_0 P(l-x)\right]}{x_0\, M(l) - lM(x_0) + x_0\, P(l-x_0)} \quad \text{pentru } x \geqslant x_0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

În felul acesta forma firului $AC'B$ este complet determinată de relațiile (19). Se poate întîmpla însă ca prin aplicarea forței P în punctul C de abscisă x_0, în apropiere de capetele A și B, să avem

$$y_0(x) \leqslant y(x), \tag{20}$$

ceea ce nu este admisibil din punctul de vedere al deformării curbelor de încărcare. De aceea, pentru $0 \leqslant x \leqslant x_A$ și $x_B \leqslant x \leqslant l$ se vor aplica două distribuții de forțe $p_A(x)$ și $p_B(x)$, de asemenea paralele cu axa ordonatelor, astfel încît pe aceste porțiuni curbele $y_0(x)$ și $y(x)$ să fie tangente. Extremitățile celor două segmente, respectiv x_A și x_B, nu sînt cunoscute și se dă mai jos o metodă pentru calculul lor. Se presupune că firul de ecuație $y = y(x)$ este fix iar firul de ecuație $y = y_0(x)$ suferă o translație dirijată în sensul axei ordonatelor, pînă cînd cele două curbe devin tangente; cele două puncte de tangență se aleg ca extremități x_A, respectiv x_B, ale celor două segmente considerate mai sus. Astfel, o dată determinate lungimile x_A, respectiv $l-x_B$, problema revine la calculul poziției de echilibru a unui fir flexibil sub acțiunea forțelor $f_0(x)$, forței concentrate P și a celor două distribuții de forțe $p_A(x)$ și $p_B(x)$, și la determinarea funcțiilor $p_A(x)$ și $p_B(x)$ din condiția de tangență de-a lungul segmentelor $[0, x_A]$ și $[x_B, l]$.

Modul de rezolvare este același cu acela întrebuințat la determinarea funcției $y(x)$. Reacțiunea G_A are expresia

$$G_A = \frac{1}{l}\left[M(l) + P(l-x_0) + \int_0^{x_A} p_A(u)(l-u)\,\mathrm{d}u + \int_{x_B}^{l} p_B(u)(l-u)\,\mathrm{d}u\right] \tag{21}$$

iar suma momentelor față de o secțiune x dă ordonata y_1 a secțiunii,

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 = \frac{1}{H}\,[G_A\cdot x - M(x) - \int_0^x (x-u)\,p_A(u)\,\mathrm{d}u] \quad \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant x_0,\\
&y_1 = \frac{1}{H}\,[G_A\cdot x - M(x) - \int_0^x p_A(u)(x-u)\,\mathrm{d}u - P(x-x_0)]\\
&\qquad\qquad \text{pentru } x_0 \leqslant x \leqslant x_B,\\
&y_1 = \frac{1}{H}\,[G_A\cdot x - M(x) - P(x-x_0) - \int_0^x (x-u)\,p_A(u)\,\mathrm{d}u -\\
&\qquad - \int_{x_B}^x (x-u)\,p_B(u)\,\mathrm{d}u] \quad \text{pentru } x_B \leqslant x \leqslant l.
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Funcția $y_1(x)$, definită de relațiile (22), trebuie să îndeplinească cinci condiții :

$$\left.\begin{aligned}
&y_1(0) = 0, && y_1'(x) \equiv \alpha(x) \quad \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant x_A,\\
&y_1(l) = 0, && \\
&y_1(x_0) = y^\circ, && y_1'(x) \equiv \beta(x) \quad \text{pentru } x_B \leqslant x \leqslant l.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

unde

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha(x) = y_0'(x) \ \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant x_A,\\
&\beta(x) = y^{0\prime}(x) \ \text{pentru } x_B \leqslant x \leqslant l,
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Primele două condiții (23) sînt identic satisfăcute, a treia furnizează valoarea lui H,

$$H = \frac{1}{y^0}\,[G_A\cdot x_0 - M(x_0) - \int_0^{x_0} p_A(u)\,(x_0-u)\,\mathrm{d}u] \tag{25}$$

iar ultimele două permit determinarea funcțiilor $p_A(x)$ și $p_B(x)$,

$$\left.\begin{aligned}
&H\,\alpha(x) = G_A - M'(x) - \int_0^x p_A(u)\,\mathrm{d}u \ \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant x_A,\\
&H\,\beta(x) = G_A - M'(x) - \int_0^{x_A} p_A(u)\mathrm{d}u - \int_{x_B}^x p_B(u)\mathrm{d}u \ \ \text{pentru } x_B \leqslant x \leqslant l.
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Se notează

$$A(x) = \int_0^x (x-u)\,p_A(u)\,\mathrm{d}u, \qquad B(x) = \int_{x_B}^x p_B(u)\,(x-u)\,\mathrm{d}u, \tag{27}$$

$$A'(x) = \int_0^x p_A(u)\,\mathrm{d}u, \qquad B'(x) = \int_{x_B}^x p_B(u)\,\mathrm{d}u \tag{28}$$

şi atunci condiţiile (26) se scriu

$$\left.\begin{aligned} A'(x) &= a - M'(x) - \alpha(x)(ab + c), \quad 0 \leqslant x \leqslant x_A, \\ B'(x) &= a - M'(x) - P - A'(x) - \beta(x)(ab + c), \quad x_B \leqslant x \leqslant l, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

cu

$$\left.\begin{aligned} a &= G_A, \\ b &= \frac{x_0}{y^0}, \\ c &= -\frac{1}{y^0}[M(x_0) + A(x_0)] \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

sau integrînd (29),

$$\left.\begin{aligned} A(x) &= ax - M(x) - (ab + c)\int \alpha(x)\mathrm{d}x + C_1, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_A, \\ B(x) &= ax - M(x) - (ab + c)\int \beta(x)\mathrm{d}x - Px - A(x) + C_2, \quad x_B \leqslant x \leqslant l. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Pentru a putea calcula pe $A'(x)$ şi $B'(x)$ este nevoie doar de valorile constantelor a şi c, deoarece b este cunoscut. Aceste constante cuprind în expresiile lor mărimile necunoscute $A(x_0)$, $A(l)$, $B(l)$. În acest scop se observă că pentru orice $x \geqslant x_A$

$$\underset{x \geqslant x_A}{A(x)} = A(x_A) + (x - x_A)A'(x_A)\,; \quad \underset{x \geqslant x_A}{A'(x)} = A'(x_A) = \text{const.}, \tag{32}$$

adică în particular

$$A(x_0) = A(x_A) + (x_0 - x_A)A'(x_A),$$
$$A(l) = A(x_A) + (l - x_A)A'(x_A).$$

Dar, din (29) şi (31), avem

$$\left.\begin{aligned} A(x_A) &= ax_A - M(x_A) - (ab + c)\,y_0(x_A) \\ A'(x_A) &= a - M'(x_A) - (ab + c)\,y_0'(x_A) \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

deci

$$A(x_0) = -[M(x_A) + (x_0 - x_A)M'(x_A)] + a[x_0 - b\,y_0(x_A) -$$
$$- b(x_0 - x_A)\,y_0'(x_A)] - c[y_0(x_A) + (x_0 - x_A)\,y_0'(x_A)].$$

Cum

$$c = -\frac{1}{y^0}[M(x_0) + A(x_0)],$$

se obține

$$A\,(x_0) = ax_0 + d \tag{34}$$

cu

$$d = \frac{M\,(x_0)[y_0\,(x_A)+(x_0-x_A)\,y_0'(x_A)]-y^\circ\,[M\,(x_A)+(x_0-x_A)M'(x_A)]}{y^\circ-[y_0(x_A)+(x_0-x_A)\,y_0'\,x_A)]}\,. \tag{35}$$

Cunoscîndu-l pe $A(x_0)$ se poate calcula $ab + c$

$$ab + c = -\frac{1}{y^0}\,[M\,(x_0) + d] \tag{36}$$

sau

$$H = ab + c = -\frac{M\,(x_0) - M\,(x_A)-(x_0-x_A)\,M'\,(x_A)}{y^0-[y_0\,(x_A)+(x_0-x_A)\,y_0'\,(x_A)]}\,. \tag{37}$$

În expresia lui $B'(x)$ apare și $A'\,(x)$ pentru $x_B \leqslant x \leqslant l$, care, conform relației (32), este o constantă, a cărei valoare se calculează din (29)

$$A'\,(x_A) = a-M'\,(x_A)-\alpha\,(x_A)\,(ab + c),$$

deci

$$B'\,(x) = [M'\,(x_A)- P + \alpha\,(x_A)\,(ab + c)] - M'\,(x)-\beta\,(x)\,(ab + c) \tag{38}$$

este perfect calculabil.

Rămîne de calculat constanta C_2 din (31). Din relația (31) avem

$$B\,(l) = al-M\,(l) - (ab + c)\;y_0\,(l)-Pl-A\,(l) + C_2$$

și cum

$$al = M\,(l) + P\,(l-x_0) + A\,(l) + B\,(l),$$

rezultă

$$C_2 = Px_0. \tag{39}$$

Astfel și $B\,(x)$ este perfect calculat

$$B\,(x) = [-M\,(x) + M(x_A) + (x-x_A)\,M'(x_A)] + (ab + c)\,[-y_0(x) + \\ + y_0\,(x_A) + (x-x_A)\,y_0'\,(x_A)]-P\,(x-x_0). \tag{40}$$

Pentru calculul lui $A(x)$ este nevoie de C_1 :

$$A\,(0) = 0 = C_1 \quad \text{deci} \quad C_1 = 0 \tag{41}$$

iar pe de altă parte

$$A'\,(0) = 0 = a-M'\,(0)-(ab + c)\,\alpha\,(0),$$

adică

$$a = M'\,(0) + (ab + c)\,\alpha\,(0), \tag{42}$$

de unde

$$A(x) = [M'(0) + (ab + c)\,\alpha(0)]\,x - M(x) - (ab + c)y_0(x). \tag{43}$$

Referitor la funcţia $B'(x)$ există o condiţie asemănătoare şi anume

$$B'(x_B) = 0,$$

adică

$$ab + c = \frac{M'(x_A) - M'(x_B) - P}{\beta(x_B) - \alpha(x_A)}, \tag{44}$$

relaţie care comparată cu relaţia (36) permite calculul mărimii lui P,

$$P = -\frac{M(x_A) + (x_0 - x_A)\,M'(x_A) - M(x_0)}{y^0 - [y_0(x_A) + (x_0 - x_A)\,y_0'(x_A)]}\,[y_0'(x_B) - y_0'(x_A)] +$$
$$+ [M'(x_A) - M'(x_B)]. \tag{45}$$

În definitiv expresia lui $y_1(x)$ definit de (22) este acum complet determinată şi anume

— pentru $0 \leqslant x \leqslant x_A$,

$$y_1^1(x) = y_0(x);$$

— pentru $x_A \leqslant x \leqslant x_0$,

$$y_1^2(x) = \frac{y^\circ - [y_0(x_A) + (x_0 - x_A)\,y_0'(x_A)]}{M(x_0) - M(x_A) - (x_0 - x_A)\,M'(x_A)}\,\{M(x) - M(x_A) -$$
$$- (x - x_A)\,M'(x_A)\} + [y_0(x_A) + (x - x_A)\,y_0'(x_A)];$$

— pentru $x_0 \leqslant x \leqslant x_B$,

$$y_1^3(x) = \frac{y^\circ - [y_0(x_A) + (x_0 - x_A)\,y_0'(x_A)]}{M(x_0) - M(x_A) - (x_0 - x_A)\,M'(x_A)}\,\{M(x) - M(x_A) -$$
$$- (x - x_A)M'(x_A) - M'(x_A) + M'(x_B)\} + [y_0(x_A) + (x - x_A)\,y_0'(x_B) +$$
$$+ y_0'(x_B) - y_0'(x_A)];$$

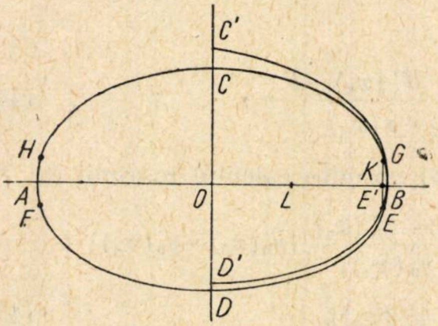
— pentru $x_B \leqslant x \leqslant l$,

$$y_1^4(x) = y_0(x).$$

Exemplu. Se consideră drept curbă de încărcare o elipsă de semiaxe a şi b (fig. 4) şi se efectuează din punctul D o încărcare radială după semiaxa mică a elipsei. Datele experimentale au arătat că în jurul punctelor A şi B există două porţiuni comune curbei iniţiale şi celei deformate, egale între ele şi simetrice faţă de semiaxa mare; ele vor fi notate cu EG şi FH.

Astfel, conform metodei expuse mai sus, rămîne de calculat deformarea curbei EDF și cea a curbei GCH.

Din figură se vede că după deformare se păstrează simetria curbei față de semiaxa mică, ceea ce era de așteptat avînd în vedere faptul că însăși direcția de încărcare coincide cu această semiaxă.



$$OA = a = 10$$

$$OC = b = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$OL = c = 10\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$K_B = 0{,}4$$

Fig. 4

În tabel se dă variația funcției $p(x)$ ce caracterizează deformarea porțiunii de curbă GC.

Tabel

	x	$p(x)$
x_1	$-8{,}64$	0,00441
x_2	$-7{,}68$	0,01729
x_3	$-6{,}72$	0,0376
x_4	$-5{,}76$	0,06379
x_5	$-4{,}80$	0,1111
x_6	$-3{,}84$	0,1584
x_7	$-2{,}88$	0,18457
x_8	$-1{,}92$	0,2049
x_9	$-0{,}96$	0,21779
x_{10}	0	0,2222

Primită la redacție la 30 august 1963

BIBLIOGRAFIE

1. А. М. Качурин, *Гибкие нити с малыми стрельками*, Москва, 1957.
2. Naghdi, P. M., *Stress-Strain Relation in Plasticity and Rhermoplasticity*. Plasticity, Proc. Second Symp. Nav. Struct. Mech., Pergamon Press, 1960.

ALGEBRE BANACH ANALITICE

DE

I. SUCIU

INTRODUCERE

În 1953 J. Wermer a demonstrat în [11] următoarea proprietate remarcabilă a algebrei Banach $\mathfrak{A}\,(|z|=1)$ a funcțiilor continue pe $(|z|=1)$ care se pot prelungi analitic în $(|z|<1)$: *dacă B este o algebră Banach astfel încît $\mathfrak{A}\,(|z|=1) \subset B \subset C(|z|=1)$ avem sau $B=\mathfrak{A}\,(|z|=1)$ sau $B=C\,(|z|=1)$* (*punctul* 2.1, proprietatea M) adică *algebra $\mathfrak{A}\,(|z|=1)$ este maximală în $C\,(|z|=1)$*.

Aceasta este o proprietate globală a acestei algebre.

A apărut atunci problema inversă : dîndu-se o algebră Banach A de funcții continue pe un compact X, să se găsească proprietăți globale, de algebră, ale lui A care să genereze proprietăți de analiticitate pentru funcțiile din A pe anumite părți ale spațiului idealelor maximale ale lui A.

Primul rezultat în această direcție a fost al lui H. Helson și F. Quigley [8], care au arătat că dacă A este fără divizori ai lui zero și maximală în $C(X)$, funcțiile din A au proprietatea de cvasianaliticitate pe X (dacă o funcție se anulează pe o mulțime deschisă din X, ea este identic nulă). Forma generală a acestui rezultat a fost dată de K. Hoffman și I.M. Singer în [7] (teorema 1).

Tot pentru algebre de acest tip, Bear [3] demonstrează proprietatea maximului modulului relativ la $\mathfrak{M}-\Gamma$, unde $\mathfrak{M}$ este spațiul idealelor maximale ale lui A și Γ frontiera sa Șilov (teorema 2).

În altă direcție, J. Wermer [12] considerînd algebre Dirichlet (adică algebrele A cu proprietatea că orice funcție reală pe Γ se poate aproxima uniform cu părți reale de funcții din A), demonstrează analiticitatea funcțiilor din astfel de algebre pe anumite părți ale lui $\mathfrak{M}$ (teorema 3).

În [12] şi în lucrarea de faţă se găsesc proprietăţi de analiticitate pentru funcţii dintr-o algebră Banach generată de anumite elemente particulare ale sale (algebre S-generate).

Lucrarea de faţă prezintă aceste rezultate în strînsa lor legătură cu proprietăţile algebrei funcţiilor analitice în cercul unitate. Ea are deci un caracter de mică sinteză.

Rezultatele amintite mai sus sînt expuse, în afara unor mici modificări, cu demonstraţiile autorilor în §3 şi §4. În §2 sînt prezentate algebrele analitice standard cu proprietăţile lor care au generat rezultatele de mai sus, iar în §5 algebrele S-generate, demonstrîndu-se teoremele de structură 4, 5, 6. În sfîrşit, §1 prezintă generalităţi despre reprezentarea ghelfandiană a algebrelor Banach demonstrîndu-se (după [4]) o caracterizare a frontierei Şilov des folosită în continuare şi teorema despre existenţa măsurilor de reprezentare (după [6]); pentru a fi citită, lucrarea nu presupune cunoscut decît teoria reprezentării ghelfandiene a algebrelor Banach.

Rezultatul nou principal din această lucrare constă în caracterizarea intrinsecă a algebrei Banach a funcţiilor analitice pe discul unitate continue pe închiderea lui şi cu valori într-o algebră Banach B (teorema 5).

§1. PRELIMINARII

1.1. *Spaţiul idealelor maximale.* Fie A o algebră Banach comutativă cu element unitate, e. Putem presupune $\|e\| = 1$[4]. Vom nota cu $\mathfrak{M}$ mulţimea idealelor maximale ale lui A sau, ceea ce este totuna, a funcţionalelor liniare multiplicative pe A. Identificarea dintre mulţimea idealelor maximale şi cea a funcţionalelor liniare multiplicative se face astfel:

$$f \rightarrow M_f = f^{-1}(0).$$

Dacă se topologizează $\mathfrak{M}$ cu topologia cea mai slabă care face continue funcţiile din familia

$$\hat{A} = \{\hat{x} : \mathfrak{M} \rightarrow C, \text{ cu } x \in A\},$$

definite prin

$$\hat{x}(M) = f_M(x),$$

unde $f_M \rightarrow M$ prin identificarea de mai sus (topologia Ghelfand), $\mathfrak{M}$ devine un spaţiu Hausdorff compact. O bază de vecinătăţi pentru $M_0 \in \mathfrak{M}$ este dată de familia de vecinătăţi

$$\{\mathfrak{U}_{(M_0;\, x_1, \ldots, x_n,\, \varepsilon)}\} = \{M \in \mathfrak{M} \,|\, |\hat{x}_i(M) - \hat{x}_i(M_0)| < \varepsilon\}.$$

Dacă X este un spaţiu Hausdorff compact, vom nota cu $C(X)$ respectiv $C_R(X)$ algebra Banach a tuturor funcţiilor complexe, respectiv reale, continue pe X, normată cu maximul modulului.

Reprezentarea

$$x \to \hat{x}$$

a lui A în $C(\mathfrak{M})$ este continuă. Dacă A este semisimplă, această reprezentare este o injecție (scufundare). Deci A este izomorfă cu $\hat{A}$. O condiție necesară și suficientă ca A să se scufunde izometric în $C(\mathfrak{M})$ este ca

$$\| x^2 \| = \| x \|^2.$$

În aceste algebre avem deci

$$\| x \| = \sup_{M \in \mathfrak{M}} | \hat{x}(M) |$$

și de aceea le vom numi *supnorm* algebre.

În cele ce urmează vom folosi numai astfel de algebre. De asemenea vom folosi aceeași notație A pentru A și $\hat{A}$ și aceeași notație x pentru x și $\hat{x}$.

1.2. *Frontiera Șilov.* Mulțimea $\Gamma \subset \mathfrak{M}$ se numește frontiera Șilov a lui A (sau a lui $\mathfrak{M}$) dacă verifică următoarele condiții:

a) Γ este închisă;

b) oricare ar fi $x \in A$ există $M \in \Gamma$ astfel încît $\| x \| = | x(M) |$;

c) Γ este minimală cu *a*) și *b*).

Se demonstrează ușor, cu lema lui Zorn, existența lui Γ. Noi vom da următoarea caracterizare a frontierei Șilov care demonstrează și unicitatea ei.

PROPOZIȚIA 1. *O condiție necesară și suficientă ca $M_0 \in \mathfrak{M}$ să aparțină lui Γ este ca pentru orice vecinătate U a lui M_0 să existe $y \in A$ astfel încît:*

a) *există $M \in U$ cu proprietatea $| y(M) | = \| y \|$;*

b) $| y(M) | < \| y \|$ *pentru orice $M \in \mathfrak{M} - U$.*

Demonstrație. Necesitatea condiției. Fie $M_0 \in \Gamma$ și $U(M_0, x_1, \dots, x_n, \varepsilon)$ o vecinătate a sa. Să observăm că U conține vecinătatea U' a lui M_0 definită de

$$| y_i(M) | < \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

unde

$$y_i = x_i - x_i(M_0).$$

Există o funcție $y \in A$ cu proprietățile:

α) există $M \in U'$ astfel încît $|y(M)| = \| y \|$;

β) $| y(M) | < \| y \|$ pentru orice $M \in \Gamma - U$;

pentru că altfel $\Gamma - U'$ ar fi o mulțime închisă pe care toate funcțiile din A își ating maximul modulului și s-ar contrazice minimalitatea lui Γ.

Putem presupune $\| y \| = 1$ și atunci, luînd o putere convenabilă a lui y, ne putem aranja să avem

$$| y(M) | < \frac{\varepsilon}{\max\limits_{i} \| y_i \|} \cdot$$

Se vede atunci că

$$| (y y_i)(M) | < \varepsilon$$

peste tot în Γ, deci peste tot în $\mathfrak{M}$. Fie $M_2 \in \mathfrak{M}$ astfel încît

$$| y(M_2) | = \| y \| = 1.$$

Atunci

$$| y_i(M_2) | = | y_i(M_2) | \, | y(M_2) | = | y_i y (M_2) | < \varepsilon,$$

adică

$$M_2 \in U'.$$

Suficiența condiției. Fie M_0 cu proprietatea din enunț și U o vecinătate arbitrară a sa. Dacă

$$U \cap \Gamma = \emptyset,$$

există $y \in A$ care nu-și atinge maximul modulului în Γ, ceea ce nu se poate. Deci oricare ar fi vecinătatea U a lui M_0 avem

$$U \cap \Gamma \neq \emptyset$$

adică

$$M_0 \in \overline{\Gamma} = \Gamma.$$

Observație. Evident, pentru orice U și ε putem găsi un $y \in A$ astfel încît $\| y \| = 1$ și $| y(M) | < \varepsilon$ în afara lui U. Pentru aceasta este suficient să luăm o putere convenabilă a lui $\frac{y}{\| y \|} \cdot$

$\mathfrak{M}$ este cel mai mare spațiu Hausdorff compact pe care A se poate realiza ca o algebră de funcții continue care-l separă, iar Γ este cel mai mic spațiu cu această proprietate. Mai precis, dacă X este un spațiu Hausdorff compact astfel încît A se scufundă izomorf și omeomorf în $C(X)$ și separă punctele lui X, există injecțiile continue (de scufundare ν, θ astfel încît diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{M} & \\ \Gamma \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "\nu"] & & X \arrow[ul, "\theta"'] \end{tikzcd}$$

să fie comutativă, i fiind incluziunea lui Γ în $\mathfrak{M}$.

1.3. *Măsuri de reprezentare.* Fie $M \in \mathfrak{M}$. O măsură pozitivă μ_M pe Γ se zice măsură de reprezentare pentru M dacă oricare ar fi $x \in A$ avem

$$x(M) = \int_\Gamma x \mathrm{d}\mu_M.$$

PROPOZIŢIA 2. *Pentru orice $M \in \mathfrak{M}$ există o măsură de reprezentare μ_M pe Γ.*

Demonstraţie. Se consideră funcţionala

$$F_M(x) = x(M).$$

E clar că este o funcţională pozitivă liniară şi multiplicativă pe A de normă 1. Cu teorema lui Hahn-Banach o prelungim pînă la o funcţională liniară pe $C(\Gamma)$, $\widetilde{F}_M$ de normă 1. Astfel de funcţionale se reprezintă sub forma

$$\widetilde{F}_M(f) = \int_\Gamma f \mathrm{d}\mu_M,$$

cu μ_M o măsură boreliană. Variaţia totală a lui μ_M este 1 şi avem şi

$$1 = F_M(1) = \widetilde{F}_M(1) = \int_\Gamma \mathrm{d}\mu_M = \mu_M(\Gamma),$$

deci μ_M este de masă 1. Atunci rezultă că μ_M este pozitivă [1]).

Avem

$$x(M) = F_M(x) = \int_\Gamma x \mathrm{d}\mu_M \text{ oricare ar fi } x \in A.$$

Deci μ_M este o măsură de reprezentare pentru M.

---

[1]) Într-adevăr, e clar că μ_M este reală şi avem

$$\mu_M(1) = \mu_M^+(1) - \mu_M^-(1),$$

$$\mu_M(1) = \|\mu_M\| = |\mu_M|(1) = \mu_M^+(1) + \mu_M^-(1),$$

de unde

$$\mu_M^-(1) = 0$$

şi deci

$$\|\mu_M^-\| = 0,$$

adică

$$\mu_M^- = 0.$$

§ 2. ALGEBRE ANALITICE STANDARD

2.1. *Algebra* $\mathfrak{A}\ (\,|z| = 1)$. Să considerăm cercul unitate $(\,|z| = 1)$ din planul complex. Vom nota cu $\mathfrak{A}\ (\,|z| = 1)$ subalgebra Banach a lui $C\,(\,|z| = 1)$ obținută închizînd în $C\,(\,|z| = 1)$ algebra polinoamelor în z. Dacă notăm prin $C[z]$ extinderea polinomială a lui C prin z (scufundată în $C\,(\,|z| = 1)$), definiția lui $\mathfrak{A}\ (\,|z| = 1)$ este

$$\mathfrak{A}\,(\,|z| = 1) = \overline{C\,[z]}.$$

Este ușor de văzut că o funcție f din $C\,(\,|z| = 1)$ aparține lui $\mathfrak{A}\,(\,|z| = 1)$ dacă și numai dacă una din următoarele afirmații este adevărată :

f se prelungește analitic în interiorul cercului unitate;

Coeficienții Fourier ai lui f pentru $n < 0$ sînt zero, adică

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, e^{in\theta}\, d\theta = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

De aici și din proprietatea maximului modulului pentru funcții analitice rezultă că $\mathfrak{A}\,(\,|z| = 1)$ este izometric izomorfă cu algebra Banach a funcțiilor analitice în $(\,|z| < 1)$ și continue pe $(\,|z| \leqslant 1)$, normată cu maximul modulului pe $(\,|z| \leqslant 1)$. În cele ce urmează vom folosi, fără a mai preciza, definiția convenabilă.

PROPOZIȚIA 3. *Pentru* $\mathfrak{A}\,(\,|z| = 1)$ *avem*

$$\mathfrak{M} = (\,|z| \leqslant 1), \quad \Gamma = (\,|z| = 1),$$

egalitățile fiind omeomorfisme.

Demonstrație. Să observăm mai întîi că pentru orice f din $\mathfrak{A}\,(|z| = 1)$ avem $\|f^2\| = \|f\|^2$ și deci

$$\|f\| = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |f(M)|\,.$$

De aceea

$$\hat{\mathfrak{A}}\,(\,|z| = 1) = \overline{C\,[\hat{z}]},$$

închiderea luată în $C(\mathfrak{M})$. Și atunci, cum $\mathfrak{A}\,(\,|z| = 1)$ separă pe $\mathfrak{M}$, rezultă că și z separă pe $\mathfrak{M}$.

Definim aplicația $\mathfrak{M} \to (\,|z| = 1)$ prin

$$M \to z\,(M).$$

Cum

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}} |\hat{z}\,(M)| = \|z\| = 1,$$

aplicația este bine definită. Este o injecție pentru că z separă pe $\mathfrak{M}$ și evident este continuă. Pentru a arăta că ea este un omeomorfism, este suficient să arătăm că este o surjecție. Fie z_0 cu $|z_0| \leqslant 1$ și

$$M_{z_0} = \{\, f \in \mathfrak{A}\,(\,|z| = 1) : f(z_0) = 0 \,\}.$$

În clasa lui z modulo M_{z_0} intră funcții care în z_0 iau aceeași valoare cu z în z_0, adică z_0. Cum $z\,(M_{z_0})$ este prin definiție constanta care intră în aceeași clasă cu z_0 modulo M_{z_0}, avem

$$z\,(M_{z_0}) = z_0$$

și prin urmare aplicația este și surjecție.

Deci

$$\mathfrak{M} = (\,|\,z\,| \leqslant 1).$$

Din proprietatea maximului modulului rezultă ușor că

$$\Gamma = (\,|\,z\,| = 1).$$

În cele ce urmează dăm cîteva proprietăți ale algebrei $\mathfrak{A}(\,|\,z\,| = 1)$ a căror valoare se va vedea în cele ce urmează.

Mai întîi dăm cîteva definiții și notații. Dacă A este o algebră de funcții continue pe un compact X, vom nota cu $\mathrm{Re}A$ mulțimea părților reale ale funcțiilor din A și cu $\overline{A}$ mulțimea conjugatelor funcțiilor din A. Dacă $F \subset X$, notăm cu A_F algebra restricțiilor funcțiilor din A la F.

PROPRIETATEA M. (Teorema lui Wermer). *Dacă B este o algebră Banach, astfel încît $\mathfrak{A}\,(\,|\,z\,| = 1) \subset B \subset C(\,|\,z\,| = 1)$, atunci sau $B = \mathfrak{A}\,(|\,z\,| = 1)$ sau $B = C\,(|\,z\,| = 1)$.*

Demonstrație [2]. *Să notăm* cu φ funcționala multiplicativă definită de origine,

$$\varphi(f) = f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,(e^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

Două lucruri se pot întîmpla: această funcțională să se prelungească multiplicativ la B sau nu.

Presupunem mai întîi că φ nu se prelungește multiplicativ la B. Atunci funcția z nu se anulează în nici un ideal maximal al lui B, pentru că în caz contrar funcționala definită de idealul în care s-ar anula z ar prelungi-o multiplicativ pe φ la B. Deci $z^{-1} \in B$. Deci B conține polinoamele trigonometrice și din teorema lui Fejer, $B = C\,(\,|\,z| = 1)$.

Acum presupunem că φ se prelungește multiplicativ la B și fie $\widetilde{\varphi}$ prelungita ei. Fie μ măsura de reprezentare a lui $\widetilde{\varphi}$. Avem

$$\widetilde{\varphi}\,(f) = \int_\Gamma f\,\mathrm{d}\,\mu\,.$$

Dar

$$\int_\Gamma e^{in\theta}\,\mathrm{d}\mu = \int_\Gamma z^n\,\mathrm{d}\mu = \widetilde{\varphi}\,(z^n) = \varphi\,(z^n) = z^n\,(0) = 0$$

pentru orice $n = 1,2,\ldots$ Cum μ este reală, rezultă că $\mathrm{d}\mu = \dfrac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta$ [3].

---

[2] Cu mici modificări este demonstrația dată de K. Hoffman și I. M. Singer în [7] reprodusă și în [5].

[3] A se vedea [5], Cap. IV.

Pentru orice $f \in B$ avem

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta} f(e^{i\theta})\, d\theta = \int_\Gamma z^n f\, d\mu = \widetilde{\varphi}(z^n f) = \widetilde{\varphi}(z^n)\, \widetilde{\varphi}(f) = \varphi(z^n)\, \widetilde{\varphi}(f) = 0$$

pentru orice $n = 1, 2, \ldots$, şi deci $f \in \mathfrak{A}\,(\,|\,z\,| = 1)$ oricare ar fi $f \in B$, adică $B \subset \mathfrak{A}\,(\,|\,z\,| = 1)$.

PROPRIETATEA P. *Dacă F este o submulţime strictă, închisă a lui $(\,|z| = 1)$, $\mathfrak{A}\,(\,|\,z\,| = 1)_F$ este densă în $C\,(F)$.*

Demonstraţie. Fie B algebra funcţiilor din $C\,(\,|\,z| = 1)$ care pe f sînt limite uniforme de funcţii din $\mathfrak{A}\,(|\,z\,| = 1)$. E clar că B este închisă şi cum F este submulţime strictă a lui $(\,|\,z| = 1)$, B este mai bogată decît $\mathfrak{A}\,(\,|\,z| = 1)$ (funcţiile continue pe F pot fi prelungite în mai multe moduri la funcţii continue pe $(\,|\,z\,| = 1)$. Din proprietatea M rezultă că $B = C(\,|\,z\,| = 1)$ şi deci A_F este densă în $C\,(F)$.

PROPRIETATEA D. *$\mathrm{Re}\mathfrak{A}(|z| = 1)$ este densă în $C_R\,(|z| = 1)$.*

Aceasta nu este altceva decît faptul că problema lui Dirichlet este rezolvabilă pentru cerc.

Şi, în sfîrşit, subliniem şi proprietatea de definiţie a algebrei $\mathfrak{A}\,(\,|\,z\,| = 1)$.

PROPRIETATEA A. *Algebra $\mathfrak{A}\,(\,|\,z| = 1)$ este închiderea în norma uniformă a algebrei polinoamelor în z.*

2.2. *Algebra $\mathfrak{A}_B\,(\,|\,z\,| = 1)$.* Fie B o supnorm algebră Banach cu $\mathfrak{M}_B$ spaţiul idealelor maximale şi Γ_B frontiera sa Şilov. Notăm cu $C_B\,(\,|\,z\,| = 1)$ algebra Banach a funcţiilor continue definite pe $(\,|\,z| = 1)$ şi cu valori în B normată cu

$$\|F\| = \sup_{|z| = 1} |F(z)|$$

şi cu $\mathfrak{A}_B\,(|z| = 1)$ subalgebra Banach a lui $C_B(|z| = 1)$ obţinută închizînd în $C_B\,(\,|\,z\,| = 1)$ subalgebra polinoamelor în z cu coeficienţi în B.

Se poate arăta şi aici că o funcţie F din $C_B\,(\,|\,z| = 1)$ aparţine lui $\mathfrak{A}_B\,(\,|\,z| = 1)$, dacă şi numai dacă una din următoarele condiţii este îndeplinită:

F se prelungeşte analitic în interiorul cercului unitate;

$$\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})\, e^{in\theta}\, d\theta = 0 \quad \text{pentru } n = 1,\ 2, \ldots$$

cu extinderile naturale ale analiticităţii şi integralei la funcţii cu valori într-o algebră Banach.

PROPOZIŢIA 4. *Fie $\mathfrak{M}$ spaţiul idealelor maximale ale lui $\mathfrak{A}_B\,(\,|\,z\,| = 1)$ şi Γ frontiera sa Şilov. Avem*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_B \times (\,|\,z| \leqslant 1),$$

$$\Gamma = \Gamma_B \times (\,|\,z| = 1).$$

Demonstraţie. Să observăm mai întîi că algebra B şi algebra $\mathfrak{A}\,(\,|\,z\,| = 1)$ se scufundă izometric în $\mathfrak{A}_B\,(\,|\,z\,| = 1)$.

Fie $M \in \mathfrak{M}$ şi $M_B = M \cap B$. Atunci mulţimea

$$m = \{ f \in \mathfrak{A}\,(|z| = 1) : f(z) = M_B\,(F\,(z)) \text{ cu } F \in M \}$$

este un ideal maximal în $\mathfrak{A}\,(|z| = 1)$. După propoziţia 3 există λ cu $|\lambda| \leqslant 1$ astfel încît $f\,(\lambda) = 0$ pentru orice $f \in m$.

Definim aplicaţia $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_B \times \{|z| \leqslant 1\}$ prin

$$\varphi\,(M) = (M_B,\ \lambda).$$

Dacă $M \neq N$ şi $M_B = N_B$, atunci există $F \in M$ şi $G \in N$ astfel încît $F \neq G$ şi deci $M\,(F\,(z))$ şi $N(G(z))$ nu sînt identice. Deci $m_1 \neq m_2$, adică $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ceea ce arată că φ este o injecţie. Dacă $|\lambda| \leqslant 1$ şi $M_B \in \mathfrak{M}_B$, fie

$$M = \{ f \in \mathfrak{A}_B\,(|z| = 1) : f\ (\lambda) \in M_B \}.$$

E clar că M este un ideal maximal din $\mathfrak{A}\,(|z| = 1)$ şi că

$$\varphi\,(M) = (M_B,\ \lambda)$$

şi deci aplicaţia φ este şi surjecţie.

Omeomorfismul este clar din definirea topologiei pe $\mathfrak{M}$. Să observăm că λ din aplicaţia de mai sus este egal cu $z(M)$.

Dacă $M \in \mathfrak{M}$ şi $F \in \mathfrak{A}_B\,(|z| = 1)$ este de forma

$$F = \sum_1^n a_n z^n \quad \text{cu} \quad a_n \in B,$$

avem

$$F\,(M) = \sum_1^n a_n\,(M_B)\,\lambda^n = F\,(\lambda)\,(M_B)$$

cu $\lambda = z\,(M)$.

Deci dacă $x \in B$, $x\,(M) = x\,(M_B)$ şi dacă $f \in \mathfrak{A}\,(|z| = 1)$, $f(M) = f(z(M))$.

Să arătăm acum că $\Gamma = \Gamma_B \times (|z| = 1)$. Fie $M = (M_B,\ \lambda)$ cu $M_B \in \Gamma_B$ şi $|\lambda| = 1$ şi U o vecinătate oarecare diferită de $\mathfrak{M}$ a lui M_0 în $\mathfrak{M}$. Vecinătatea U este (conţine una) de forma $U_B \times V$, cu U_B vecinătatea lui M_B în $\mathfrak{M}_B$ şi V vecinătatea lui λ în $(|z| \leqslant 1)$. Există $x \in B$ astfel încît x îşi atinge maximul modulului numai în U_B şi $f \in \mathfrak{A}(|z| = 1)$ astfel încît f îşi atinge maximul modulului numai în V.

Este clar atunci că produsul $x\,f$ îşi atinge maximul modulului numai în U şi deci $M \in \Gamma$.

Reciproc, fie $M_0 \in \Gamma$. Arătăm mai întîi că $|z\,(M_0)| = 1$. Într-adevăr, să observăm mai întîi că $\|zF\| = \|F\|$, oricare ar fi $F \in \mathfrak{A}_B\,(|z| = 1)$. Fie $|z\,(M_0)| < 1$ şi U o vecinătate a lui M_0 astfel încît pentru orice $M \in U$, $|z(M)| < 1 - \varepsilon$ cu $\varepsilon > 0$. M_0 fiind din Γ, există $F \in \mathfrak{A}_B(|z| = 1)$ astfel încît

$$\|F\| = 1 \text{ şi } |F\,(M)| < \varepsilon \text{ pentru } M \notin U.$$

Atunci

$$\| F \| = \| zF \| = \sup_{M \in \mathfrak{M}} | z(M)F(M) | \leqslant \max\ (\varepsilon,\ 1-\varepsilon),$$

ceea ce este imposibil. Deci

$$| z(M) | = 1$$

pentru orice $M \in \Gamma$.

Mai rămîne de arătat că pentru $M \in \Gamma$, $M_B = M \cap B$ aparține lui Γ_B. Fie U_B o vecinătate a lui M_B (în $\mathfrak{M}_B$). $U_B \times (| z | \geqslant 1-\varepsilon)$ (unde $\varepsilon > 0$) va fi o vecinătate a lui M (în $\mathfrak{M}$). Cum $M \in \Gamma$, există $F \in \mathfrak{A}_B(| z | = 1)$ astfel încît

$$\| F \| = 1 \text{ și } | F(M) | < \varepsilon \text{ pentru } M \notin U.$$

Fie λ cu $| \lambda | = 1$ astfel încît $\| F(\lambda) \| = 1$. Atunci

$$(F(\lambda))(M_B) = F(\lambda, M_B)$$

și deci

$$| (F(\lambda))(M_B) | < \varepsilon \text{ pentru } M_B \notin U_B.$$

Am găsit deci $F(\lambda) \in B$ astfel încît $\| F(\lambda) \| = 1$ și $| F(\lambda)(M_B) | < \varepsilon$ pentru $M_B \notin U_B$, de unde rezultă că $M_B \in \Gamma_B$, c.c.t.d.

§ 3. ALGEBRE PERVAZIVE

3.1. Definiții. Fie A o supnorm algebră Banach cu $\mathfrak{M}$ spațiul idealelor maximale și Γ frontiera sa Șilov. Presupunem că $A \neq C(\Gamma)$.

Vom spune că A este *maximală* dacă oricare ar fi subalgebra Banach B a lui $C(\Gamma)$ care conține pe A avem sau $A = B$ sau $B = C(\Gamma)$.

Algebra A se zice *pervazivă* dacă oricare ar fi submulțimea strictă închisă F a lui Γ, algebra A_F a restricțiilor funcțiilor din A la F este densă în $C(F)$.

Algebra A se zice *analitică* dacă orice funcție din A care se anulează pe o mulțime deschisă din Γ este identic nulă.

Algebra A se zice *antisimetrică* dacă din $f \in A$ și $\bar{f} \in A$ rezultă că f este constantă.

Algebra A se zice *esențială* dacă singurul ideal din $C(\Gamma)$ inclus în A este idealul 0.

Din 2.1, §2, și din proprietăți elementare ale funcțiilor analitice rezultă că $\mathfrak{A}(| z | = 1)$ satisface toate aceste proprietăți.

TEOREMA 1. Fie A o supnorm algebră Banach. Avem:

a) *Dacă A este pervazivă, atunci A este analitică*;

b) *Dacă A este analitică, atunci A este domeniu de integritate*;

c) *Dacă A este domeniu de integritate, atunci A este antisimetrică*;

d) *Dacă A este antisimetrică, atunci A este esențială*;

e) *Dacă A este esențială și maximală, atunci A este pervazivă.*

*Demonstrație*4) *a*) Fie $f \in A$ care se anulează pe mulțimea deschisă U și fie $K = \complement U$. Dacă $g \in C(\Gamma)$, cum A este pervazivă, există $g_n \in A$ astfel încît $g = \lim g_n$ pe K. Atunci este clar că $fg = \lim fg_n$ pe tot Γ. Cum $fg_n \in A$, rezultă că și $fg \in A$ și deci A conține idealul închis generat de f în $C(\Gamma)$. Fie $F = \{ x \in \Gamma \mid f(x) = 0 \}$ și fie $F \neq \Gamma$. Se vede ușor că idealul închis generat de f în $C(\Gamma)$ este format din toate funcțiile din $C(\Gamma)$ care se anulează pe F. Fie acum $g \in C(\Gamma)$ și $g = \lim g_n$ pe F cu $g_n \in A$. Este clar că se poate găsi un șir h_n convergent pe tot Γ către o funcție $h \in C(\Gamma)$, astfel încît $h_n = g_n$ pe F. Atunci $h_n - g_n$ se anulează pe F și deci $h_n - g_n \in A$. Cum $g_n \in A$, rezultă că $h_n \in A$ și deci $h \in A$. Cum pe F, $gh = g$, rezultă că g este restricție de funcție din A, adică $g|_F \in A_F$. Și deci A_F este închisă în $C(F)$. Algebra A fiind pervazivă, rezultă că $A_F = C(F)$ și deci $A = C(\Gamma)$ (căci dacă $h \in C(\Gamma)$, există $l \in A$ astfel ca $h - l = 0$ pe F și deci $h - l \in A$ de unde $h \in A$), ceea ce este absurd. Rezultă că $F = \Gamma$, adică f este identic nulă.

b) Fie $fg = 0$ și $K = \{ x : f(x) = 0 \}$. Dacă $f \neq 0$, rezultă $K \neq \Gamma$. Dacă $U = \complement K$, atunci g trebuie să se anuleze pe U și A fiind analitică, $g = 0$.

c) Fie R partea simetrică a lui A, adică

$$R = \{ f \in A \mid \bar{f} \in A \}.$$

E clar că R este o algebră Banach simetrică. Din teorema lui Ghelfand rezultă că $R = C(\mathfrak{M}_R)$, cu $\mathfrak{M}_R$ spațiul idealelor maximale ale lui R. Dacă $\mathfrak{M}_R$ ar conține mai mult decît un punct, cum este compact, s-ar putea construi două funcții nenule cu produs zero, ceea ce ar fi absurd deoarece R este domeniu de integritate. Deci $\mathfrak{M}_R$ conține un singur punct și deci $R \doteq C$.

d) Fie că A conține un ideal închis I al lui $C(\Gamma)$. Se știe [4] că orice ideal închis din $C(\Gamma)$ este de forma

$$I = \{ f \in C(\Gamma) \mid f = 0 \text{ pe } F \},$$

cu F o mulțime închisă în Γ. Există deci o mulțime închisă F a lui Γ astfel încît A conține toate funcțiile din $C(\Gamma)$ nule pe F. Dacă idealul I nu este zero, F este diferit de Γ și atunci există f funcție reală, neidentic nulă din $C(\Gamma)$ nulă pe F. Rezultă că f aparține lui A, ceea ce este absurd, deoarece A fiind antisimetrică nu conține funcții reale neconstante. Deci $F = \Gamma$, adică idealul I este zero.

e) Fie $K \subset X$. Cum A este esențială, există f care se anulează pe K și $f \notin A$. Atunci A fiind maximală avem

$$\overline{A}[f] = C(\Gamma).$$

Fie

$$\varphi = \lim \left(g_0^{(n)} + g_1^{(n)} f + \dots + g_{k_n}^{(n)} f^{k_n}\right)$$

---

4) Teorema a fost enunţată şi demonstrată pentru prima dată de H. Helson şi F. Quigley în [8] sub forma „esenţial + maximal ⇒ analitic''. Sub forma de mai sus aparţine lui K. Hoffman şi I. M. Singer dată în [7].

cu $g_i \in A$. Atunci

$$\varphi | K = \lim g_0^n | K$$

şi deci A_K este densă în $C(K)$, adică A este pervazivă.

3.2. *Principiul maximului modulului.* Pentru algebre pervazive este adevărat principiul maximului modulului relativ la $\mathfrak{M} - \Gamma$.

LEMĂ. *Fie A antisimetrică şi $f \in A$, $f = u + iv$. Dacă u este constantă pe Γ, f este constantă pe Γ.*

Demonstraţie. Fie $u(M) = c$ pe Γ. Avem

$$v = i(c - f)$$

şi deci $v \in A$ şi cum este reală, $v =$ const. şi deci $f =$ const.

PROPOZIŢIA 5. *Fie A o algebră pervazivă cu $\mathfrak{M}$ spaţiul idealelor maximale şi Γ frontiera sa Şilov. Pentru orice $M \in \mathfrak{M} - \Gamma$ măsura de reprezentare μ_M a lui M este unică şi are suportul întreg Γ.*

Demonstraţie. Două măsuri de reprezentare coincid pe orice submulţime închisă strictă a lui Γ pentru că A este pervazivă, şi coincid pe Γ pentru că sînt de masă totală 1. Deci ele sînt egale.

Fie F suportul lui μ_M. Cum μ_M are suportul în F, ea este o funcţională pe $C(F)$ multiplicativă pe A_F. A_F fiind densă în $C(F)$, μ_M va fi multiplicativă şi pe $C(F)$ şi deci reprezintă un punct din F. Există deci $M_1 \in F \subset \Gamma$ astfel încît

$$\mu_M(f) = f(M_1)$$

pentru orice $f \in C(F)$. Deci oricare ar fi $f \in A$ avem

$$f(M_1) = \mu_M(f) = f(M)$$

ceea ce contrazice ipoteza deoarece A separă pe $\mathfrak{M}$ şi $M \neq M_1$. Deci $F = \Gamma$.

TEOREMA 2. (Principiul maximului modulului). *Fie A pervazivă şi $f \in A$. Dacă există $M_0 \in \mathfrak{M} - \Gamma$ astfel încît*

$$|f(M_0)| = \|f\|,$$

atunci f este constantă pe $\mathfrak{M}$.

Demonstraţie. Fie $f \in A$ şi $M_0 \in \mathfrak{M} - \Gamma$,

$$|f(M_0)| = \|f\|.$$

Atunci

$$f(M_0) = e^{i\alpha} \|f\|.$$

Fie

$$g = e^{-i\alpha} f.$$

Avem

$$g(M_0) = e^{-i\alpha} f(M_0) = \|f\|.$$

Dacă

$$g = u + iv,$$

avem

$$g(M_0) = u(M_0) + iv(M_0) = \|f\| \Rightarrow v(M_0) = 0,$$
$$g(M_0) = u(M_0) = \|f\|.$$

Deci

$$\|g\| = \|f\| = U(M_0),$$

adică

$$u(M) \leqslant u(M_0) \text{ oricare ar fi } M \in \mathfrak{M}.$$

Fie μ_{M_0} măsura de reprezentare pentru M_0. Ea are suportul întreg Γ. Avem

$$u(M_0) = g(M_0) = \int_\Gamma g \, \mathrm{d}\mu_{M_0} = \int_\Gamma u \, \mathrm{d}\mu_{M_0} + i \int_\Gamma v \, \mathrm{d}\mu_{M_0} = \int_\Gamma u \, \mathrm{d}\mu_{M_0}.$$

Fie

$$U = \{M : u(M) < u(M_0), \; M \in \Gamma\};$$

dacă $U \neq \emptyset$, suportul lui μ_{M_0} fiind tot Γ, avem $\mu_{M_0}(U) > 0$ şi deci

$$u(M_0) \leqslant \int_U u(M) \, \mathrm{d}\mu_{M_0} + \int_{\Gamma - U} u(M_0) \, \mathrm{d}\mu_{M_0} <$$
$$< u(M_0)\mu_{M_0}(U) + u(M_0)\mu_{M_0}(\Gamma - U) = u(M_0),$$

ceea ce este imposibil. Avem deci $U = \emptyset$ şi deci $u(M) = u(M_0) = \text{const.}$ pe Γ. Rezultă că g este constant şi deci $f = \text{const}$.

§ 4. ALGEBRE DIRICHLET

Fie A o supnorm algebră Banach, $\mathfrak{M}$ spaţiul idealelor sale maximale şi Γ frontiera sa Şilov.

DEFINIŢIE. *Vom spune că A este o algebră Dirichlet dacă* Re A *este densă în $C_R(\Gamma)$.*

Se verifică uşor că A este algebră Dirichlet dacă şi numai dacă $A + \bar{A}$ este densă în $C(\Gamma)$.

PROPOZIŢIA 6. *Dacă A este o algebră Dirichlet, măsura de reprezentare a oricărui $M \in \mathfrak{M}$ este unică.*

Demonstraţie. Este clar că două măsuri care coincid pe A coincid şi pe $A + \bar{A}$ şi deci şi pe $C(\Gamma)$.

Definiţie. *Vom spune că $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}$ sînt echivalente dacă există $k < 2$ astfel încît $|f(M_1) - f(M_2)| < k$ pentru orice $f \in A$ cu $\|f\| = 1$.*

Se verifică ușor că această relație este o relație de echivalență pe $\mathfrak{M}$.

Vom numi *parte* a lui $\mathfrak{M}$ o clasă de echivalență a lui $\mathfrak{M}$ după relația de echivalență de mai sus.

TEOREMA 3. (Wermer). *Fie A o algebră Dirichlet, $\mathfrak{M}$ spațiul idealelor sale maximale și P o parte a lui $\mathfrak{M}$. Atunci sau P se reduce la un punct, sau există un omeoformism θ de la discul unitate ($|z| = 1$) din planul complex la P astfel încît $f(\theta(z))$ să fie analitică în ($|z| < 1$) oricare ar fi $f \in A$.*

Avînd în vedere că demonstrația acestei teoreme este foarte laborioasă, iar pe de altă parte nu o vom utiliza în continuare, trimitem pentru demonstrație la [12]. Teorema este foarte importantă pentru că stabilește analiticitatea funcțiilor dintr-o algebră Dirichlet pe anumite părți ale lui $\mathfrak{M}$.

§ 5. ALGEBRE S-GENERATE

5.1. *Definiția lui S.* Fie A o supnorm algebră Banach, $\mathfrak{M}$ spațiul idealelor sale maximale și Γ frontiera sa Șilov. Fie

$$S = \{ s \in A : s \neq 0,\ \|sx\| = \|s\|\,\|x\| \text{ pentru orice } x \in A \}.$$

PROPOZIȚIA 7. *Elementul nenul $s \in A$ aparține lui S dacă și numai dacă $|s(M)|$ este constant pe frontiera Șilov. Adică*

$$S = \{s \in A : s \neq 0 \text{ și } |s(M)| = \|s\| \text{ pentru orice } M \in \Gamma\}.$$

Demonstrație. Dacă $|s(M)| = k$ pentru orice $M \in \Gamma$, avem

$$\|s\| = \sup_{M \in \Gamma} |s(M)| = k$$

și atunci

$$\|sx\| = \sup_{M \in \Gamma} |s(M)\,x(M)| = \sup_{M \in \Gamma} |s(M)|\,|x(M)| = k \sup_{M \in \Gamma} |x(M)| = k\,\|x\|.$$

Deci

$$\|sx\| = \|s\|\,\|x\|,$$

adică suficiența condiției.

Reciproc, fie că există $M_0 \in \Gamma$ astfel încît $|s(M_0)| < \|s\|$ pentru un $s \in S$. Fie $\varepsilon > 0$ și U o vecinătate a lui M_0 astfel încît

$$|s(M)| < \|s\| - \varepsilon \text{ pentru orice } M \in U.$$

Cum M aparține lui Γ, există (propoziția 1) $y \in A$ astfel încît $\|y\| = 1$ și

$$|y(M)| < \varepsilon \text{ pentru } M \in \Gamma - U.$$

Avem atunci

$$|s(M)\,y(M)| = |s(M)|\,|y(M)| < \|s\| - \varepsilon \text{ pentru } M \in U$$

şi

$$|s(M)\,y(M)| = |s(M)|\,|y(M)| < \|s\|\,\varepsilon \text{ pentru } M \notin U.$$

Atunci

$$\|s\| = \|s\|\,\|y\| = \|sy\| = \sup_{M\in\Gamma} |s(M)\ \ y(M)| \leqslant \max\{\|s\|-\varepsilon,\ \|s\|\varepsilon\} < \|s\|,$$

ceea ce este imposibil. Deci

$$|s(M)| = \|s\| \text{ pentru orice } M \in \Gamma.$$

COROLAR 1. *Dacă* $\Gamma = \mathfrak{M}$, *orice element din* S *este inversibil.*

COROLAR 2. *Dacă* $s \in S$, *are invers, atunci* $|s(M)|$ *este constant pe tot* $\mathfrak{M}$.

Într-adevăr, avem

$$\|s\|\,\|s^{-1}\| = \|s\,s^{-1}\| = 1$$

adică

$$\|s^{-1}\| = \frac{1}{\|s\|}\cdot$$

De asemenea

$$|s^{-1}(M)| = \frac{1}{|s(M)|}\cdot$$

Deci

$$|s(M)| = \frac{1}{|s^{-1}(M)|} \geqslant \frac{1}{\|s^{-1}\|} = \|s\|$$

şi deci

$$|s(M)| \geqslant \|s\| \geqslant |s(M)|,$$

adică

$$|s(M)| = \|s\| \text{ pentru orice } M \in \mathfrak{M}.$$

5.2. *Algebra Banach de fracţii a algebrei* A. S fiind un sistem multiplicativ închis fără divizori ai lui zero de elemente din A, putem forma algebra de fracţii A'_S [9] a lui A cu numitori în S. Deoarece pentru orice $s \in S$ avem

$$\|sx\| = \|s\|\,\|x\|$$

oricare ar fi $x \in A$, pe A'_S se poate defini o normă prin

$$\left\|\frac{x}{s}\right\| = \frac{\|x\|}{\|s\|}\,.$$

Completata în această normă a algebrei A'_S o vom numi algebra *Banach de fracții* a algebrei A notată A_S. Algebra A se scufundă izometric în mod natural în A_S.

Vom nota cu $\mathfrak{M}_S$ spațiul idealelor maximale ale lui A_S și cu Γ_S frontiera sa Șilov.

PROPOZIȚIA 8. *Există un omeomorfism de scufundare* θ *a lui* $\mathfrak{M}_S$ *în* $\mathfrak{M}$ *astfel încît*

$$\mathfrak{M}_S = \bigcap_{s \in S} \mathfrak{M}_s \ \textit{cu}\ \mathfrak{M}_s = \{ M : |s(M)| = \|s\| \}$$

și

$$\Gamma_S = \Gamma.$$

Demonstrație. Dacă M este un ideal maximal al unei algebre Banach, vom nota tot cu M funcționala liniară multiplicativă definită de M.

Fie $M_S \in \mathfrak{M}_S$ și M restricția lui M_S la A. Definim

$$\theta(M_S) = M = M_S \cap A.$$

Pentru $x \in A$ avem

$$x(M_S) = M_S(x) = M(x) = x(M).$$

Rezultă că dacă $y = \lim \frac{x_n}{s_n}$, avem

$$y(M_S) = M_S(y) = \lim M_S\left(\frac{x_n}{s_n}\right) = \lim \frac{M_S(x_n)}{M_S(s_n)} =$$

$$= \lim \frac{M(x_n)}{M(s_n)} = \lim \frac{x_n(M)}{s_n(M)},$$

adică

$$y(M_S) = \lim \frac{x_n(M)}{s_n(M)}$$

și deci

$$M_S(y) = \lim \frac{M(x_n)}{M(s_n)}.$$

De aici rezultă că dacă M și M' coincid, M_S și M'_S coincid, adică θ este o injecție. Cum θ este evident continuă, ea este un omeomorfism între $\mathfrak{M}_S$ și $\theta(\mathfrak{M}_S)$.

Fie

$$\sum = \{\sigma \in A_S \mid \sigma \neq 0,\ \|\sigma y\| = \|\sigma\| \|y\| \text{ pentru orice } y \in A_S\}.$$

Dacă $s \in S$ avem $s \in \sum$ și cum s are invers, din corolarul 2 la propoziția 6 rezultă că pentru orice $M_S \in \mathfrak{M}_S$ avem $s(M_S) = \|s\|$, și deci

$$\mathfrak{M}_S \subset \bigcap_{s \in S} \mathfrak{M}_s.$$

Reciproc, fie $M \in \bigcap\limits_{s \in S} \mathfrak{M}_s$. Dacă $s \in M$, $s \in S$, atunci $\| s \| = | s(M) | = 0$, adică $s = 0$ ceea ce este imposibil. Deci $M \cap S = \theta$.

Fie $y \in A_s$ de forma

$$y = \frac{x}{s} \cdot$$

Definim

$$M_S(y) = \frac{M(x)}{M(s)} \cdot$$

Dacă

$$y = \frac{x}{s} = \frac{x'}{s'}$$

atunci

$$xs' = x's,$$

adică

$$M(x)\ M(s') = M(s)\ M(x'),$$

deci

$$\frac{M(x)}{M(s')} = \frac{M(x')}{M(s')}$$

şi deci M_S este bine definită pe elementele de această formă. E clar că M este multiplicativă.

În plus

$$| M_S(y) | = \frac{| M(x) |}{| M(s) |} = \frac{| M(x) |}{\| s \|} \leqslant \frac{\| x \|}{\| s \|} = \| y \|,$$

adică M este continuă pe A_S'. Dacă notăm tot cu M_S prelungita prin continuitate la A_S, e clar că M_S este un ideal maximal în A_S astfel încît

$$\theta (M_S) = M,$$

adică

$$\mathfrak{M}_S = \bigcap_{s \in S} \mathfrak{M}_s .$$

Rezultă că $\Gamma \subset \mathfrak{M}_S$ şi deci $\Gamma \subset \Gamma_S$.

Fie $\Gamma_S - \Gamma \neq \theta$ şi $M_0 \in \Gamma_S - \Gamma$. Fie U o vecinătate în $\mathfrak{M}$ a lui M_0. $U \cap \mathfrak{M}_S$ va fi o vecinătate în $\mathfrak{M}_S$ a lui M_0 şi cum $M_0 \in \Gamma_S$, există $y \in A_S$ astfel încît

$$\| y \| = 1 \text{ şi } | y(M) | < \frac{1}{4} \text{ pentru orice } M \notin U \cap \mathfrak{M}_S .$$

Fie $y = \lim \frac{x_n}{s_n}$ cu $\| s_n \| = 1$ şi fie $x = x_n$ şi $s = s_n$ pentru care

$$\left\| \frac{x}{s} - y \right\| < \frac{1}{4} \cdot$$

Avem

$$\left| \frac{x(M)}{s(M)} = - y(M) \right| < \frac{1}{4} \text{ pentru orice } M \in \mathfrak{M}_S$$

sau

$$| x(M) - s(M)\, y(M) | < \frac{1}{4}$$

şi încă

$$| y(M) | - \frac{1}{4} < | x(M) | < | y(M) | + \frac{1}{4},$$

de unde

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}_S} | x(M) | \geqslant \frac{3}{4}$$

şi deci

$$\sup_{M \ni \mathfrak{M}} | x(M) | \geqslant \frac{3}{4} \cdot$$

Pe de altă parte,

$$| x(M) | < \frac{2}{4} \text{ pentru } M \in \mathfrak{M}_S - U,$$

şi cum

$$\Gamma \subset \mathfrak{M}_S - U$$

rezultă că

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}} | x(M) | = \sup_{M \in \Gamma} | x(M) | \leqslant \frac{2}{4},$$

deci contradicţie. Rezultă că $P_S - \Gamma = \theta$ şi deci

$$\Gamma = \Gamma_S.$$

5.3. *Algebre S-generate.* Notăm cu $C[S]$ extinderea polinomială în A a corpului complex C cu elemente din S. Adică

$$C\,[S] = \{x \in A \mid x = \sum_1^n c_k\, s_{1_k}^{P_{1k}} \dots s_{n_k}^{P_{n_k}}\}.$$

Deoarece S este multiplicativ închis, avem

$$C[S] = \{x \in A : x = \sum_1^n c_k\, s_k\}.$$

Mai putem presupune și $\| s_k \| = 1$.

Algebra A se numește *S-generată* dacă $C[S]$ este densă în A, adică dacă

$$A = \overline{C[S]}.$$

Exemple. 1°. $\mathfrak{A}\,(|z| = 1)$ este S-generată. Este generată de subsistemul $(1,\ z,\ z^2, \dots)$ al lui S.

2°. Algebra $\mathfrak{A}\,(z_1, \dots, z_n)$ a funcțiilor de n variabile complexe analitice în $|z_i| < 1$ și continue pe $|z_i| \leqslant 1$.

PROPOZIȚIA 9. *Dacă algebra A este S-generată,* $A_S = C\,(\mathfrak{M}_S)$.

Demonstrație. Vom arăta că A_S este o subalgebră simetrică a lui $C\,(\mathfrak{M}_S)$. Fie $y \in A_S$ de forma

$$y = \frac{x}{s} \text{ cu } x \in A,\ s \in S \text{ și } \| s \| = 1,$$

unde

$$x = \sum_1^n c_i\, s_i \text{ cu } s_i \in S \quad \| s_i \| = 1 \text{ și } c_i \in C.$$

Atunci

$$y\,(M) = \frac{\sum c_i\, s_i\,(M)}{s\,(M)} \text{ pentru orice } M \in \mathfrak{M}_S$$

și deci

$$\overline{y\,(M)} = \frac{\sum \bar{c}_i\, \overline{s_i(M)}}{\overline{s\,(M)}}\,.$$

Dar, pentru orice $s \in S$ și $M \in \mathfrak{M}_S$ $|s(M)| = \| s \|$. Deci, pentru orice $s \in S$ cu proprietatea $\| s \| = 1$, avem

$$s\,(M)\, \overline{s\,(M)} = |s\,(M)|^2 = \| s \|^2 = 1$$

și deci

$$\overline{s(M)} = \frac{1}{s\,(M)}\,,$$

oricare ar fi $M \in \mathfrak{M}_S$, şi deci $\bar{s} = s^{-1}$. Deci $s \in A_S$ oricare ar fi $s \in S$, adică $\bar{y} \in A_S$.

Involuţia aceasta fiind evident continuă, rezultă că $\bar{y} \in A_S$ pentru orice $y \in A_S$ adică A_S este simetrică. Din teorema Stone-Weierstrass rezultă că

$$A_S = C(\mathfrak{M}_S).$$

COROLAR. *Dacă A este o algebră S-generată, avem*

$$\Gamma = \mathfrak{M}_s = \bigcap_{s \in S} \mathfrak{M}_s$$

cu

$$\mathfrak{M}_S = \{ M : |s(M)| = \|s\| \}.$$

Într-adevăr, cum $A_S = C(\mathfrak{M}_S)$, avem

$$\Gamma = \Gamma_S = \mathfrak{M}_S.$$

5.4. *Teoreme de structură.* Fie A o algebră S-generată şi Γ frontiera sa Şilov.

TEOREMA 4. *Dacă S este generat de un singur element s, adică dacă*

$$A = \overline{C[s]},$$

atunci sau A este izometric izomorfă cu $\mathfrak{A}(\|z\| = 1)$ *sau* $A = C(\Gamma)$.

Demonstraţie. Fie $A \neq C(\Gamma)$. Putem evident presupune $\|s\| = 1$. Atunci s fiind constant în modul pe Γ, avem

$$s(\Gamma) \subset (|z| = 1)$$

şi cum s separă evident punctele lui Γ, $\Gamma \to s(\Gamma)$ este o injecţie a lui Γ în $(|z| = 1)$. Presupunem (prin identificare) că

$$\Gamma \subset (|z| = 1).$$

Reprezentarea ghelfandiană a algebrelor Banach ne dă incluziunea

$$A \subset C(\Gamma).$$

În această reprezentare evident $s \to z$ (funcţia identică). Cum $A = \overline{C[s]}$, rezultă că A este restricţia la Γ a algebrei $\mathfrak{A}(|z| = 1)$.

Dacă Γ este o submulţime strictă a lui $(|z| = 1)$, $\mathfrak{A}(z = 1)$ fiind pervazivă, rezultă că

$$A = \mathfrak{A}(|z| = 1)_\Gamma = C(\Gamma)$$

ceea ce nu se poate. Deci

$$\Gamma = (|z| = 1)$$

şi deci

$$A = \mathfrak{A}(|z| = 1).$$

Remarcă. Dacă s are invers în A, atunci se verifică uşor că $A = A_S$ şi după propoziţia 8, $A_S = C(\Gamma)$ şi deci $A = C(\Gamma)$. Dacă s nu are invers, $A \neq C(\Gamma)$ pentru că în caz contrar $s(M)$ n-ar fi constant pe Γ.

Fie A o algebră S-generată. Pentru fiecare s neinversabil distingem în A subalgebra Banach A_s generată de s peste C, izometric izomorfă cu $\mathfrak{A}(|z| = 1)$.

Notăm cu $\mathfrak{M}_s$ spaţiul idealelor maximale ale lui A_s, despre care ştim că este omeomorf cu $(|z| = 1)$.

PROPOZIŢIA 10. *Orice ideal din $\mathfrak{M}_s$ se prelungeşte pînă la un ideal din $\mathfrak{M}$.*

Demonstraţie. Pentru elementele din frontiera Şilov Γ_s a lui $\mathfrak{M}_s$ afirmaţia rezultă dintr-o teoremă a lui Şilov [5].

Fie $M_s \in \mathfrak{M}_s - \Gamma_s$ şi $\lambda = s(M_s)$. Avem $|\lambda| < 1$. Fie

$$\sigma = \frac{s - \lambda}{1 - \bar{\lambda} s}\cdot$$

Este clar că $\sigma \in S$ şi $\|\sigma\| = 1$. Dacă σ ar avea invers în A, după corolarul 2 la propoziţia 6 avem

$$|\sigma(M)| = \|\sigma\| = 1$$

pentru orice $M \in \mathfrak{M}$. Dar s nefiind inversabil în A, există $M_0 \in \mathfrak{M}$ astfel încît $s(M) = 0$. Atunci $\sigma(M) = -\lambda$ şi deci $|\sigma(M)| = |\lambda| < 1$ şi deci contradicţie. Deci σ nu are invers în A şi deci există $M \in \mathfrak{M}$ astfel încît $\sigma(M) = 0$. Dar atunci $s(M) = \lambda$. Şi atunci este clar că M îl prelungeşte pe M_s.

Definiţie. Fie A o supnorm algebra Banach şi $B_1 B_2$ subalgebre Banach ale ei. Notăm cu $\mathfrak{M}_{B_1}$, $\mathfrak{M}_{B_2}$ spaţiile idealelor maximale respective şi cu $\mathfrak{M}_{B_1, B_2}$ spaţiul idealelor maximale al algebrei Banach generate de B_1, B_2 în A.

Vom spune că B_1 şi B_2 *sînt analitic independente* dacă

$$\mathfrak{M}_{B_1\, B_2} = \mathfrak{M}_{B_1} \times \mathfrak{M}_{B_2},$$

egalitatea fiind omeomorfism.

Elementul $x \in A$ se zice analitic *independent* de algebra B dacă algebra Banach generată de x în A, şi B sînt analitic independente.

Elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se zic *analitic independente* în *ansamblul lor* dacă x_i este analitic independent de algebra Banach generată de $(x_j, j \neq i)$.

TEOREMA 5. *Fie A o supnorm algebră Banach şi B o subalgebră a sa. Presupunem că există $s \in S$ analitic independent de B astfel încît $A = \overline{B[s]}$. Atunci*

$$A = \mathfrak{A}_B(|z| = 1).$$

---

[5] Dacă avem incluziunea $A \subset B$ de supnorm algebre Banach, orice ideal maximal din frontiera Şilov a lui A se prelungeşte pînă la un ideal maximal din B[4].

Demonstrație. A și $\mathfrak{A}_B(|z|=1)$ sînt subalgebre ale lui $C(\mathfrak{M}_B\times(|z|=1)$ și avem $s(M)=z(M)$ pentru orice $M\in\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_B\times(|z|=1)$. Deci aplicația

$$\sum C_n s^n \to \sum C_n z^n$$

este un izomorfism izometric între $B[s]$ și $B[z]$ și deci se prelungește la un izomorfism izometric între A și $\mathfrak{A}_B(|z|=1)$.

TEOREMA 6. *Fie A o supnorm algebră Banach astfel încît*

$$A=\overline{C[s_1,\ldots,s_n]},$$

cu $s_i\in S$ și $s_1,\ldots,s_n$ analitic independente în ansamblul lor. Atunci

$$A=\mathfrak{A}(z_1,\ldots,z_n).$$

Demonstrație. Pentru $n=1$ regăsim teorema 4.

Dacă notăm

$$B=\overline{C[s_1,\ldots,s_{n-1}]},$$

avem

$$A=\overline{B[s_n]}$$

și teorema 6 rezultă prin inducție aplicînd teorema 5.

Primită la redacție la 30 august 1963

BIBLIOGRAFIE

1. ARENS, R. and SINGER, I. M., *Function Values as Boundary Integrals.* Proc. Amer. Math. Soc., **5**, 735–745 (1954).
2. BEAR, H. S., *Complex Function Algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. **90**, 383–393 (1959).
3. — *A Strong Maximum Mudulus Theorem for Maximal Function Algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., **92**, *3*, 465–469 (1959).
4. ГЕЛЬФАНД И. М., РАЙКОВ Д. А., ШИЛОВ Г. Е., *Коммутативные нормированные кольца.* Физматгиз, Москва, 1960.
5. HOFFMAN, K., *Banach Spaces of Analytic Functions.* Prentice-Hall 1962.
6. — *Analitic Functions and Logmodular Banach Algebras.* Acta Math., **108** (1962).
7. HOFFMAN, R., SINGER, I. M., *Maximal Algebras of Continuous Functions.* Acta Math., **103** (1960).
8. HELSON, H. and QUIGLEY, F., *Maximal Algebras of Continuous Functions.* Proc. Amer. Math. Soc., **8**, 111–114 (1957).
9. SUCIU, I., *Natürliche Erweiterung der Kommutativen Banachalgebra.* Revue de mathématiques pures et appliquées, Acad. R. P. R., **VII**, *3*, 483–491 (1962).
10. — *Bruchalgebra der Banachalgebren.* Revue de mathématiques pures et appliquées, Acad. R.P.R., **VIII**, *3*, 313–316 (1963).
11. WERMER, J., *An Algebra of Continuous Functions.* Proc. Amer. Math. Soc., **4**, 866–869 (1953)
12. — *Dirichlet Algebras.* Duke Math. J., **27**, 375–381 (1960).

ALGORITM PENTRU DETERMINAREA NUCLEULUI GRAFULUI ASOCIAT JOCULUI NIM

DE

P. CONSTANTINESCU, C. LULEA și S. NICULESCU

În cele ce urmează se prezintă un algoritm pentru găsirea nucleului grafului asociat unui joc Nim şi se programează la maşina CIFA-3 un joc Nim, astfel încît, deşi partenerul maşinii are prima mutare, pierde partida. Jocul menţionat se joacă cu n grămezi de obiecte. O mutare constă în luarea unui număr de obiecte dintr-o grămadă. Cîştigă jocul cel care reuşeşte să facă ultima mutare. Graful jocului Nim este $G = (X, \Gamma)$, unde X este mulţimea situaţiilor jocului (vîrfurile grafului), iar $\Gamma(x)$ cu $x \in X$ este mulţimea imaginilor lui x prin Γ, ca atare, mulţimea mutărilor care se pot efectua de jucătorul ce se află în situaţia x. În [1] este dată teorema următoare :

TEOREMA 1. *Jucătorul care atinge primul un punct de nucleu şi apoi urmează numai puncte din nucleu, are cîştigul asigurat.*

Pentru găsirea nucleului, în [1] se foloseşte funcţia Grundy. În acest scop este dată teorema următoare :

TEOREMA 2. *Mulţimea punctelor pentru care funcţia Grundy este zero formează nucleul unui graf. Deoarece graful jocului Nim este progresiv finit, funcţia sa Grundy va fi unică* [1].

Considerînd jocul Nim, asociem fiecărui vîrf un număr dintr-un cod ponderat în care fiecare cifră corespunde numărului de elemente din grămadă, iar ca relaţie de ordine, acceptăm ordinea numerelor naturale în codul ponderat.

Conform teoremei 2 şi regulilor jocului, situaţia finală (toate grămezile au zero elemente) este punct de nucleu ($\Gamma(x_n) = \emptyset$).

Fie N nucleul grafului $G = (X, \Gamma)$.

Conform [1], definiţia nucleului este :

Definiţia 1. Avem

$$x \in N \Rightarrow \Gamma(x) \cap N = \emptyset,$$
$$y \notin N \Rightarrow \Gamma(y) \cap N \neq \emptyset,$$

Această definiție sugerează ideea împărțirii vîrfurilor grafului în clase. În acest sens dăm următoarele definiții :

Definiția 2. Numim clasă a elementului $x \in X$ și o notăm cu C_x, mulțimea vîrfurilor care sînt imagini, ale lui x prin Γ, inclusiv punctul x, adică

$$C_x = \Gamma(x) \cup \{x\}.$$

Definiția 3. Reprezentanții claselor sînt elemente maxime, în codul ponderat, pentru fiecare clasă.

Dacă

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

$$RN = \{x_{i_1}, x_{i}^{2}, \ldots, x_{i_m}\} \text{ (mulțimea reprezentanților)},$$

avem m clase ai căror reprezentanți sînt $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$. Cele m clase sînt

$$C_{x_{i_1}} = \Gamma(x_{i_1}) \cup \{x_{i_1}\} = \{x_{i_1}^1, x_{i_1}^2, \ldots, x_{i_1}^{k_1}, x_{i_1}\},$$

$$C_{x_{i_2}} = \Gamma(x_{i_2}) \cup \{x_{i_2}\} = \{x_{i_2}^1, x_{i_2}^2, \ldots, x_{i_2}^{k_2}, x_{i_2}\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{x_{i_m}} = \Gamma(x_{i_m}) \cup \{x_{i_m}\} = \{x_{i_m}^1, x_{i_m}^2, \ldots, x_{i_m}^{k_m}, x_{i_m}\}.$$

Clasele $C_{x_{i_j}}$ nu sînt disjuncte și

$$\bigcup_{j=1}^{m} C_{x_{i_j}} = X.$$

Vom demonstra teorema următoare :

TEOREMA 3. *Reprezentanții claselor sînt puncte de nucleu dacă se construiesc clasele pornind de la punctul final, care este punct de nucleu.*

Demonstrație. Am văzut că $x_n \in N$. Fie $x_{i_m} = x_n$. Atunci

$$C_{x_{i_m}} = \Gamma(x_{i_m}) \cup \{x_{i_m}\} = \emptyset \cup \{x_{i_m}\} = \{x_{i_m}\}$$

deoarece $\Gamma(x_{i_m}) = \Gamma(x_n) = \emptyset$.

Fie g funcția lui Grundy. Avem $g(x_{i_m}) = 0$ fiindcă $g(\Gamma(x_{i_m})) = g(\emptyset) = 0$, [1].

$\Gamma^{-1}(x_{i_m})$ este mulțimea situațiilor jocului din care se poate ajunge printr-o singură mutare în x_{i_m}. Conform [1], deoarece $g(x_{i_m}) = 0$, avem

$$g(\Gamma^{-1}(x_{i_m})) \neq 0.$$

Din mulțimea $X - C_{x_{i_m}}$ fie $x_{i_{m-1}}$ cel mai mic în codul ponderat,

$$C_{x_{i_{m-1}}} = \Gamma(x_{i_{m-1}}) \cup \{x_{i_{m-1}}\}.$$

Deoarece

$$\Gamma(x_{i_{m-1}}) \subset \Gamma^{-1}(x_{i_m}),$$

conform relației de ordine considerată și

$$g(\Gamma^{-1}(x_{i_m})) \neq 0$$

rezultă

$$g(\Gamma(x_{i_{m-1}})) \neq 0,$$

ceea ce înseamnă că

$$g(x_{i_{m-1}}) = 0,$$

adică $x_{i_{m-1}} \in N$.

Fie acum $x_{i_{m-2}}$ cel mai mic vîrf care aparține mulțimii

$$X - (C_{x_{i_m}} \cup C_{x_{i_{m-1}}}).$$

Clasa sa va fi

$$C_{x_{i_{m-2}}} = \Gamma(x_{i_{m-2}}) \cup \{x_{i_{m-2}}\}.$$

Întrucît

$$\Gamma(x_{i_{m-2}}) \subset \Gamma^{-1}(x_{i_m}) \cup \Gamma^{-1}(x_{i_{m-1}}),$$

$$g(\Gamma^{-1}(x_{i_m})) \neq 0,$$

$$g(\Gamma^{-1}(x_{i_{m-1}})) \neq 0,$$

avem

$$g(\Gamma(x_{i_{m-2}})) \neq 0,$$

ceea ce implică

$$g(x_{i_{m-2}}) = 0,$$

adică $x_{i_{m-2}} \in N$, ș.a.m.d.

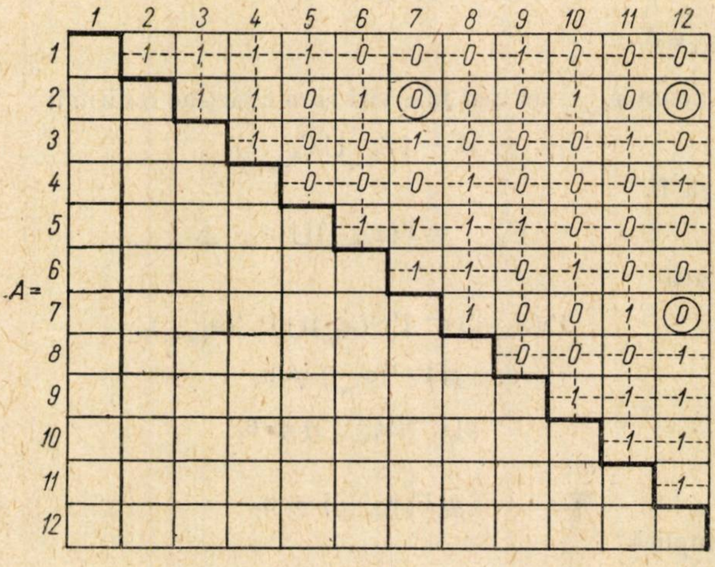
Continuînd procedeul pînă ce sînt luate în discuție toate vîrfurile graficului, obținem

$$N = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\}.$$

Se observă că graful $G = (X, \Gamma)$ al jocului Nim este graful asociat unei scheme cu redresori [2]. Vom da un algoritm pentru determinarea nucleului pe baza teoremei 3. În acest scop vom scrie matricea A a conductibilităților directe. Să ne ocupăm de jocul Nim care are în situația inițială două grămezi cu 2 și respectiv 3 elemente. Situațiile posibile ale acestui joc sînt :

(1)	23
(2)	22
(3)	21
(4)	20
(5)	13
(6)	12
(7)	11
(8)	10
(9)	03
(10)	02
(11)	01
(12)	00

Matricea conductibilităților directe este cea din figura 1.



$$A = \begin{array}{c|cccccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
\hline
1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \textcircled{0} & 0 & 0 & 1 & 0 & \textcircled{0} \\
3 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
4 & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
5 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
6 & & & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
7 & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & \textcircled{0} \\
8 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
9 & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\
10 & & & & & & & & & & & 1 & 1 \\
11 & & & & & & & & & & & & 1 \\
12 & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Fig. 1

Algoritmul de determinare a nucleului este dat în următorii pași :

a) Se pornește de la ultimul punct și se înlătură liniile ce au 1 pe coloana sa (se înlătură punctele care au conductibilitatea directă 1 cu 12).

b) Se taie și coloanele ce au respectiv numărul liniilor tăiate.

c) Se ia coloana cea mai apropiată de 12 care nu a fost tăiată și se procedează ca la *a*) și *b*).

După ce au fost luate în discuție toate coloanele, se constată că elementele matricii *A* rămase netăiate dau nucleul *N* al grafului, care în cazul de față este

$$N = \{2,\ 7,\ 12\}.$$

Am programat la mașina CIFA-3 jocul Nim avînd 3 grămezi cu respectiv 2, 5 și 7 elemente. Schema logică este dată în figura 2. După ce am scris situațiile jocului în codul adoptat, găsim nucleul grafului corespunzător jocului, cu ajutorul algoritmului dat mai sus. Punctele de nucleu le vom introduce în memorie, în celulele $I_1, \ldots, I_n$, iar mutările adversarului se introduc în celula Q.

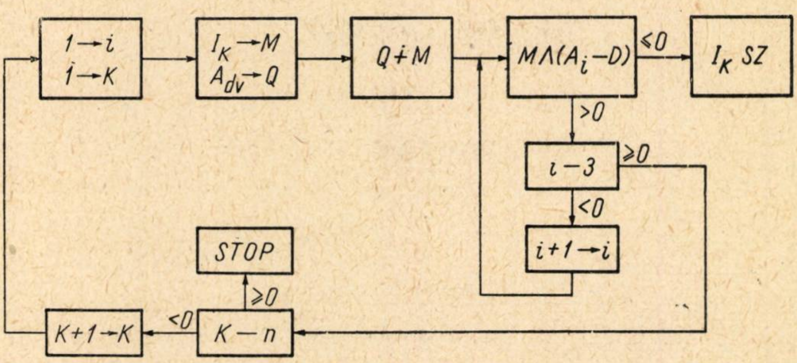


Fig. 2

Cînd adversarul face o mutare, mașina compară succesiv această tripletă cu toate punctele de nucleu și va muta în acel punct de nucleu care coincide pe două poziții octale cu numărul din Q.

Pentru detectarea pozițiilor de coincidență între punctele de nucleu și mutarea făcută de adversar am folosit suma logică și produsul logic.

Primită la redacție la 30 august 1963

BIBLIOGRAFIE

1. БЕРЖ К., *Теория графов*, Москва, 1962.
2. CONSTANTINESCU P., *Asupra analizei schemelor π și H cu elemente ventil.* Studii și cercetări matematice, **IX** (1958).

ASUPRA UNOR APLICAȚII ALE TEORIEI DISTRIBUȚIILOR ÎN MECANICA TEORETICĂ ȘI APLICATĂ

DE

KECS WILHELM

Fenomenele naturii care pot fi considerate ca fenomene mecanice se abordează pe baza legilor mecanicii formulate de Galileo Galilei și Isaac Newton.

Un loc important în cadrul acestor legi îl ocupă legea a II-a a mecanicii conform căreia forța $\vec{F}$ ce acționează asupra punctului material este proporțională cu accelerația imprimată, factorul de proporționalitate fiind masa punctului m.

Admițînd că vectorul de poziție $\vec{r}\,(t)$ al punctului material admite derivate continue de ordinul întîi și doi, legea a II-a a mecanicii se scrie :

$$\vec{F} = m. \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \cdot$$

Forța $\vec{F}$ de asemenea se presupune continuă în raport cu timpul, viteza și vectorul de poziție :

$$\vec{F} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) \cdot$$

În asemenea condiții, ecuațiile corespunzătoare se pot integra pe baza condițiilor inițiale.

O seamă de fenomene din natură nu respectă condițiile de continuitate a vitezei și accelerației, din care cauză încadrarea acestor fenomene în schemele mecanicii clasice se face anevoios, uneori nejustificat din punct de vedere matematic (fenomenul percuției — de exemplu).

Din cadrul acestor fenomene, o clasă importantă — din punct de vedere al aplicațiilor — o constituie acelea pentru care vectorul de poziție este o funcție continuă, iar viteza și accelerația posedă discontinuități de speța I, adică :

$$\vec{V}(t_0 - 0),\ \vec{V}(t_0 + 0),\ \dot{\vec{V}}(t_0 - 0),\ \dot{\vec{V}}(t_0 + 0)$$

există, condiții în care funcțiile $\vec{V}$ și $\dot{\vec{V}}$ sînt integrabile. Un exemplu de asemenea fenomen mecanic îl constituie mișcarea punctului material M pe drumul ABC (fig. 1), unde, pentru simplitate, vom considera frecarea nulă. În ipoteza considerării frecării, caracterul fenomenului mecanic nu se schimbă.

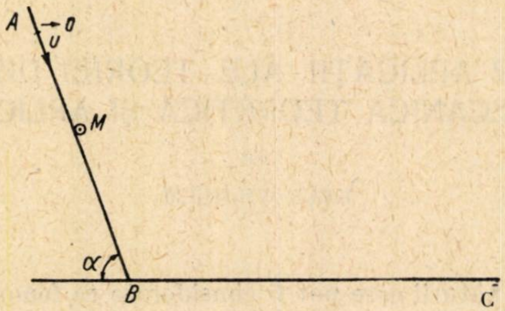


Fig. 1

După cum se constată din figură, traiectoria punctului material M este o funcție continuă, fiind compusă din segmentele de dreaptă AB și BC. Observăm că traiectoria nu admite derivate de ordinul întîi și doi în punctul B, din care cauză în acest punct nu putem determina viteza, accelerația și nici reacțiunea. Presupunînd că punctul material la momentul $t = 0$ se află în punctul A, iar la momentul $t = t_0$ în punctul B, atunci mărimea accelerației se poate scrie :

$$|\dot{\vec{V}}| = f(t) = \begin{cases} g.\sin\alpha & \text{pentru } 0 \leqslant t < t_0, \\ 0 & \text{pentru } t > t_0, \end{cases}$$

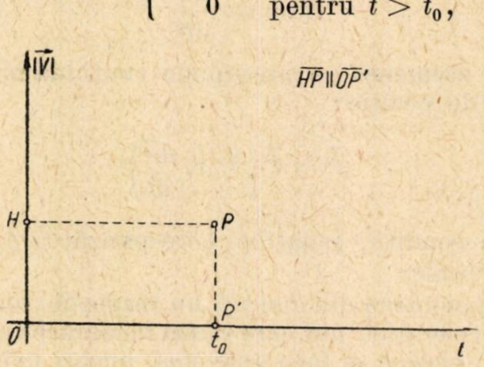


Fig. 2

g reprezentînd accelerația gravitațională. Graficul acestei funcții este redat în figura 2.

În figură segmentul $\overline{PP'} = g.\ \sin\ \alpha$ reprezintă saltul mărimii accelerației la momentul $t = t_0$. Din acest grafic ne convingem că accelerația posedă o discontinuitate de speța I, deoarece există :

$$\lim_{t \to t_0 - 0}.\ |\dot{\vec{V}}| = g \cdot \sin\ \alpha \text{ şi } \lim_{t \to t_0 + 0}.\ |\dot{\vec{V}}| = 0.$$

Să observăm că, pe lîngă discontinuitatea modulului, accelerația are şi o discontinuitate în direcție. Deci vectorul accelerației are un punct de discontinuitate de speța întîi la momentul t_0 :

$$\lim_{t \to t_0 + 0}.\ \dot{\vec{V}} = \vec{a}_1 = g \cdot \sin\ \alpha \cdot \vec{u}^0,$$

$\vec{u}^0$ fiind versorul situat pe AB şi orientat în sensul mişcării punctului după cum se arată în figura 1 :

$$\lim_{t \to t_0 + 0}.\ \dot{\vec{V}} = 0.$$

În ceea ce priveşte mărimea vitezei punctului se obține :

$$|\vec{V}| = \varphi(t) = \begin{cases} g \cdot \sin\ \alpha \cdot t \text{ pentru } 0 \leqslant t < t_0, \\ K \cdot g \cdot \sin\ \alpha \cdot t_0 \text{ pentru } t > t_0, \end{cases}$$

K fiind coeficientul de elasticitate, anume : $0 \leqslant K \leqslant 1$.

Pe baza legii inerției, viteza punctului pe drumul BC trebuie să fie egală cu viteza la dreapta în punctul B, adică egală cu $\vec{V}\ (t_0 + 0)$, dar această viteză nu se cunoaşte, din care cauză viteza punctului pe drumul BC este nedeterminată. Pentru a ridica această nedeterminare vom considera că în punctul de discontinuitate B are loc un fenomen de ciocnire şi deci viteza la dreapta $\vec{V}\ (t_0 + 0)$ o considerăm proporțională cu viteza la stînga $\vec{V}\ (t_0 - 0)$, adică $\vec{V}\ (t_0 + 0) = K . \vec{V}\ (t_0 - 0)$; K fiind coeficientul de elasticitate. În cazul $K = 1$, ciocnirea în B se consideră perfect elastică, iar mărimea vitezei în acest caz va fi o funcție continuă. De altfel această situație se adoptă de obicei în practică, dar nu reprezintă singura posibilitate şi nici cazul real întotdeauna.

Indiferent însă ce mărime se consideră pentru viteză pe intervalul BC, vectorul viteză posedă o discontinuitate de speța I în punctul B, deoarece există limitele :

$$\lim_{t \to t_0 - 0}.\ \vec{V}(t) = \vec{V}_1 \text{ şi } \lim_{t \to t_0 + 0}.\ \vec{V}(t) = \vec{V}_2.$$

Într-adevăr, $\vec{V}_1$ are suportul AB, iar $\vec{V}_2$ suportul BC, adică în direcție, în orice caz viteza are o discontinuitate de speța I, chiar dacă considerăm $K = 1$ — caz în care mărimea vitezei ar fi o funcție continuă

În figura 3 avem redate graficele mărimii vitezei în două cazuri, anume : $K = 1$ şi $0 < K < 1$.

Segmentele NP şi $N'P$ au valorile :

$$\overline{NP} = g \cdot \sin \alpha \cdot t_0$$

$$\overline{N'P} = K \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot t_0 ; \quad 0 < K < 1$$

iar

$$\overline{NH} \, || \, \overline{N'H'} \, || \, OP.$$

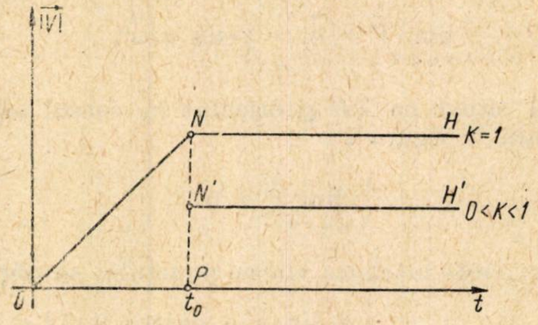


Fig. 3

Avînd în vedere dificultăţile ce se întîmpină în aplicarea teoremelor mecanicii datorită punctelor de discontinuitate, vom aborda aceste cazuri pe baza teoriei distribuţiilor.

Să notăm prin $\vec{r}\,(t)$ vectorul de poziţie al punctului material de masă m, funcţie pe care o considerăm continuă pe un interval oarecare.

Vom presupune că derivata de ordinul întîi şi al doilea a vectorului de poziţie $\vec{r}\,(t)$ (viteza şi acceleraţia) sînt funcţii continue în intervalul considerat cu excepţia unui număr finit de valori ale lui t, unde admit discontinuităţi de speţa I. Fie t_i ; $i = 1,2,\ldots n$, valorile parametrului t (timpul), unde viteza şi acceleraţia admit discontinuităţi de speţa I. În asemenea condiţii rezultă că există integralele :

$$\int_{T_1}^{T_2} \vec{V}\,(t)\,\mathrm{d}t \text{ şi} \int_{T_1}^{T_2} \dot{\vec{V}}\,(t)\,\mathrm{d}t, \quad T_1 < t_i < T_2.^{1)}$$

Vom nota prin $\frac{\delta \vec{r}}{\delta t}$ şi $\frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2}$ derivatele vectorului de poziţie $\vec{r}\,(t)$ în sensul teoriei distribuţiilor, iar prin $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ şi $\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$ derivatele lui $\vec{r}\,(t)$ în sensul obişnuit definite peste tot în intervalul considerat cu excepţia vecinătăţilor punctelor de discontinuitate.

---

1) Notaţiile folosite sînt cele din lucrarea [2].

Atunci, în virtutea unei teoreme din teoria distribuţiilor, avem :

$$\frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{i=1}^{n} \vec{s}_i \, \delta(t - t_i), \tag{1}$$

unde

$$\vec{s}_i = \vec{V}(t_i + 0) - \vec{V}(t_i - 0)$$

reprezintă saltul vitezei corespunzător punctului de discontinuitate t_i.

Deci, acceleraţia punctului în sensul teoriei distribuţiilor este egală cu distribuţia definită de acceleraţia punctului în sensul obişnuit — unde acesta există — mărită cu suma produselor salturilor vitezei prin distribuţia lui Dirac.

Introducem notaţiile :

$\vec{\alpha} = \dfrac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2}$ acceleraţia generalizată ;

$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$ acceleraţia în sens obişnuit ;

$\vec{\alpha}_c = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{s}_i \, \delta(t - t_i)$ acceleraţia complementară datorită discontinuităţilor.

Cu notaţiile adoptate, egalitatea (1) se va scrie :

$$\vec{\alpha} = \vec{a} + \vec{\alpha}_c. \tag{2}$$

Această egalitate înmulţită cu funcţia indefinit derivabilă m ne dă :

$$m \cdot \vec{\alpha} = m \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{\alpha}_c. \tag{3}$$

Expresiile $m \cdot \vec{\alpha}$, $m \cdot \vec{a}$ şi $m \cdot \vec{\alpha}_c$ le vom nota cu $\vec{\mathcal{F}}$, $\vec{F}$ şi $\vec{\mathcal{F}}_c$ numindu-le respectiv : forţă generalizată, forţă în sens obişnuit şi forţă complementară datorită discontinuităţilor.

Cu aceste notaţii, egalitatea (3) devine

$$\vec{\mathcal{F}} = \vec{F} + \vec{\mathcal{F}}_c.$$

O primă consecinţă a egalităţii (3) este şi aceea că, în vecinătatea punctelor de discontinuitate, impulsul forţelor obişnuite poate fi neglijat în raport cu impulsul forţei complementare datorită discontinuităţilor, deoarece :

$$\lim_{T_2 - T_1 \to 0} \int_{T_1}^{T_2} m \cdot \vec{a} \cdot \mathrm{d}t = 0.$$

Cum în fenomenele mecanice considerate intră și fenomenul ciocnirii (deoarece viteza și accelerația posedă discontinuități de speța I), rezultă că, la ciocnire, impulsul forțelor obișnuite se neglijează în raport cu impulsul forțelor complementare.

Din cele considerate pînă acum, reiese că dacă în punctele de discontinuitate se atașează forțele complementare, atunci legea a II-a a mecanicii poate fi utilizată fără nici o rezervă în ipoteza respectării condițiilor problemei, anume ca viteza și accelerația să posede discontinuități de speța I.

În continuare vom avea nevoie de teorema : 2)

Dacă $g(t)$ este o funcție continuă într-un interval dat cu excepția — eventual — a punctelor t_i ; $i = 1,2, 3,\ldots,n$, unde admite discontinuități de speța I, atunci egalitatea :

$$g(t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \delta(t - t_i) = 0 \qquad \text{(I)}$$

are loc dacă și numai dacă :

$$g(t) \equiv 0 \,; \quad \alpha_i = 0 \,; \quad i = 1,2,3,\ldots, n.$$

Să considerăm acum legea I a mecanicii, adică principiul inerției. Știm că acesta reprezintă criteriul după care constatăm dacă asupra unui punct material acționează sau nu forțe. Absența accelerației la un punct material implică, pe baza principiului inerției, că asupra punctului material nu acționează forțe.

În acest caz punctul material se mișcă rectiliniu și uniform. Vom admite și în cazul forței generalizate că $\vec{\mathcal{F}} = 0$ implică $\vec{\alpha} = 0$, adică

$$\vec{\alpha} = \vec{a} + \sum_{i=1}^{n} \vec{s}_i \, \delta(t - t_i) = 0,$$

---

2) Fie

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_i < \ldots < t_n,$$

ordinea punctelor de discontinuitate a funcției $g(t)$.

Integrînd relația (1) între limitele a, b astfel încît intervalul $[a, b]$ să conțină un singur punct și ținînd seama ca :

$$\int_a^b \alpha_i \, \delta(t - t_i) \, \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 \text{ pentru } t_i > b > a \text{ sau } t_i < a < b \\ \alpha_i \text{ pentru } a < t_i < b \end{cases}$$

obținem

$$\int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t + \alpha_i = 0 \,;$$

de aici avem

$$\lim_{b-a \to 0} \left[\int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t + \alpha_i \right] = \alpha_i = 0$$

$$a < t_i < b$$

deci $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n$ care înlocuite în (I) ne dă $g(t) \equiv 0$.

Cu aceasta teorema este demonstrată.

însă pe baza teoremei precedente avem $\vec{s}_i = 0$ şi $\vec{a} = 0$, adică punctul material execută o mişcare rectilinie şi uniformă.

Deci, principiul inerţiei se aplică fără nici o rezervă şi în cazul forţelor generalizate.

În ceea ce priveşte principiul al III-lea al mecanicii ,,principiul acţiunii şi reacţiunii'' acesta se aplică identic ca şi în cazul forţelor obişnuite.

Să considerăm impulsul forţei generalizate.

Vom numi impulsul forţei generalizate $\vec{\mathcal{F}}$ corespunzător intervalului $[T_1, T_2]$ integrala

$$\int_{T_1}^{T_2} \vec{\mathcal{F}} \cdot \mathrm{d}t.$$

Ţinînd seama de expresia forţei generalizate avem

$$\int_{T_1}^{T_2} \vec{\mathcal{F}} \cdot \mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2} m \cdot \vec{a} \cdot \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \int_{T_1}^{T_2} m \cdot \vec{s}_i \cdot \delta(t - t_i) \cdot \mathrm{d}t ; \quad T_1 < t_i < T_2.$$

Cele două integrale din membrul drept al egalităţii precedente există deoarece $\vec{a}$ este integrabilă, iar funcţia vectorială $m . \vec{s}_i$ este indefinit derivabilă, astfel încît avem

$$\int_{T_1}^{T_2} \vec{\mathcal{F}} \cdot \mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2} m \cdot \vec{a} \cdot \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} (m \cdot \vec{s}_i)_{t=t_i} = \int_{T_1}^{T_2} m \cdot \vec{a} \cdot \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} m . \vec{s}_i$$

adică impulsul forţei generalizate este suma impulsului forţelor obişnuite mărit cu suma salturilor cantităţilor de mişcare necorespunzătoare punctelor de discontinuitate. Dacă intervalul $[T_1, T_2]$ cuprinde un singur punct de discontinuitate şi este astfel încît $| T_2 - T_1 | < \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$ şi arbitrar de mic, atunci

$$\lim_{T_2 - T_1 \to 0} \int_{T_1}^{T_2} \vec{\mathcal{F}} \cdot \mathrm{d}t = m \cdot \vec{s}$$

fiind saltul vitezei corespunzător punctului de discontinuitate. Ultima egalitate încadrează şi fenomenul ciocnirii. Să observăm că în cazul fenomenului ciocnirii nu avem de-a face cu forţe obişnuite, ci cu forţe generalizate, mai precis cu o distribuţie $\delta(t - t_i)$.

În acest fel fenomenul ciocnirii nu mai constituie un fenomen special în mecanică, ci un fenomen obişnuit, legile mecanicii — după cum am văzut — se aplică fără rezerve cu ipoteza de a ne încadra în condiţiile enumerate. Deoarece forţa complementară apare datorită discontinuităţilor, o vom considera rezultanta salturilor reacţiunilor în punctele de discontinuitate.

Într-un asemenea punct de discontinuitate, saltul reacţiunii va fi :

$$\vec{R}_i = m \cdot \vec{s}_i \, \delta(t - t_i).$$

Saltul reacțiunii are direcția saltului vitezei în acel punct. În asemenea condiții putem considera că normala la saltul reacțiunii în punctul de discontinuitate definește direcția tangentei la traiectorie în acel punct.

Să calculăm de exemplu impulsul forței generalizate corespunzător intervalului cînd punctul material din exemplul considerat mai sus (fig. 1) parcurge drumul ABC.

În acest caz avem $T_1 = 0$; $T_2 = t_0$ și

$$\int_{T_1}^{T_2} \vec{\mathcal{F}} \cdot \mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \vec{\mathcal{F}} \cdot \mathrm{d}t = \int_0^{t_0} (m \cdot g \cdot \sin \alpha) \cdot \vec{u}^0 \, \mathrm{d}t + m \, (V_2 - V_1)$$

adică

$$\int_{T_1}^{T_2} \vec{\mathcal{F}} \cdot \mathrm{d}t = m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot t_0 \cdot \vec{u}^0 + m \, (\vec{V}_2 - \vec{V}_1).$$

Saltul reacțiunii corespunzător punctului B va fi

$$\vec{R} = m \cdot \vec{s} \cdot \delta \, (t - t_0),$$

iar direcția saltului reacțiunii este

$$\vec{s} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1.$$

În cazul cînd considerăm $K = 1$, adică în B are loc o ciocnire perfect elastică, atunci $| \vec{V}_1 | = | \vec{V}_2 |$; saltul reacțiunii va avea direcția bisectoarei unghiului ABC format de cele două plane.

Normala la direcția saltului reacțiunii în punctul B va defini direcția vitezei acestui punct precum și planul saltului reacțiunii care era nedeterminat.

Să definim acum lucrul mecanic al forței generalizate. Pentru a vedea modul în care trebuie să-l definim, vom considera că atît viteza cît și accelerația sînt funcții continue. În acest caz lucrul mecanic elementar este

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = m \cdot \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r};$$

integrînd avem

$$\int_{T_1}^{T_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{T_1}^{T_2} m \cdot \dot{\vec{V}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{T_1}^{T_2} m \cdot \dot{\vec{V}} \cdot \vec{V} \cdot \mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 \right) \mathrm{d}t$$

adică

$$\mathcal{L} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 \right) \mathrm{d}t,$$

această ultimă expresie a lucrului mecanic permite generalizarea noțiunii de lucru mecanic și pentru fenomenele mecanice unde viteza și accelerația posedă discontinuități de speța I.

Prin definiție vom considera lucrul mecanic al forței generalizate $\vec{\mathcal{F}}$ corespunzător intervalului $[T_1, T_2]$. Expresia

$$\mathcal{L}=\int_{T_1}^{T_2}\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{1}{2}\cdot m\cdot V^2\right)\cdot \mathrm{d}t,$$

unde derivarea de sub semnul integrală este considerată în sensul teoriei distribuțiilor. Pentru a arăta existența integralei, să observăm că funcția $\varphi(t)=\frac{1}{2}\cdot m\cdot V^2$ posedă numai discontinuități de speța I.

Într-adevăr, să calculăm limitele laterale în unul din punctele de discontinuitate a vitezei. Avem

$$\lim_{t\to t_i-0}\varphi(t)=\frac{m}{2}\left[\lim_{t\to t_i-0}V\right]^2=\frac{1}{2}\cdot m\cdot V^2\cdot(t_i-0)$$

$$\lim_{t\to t_i+0}\varphi(t)=\frac{m}{2}\left[\lim_{t\to t_i+0}V\right]^2=\frac{1}{2}\cdot m\cdot V^2\cdot(t_i+0),$$

ceea ce demonstrează că punctele de discontinuitate ale vitezei sînt puncte de discontinuitate și pentru funcția $\varphi(t)=\frac{1}{2}\, m\cdot V^2$. Pe de altă parte, funcția $\varphi(t)$ este peste tot derivabilă cu excepția punctelor de discontinuitate. În asemenea condiții vom obține o expresie similară cu (1) și anume:

$$\frac{\delta\varphi}{\delta t}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\sum_{i=1}^{n}s_{i\varphi}\,\delta(t-t_i), \tag{4}$$

$\frac{\delta\varphi}{\delta t}$ reprezintă derivata lui φ în sensul teoriei distribuțiilor, $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ derivata în sens obișnuit, iar $s_{i\varphi}=\frac{1}{2}\, m\cdot V^2(t_i+0)-\frac{1}{2}\cdot m\cdot V^2(t_i-0)$ reprezintă saltul funcției φ corespunzător punctului de discontinuitate t_i. Integrînd relația (4) obținem

$$\mathcal{L}=\int_{T_1}^{T_2}\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{1}{2}\cdot m\cdot V^2\right)\mathrm{d}t=\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\cdot m\cdot V^2\right)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\int_{T_1}^{T_2}\left[\frac{1}{2}\, mV^2(t_i+0)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\, mV^2\,(t_i-0)\right]\delta\,(t-t_i),$$

adică

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\, m\cdot V^2\right)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\cdot m\cdot V^2(t_i+0)-\frac{1}{2}\, m\cdot V^2(t_i-0)\right] \tag{5}$$

dar

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\, m\cdot V^2\right)\mathrm{d}t=\mathcal{L}_{\vec{F}}$$

reprezintă lucrul mecanic al forței obișnuite. Din această cauză vom considera că lucrul mecanic al forței complementare este

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\,m\cdot V^2(t_i+0)-\frac{1}{2}\,m\cdot V^2(t_i-0)\right]$$

și o vom nota prin $\mathcal{L}_{\vec{\mathcal{F}}}$.

De aceea expresia (5) se va scrie

$$\mathcal{L}_{\vec{\mathcal{F}}}=\mathcal{L}_{\vec{F}}+\mathcal{L}_{\vec{\mathcal{F}}_c}.$$

Deși integrala

$$\int_{T_1}^{T_2}\vec{\mathcal{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

nu are nici un sens din punct de vedere al teoriei distribuțiilor, totuși, pentru a nota lucrul mecanic al forței generalizate $\vec{\mathcal{F}}$ în sensul definit de noi, vom adopta acest simbol, adică

$$\mathcal{L}_{\vec{\mathcal{F}}}=\int_{T_1}^{T_2}\vec{\mathcal{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{r}.$$

În mod corespunzător, lucrul mecanic al forței complementare $\vec{\mathcal{F}}_c$ îl vom nota prin simbolul:

$$\int_{T_1}^{T_2}\vec{\mathcal{F}}_c\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

adică vom pune

$$\mathcal{L}_{\vec{\mathcal{F}}_c}=\int_{T_1}^{T_2}\vec{\mathcal{F}}_c\cdot\mathrm{d}\vec{r}.$$

Să observăm că lucrul mecanic al forței obișnuite $\vec{F}$ poate fi efectiv scris prin integrala

$$\int_{T_1}^{T_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

adică egalitatea

$$\mathcal{L}_{\vec{F}}=\int_{T_1}^{T_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

are valoare reală și nu simbolică.

Să calculăm lucrul mecanic al forței generalizate din exemplul considerat (fig. 1). Avem

$$\mathcal{L}_{\vec{\mathcal{F}}}=\int_{T_1}^{T_2}\vec{\mathcal{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{0}^{t_0}m\cdot g\cdot\sin\alpha\cdot\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\,m\cdot V_2^2-\frac{1}{2}\,m\cdot V_1^2$$

adică

$$\mathcal{L}_{\vec{\mathcal{F}}} = m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \overline{AB} + \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2 .$$

Eroarea ce se face — neconsiderînd punctul de discontinuitate — este saltul energiei :

$$\frac{1}{2} m \cdot V_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot V_1^2 ,$$

expresie ce se anulează numai dacă considerăm $K = 1$, adică $V_1 = V_2$.

Să considerăm acum integrala momentului forţei generalizate. Pentru a vedea modul în care va trebui să-l definim vom examina expresia integralei momentului forţei cînd viteza şi acceleraţia sînt funcţii continue.

Avem

$$M_0 \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m \cdot \dot{\vec{V}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\vec{r} \times m \vec{V})$$

adică

$$M_0 \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\vec{r} \times m \cdot \vec{V}),$$

această ultimă expresie a momentului permite generalizarea noţiunii de integrală a momentului forţei în raport cu originea axelor de coordonate şi pentru fenomenele mecanice unde viteza şi acceleraţia posedă discontinuităţi de speţa întîi.

Prin definiţie vom numi integrala momentului forţei generalizate $\vec{\mathcal{F}}$ în raport cu originea axelor expresia

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta}{\delta t} (\vec{r} \times m \vec{V}) \, \mathrm{d}t ,$$

unde derivarea de sub semnul integrală este considerată în sensul teoriei distribuţiilor. Ca şi în cazul lucrului mecanic observăm că funcţia $\vec{\psi} = \vec{r} \times m \vec{V}$ precum şi derivata $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$ posedă aceleaşi puncte de discontinuitate ca şi viteza.

Din această cauză avem

$$\frac{\delta \vec{\psi}}{\delta t} = \frac{\mathrm{d} \vec{\psi}}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^{n} \vec{s}_{i\psi} \cdot \delta (t - t_i), \tag{6}$$

unde

$$\vec{s}_{i\psi} = m \vec{r} (t_i) \times \vec{V} (t_i + 0) - m \cdot \vec{r} (t_i) \times \vec{V} (t_i - 0) = m \vec{r} (t_i) \times \vec{s}_i$$

reprezintă saltul vitezei corespunzător punctului de discontinuitate t_i.

Integrînd relația (6) obținem

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta}{\delta t}(\vec{r}\times m\vec{V})\,\mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times m\vec{V})\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n}\vec{r}(t_i)\times m\cdot\vec{s}_i \tag{7}$$

adică

$$\int_{T_1}^{T_2} M_0\vec{\mathcal{F}}\cdot\mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2} M_0\vec{F}\cdot\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n}\vec{r}(t_i)\times m\cdot\vec{s}_i$$

dar

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times m\cdot\vec{V})\,\mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2} M_0\vec{F}\cdot\mathrm{d}t$$

reprezintă integrala momentului forțelor obișnuite. Din această cauză vom considera că integrala momentului forței complementare este :

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{r}(t_i)\times m\cdot\vec{s}_i$$

și o vom nota prin

$$\int_{T_1}^{T_2} M_0\vec{\mathcal{F}}_c\,\mathrm{d}t$$

de aceea relația (7) se poate scrie

$$\int_{T_1}^{T_2} M_0\vec{\mathcal{F}}\,\mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2} M_0\vec{F}\,\mathrm{d}t + \int_{T_1}^{T_2} M_0\vec{\mathcal{F}}_c\cdot\mathrm{d}t.$$

Am adoptat pentru integrala momentului forței generalizate și integrala momentului forței complementare respectiv simbolurile :

$$\int_{T_1}^{T_2} M_0\vec{\mathcal{F}}\cdot\mathrm{d}t \text{ și } \int_{T_1}^{T_2} M_0\vec{\mathcal{F}}_c\,\mathrm{d}t$$

aceasta pentru a păstra notațiile clasice, deși integralele respective nu au nici un sens din punct de vedere al teoriei distribuțiilor. În ceea ce privește integrala momentului forței obișnuite, aceasta poate fi efectiv scrisă sub forma

$$\int_{T_1}^{T_2} M_0\vec{F}\,\mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{F})\,\mathrm{d}t.$$

Să calculăm integrala momentului forței generalizate din exemplul considerat în figura 1 ; avem

$$\int_{T_1}^{T_2}\vec{r}\times\vec{\mathcal{F}}\,\mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2}\vec{r}\times\vec{F}\mathrm{d}t + \vec{r}(t_0)\times m(\vec{V}_2-\vec{V}_1) = \overrightarrow{AB}\times m(\vec{V}_2-\vec{V}_1) = \overrightarrow{AB}\times m\vec{V}_2$$

deoarece am considerat originea sistemului de axe din punctul A. Deci

$$\overrightarrow{AM} = \vec{r} \text{ iar } \vec{r}(t_0) = \overrightarrow{AB};$$

cum $\vec{V}_1 = \vec{V}(t_0 - 0)$ are suportul AB, rezultă, în definitiv, că $\overrightarrow{AB} \times \vec{V}_1 = 0$ deci

$$\int_{T_1}^{T_2} \vec{r} \times \vec{\mathcal{F}}\, \mathrm{d}t = \overrightarrow{AB} \times m\vec{V}_2,$$

eroare ce se face neconsiderîndu-l punct de discontinuitate B.

Primită la redacţie la 30 august 1963

BIBLIOGRAFIE

1. ARSAC J., *Transformation de Fourier et théorie des distributions*. Paris, 1961.
2. MIKUSINSKI I. and SIKORSKI R., *Rozprawy matematyczne*. Warszawa, 1957.
3. NEKRASOV A. I., *Curs de mecanică teoretică*. vol. I şi II. Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.
4. SCHWARTZ L., *Théorie de distributions*. vol. I şi II, Paris, 1957.
5. SUSLOV C. K., *Mecanică raţională*. vol. I şi II, Ed. tehnică, Bucureşti, 1950.
6. VASILACHE S., *Calcul opérationnel algébrique des distributions à support dans* R_n^+ ; $n \geqslant 1$. Revue de math. pures et appliquées, IV.
7. VÂLCOVICI V., BĂLAN ŞT., VOINEA R., *Mecanică teoretică*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE DE TIP PARABOLIC

VI. PROBLEMA LUI CAUCHY PENTRU ECUAȚIA

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j} = F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial u}{\partial y^k}\right)$$

DE

MARCEL N. ROȘCULEȚ

INTRODUCERE

În această lucrare ne ocupăm de rezolvarea problemei lui Cauchy pentru ecuația

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j} = F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial u}{\partial y^k}\right) = 0 \qquad (\alpha)$$

cu operatorul

$$a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}, \qquad i, j = 1,2,\ldots, n$$

de tip eliptic.

Tratăm în prima parte a lucrării în mod amănunțit ecuația liniară

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j} + 2b_i\frac{\partial u}{\partial x^i} + cu = 2e_k\frac{\partial u}{\partial y^k} + f, \qquad (\beta)$$

$i, j = 1,2,\ldots, n$; $k = 1,2,\ldots, m$, m și n două numere naturale oarecare, cu coeficienții a_{ij}, b_i, c, e_k, f funcții de $m + n + 1$ variabile x^i, y^k, t în următoarele ipoteze

1) a_{ij}, b_i, c sînt funcții analitice în variabilele x^i și regulate în variabilele y^k, t într-un domeniu $\mathcal{D}$ din spațiul cu $m + n + 1$ dimensiuni, iar e_k, f regulate în toate variabilele.

2) Matricea $n \times n$, $\|a_{ij}\|$ este nesingulară în $\mathcal{D}$.

3) Operatorul

$$a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \, \partial x^j}$$

este de tip eliptic în $\mathcal{D}$.

De fapt ecuaţia (β) este forma de studiu aleasă aici pentru ecuaţia de tip parabolic în sens larg [1][1]).

$$\gamma_{MN} \frac{\partial^2 u}{\partial x^M \, \partial x^N} + 2\,\delta_M \frac{\partial u}{\partial x^M} + \varepsilon u = f, \qquad M, N = 1,2,\ldots, s$$

în care rangul matricei $\|\gamma_{MN}\|$ este p cu $s - p > 1$.

Soluţia problemei lui Cauchy a fost găsită folosind metoda lui J. Hadamard [2] pentru ecuaţia

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + 2b_i \frac{\partial u}{\partial x^i} + cu = f \tag{γ}$$

şi metoda aproximaţiilor succesive pentru ecuaţia (β).

În capitolul V se rezolvă problema lui Cauchy pentru ecuaţia (α) în următoarele ipoteze :

1′) coeficienţii a_{ij} îndeplinesc condiţiile de la punctele 1), 2) şi 3) în $\mathcal{D}$.

2′) Funcţia $F\,(x,y,t,u,v,w)$ continuă în cele $2n + 2m + 2$ argumente este mărginită pentru

$$|\,u - u_0\,| < L, \; |\,v_i - v_{i0}\,| < L, \; |\,w_k - w_{k0}\,| < L \tag{δ}$$

şi orice $(x, y, t) \in \mathcal{D}$.

3′) Există $m + n + 1$ numere pozitive A, B_i, C_k, $i = 1,2, \ldots, n$; $k = 1,2,\ldots, m$, astfel că pentru orice pereche de valori

$$(u_1,\; v_{1i},\; w_{1k}),\; (u_2,\; v_{2i},\; w_{2k})$$

situate în vecinătatea (δ) să avem

$$\begin{gathered} |F\,(x, y, t, u_1, v_1, w_1) - F\,(x, y, t, u_2, v_2, w_2)| < \\ < A\,|\,u_2 - u_1\,| + B_i\,|\,v_{2i} - v_{1i}\,| + C_k\,|\,w_{2k} - w_{1k}\,| \end{gathered}$$

pentru orice $(x, y, t) \in \mathcal{D}$.

Să facem acum o precizare asupra suprafeţei S (varietatea cu $n + m$ dimensiuni) care poartă datele problemei lui Cauchy.

Într-un memoriu anterior [3] am rezolvat problema lui Cauchy pentru ecuaţia (γ) şi în discuţia soluţiei obţinute am arătat că este necesar ca S să fie frontierea unui volum Ω, generat de un domeniu Δ

---

[1]) P. 57.

din spaţiul cu n dimensiuni $x^1, \ldots, x^n$, prin translaţie de-a lungul axei ot, din care bineînţeles se va scoate porţiunea din planul $t = \tau$, [3] [2]).

Avînd în vedere acest fapt, suprafaţa S a fost luată ca frontiera volumului Ω generat de un domeniu Δ din spaţiul cu n dimensiuni $x^1, x^2, \ldots, x^n$, prin translaţie de-a lungul axelor oy^k, ot, în sensul crescător al coordonatelor şi din care s-a scos porţiunea planului $t = \tau$.

CAPITOLUL I

REZULTATE PREGĂTITOARE

§ **1. Date iniţiale.** Ne ocupăm de ecuaţia cu derivate parţiale de tip parabolic

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + 2b_i \frac{\partial u}{\partial x^i} + cu = 2e_k \frac{\partial u}{\partial y^k} + f, i, j=1,2,\ldots,n\,;\; k=1,2,\ldots,m. \tag{1}$$

După cum am spus, vom presupune că

1) a_{ij}, b_i, c, e_k, f sînt funcţii de $m + n + 1$ variabile într-un domeniu $\mathcal{D}$ din spaţiul cu $m + n + 1$ dimensiuni $x^1, x^2, \ldots x^n$, $y^1, y^2, \ldots, y^m$, t care conţine punctul $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \tau$. Funcţiile a_{ij}, b_i, c sînt presupuse analitice în raport cu variabilele x^i şi regulate în raport cu variabilele y^k, t în $\mathcal{D}$. Funcţiile e_k şi f sînt regulate în raport cu toate variabilele în $\mathcal{D}$.

2) Matricea $||a_{ij}||$ este nesingulară în $\mathcal{D}$.

3) Operatorul $a_{ij} \dfrac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$ este de tip eliptic în $\mathcal{D}$.

§ **2. Caracteristici. Bicaracteristici.** Pentru ecuaţia (1) ecuaţia caracteristicilor este dată de [4] [3])

$$L(p, x, y, t) = a_{ij} p_i p_j = 0, \qquad p_i = \frac{\partial \omega}{\partial x^i} \tag{2}$$

forma pătratică L fiind pozitiv definită în $\mathcal{D}$.

Caracteristicile ecuaţiei (2) sînt bicaracteristicile ecuaţiei (1) şi sînt date de sistemul

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial L}{\partial p_i} = a_{ij} p_j, \tag{3}$$

$$\frac{dy^k}{ds} = 0, \frac{dt}{ds} = 0. \tag{4}$$

---

[2]) P. 251.

[3]) P. 438.

şi

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x^i} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^i} p_i p_j, \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial y^k} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial y^k} p_i p_j, \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} p_i p_j, \end{aligned} \tag{5}$$

unde $i, j = 1,2,\ldots, n$; $k = 1,2,\ldots,m$. Ecuaţiile (3) şi (4) arată că bicaracteristicile se găsesc pe varietatea cu n dimensiuni

$$\begin{aligned} y^k &= \eta_k, \qquad k = 1,2,\ldots, m, \\ t &= \tau. \end{aligned} \tag{6}$$

Vom numi varietatea (6) *conoidul caracteristicilor* cu vîrful în punctul $M_0(\xi, \eta, \tau)$, deoarece toate bicaracteristicile ecuaţiei (1) care trec prin punctul M_0 sînt situate pe varietatea liniară (6).

Conoidul caracteristicilor din cazul ecuaţiilor de tip hiperbolic normal [2] [4]) degenerează în cazul de faţă în varietatea liniară (6).

§ **3. Cilindroidul geodezicelor.** Fie [5] [5])

$$d\sigma^2 = g_{MN}\, dx^M dx^N, \qquad M, N = 1,2,\ldots, n \tag{7}$$

un spaţiu Riemann singular cu matricea $\| g_{MN} \|$ de rang $r = n - s$; în această situaţie $d\sigma^2$ se scrie

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}\, \omega^i \omega^j, \qquad i, j = 1,2,\ldots, r \tag{8}$$

cu $| \gamma_{ij} | \neq 0$ şi

$$\omega^i = e^i_M\, dx^M \tag{9}$$

liniar independente, adică matricea $r \times n, \| e^i_M \|$ este de rang r.

Dacă înlocuim pe (9) în (8) obţinem

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}\, e^i_M e^j_N\, dx^M dx^N,$$

prin urmare

$$g_{MN} = e^i_M e^j_N \gamma_{ij}. \tag{10}$$

Sistemul de ecuaţii

$$e^i_M \zeta^M = 0 \tag{11}$$

admite ∞^s soluţii de forma

$$\zeta^M = \eta^\alpha b^M_\alpha, \qquad \alpha = 1,2,\ldots, s, \tag{12}$$

---

[4]) P. 83.
[5]) P. 35.

unde η^α sînt arbitrare și b^M_α sînt s sisteme de soluții liniar independente ale sistemului (11), deci

$$e^i_M\, b^M_\alpha = 0. \tag{13}$$

Din (10) și (13) rezultă că

$$g_{MN}\, b^M = 0 \tag{14}$$

deoarece din (13) obținem succesiv

$$e^j_N\, e^i_M\, b^M_\alpha = 0, \quad \gamma_{ij}\, e^j_N\, e^i_M\, b^M_\alpha = 0, \quad g_{MN}\, b^M_\alpha = 0.$$

Dacă considerăm funcția lui Lagrange

$$L = \frac{1}{2} g_{MN}\, \dot{x}^M \dot{x}^N, \qquad \dot{x}^M = \frac{\mathrm{d}x^M}{\mathrm{d}s} \tag{15}$$

și

$$p_M = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^M} = g_{MN}\, \dot{x}^N \tag{16}$$

avem

$$p_M\, b^M_\alpha = 0 \tag{17}$$

deoarece conform lui (14) avem succesiv

$$g_{MN}\, b^M_\alpha = 0, \quad \dot{x}^N g_{MN}\, b^M_\alpha = 0, \quad p_M\, b^M_\alpha = 0$$

însă $p_M = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^M}$, de unde urmează că L este o integrală a sistemului

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^M}\, b^M_\alpha = 0. \tag{17'}$$

Fie ecuațiile geodezicelor

$$L_M = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^M}\right] - \frac{\partial L}{\partial x^M} = 0$$

sau

$$L_M = g_{MN}\, \ddot{x}^N + \begin{bmatrix} H & K \\ & M \end{bmatrix} \dot{x}^H \dot{x}^K;$$

combinațiile liniare

$$L_\alpha = L_M\, b^M_\alpha = 0$$

conform lui (16) și (17′) sînt echivalente cu

$$b^M_\alpha \begin{bmatrix} H & K \\ & M \end{bmatrix} \mathrm{d}x^H\, \mathrm{d}x^K = 0, \tag{18}$$

unde $\begin{bmatrix} H\ K \\ M \end{bmatrix}$ este simbolul lui Christoffel construit cu coeficienţii lui (7), prin urmare *geodezicele spaţiului Riemann singular* (7) *se găsesc pe varietatea* (*18*) [6]6), [5]7).

Fie acum spaţiul Riemann singular asociat ecuaţiei (1)

$$\mathrm{d}\sigma^2 = A_{ij}\, \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j, \qquad (19)$$

unde A_{ij} sînt minorii normalizaţi ai determinantului $| a_{ij} |$ pe care l-am presupus diferit de zero în $\mathcal{D}$. Dacă punem $x_{n+k} = y_k$, $k = 1,2,\dots, m$; $x_{n+m+1} = t$, rezultatele de mai sus se transformă în

$$g_{MN} = 0$$

dacă $M > n$ sau $N > n$ şi

$$A_{ij} = \gamma_{ij}, \qquad i, j = 1,2,\dots, n$$

iar

$$e^i_M = \delta^i_M, \quad i = 1, 2,\dots, n, \quad (\delta^i_i = 1,\ \delta^i_j = 0)$$

şi

$$e^j_M = 0, \quad j > n$$

deci pentru orice $M, N = 1, 2,\dots, n+m+1$ avem

$$g_{MN} = A_{MN}.$$

Pentru sistemul de ecuaţii (13) putem lua sistemul de soluţii

$$b^M_\alpha = 0, \quad \alpha \neq M, \quad b^\alpha_\alpha = 1, \quad \alpha = n+1,\dots, n+m+1$$

iar soluţiile sistemului (11) sînt date de

$$\zeta^M = b^M_\alpha$$

cu $b^M_\alpha = 0$, $b^\alpha_\alpha =$ arbitrare, $\alpha = n+1$, $n+2,\dots, n+m+1$.

Ţinînd seamă de acest rezultat, expresiile

$$b^M_\alpha \cdot \begin{bmatrix} H\ K \\ M \end{bmatrix}$$

devin

$$b^M_M \cdot \begin{bmatrix} H\ K \\ M \end{bmatrix}, \quad M = n+1,\ n+2,\dots, n+m+1, \qquad (20)$$

şi revenind la variabilele x, y, t, *urmează că cilindroidul geodezicelor este dat de*

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial A_{ij}}{\partial y^k} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} = 0, & \\[2ex] \dfrac{\partial A_{ij}}{\partial t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} = 0, & \begin{array}{l} k = 1,2,\dots, m, \\ i, j = 1,2,\dots, n. \end{array} \end{array} \qquad (21)$$

---

6) P. 259.

7) P. 37.

§ **4. Funcţiile** H **şi** L. Funcţia $H(\dot{x}, x, y, t)$ este dată de

$$H(\dot{x}, x, y, t) = A_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}; \tag{22}$$

avem

$$H(\dot{x}, x, y, t) = L(p, x, y, t)$$

şi

$$p_M = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial \dot{x}^M}. \tag{23}$$

Să arătăm că de-a lungul bicaracteristicilor avem

$$\frac{\partial H}{\partial x^M} = -\frac{\partial L}{\partial x^M}, \qquad M = 1,2,\ldots, m+n+1. \tag{24}$$

Pentru $M = 1,2,\ldots, n$, calculele se efectuează ca pentru un spaţiu Riemann nesingular. Ne mai rămîne în cazul nostru să arătăm numai că

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y^k} &= -\frac{\partial L}{\partial y^k}, \qquad k = 1,2,\ldots, m, \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned}\right. \tag{24'}$$

Din (21) avem

$$\frac{\partial H}{\partial y^k} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\partial A_{ij}}{\partial y^k} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial y^k} \cdot \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} a_{je} p_e$$

însă din

$$A_{ij} a_{ij} = \delta_{ij}$$

rezultă

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial y^k} a_{ij} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial y^k} A_{ij} = 0$$

prin urmare putem scrie

$$\frac{\partial H}{\partial y^k} = -\frac{\partial a_{je}}{\partial y^k} A_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} p_e = -\frac{\partial a_{je}}{\partial y^k} p_j p_e = -\frac{\partial L}{\partial y^k}.$$

Raţionamentul este acelaşi pentru variabila t, deci oricare ar fi variabilele x^i, y^k sau t avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x^i} &= -\frac{\partial L}{\partial x^i}, \\ \frac{\partial H}{\partial y^k} &= -\frac{\partial L}{\partial y^k}, \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \tag{25}$$

Cu ajutorul funcţiei H urmează că ecuaţiile (21) ale cilindroidului geodezicelor se scriu

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y^k} &= 0, \qquad k = 1,2,\ldots, m \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \tag{25'}$$

§ 5. Geodezice. În [5] [8]) se arată că ecuaţiile geodezicelor sînt date de

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = -\frac{\partial T}{\partial p_i} - \lambda^i_\alpha \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s},$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s} = -\frac{\partial T}{\partial x^i} + \frac{\partial \lambda^i_\alpha}{\partial x^j} p_j \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}$$

şi

$$b^M_\alpha \begin{bmatrix} H & K \\ & M \end{bmatrix} \mathrm{d}x^M \, \mathrm{d}x^N = 0$$

cu $\alpha = p+1,\ldots, p+q$, $H, K, M = 1, 2, \ldots, n$; $i, j = 1, 2, \ldots, r$ şi

$$T = \frac{1}{2} \gamma^{ij} p_i p_j, \quad e^i_\alpha \equiv \lambda^i_\alpha = b^i_\alpha.$$

Revenind la datele problemei noastre avem

$$\gamma_{ij} = A_{ij}, \quad \gamma^{ij} = a_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} p_i p_j = \frac{1}{2} L(p, x, y, t)$$

---

[8]) P. 41.

şi ecuaţiile geodezicelor sînt

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = a_{ij}p_j, \quad \frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}s} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x^i}, \quad \frac{\mathrm{d}p_{n+k}}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial y^k},$$

$$\frac{\mathrm{d}p_{n+m+1}}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y^k} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

cu $i, j = 1,2,\ldots, n$; $k = 1,2,\ldots, m$ şi cu $p_{n+k} = \dfrac{\partial \omega}{\partial y^k}$, $p_{n+m+1} = \dfrac{\partial \omega}{\partial t}$.

Deoarece, conform lui (24), avem

$$\frac{\partial H}{\partial y^k} = -\frac{\partial L}{\partial y^k}, \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

obţinem forma finală a ecuaţiilor geodezicelor spaţiului Riemann singular asociat ecuaţiei (1):

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = a_{ij}p_j, \quad \frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}s} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x^i}, \quad \frac{\mathrm{d}p_{n+k}}{\mathrm{d}s} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}p_{n+m+1}}{\mathrm{d}s} = 0\end{gathered} \tag{26}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, m.$$

Dacă considerăm acum şi geodezicele spaţiului Riemann nesingular

$$\mathrm{d}\sigma^2 = A_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \tag{27}$$

unde y^k, t sînt constante, anume

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = a_{ij}p_j, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x^i}, \qquad i, j = 1,2,\ldots, n$$

se observă *că geodezicele spaţiului Riemann singular care unesc două puncte situate pe varietatea liniară*

$$y^k = \eta_k, \qquad k = 1,2,\ldots, m$$

$$t = \tau$$

coincid cu geodezicele spaţiului Riemann nesingular (*27*). Acest rezultat îl vom folosi la capitolul următor.

§ **6. Funcţia Γ $(x, y, t\,;\,\xi)$.** Să considerăm spaţiul Riemann nesingular

$$d\sigma^2 = A_{ij} dx^i dx^j, \tag{27}$$

unde A_{ij} $(x^1, x^2, \ldots, x^n\,;\, y^1, y^2, \ldots, y^m,\, t)$ sînt minorii normalizaţi ai lui a_{ij} din matricea nesingulară $\|a_{ij}\|$ definită în $\mathcal{D}$, variabilele y^k, t fiind considerate parametrii. Prin $\Gamma\,(x, y, t\,;\,\xi)$ se înţelege pătratul distanţei geodezice cu elementul de arc definit de (27). Dacă operatorul

$$\widetilde{E} \equiv a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i\, \partial x^j}$$

este de tip eliptic în $\mathcal{D}$, distanţa geodezică este nulă pe mulţimea $\Delta \cap \mathcal{D}$, unde Δ este definită de $x^1 = \xi_1,\ x^2 = \xi_2, \ldots,\ x^n = \xi_n$. Vom presupune că pentru orice $(x, y, t\,;\,\xi) \in \mathcal{D} - \mathcal{D} \cap \Delta$ avem

$$\Gamma\,(x, y, t\,;\,\xi) > 0.$$

Dacă operatorul E este de tip hiperbolic normal, ecuaţia

$$\Gamma\,(x, y, t\,;\,\xi) = 0 \tag{28}$$

defineşte un cilindroid care pentru $y^k = \eta_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $t = \tau$ este un conoid, anume conoidul caracteristic al spaţiului Riemann nesingular (27) cu vîrful în punctul (ξ, η, τ).

Funcţia $\Gamma\,(x, y, t\,;\,\xi)$ se bucură în raport cu variabilele x, ξ de aceleaşi proprietăţi stabilite de J. Hadamard în [3], şi la care vom face apel în capitolul următor.

CAPITOLUL II

SOLUŢIA FUNDAMENTALĂ

§ **1. Ecuaţia adjunctă.** Ecuaţia adjunctă a ecuaţiei

$$E(u) \equiv a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i\, \partial x^j} + 2b_i \frac{\partial u}{\partial x^i} + cu + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

este dată de

$$\mathcal{E}\,(v) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^i\, \partial x^j}\,(a_{ij} v) - 2\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,(b_i\, v) + c\,v - \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

şi are forma

$$\mathcal{E}(v) \equiv a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x^i\, \partial x^j} + 2b'_i \frac{\partial v}{\partial x^i} + c' u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1'}$$

cu

$$b'_i = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^j} - b_i$$

$$c' = \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x^i \partial x^j} - 2\frac{\partial b_i}{\partial x^i} + c.$$

Avem identitatea

$$vE(u) - u\,\mathcal{E}(v) \equiv \frac{\partial P_i}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t}(uv), \tag{2}$$

unde

$$P_i = v\,a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x^k} - u\,a_{ik}\frac{\partial v}{\partial x^k} + uv\left(2b_i - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^k}\right). \tag{3}$$

§ 2. Forma soluției fundamentale. Vom căuta pentru ecuația

$$\mathcal{F}(u) = a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + 2b'_i\frac{\partial u}{\partial x^i} + c'u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{4}$$

unde a_{ij}, b'_i, c' sînt funcții analitice în vecinătatea punctului ($\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \tau$) în raport cu variabilele $x^1, x^2, \ldots, x^n$, și regulate în raport cu variabilele $y^1, y^2, \ldots, y^m, t$, o soluție particulară $v(x, y, t)$ de forma următoare

$$v = V(t-\tau)^\beta \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\Gamma}{t-\tau}\right), \quad t-\tau > 0, \quad \Gamma > 0, \quad v = 0, \quad t-\tau \leqslant 0; \tag{5}$$

condițiile pe care trebuie să le îndeplinească V le vom stabili la paragraful următor. Avem

$$\frac{\partial v}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial V}{\partial x^i}(t-\tau)^\beta - \frac{V}{\alpha}(t-\tau)^{\beta-1}\frac{\partial\Gamma}{\partial x^i}\right]\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\frac{\Gamma}{t-\tau}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Bigl[\frac{\partial V}{\partial t}(t-\tau)^\beta + \beta(t-\tau)^{\beta-1}V + \frac{1}{\alpha}V\Gamma(t-\tau)^{\beta-2} -$$

$$- \frac{V}{\alpha}(t-\tau)^{\beta-1}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\Bigr|\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\Gamma}{t-\tau}\right)$$

și

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} = \Bigl[\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}(t-\tau)^\beta - \frac{\partial V}{\partial x^j}\frac{\partial\Gamma}{\partial x^i}\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^{\beta-1} - \frac{V}{\alpha}(t-\tau)^{\beta-1}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^i \partial x^j} -$$

$$- \frac{1}{\alpha}(t-\tau)^{\beta-1}\frac{\partial V}{\partial x^i}\frac{\partial\Gamma}{\partial x^j} + \frac{1}{\alpha^2}V(t-\tau)^{\beta-2}\frac{\partial\Gamma}{\partial x^i}\frac{\partial\Gamma}{\partial x^j}\Bigr|\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\Gamma}{t-\tau}\right),$$

de derivatele în raport cu y^k nu avem nevoie. Înlocuind în (4) obţinem

$$\mathcal{F}(v) \equiv [\lambda(t-\tau)^2 + \mu(t-\tau) + \nu]\,(t-\tau)^{\beta-2} \exp\left(-\frac{\Gamma}{\alpha(t-\tau)}\right)$$

cu

$$\begin{aligned} \lambda &= a_{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial x^i\,\partial x^j} + 2b'_i\frac{\partial V}{\partial x^i} - \frac{\partial V}{\partial t} + c'V = \mathcal{F}(V),\\ \mu &= -\frac{1}{\alpha}a_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x^i}\frac{\partial \Gamma}{\partial x^j} + \frac{\partial V}{\partial x^j}\frac{\partial \Gamma}{\partial x^i}\right) - \frac{1}{\alpha}a_{ij}V\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^i\,\partial x^j} - \\ &\quad - \frac{2}{\alpha}b'_i V\frac{\partial \Gamma}{\partial x^i} + \frac{1}{\alpha}V\frac{\partial\Gamma}{\partial t} - \beta V,\\ \nu &= \frac{1}{\alpha^2}a_{ij}V\frac{\partial\Gamma}{\partial x^i}\frac{\partial\Gamma}{\partial x^j} - \frac{1}{\alpha}V\Gamma. \end{aligned} \tag{6}$$

Funcţia Γ ataşată spaţiului Riemann (19), Cap. I, în raport cu variabilele x^i (t şi y^k sînt considerate parametri) are următoarele proprietăţi [3] [9])

$$a_{ij}\frac{\partial\Gamma}{\partial x^i}\frac{\partial\Gamma}{\partial x^j} = 4\Gamma, \qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial x^i} = 2\,\mathrm{sp}_i, \tag{7}$$

s fiind arcul de geodezică al acestui spaţiu; de-a lungul arcului de geodezică avem şi [2] [10])

$$a_{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial\Gamma}{\partial x^i}\right) = 4s\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} \tag{8}$$

încît dacă luăm $\alpha = 4$ avem

$$\begin{aligned} \nu &= 0\\ \mu &= -s\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} - \frac{1}{4}[\mathcal{F}(\Gamma) + 4\beta]\cdot V\\ \lambda &= \mathcal{F}(v) \end{aligned} \tag{9}$$

iar dacă înlăturăm termenul $(t-\tau)^{\beta-1}\exp\left(-\frac{\Gamma}{4(t-\tau)}\right)$ ecuaţia care determină pe V se scrie

$$s\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{4}(\mathcal{F}(\Gamma) + 4\beta)V - (t-\tau)\mathcal{F}(V) = 0. \tag{10}$$

Funcţia V trebuie să fie regulată în vecinătatea punctului $M_0(x^i = \xi_i,\ y^k = \eta_k,\ t = \tau)$ şi să nu se anuleze în acest punct.

---

[9]) P. 90.
[10]) P. 91.

În punctul M_0 avem

$$\mathcal{F}(\Gamma)\Big|_{M_0} = 2n$$

deoarece

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^i\, \partial x^j}\Big|_{M_0} = A_{ij}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial x^i}\Big|_{M_0} = 0\,; \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial t}\Big|_{M_0} = 0, \quad \Gamma(M_0) = 0 \tag{11}$$

încît (10) devine în punctul M_0

$$s\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} + V\left(\beta + \frac{n}{2}\right) = 0.$$

Pentru ca V să fie regulată în punctul M_0 este necesar ca

$$\beta + \frac{n}{2} = 0,$$

relație care determină pe β. Se obține astfel forma finală a ecuației care dă pe V

$$s\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{4}(\mathcal{F}(\Gamma) - 2n)\,V - (t - \tau)\,\mathcal{F}(V) = 0. \tag{12}$$

§ 3. Determinarea funcției V. Funcția $V = V\,(x^1, x^2, \ldots, x^n\,; y^1, y^2, \ldots, y^m, t, ; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ trebuie să fie o soluție particulară a ecuației (12) care să îndeplinească următoarele condiții

a) Pentru $s = 0$ să se reducă la o constantă diferită de zero, deci pe conoidul caracteristicilor $V =$ constant.

b) Cînd $t \to \tau + 0$ și $y^k \to \eta_k + 0$ sau numai $t \to \tau + 0$, V tinde uniform către o valoare finită diferită de zero.

c) Pentru $\tau < t < t_1$, $\eta_k < y^k < y_1^k$, cu t_1, y_1^k, convenabil aleși astfel ca $(x, y, t) \in \mathcal{D}$, funcția V să fie continuu derivabilă de două ori. Cum funcția V va fi obținută printr-o serie de funcții, urmează că seria respectivă trebuie să fie uniform convergentă împreună cu derivatele sale pînă la ordinul doi într-o vecinătate a punctului M_0.

Pentru V luăm o expresie de forma

$$V = V_0 + (t - \tau)^{m_1} V_1 + (t - \tau)^{m_2} V_2 + \ldots + (t - \tau)^{m_r} V_r + \ldots, \tag{13}$$

unde

a') numerele m_r sînt reale;

b') funcțiile V_r sînt astfel încît

$$\lim_{t \to \tau + 0} (t - \tau)^{m_r} V_r = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots$$

sau

$$\lim_{\substack{t \to \tau+0 \\ y^k \to \eta_k + 0}} (t - \tau)^{m_r} V_r = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots$$

$$c') \ \lim_{s \to 0} V_r = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots$$

d') iar pentru funcţia V_0

$$\lim_{t \to \tau+0} V_0 \neq 0, \ \infty,$$

$$\lim_{\substack{t \to \tau+0 \\ y^k \to \eta_k + 0}} V_0 \neq 0, \ \infty,$$

$$\lim_{s \to 0} V_0 \neq 0, \ \infty.$$

Procedînd ca în [3][11]), obţinem pentru V_0 ecuaţia

$$s \frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}s} + V_0 \left(\frac{\mathcal{F}(\Gamma)}{4} - \frac{n}{2} \right) = 0 \tag{14}$$

care ne dă

$$V_0 = \frac{1}{\sqrt{\Delta(\xi, y, t)}} \exp \left[- \int_0^s \frac{1}{s} \left(\frac{\mathcal{F}(\Gamma)}{4} - \frac{n}{2} \right) \mathrm{d}s \right], \tag{15}$$

unde s este arcul de geodezică al spaţiului Riemann nesingular (Cap. I, § 3, (19)), y^k, t fiind consideraţi parametri iar

$$\Delta(\xi, y; t) = \left| a_{ij} \right|_{x^k = \xi_k},$$

deci avem

$$\lim_{s \to 0} V_0 = \frac{1}{\sqrt{\Delta(\xi, y, t)}}$$

$$\lim_{\substack{s \to 0 \\ t \to \tau + 0 \\ y^k \to \eta_k + 0}} V_0 = \frac{1}{\sqrt{\Delta(\xi, \eta, \tau)}}$$

şi pentru că a_{ij} sînt continue în punctul M_0, avem

$$V_0(M_0) = \frac{1}{\sqrt{\Delta(\xi, \eta, \tau)}}. \tag{16}$$

---

[11]) P. 238.

Pentru a afla pe V_1 înlocuim în (12) pe V cu

$$V_0 + (t-\tau)^{m_1} V_1$$

ceea ce ne dă

$$\begin{aligned} & s\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}s} + V_0\left[\frac{\mathcal{F}(\Gamma)}{4} - \frac{n}{2}\right] - (t-\tau)\,\mathcal{F}(V_0) + m_1 (t-\tau)^{m_1} V_1 + \\ & + (t-\tau)^{m_1}\Big[s\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}s} + V_1 \frac{\mathcal{F}(\Gamma)}{4} - \frac{n}{2}\Big) - (t-\tau)\,\mathcal{F}(V_1)\Big] = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

care, dacă ținem seama de (14), se scrie

$$s\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}s} + V_1\left(\frac{\mathcal{F}(\Gamma)}{4} - \frac{n}{2} + m_1\right) - (t-\tau)^{m_1-1}\mathcal{F}(V_0) - (t-\tau)\mathcal{F}(V_1) = 0. \tag{18}$$

Luăm pentru V_1 ecuația ce se obține din (18) înlăturînd ultimul termen

$$s\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}s} + V_1\left(\frac{\mathcal{F}(\Gamma)}{4} - \frac{n}{2} + m_1\right) - (t-\tau)^{m_1-1}\mathcal{F}(V_0) = 0$$

sau

$$s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{V_1}{V_0}\right) + m_1\frac{V_1}{V_0} - (t-\tau)^{1-m_1}\frac{1}{V_0}\mathcal{F}(V_0) = 0 \tag{19}$$

dacă avem în vedere pe (14). Dacă integrăm și luăm constanta de integrare nulă, obținem pe V_1:

$$V_1 = (t-\tau)^{1-m_1}\frac{V_0}{s^{m_1}}\int_0^s \frac{s^{m_1-1}}{V_0}\mathcal{F}(V_0)\,\mathrm{d}s. \tag{20}$$

În acest mod obținem componentele $V_2, V_3, \ldots, V_r \ldots$. Ecuația lui V_r este dată de

$$s\frac{\mathrm{d}V_r}{\mathrm{d}s} + V_r\left(\frac{\mathcal{F}(\Gamma)}{4} - \frac{n}{2} + m_r\right) - (t-\tau)^{1+m_{r-1}-m_r}\mathcal{F}(V_{r-1}) - (t-\tau)\mathcal{F}(V_r) = 0. \tag{21}$$

Pentru determinarea lui V_r luăm ecuația (21) fără ultimul termen

$$s\frac{\mathrm{d}V_r}{\mathrm{d}s} + V_r\left[\frac{\mathcal{F}(\Gamma)}{4} - \frac{n}{2} + m_r\right] - (t-\tau)^{1+m_{r-1}-m_r}\mathcal{F}(V_{r-1}) = 0, \tag{22}$$

unde V_{r-1} este determinat anterior. Ecuația (22) se mai scrie, ținînd seamă de (14),

$$s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{V_r}{V_0}\right) + \frac{V_r}{V_0}m_r - \frac{1}{V_0}(t-\tau)^{1+m_{r-1}-m_r}\mathcal{F}(V_{r-1}) = 0, \tag{23}$$

care integrată cu constanta de integrare nulă ne dă

$$V_r = (t-\tau)^{1+m_{r-1}-m_r} \frac{V_0}{s^{m_r}} \int_0^s \frac{s^{m_r-1}}{V_0} \mathcal{F}(V_{r-1})\,\mathrm{d}s. \tag{24}$$

Componentele W_r ale seriei (13) care dă pe V sînt

$$\begin{gathered} W_0 = \frac{1}{\sqrt{\Delta(\xi, t, y)}} \exp\left[-\int_0^s \frac{1}{s}\left[\frac{\mathcal{F}(\Gamma)}{4} - \frac{n}{2}\right]\mathrm{d}s\right] \\ W_1 = (t-\tau)\frac{V_0}{s^{m_1}} \int_0^s \frac{s^{m_1-1}}{V_0} \mathcal{F}(V_0)\,\mathrm{d}s \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ W_r = (t-\tau)^{1+m_{r-1}} \frac{V_0}{s^{m_r}} \int_0^s \frac{s^{m_r-1}}{V_0} \mathcal{F}(V_{r-1})\,\mathrm{d}s \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{25}$$

iar V este dat de

$$V = V_0\left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{1+m_{r-1}}}{s^{m_r}} \int_0^s \frac{s^{m_r-1}}{V_0} \mathcal{F}(V_{r-1})\,\mathrm{d}s\right]. \tag{26}$$

Înainte de a trece la convergenţa seriei care dă pe V să observăm că componentele W_r verifică relaţia

$$\lim_{t \to \tau+0} W_r = 0, \qquad r \neq 0. \tag{27}$$

În adevăr,

$$\lim_{t \to \tau+0} V_0 \neq 0;$$

din (20) avem şi

$$V_1 = (t-\tau)^{1-m_1} A_1$$

cu $A_1 \neq 0$ pentru $t = \tau$, deci

$$W_1 = (t-\tau)\, A_1$$

din care deducem

$$\lim_{t \to \tau+0} W_1 = 0.$$

În mod asemănător

$$V_2 = (t-\tau)^{1-m_2} A_2$$

cu $A_2 \neq 0$ pentru $t = \tau$, deci

$$\lim_{t \to \tau+0} W_2 = 0.$$

În mod analog deducem că

$$V_r = (t - \tau)^{1-m_r} A_r$$

cu $A_r \neq 0$ pentru $t = \tau$, deci

$$\lim_{t \to \tau + 0} W_r = \lim_{t \to \tau + 0} (t - \tau)\, A_r = 0.$$

De aici urmează imediat că

$$\lim_{t \to \tau + 0} V = V_0 (x, y, \tau)$$

și

$$\lim_{\substack{s \to 0 \\ y^k \to \eta_k + 0}} \left[\lim_{t \to \tau + 0} V\right] = \frac{1}{\sqrt{\Delta(\xi, \eta, \tau)}}\cdot \tag{28}$$

§ 4. Convergența seriei lui V. Să vedem în ce condiții seria (13) este convergentă într-o vecinătate a punctului M_0 ($x^i = \xi_i$, $y^k = \eta_k$, $t = \tau$). Aceste condiții vor privi numerele reale m_k, care deocamdată sînt nedeterminate. Ne vom situa pe varietatea liniară

$$y^k = \eta_k, \quad t = \tau + \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0.$$

După cum am spus, vom considera funcțiile a_{ij}, b_i, c analitice în $\mathcal{D}$, în raport cu variabilele x^i. În raport cu y^k și t, a_{ij}, b_i, c sînt funcții regulate în $\mathcal{D}$.

Putem presupune că a_{ij}, b'_i, c' admit în $\mathcal{D}$ o majorantă comună

$$\frac{\alpha}{1 - \dfrac{\sigma}{r}},$$

unde α, r sînt funcții de y^k și t, iar $\sigma = | x^1 - \xi_1 | + | x^2 - \xi_2 | + \ldots + | x^n - \xi_n |$.

Dacă luăm pentru α minimul, și pentru r maximul lor în $\mathcal{D}$, putem considera pe α și r constante.

Fie $v\,(x, y, t)$ o funcție regulată în $\mathcal{D}$ care admite împreună cu derivata sa în raport cu t, într-o vecinătate $D(\xi, \eta, \varepsilon)$ a punctului

$$x^i = \xi_i, \quad y^k = \eta_k, \quad t = \tau + \varepsilon$$

situată în varietatea liniară $t = \tau + \varepsilon$, $y^k = \eta_k$, o majorantă de forma

$$\frac{K}{\left(1 - \dfrac{\sigma}{r}\right)^{\lambda}}, \quad K > 0. \tag{29}$$

În aceste condiţii avem

$$\mathcal{F}(v) \ll \frac{\alpha K \lambda(\lambda+1)}{\left(1-\dfrac{\sigma}{r}\right)^{\lambda+3}}$$

cu

$$\alpha' = \frac{\alpha n^2}{r^2} + \frac{n\alpha}{r(\lambda+1)}\left(1-\frac{\sigma}{r}\right) + \frac{\alpha}{\lambda(\lambda+1)}\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)^2 + \frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)^3.$$

Să arătăm că funcţiile V_h care intră în componenţa funcţiei V admit în $D(\xi, \eta, \varepsilon)$ o majorantă de forma

$$\frac{K_h}{\left(1-\dfrac{\sigma}{r}\right)^{3h}}. \tag{30}$$

Folosind pe (24) avem, considerînd pe V_0 constantă [6][12]),

$$\mathcal{F}(V_h) \ll \frac{\alpha' K_h 3h(3h+1)}{\left(1-\dfrac{\sigma}{r}\right)^{3h+3}}.$$

deci, conform lui (24),

$$V_{h+1} \ll \frac{\alpha' K_h\, 3h\,(3h+1)}{s^{m_{h+1}}}\, \varepsilon^{1+m_h-m_{h+1}} \int_0^s \frac{s^{m_{h+1}-1}}{\left(1-\dfrac{\sigma}{r}\right)^{3h+3}}\, ds.$$

Putem considera pe σ proporţional cu s, pentru s suficient de mic, şi pentru că

$$\left(\frac{1}{m_{h+1}} \cdot \frac{\sigma^{m_{h+1}}}{\left(1-\dfrac{\sigma}{r}\right)^{3h+3}}\right)' > \frac{\sigma^{m_{h+1}-1}}{\left(1-\dfrac{\sigma}{r}\right)^{3h+3}},$$

cu $m_h > 0$, obţinem

$$V_{h+1} \ll \frac{\alpha' K_h\, 3h\,(3h+1)}{m_{h+1}} \cdot \frac{1}{\left(1-\dfrac{\sigma}{r}\right)^{3h+3}} \cdot \varepsilon^{1+m_h-m_{h+1}}.$$

Din această ultimă inegalitate rezultă

$$K_{h+1} = \frac{\alpha' 3h\,(3h+1)}{m_{h+1}}\, \varepsilon^{1+m_h-m_{h+1}} \cdot K_h$$

---

[12]) P. 97.

cît şi

$$W_h \ll \frac{\varepsilon^{m_h} K_h}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{h+3}}$$

$$W_{h+1} \ll \frac{\alpha' K_h \, 3h\,(3h+1)}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{3h+3}} \cdot \frac{\varepsilon^{1+m_h}}{m_{h+1}}, \tag{31'}$$

prin urmare funcţiile W_h admit în $D\,(\xi, \eta, \varepsilon)$ majorante de aceeaşi formă (30) ca şi funcţiile V_h.

Convergenţa seriei lui V cere să avem

$$\left| \frac{W_{h+1}}{W_h} \right| < 1$$

care ne conduce pentru majorante la

$$\frac{\alpha' K_h \, 3h\,(3h+1)}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{3h+3}} \cdot \frac{\varepsilon^{1+m_h}}{m_{h+1}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{3h}}{\varepsilon^{m_h} K_h} < 1$$

sau, deoarece $\varepsilon = t - \tau$,

$$\frac{t - \tau}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{3}} \cdot \frac{\alpha' \, 3h\,(3h+1)}{m_{h+1}} < 1.$$

Pentru că

$$\lim_{h \to \infty} \alpha' = \alpha \frac{n^2}{r^2},$$

după cum rezultă din (29'), urmează că seria lui V este convergentă dacă m_{h+1} este un polinom de gradul doi, cel puţin, în h.

Pentru

$$m_h = 3h\,(3h+1) \tag{32}$$

urmează că trebuie să avem

$$0 < t - \tau < \frac{r^2}{\alpha n^2} \left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{3} \tag{33}$$

care împreună cu $\sigma < r$ determină o regiune de convergenţă a seriei (26). Trebuie să considerăm în (33), r, α funcţii de $y^1, \ldots, y^m$. Convergenţa astfel stabilită se transformă în convergenţa uniformă, dacă se înlocuieşte α cu maximul, r cu minimul valorilor lor dintr-o vecinătate a punctului M_0.

CAPITOLUL III

PROBLEMA LUI CAUCHY PENTRU ECUAŢIA $\frac{\partial u}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j} + 2b_i\frac{\partial u}{\partial x^i} + cu = 2\,e_k\frac{\partial u}{\partial y^k} + f$ CU OPERATORUL $a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}$ DE TIP ELIPTIC

§ **1. Punerea problemei.** Vom căuta pentru ecuaţia cu derivate parţiale de tip parabolic

$$E(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j} + 2b_i\frac{\partial u}{\partial x^i} + cu - 2e_k\frac{\partial u}{\partial y^k} - f = 0 \tag{1}$$

$i, j = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, m$, cu operatorul de ordinul doi

$$\widetilde{E} = a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}$$

de tip eliptic într-un domeniu $\mathcal{D}$ din spaţiul cu $n + m + 1$ dimensiuni, soluţia $u(y, x, t)$, care ia valoarea φ pe suprafaţa $S \subset \mathcal{D}$. Vom presupune de asemenea că pe S cunoaştem şi valoarea ψ a derivatei transversale $\frac{du}{d\nu} = \frac{1}{\nu}a_{ij}\,\nu_j\frac{\partial u}{\partial x^i}$ a soluţiei căutate u.

Funcţiile a_{ij}, b_i, c vor fi presupuse analitice în $\mathcal{D}$ în raport cu variabilele x^i şi regulate în raport cu variabilele y^k şi t.

Funcţiile e_k şi f sînt presupuse regulate în raport cu toate variabilele.

Vom căuta mai întîi o soluţie a ecuaţiei

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j} + 2b_i\frac{\partial u}{\partial x^i} + cu - f = \lambda\left(2e_k\frac{\partial u}{\partial y^k}\right) \tag{2}$$

de forma

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots + \lambda^n u_n + \ldots \tag{3}$$

care să satisfacă aceleaşi condiţii pe S, seria (3) fiind împreună cu derivatele sale parţiale de ordinul întîi şi doi, pentru $\lambda = 1$, uniform convergente în $\mathcal{D}$. Înlocuind pe (3) în (2) şi identificînd coeficienţii lui $\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^q, \ldots$, obţinem pentru $u_0, u_1, \ldots, u_q, \ldots$ următoarele ecuaţii

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_0}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^i\,\partial x^j} + 2b_i\frac{\partial u_0}{\partial x^i} + cu_0 = f,\\
&\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^i\,\partial x^j} + 2b_i\frac{\partial u_1}{\partial x^i} + cu_1 = 2e_k\frac{\partial u_0}{\partial y^k}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial u_q}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial u_q}{\partial x^i\,\partial x^j} + 2b_i\frac{\partial u_q}{\partial x^i} + cu_q = 2e_k\frac{\partial u_{q-1}}{\partial y^k}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{4}$$

Determinăm funcţia u_0, din prima ecuaţie (4), astfel ca pe S împreună cu derivata sa transversală $\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\nu}$ să ia valorile φ şi ψ respectiv.

Funcţiile u_q, $q = 1, 2, \ldots$ sînt determinate de celelalte ecuaţii (4) astfel ca u_q şi $\frac{\mathrm{d}u_q}{\mathrm{d}\nu}$ să ia valori nule pe S.

§ 2. Determinarea funcţiilor u_0. Pornim de la formula integrală

$$\int_\Omega [vE(u) - u\,\mathcal{E}(v)]\,\mathrm{d}(\Omega) = \int_\Omega\left[\frac{\partial P_i}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t}(uv)\right]\mathrm{d}(\Omega), \tag{5}$$

care rezultă imediat din (Cap. II, § 1), unde am pus

$$a)\ E(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j} + 2b_i\frac{\partial u}{\partial x^i} + cu$$

$$\mathcal{E}(v) \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j} + 2b'_i\frac{\partial u}{\partial x^i} + c'u$$

$\mathcal{E}$ fiind operatorul adjunct al operatorului E.

b) Domeniul de integrare Ω este un cilindru ce se obţine din domeniul Δ din spaţiul cu n dimensiuni $x^1, x^2, \ldots, x^n$, prin translaţie de-a lungul axelor oy^k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, ot, în sensul crescător al coordonatelor

$$\Omega = \{(x, y, t)\,|\,x \in \Delta,\ y \in I,\ t \in [\tau, t_1]\},$$

cu

$$I = \{(y^1, y^2, \ldots, y^m)\,|\,y^1 \in [\eta_1, y_1^1], \ldots, y^m \in [\eta_m, y_1^m]\} \tag{6}$$

astfel ca $(\xi, \eta, \tau) \in \Omega \subset \mathcal{D}$.

În (5)

$$P_i = a_{ij}\left(v \frac{\partial u}{\partial x^j} - u \frac{\partial v}{\partial x^j}\right) + uv\left(2b_i - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^j}\right) \tag{7}$$

şi

$$\mathrm{d}(\Omega) = \mathrm{d}x^1\, \mathrm{d}x^2 \dots \mathrm{d}x^n\, \mathrm{d}y^1\, \mathrm{d}y^2 \dots \mathrm{d}y^m\, \mathrm{d}t.$$

Punctul (ξ, η, τ) se găseşte pe frontiera domeniului Ω, $F\,\Omega$, frontieră care conţine o faţă plană $t = \tau$ cu $n + m$ dimensiuni.

Să notăm cu ν_i, α_k, β cosinuşii directori ai normalei exterioare la $F\Omega$ şi să introducem derivata transversală, în spaţiul Riemann nesingular definit de (Cap. I, (19)), dată de

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} = \frac{1}{\nu} a_{ij}\, \nu_j \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad i, j = 1, 2, \dots, n \tag{8}$$

cu

$$\nu = [(a_{ij}\, \nu_j)\,(a_{ij}\, \nu_j)]^{\frac{1}{2}}.$$

Această derivată transversală poate fi considerată şi ca derivată transversală în spaţiul Riemann singular cu $n + m + 1$ dimensiuni deoarece $a_{ij} \equiv 0$ pentru $i = 1, 2, \dots, n + m + 1$; $j = n + 1, \dots, n + m + 1$ sau $i = n + 1, \dots, n + m + 1$; $j = 1, 2, 3, \dots, n + m + 1$, derivată situată în subspaţiul $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ care conţine pe Δ. Cu aceste notaţii relaţia (5) se scrie

$$\int_{\Omega} [vE(u) - u\,\mathcal{E}(v)]\, \mathrm{d}(\Omega) = \int_{F\Omega} (P_i\, \nu_i + \beta\, uv)\, \mathrm{d}(F\Omega) \tag{9}$$

şi dacă ţinem seamă de expresia (7) a lui P_i, relaţia integrală (9) are forma

$$\int_{\Omega} [vE(u) - u\,\mathcal{E}(v)]\, \mathrm{d}(\Omega) = \int_{F\Omega} \left[\nu\left(v \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\nu} - u \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}\right) + w\,u\,v\right] \mathrm{d}(F\Omega) \tag{10}$$

cu

$$w = \left(2b_i - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^j}\right)\nu_i + \beta.$$

În integrala (10) să înlocuim planul $t = \tau$ cu $t = \tau + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Domeniul Ω se înlocuieşte cu $\Omega(\varepsilon) \subset \Omega$ şi $\Omega(\varepsilon) \to \Omega$ cînd $\varepsilon \to 0$. De asemenea $F\,\Omega(\varepsilon) \to F\,\Omega$ cînd $\varepsilon \to 0$. Frontiera $F\,\Omega(\varepsilon)$ se compune din porţiunea plană $t = \tau + \varepsilon$ pe care o notăm $P(\varepsilon)$, care conţine punctul $x^i = \xi_i$, $y^k = \eta_k$, $t = \tau + \varepsilon$, şi frontiera $S(\varepsilon) = F\,\Omega(\varepsilon) - P(\varepsilon)$, deci

$$\int_{\Omega(\varepsilon)} [vE(u) - u\,\mathcal{E}(v)]\, \mathrm{d}(\Omega) = \int_{S(\varepsilon)} \left[\nu\left(v \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\nu} - u \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}\right) + w\,u\,v\right] \mathrm{d}(F\Omega) +$$

$$+ \int_{P(\varepsilon)} \left[\nu\left(v \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\nu} - u \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}\right) + w\,u\,v\right] \mathrm{d}(P). \tag{11}$$

Întrucît ν_i, α_k, β sînt cosinuşii directori ai normalei exterioare, urmează că pentru $P(\varepsilon)$,

$$\nu_i = 0,\ \alpha_k = 0,\ \beta = -1,$$

deci

$$\nu = 0,\ w = -1$$

şi

$$\mathrm{d}(P) = -\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 \ldots \mathrm{d}x^n\,\mathrm{d}y^1\,\mathrm{d}y^2 \ldots \mathrm{d}y^m$$

iar a doua integrală din partea a doua a egalităţii se reduce la

$$-\int_{P(\varepsilon)} uv\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 \ldots \mathrm{d}x^n\,\mathrm{d}y^1\,\mathrm{d}y^2 \ldots \mathrm{d}y^m \tag{12}$$

sau

$$-\int_{\eta_1}^{v_1^1}\mathrm{d}y^1\int_{\eta_2}^{v_1^2}\mathrm{d}y^2 \ldots \int_{\eta_m}^{v_1^m}\mathrm{d}y^m\int_{\Delta} uv\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 \ldots \mathrm{d}x^n = -\int_I \mathrm{d}y\int_{\Delta} uv\mathrm{d}x. \tag{12'}$$

Să ne situăm în spaţiul cu n dimensiuni $x^1, x^2, \ldots, x^n$, în care se găseşte domeniul Δ (care conţine în interior punctul $x^1 = \xi_1, \ldots, x^n = \xi_n$) şi să considerăm un domeniu $\Sigma'(s_0, \varepsilon)$ definit de sferoidul caracteristic al spaţiului Riemann nesingular Γ şi care se parcurge făcînd pe s să varieze de la 0 pînă la valoarea $s_0 = \text{const.}$, situat în planul $t = \tau + \varepsilon$, domeniu care conţine punctul $x^1 = \xi_1$, $x^2 = \xi_2, \ldots, x^n = \xi_n$. Fie $\Sigma(s_0, \varepsilon)$ cilindrul obţinut prin translaţia lui $\Sigma'(s_0, \varepsilon)$ paralel cu axele oy^k ($k = 1, 2, \ldots, m$) în modul în care am procedat cu domeniul Ω. Dacă notăm

$$P'(s_0, \varepsilon) = P(\varepsilon) - \Sigma(s_0, \varepsilon)$$

şi dacă luăm pentru v soluţia elementară stabilită la capitolul precedent, deci

$$\mathcal{E}(v) = 0$$

iar pentru u soluţia căutată, adică

$$E(u) = f$$

care pe suprafaţa S ia, împreună cu derivata $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\nu}$, valorile φ şi ψ respectiv, atunci formula integrală (11) se scrie

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(\varepsilon)} vf\,\mathrm{d}(\Omega) &= \int_{S(\varepsilon)}\left[\varphi\left(wv - \nu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}\right) + \nu v\psi\right]\mathrm{d}(S) - \\ &- \int_{P'(s_0,\,\varepsilon)} uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\Sigma(s_0,\,\varepsilon)} uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{13}$$

Cînd $\varepsilon \to 0$, atunci $\Omega(\varepsilon) \to \Omega$ şi $S(\varepsilon) \to S = F\,\Omega - P$, unde $P = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} P(\varepsilon)$. Ţinînd seamă de proprietăţile funcţiei v şi de continuitatea lui u şi a derivatelor sale, avem

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega(\varepsilon)} v f\,\mathrm{d}(\Omega) = \int_{\Omega} v f\,\mathrm{d}(\Omega) \tag{14}$$

şi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S(\varepsilon)}\left[\varphi\left(wv - \nu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}\right) + \nu v\psi\right]\mathrm{d}(S) =$$

$$= \int_{S}\left[\varphi\left(wv - \nu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}\right) + \nu v\,\psi\right]\mathrm{d}(S). \tag{15}$$

Pe $P(\varepsilon)$, $\Gamma > 0$ şi pentru că

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ s_0>0}} \Gamma \neq 0,$$

urmează că

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{P'(s_0,\,\varepsilon)} uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \tag{16}$$

Ne rămîne să ne mai ocupăm de limita integralei

$$\int_{\Sigma(s_0,\,\varepsilon)} uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_I \mathrm{d}y\int_{\Sigma'(s_0,\,\varepsilon)} uv\mathrm{d}x \tag{17}$$

cînd $\Sigma'(s_0, \varepsilon) \to (\xi, \tau)$. Cînd $\varepsilon \to 0$, $(\xi, \tau + \varepsilon) \to (\xi, \tau)$, deci

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x, y, \tau + \varepsilon) = u(x, y, \tau)$$

şi

$$\lim_{s_0\to 0} u(x, y, \tau) = u(\xi, y, \tau)$$

pentru că $s_0 \to 0$ atrage $(x^1, x^2, \ldots, x^n) \to (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ şi reciproc.

Conform acestor rezultate urmează că nu avem a cerceta decît

$$\lim_{\Sigma'\to(\xi,\,\tau)}\int_{\Sigma'(s_0,\,\varepsilon)} v\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\ldots\,\mathrm{d}x^n$$

sau

$$\lim_{s_0\to 0}\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Sigma'(s_0,\,\varepsilon)} v\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\ldots\,\mathrm{d}x^n\right] \tag{18}$$

pentru că, dacă notăm cu v_0 limita (18), obţinem

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ s_0\to 0}}\int_{\Sigma(s_0,\,\varepsilon)} uv\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_I v_0 u(\xi, y, \tau)\,\mathrm{d}y, \tag{19}$$

rezultat ce ne permite să rezolvăm problema lui Cauchy.

Dacă ţinem seamă de forma funcţiei V stabilită la Cap. II, rezultă că putem lua pentru V valoarea

$$V \simeq \frac{1}{\sqrt{\Delta(\xi, y, \tau + \varepsilon)}},$$

dacă s_0 este suficient de mic, de unde avem şi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} V \simeq \frac{1}{\sqrt{\Delta(\xi, y\ \tau)}}$$

încît

$$\lim_{s_0 \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} V = \frac{1}{\sqrt{\Delta(\xi, y, \tau)}}. \tag{20}$$

Datorită structurii eliptice a ecuaţiei $\widetilde{E}(u) = 0$ (Cap. I, § 1), funcţia Γ în vecinătatea punctului (ξ, y, τ) are forma

$$\Gamma \simeq s_0^2 \left[\alpha_1^2 \left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s} \right)^2 + \alpha_2^2 \left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s} \right)^2 + \ldots + \alpha_n^2 \left(\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}s} \right)^2 \right]$$

cu

$$\alpha_1^2 \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^2 = |A_{ij}| = \frac{1}{\Delta(\xi, y, \tau).}.$$

După o rotaţie

$$z^1 - \xi_1 = \alpha_1 (x^1 - \xi_1), \ldots, z^n - \xi_n = \alpha_n (x^n - \xi_n)$$

cu determinantul transformării

$$\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = \sqrt{\Delta(\xi, y, \tau)},$$

integrala

$$\int_{\Sigma'(s_0, \varepsilon)} v \, \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \ldots \mathrm{d}x^n, \tag{21}$$

în afara unor cantităţi care tind către zero cînd $\varepsilon \to 0$ şi $s_0 \to 0$, are valoarea

$$\iint_{r^2 \leqslant 1} \ldots \int \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} \exp\left[-\frac{s_0^2 r^2}{4(t-\tau)} \right] \mathrm{d}z^1 \mathrm{d}z^2 \ldots \mathrm{d}z^n. \tag{22}$$

Înlocuind mai departe pe $\frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}s}$ cu $\frac{z^i - \xi_i}{s_0}$, pentru s_0 suficient de mic, integrala (21) se transformă în

$$\iint_{\rho^2 \leqslant 1} \ldots \int \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\varepsilon} \right) \mathrm{d}z^1 \mathrm{d}z^2 \ldots \mathrm{d}z^n, \tag{23}$$

unde $\rho^2 = (z^1 - \xi_1)^2 + (z^2 - \xi_2)^2 + \ldots + (z^n - \xi_n)^2$, integrala (23) avînd ca domeniu de integrare sfera $\rho^2 \leqslant 1$ cu centrul în punctul $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Deoarece avem

$$dz^1 \, dz^2 \ldots dz^n = \rho^{n-1} \, d\rho \, d\sigma_n$$

$d\sigma_n$ fiind elementul de arie al n-sferei de rază unitatea, urmează că (23) se scrie

$$\iint_{\sigma_n} \ldots \int d\sigma_n \int_0^1 \frac{\rho^{n-1}}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\varepsilon}\right) d\rho. \qquad (24)$$

Avem

$$\iint_{\sigma_n} \ldots \int d\sigma_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

şi

$$\int_0^1 \frac{\rho^{n-1}}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\varepsilon}\right) d\rho = 2^{n-1} \int_0^1 \left(\frac{\rho^2}{4\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\varepsilon}\right) d\left(\frac{\rho^2}{4\varepsilon}\right)$$

ultima relaţie, cu transformarea $\frac{\rho^2}{4\varepsilon} = \mu^2$, devine

$$2^{n-1} \int_0^{\frac{2}{2\sqrt{\varepsilon}}} \mu^{n-2} \exp(-\mu^2) \, d\mu^2$$

şi cînd $\varepsilon \rightarrow 0$ are valoarea

$$2^{n-1} \int_0^\infty z^{\frac{n-2}{2}} \exp(-z) dz = 2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

încît integrala (23) are valoarea $(4\pi)^{\frac{n}{2}}$. Dacă introducem această valoare în (18) obţinem

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ s_0 \to 0}} \int_I dy \int_{\Sigma'(s_0, \varepsilon)} uv dx = (4\pi)^{\frac{n}{2}} \int_I u(\xi, y, \tau) \, dy$$

$$= (4\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\eta_1}^{v_1^1} dy^1 \int_{\eta_2}^{v_1^2} dy^2 \ldots \int_{\eta_m}^{v_1^m} u(\xi, y, \tau) \, dy^m. \qquad (25)$$

Dacă revenim la relaţia integrală (11) şi ţinem seamă de toate rezultatele obţinute pînă acum, avem

$$\int_\Omega vf d(\Omega) = \int_S \left[\varphi\left(vw - \nu \frac{dv}{d\nu}\right) + \nu v \psi\right] d(S) - (4\pi)^{\frac{n}{2}} \int_I u(\xi, y, \tau) dy, \qquad (26)$$

unde integrala din partea întîi a egalităţii este multiplă de ordinul $n + m + 1$, prima integrală din partea a doua este de ordinul $n + m$ şi ultima integrală din partea a doua de ordinul m. Domeniul de integrare I fiind intervalul m-dimensional:

$$I = \{(y^1,\ y^2, \dots, y^m) \mid y^1 \in [\eta_1, y_1^1], \dots, y^m \in [\eta_m, y_1^m]\}$$

derivînd în raport cu $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$, obținem

$$u(\xi, \eta, \tau) = (-1)^m (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{\partial^m}{\partial\eta_1 \partial\eta_2 \dots \partial\eta_m} \left[\int_S \left[\varphi\left(v\,w - \nu \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu} \right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \nu v\,\psi \right] \mathrm{d}(S) - \int_\Omega v f \mathrm{d}(\Omega) \right] \tag{27}$$

și astfel determinarea lui u_0 s-a terminat, deoarece, dacă înlocuim în (27) pe f din prima ecuație (4) iar φ, ψ sînt respectiv valorile soluției u căutate și ale derivatei sale transversale de-a lungul suprafeței S, formula (27) determină pe $u_0\,(\xi, \eta, \tau)$.

§ 3. Determinarea funcțiilor u_q. Pentru determinarea funcției u_1 folosim a doua din ecuațiile (4). Deoarece u_0 este dat de (27), u_1 este soluția ecuației

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^i \partial x^j} + 2b_i \frac{\partial u_1}{\partial x^i} + c u_1 = f_1 \tag{28}$$

$$f_1 = 2e_k \frac{\partial u_0}{\partial y^k}$$

soluție care pe suprafața S împreună cu derivata sa transversală sînt nule, deci $\varphi_1 \equiv 0$, $\psi_1 \equiv 0$ pe S. Folosind formula (27) obținem

$$u_1(\xi, \eta, \tau) = -(-1)^m (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{\partial^m}{\partial\eta_1\, \partial\eta_2 \dots \partial\eta_m} \int_\Omega v f_1 \mathrm{d}(\Omega) \tag{29}$$

și ținînd seamă de faptul că Ω este un cilindru, (29) se scrie

$$u_1\ (\xi, \eta, \tau) = -(4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_\tau^{t_1} \mathrm{d}t \int_\Delta v f_1 \,\mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \dots \mathrm{d}x^n. \tag{30}$$

Componentele u_q, $q = 1, 2, \dots$, se determină prin recurență. În adevăr, u_{q-1} fiind determinat, u_q este soluția ecuației

$$\frac{\partial u_q}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x^i \partial x^j} + 2b_i \frac{\partial u_q}{\partial x^i} + c u_q = f_q, \tag{31}$$

unde

$$f_q = 2e_k \frac{\partial u_{q-1}}{\partial y^k},$$

soluție nulă pe S împreună cu derivata transversală $\frac{\mathrm{d}u_q}{\mathrm{d}\nu}$.

Folosind (27), u_q este dat de

$$u_q = -(4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\tau}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{\Delta} v\, f_q\, \mathrm{d}x^1\, \mathrm{d}x^2 \dots \mathrm{d}x^n.$$

Observaţii. 1) Funcţia v este aceeaşi pentru fiecare din componentele u_q $(q = 0, 1, \dots)$.

2) Soluţia căutată u este dată de formula

$$u = \tilde{u}_0 + \tilde{u}_p,$$

unde $\tilde{u}_0$ este soluţia ecuaţiei omogene (1)

$$\tilde{u}_0 = (-1)^m (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{\partial^m}{\partial \eta_1\, \partial \eta_2 \dots \partial \eta_m} \int_S \left[\varphi \left(vw - \nu \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu} \right) + \nu v \psi \right] \mathrm{d}(S)$$

iar

$$\tilde{u}_p = - (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\tau}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{\Delta} v\, \Phi\, \mathrm{d}(\Omega),$$

unde

$$\Phi = f + f_1 + f_2 + \dots + f_q + \dots$$

cu

$$f_q = 2 e_k \frac{\partial u_{q-1}}{\partial y^k}.$$

CAPITOLUL IV

CONVERGENŢA UNIFORMĂ A SERIEI OBŢINUTE

§ 1. Stabilirea unor inegalităţi. Pentru stabilirea convergentei uniforme a seriei (3), Cap. III, într-un domeniu $\mathcal{D}$ care conţine punctul $x^i = \xi_i$, $y^k = \eta_k$, $t = \tau$, cît şi a seriilor ce se obţin derivînd termen cu termen seria care reprezintă pe u, este necesar să stabilim nişte inegalităţi pentru $u_0, u_1, \dots u_q, \dots$, cît şi pentru derivatele lor parţiale de ordinul întîi şi doi. Domeniul $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ în care aceste inegalităţi sînt valabile va fi domeniul în care u reprezintă soluţia căutată şi îndeplineşte condiţiile la limită cerute.

a) În expresia lui u_0 (ξ, η, τ),

$$u_0 = (-1)^m (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{\partial^m}{\partial \eta_1\, \partial \eta_2 \dots \partial \eta_m} \left[\int_S \left[\varphi \left(vw - \nu \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu} \right) + \nu v \psi \right] \mathrm{d}(S) - \right.$$
$$\left. - \int_{\Omega} v f \mathrm{d}(\Omega) \right], \tag{1}$$

funcţiile φ, ψ sînt continue cu derivate parţiale continue în $\mathcal{D}$.

Ținînd seamă de modul cum a fost definit Ω, urmează că în primul termen din partea a doua a egalității (1), după efectuarea operației de derivare cerută de (1), Cap. I, apar integrale de forma

$$\alpha)\ \int_{\tau}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial \eta_k} \Big[\ \Phi\ \Big]_{y^k=\eta_k} \mathrm{d}(\Delta),\ \int_{\tau}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial \eta_k} \Big[\ \Phi\ \Big]_{y^k=y_1^k} \mathrm{d}(\Delta);$$

$$\beta)\ \int_{\tau}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{F\Delta} \Phi \mathrm{d}(F\Delta);$$

$$\gamma)\ \int_{\Delta} \Phi\, \mathrm{d}(\Delta)$$

iar integrala a doua din partea a doua a egalității (1) după efectuarea operației de derivare se reduce la:

$$\delta)\ \int_{\tau}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{\Delta} \Phi\,(x, \eta, t)\mathrm{d}(\Delta).$$

b) Trebuie să arătăm că, în $\mathcal{D}$, u_0 este mărginită. Presupunem că punctul $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ este interior domeniului Δ. Singularitățile integrantului ce intervine în expresia lui u_0, (28) din Cap. III, nu se găsesc decît pe varietatea de intersecție a lui S cu planul $t = \tau$, deci apar la toate integralele α), β), γ). Pentru integrala δ) avem singularitate în punctul $x^i = \xi_i$, $t = \tau$.

Pentru integralele α), β), γ) avem următoarele cazuri

$$\alpha')\ \int_{\tau}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{\Delta} \Psi\, v \mathrm{d}(\Delta),$$

$$\beta')\ \int_{\tau}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{\Delta} \Psi\, \frac{\partial v}{\partial y^k} \mathrm{d}(\Delta),$$

$$\gamma')\ \int_{\tau}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{\Delta} \Psi\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu} \mathrm{d}(\Delta),$$

$$\delta')\ \int_{\tau}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{F\Delta} \Psi\, \frac{\partial v}{\partial y^k} \mathrm{d}(F\Delta),$$

$$\varepsilon')\ \int_{\tau}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{F\Delta} \Psi\, \frac{\partial^2 v}{\partial x^i\, \partial x^k} \mathrm{d}\,(F\Delta).$$

Integralele δ') și ε') au sens deoarece Ψ este mărginită în $\mathcal{D}$ iar exponențiala ce intervine în expresia lui v, anume

$$\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\Gamma}{4\,(t-\tau)}\right),$$

asigură convergența pe intervalul (τ, t_1).

Integrala α') din aceleaşi motive este convergentă pentru $t = \tau$ şi $x^i \neq \xi_i$. În punctul $x^i = \xi_i$, $t = \tau$, observăm că se comportă ca integrala

$$\int_0^\infty z^{n-1}\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z$$

care este convergentă.

În integrala β') avem

$$\frac{\partial v}{\partial y^k} = \frac{\partial V}{\partial y^k}\,\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}}\exp\left[-\frac{\Gamma}{4\,(t-\tau)}\right] -$$

$$-\frac{\partial \Gamma}{\partial y^k}\,\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}}\exp\left(-\frac{\Gamma}{4\,(t-\tau)}\right)$$

şi pentru că

$$\Gamma = A_{ij}\,(x^i - \xi_i)\,(x^j - \xi_j) + \ldots$$

rezultă că

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial y^k} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial y^k}\,(x^i - \xi_i)\,(x^j - \xi_j)$$

şi *în ipoteza că a_{ij} sînt continue cu derivate parţiale continue*, urmează că integrala β') se descompune într-o sumă de două integrale, una de tipul α') (deoarece V are derivate parţiale continue) şi a doua care se comportă în vecinătatea punctului $x^i = \xi_i$, $t = \tau$ ca integrala

$$\int_0^\infty z^{n+1}\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z,$$

deci are de asemenea sens.

Integrala γ') este nulă deoarece domeniul de integrare este unul din planele $y^k = \text{const.}$, pe care $\nu_i = 0$, deci derivata transversală $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu}$ este nulă. În sfîrşit, să mai observăm că integrala δ) este de tipul α'), deci are sens.

Prin urmare dacă notăm cu A_0, B_0, C_0, D_0 majorantele integrantelor α), β), γ), δ) şi dacă

$$\int_\tau^{t_1}\mathrm{d}t\int_\Delta \mathrm{d}\,(\Delta) \leqslant F, \quad \int_\tau^{t_1}\mathrm{d}t\int_{F\Delta}\mathrm{d}\,(F\Delta) \leqslant G$$

$$\int_\Delta \mathrm{d}\,(\Delta) = H, \quad \int_\tau^{t_1}\mathrm{d}t\int_\Delta \mathrm{d}\,(\Delta) \leqslant K$$

pentru $(x^i = \xi_i,\ y^k = \eta_k,\ t = \tau) \in \mathcal{D}$, atunci avem în $\mathcal{D}$

$$|\,u_0\,| < (4\pi)^{-\frac{n}{2}}\,(A_0F + B_0G + C_0H + D_0K). \tag{2}$$

c) Să stabilim inegalităţi de aceeaşi formă pentru $\frac{\partial u_0}{\partial y^k}$, $k = 1$, 2, ..., m. În ipoteza că toate funcţiile a_{ij}, b_i, c, φ, ψ sînt continue cu derivate parţiale pînă la ordinul trei continue, urmează că în expresia lui $\frac{\partial u_0}{\partial y^k}$, în afară de tipul de singularităţile semnalate la punctul *b*), nu mai pot interveni decît următoarele:

$$\alpha'')\quad \int_\tau^{t_1} \mathrm{d}t \int_\Delta \Psi \frac{\partial^2 v}{\partial y^h\, \partial y^k}\, \mathrm{d}\,(\Delta)\,;$$

$$\beta'')\quad \int_\tau^{t_1} \mathrm{d}t \int_{F\Delta} \Psi \frac{\partial^2 v}{\partial y^h\, \partial y^k}\, \mathrm{d}\,(F\Delta)\,;$$

$$\gamma'')\quad \int_\tau^{t_1} \mathrm{d}t \int_{F\Delta} \Psi \frac{\partial^3 v}{\partial x^i\, \partial y^h\, \partial y^k}\, \mathrm{d}\,(F\Delta).$$

Integrantul lui β'') sau γ''), deoarece $(x^i = \xi_i) \notin F\Delta$, devine discontinuu numai pentru $t = \tau$ însă forma exponenţială a lui v asigură convergenţa.

Cît priveşte α'') avem

$$\begin{aligned}\Psi \frac{\partial^2 v}{\partial y^h\, \partial y^k} &= \Psi_1 \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\Gamma}{4\,(t-\tau)}\right) + \\ &+ \Psi_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial y^k} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}} \exp\left(-\frac{\Gamma}{4\,(t-\tau)}\right) + \\ &+ \Psi_3 \frac{\partial \Gamma}{\partial y^h} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}} \exp\left(-\frac{\Gamma}{4\,(t-\tau)}\right) + \\ &+ \Psi_4 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^h\, \partial y^k} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n+4}{2}}} \exp\left(-\frac{\Gamma}{4\,(t-\tau)}\right)\end{aligned}$$

şi ţinînd seama de observaţia de la punctul *b*) urmează că

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial y^h} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial y^h} (x^i - \xi_i)\ (x^j - \xi_j) + \ldots$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial y^k} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial y^k} (x^i - \xi_i)\ (x^j - \xi_j) + \ldots$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^h\, \partial y^k} = \frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial y^h\, \partial y^k} (x^i - \xi_i)\,(x^j - \xi_j) + \ldots$$

şi în vecinătatea punctului $x^i = \xi_i$, $t = \tau$, integralele care intervin în α'') se comportă ca

$$\int_0^\infty z^{n-1}\, \mathrm{e}^{-z}\, \mathrm{d}z,\ \int_0^\infty z^{n+1}\, \mathrm{e}^{-z}\, \mathrm{d}z,\ \int_0^\infty z^{n+3}\, \mathrm{e}^{-z}\, \mathrm{d}z$$

care sînt convergente.

Prin urmare, dacă notăm cu A_k, B_k, C_k, D_k majorantele integrantelor lui α), β), γ), δ), care apar în expresia lui $\frac{\partial u_0}{\partial y^k}$, avem

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial y^k}\right| < (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot (A_k F + B_k G + C_k H + D_k K). \tag{3}$$

În sfîrşit, dacă notăm cu L cel mai mare dintre numerele ce intervin în (1), (2) şi (3) pentru $(x, y, t) \in \mathcal{D}$, urmează că

$$| u_0 |, \left|\frac{\partial u_0}{\partial y^1}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial u_0}{\partial y^m}\right|,$$

sînt mărginite de numărul L.

e) Să facem acum o restricţie asupra lui Ω, anume îi cerem ca, faţă de sistemul de coordonate ales, toate punctele volumului Ω şi $F\,\Omega$ să aibă toate coordonatele *strict pozitive*, astfel ca să existe un număr $\alpha > 1$, încît oricare ar fi $(x, y, t) \in \mathcal{D}$ politopul T definit de

$$\begin{array}{ll} 0 \leqslant \xi_i \leqslant \alpha\, x^i, & i = 1, 2, \ldots, n \\ 0 \leqslant \eta_k \leqslant \alpha\, y^k, & k = 1, 2, \ldots, m \\ 0 \leqslant \tau \leqslant \alpha t & \end{array}$$

să conţină pe Ω, $T \supset \Omega$, deci

$$\text{vol}\ T > \text{vol}\ \Omega$$

cît şi politopul T' definit de

$$\begin{array}{ll} 0 \leqslant \xi_i \leqslant \alpha\, x^i, & i = 1, 2, \ldots, n \\ 0 \leqslant \tau \leqslant \alpha t & \end{array}$$

să conţină volumul generat de domeniul Δ, după ce a suferit o deplasare de la τ la t_1.

§ 2. Convergenţa uniformă a seriei (3) din Cap. III Să presupunem că pentru orice punct $(x, y, t) \in \Omega$ avem

$$| u_q | < A.\ \alpha^{q(nq+1)} \frac{(x + y + t)^{nq+1}}{(nq + 1)\,!},\quad A > 0,\ \alpha > 1$$

$$\left|\frac{\partial u_q}{\partial y_k}\right| < A.\ \alpha^{q(nq+1)} \frac{(x + y + t)^{nq}}{(nq)\,!}. \tag{4}$$

În ipoteza că

$$2\,| C_k v | < M,$$

ținînd seamă de expresia lui u_{q+1} (32), Cap. III, obținem

$$| u_{q+1} | < \frac{m\, A M}{(nq)\,!} \cdot \alpha^{n(nq+1)} \cdot \int_{T'} (x + y + t)^{nq}\, \mathrm{d}\,(T')$$

sau

$$| u_{q+1} | < \frac{m\, A M}{(n\,(q + 1) + 1)\,!} \cdot \alpha^{q(nq+1)} \cdot (\alpha x + \alpha y + \alpha t)^{n(q+1)+1},$$

deci

$$| u_{q+1} | < \frac{m\, A M}{(n\,(q + 1) + 1)\,!} \cdot \alpha^{(q+1)\,(n(q+1)+1)}\, (x + y + t)^{n(q+1)+1}. \qquad (5)$$

Avem și

$$\left| \frac{\partial u_{q+1}}{\partial y^k} \right|, \left| \frac{\partial u_{q+1}}{\partial x^i} \right|, \left| \frac{\partial u_{q+1}}{\partial t} \right| < \frac{m\, A M}{n\,(q+1)\,!}\, \alpha^{(q+1)\,(n(q+1)+1)} \cdot (x+y+t)^{n(q+1)} \qquad (5')$$

Prin urmare inegalitățile (4) atrag inegalitățile (5) și (5′), unde M, α nu depind decît de coeficienții ecuației diferențiale date și de domeniul Ω

Să revenim acum la convergența uniformă a seriei (3), Cap. III, cît și a seriilor ce se obțin derivînd parțial termenii seriei (3), Cap. III.

Conform rezultatului de la §4, u_0 și $\frac{\partial u_0}{\partial y^k}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ le putem considera egal mărginite în $\mathcal{D}$ de un număr L:

$$| u_0 |, \left| \frac{\partial u_0}{\partial y^1} \right|, \ldots \left| \frac{\partial u_0}{\partial y^m} \right| < L$$

Folosind expresia lui u_1 dată de (30), Cap. III, urmează că putem scrie

$$| u_1 | < m\, L M\, x^1\, x^2 \ldots x^n\, t\, \alpha^{n+1},$$

deci

$$| u_1 | < m\, L M\, \alpha^{n+1} \frac{(x + t)^{n+1}}{(n + 1)\,!} < m\, L M\, \alpha^{n+1} \frac{(x + y + t)^{n+1}}{(n + 1)\,!}, \qquad (6)$$

unde am pus ca și mai sus

$$x = x^1 + x^2 + \ldots + x^n, \qquad y = y^1 + y^2 + \ldots + y^m.$$

Din (6) rezultă și

$$\left| \frac{\partial u_1}{\partial x^i} \right|, \left| \frac{\partial u_1}{\partial y^k} \right|, \left| \frac{\partial u_1}{\partial t} \right| < m\, L M\, \alpha^{n+1} \frac{(x + y + t)^n}{n\,!}. \qquad (6')$$

Pentru u_2 obținem în mod asemănător

$$| u_2 | < m^2 LM^2 \alpha^{n+1} \int_{T'} \frac{(x + y + t)^n}{n\,!} \, \mathrm{d}\,(T')$$

sau

$$| u_2 | < m^2 LM^2 \alpha^{n+1} \frac{(\alpha x + \alpha y + \alpha t)^{2n+1}}{(2n + 1)\,!}$$

din care rezultă

$$| u_2 | < m^2 LM^2 \alpha^{2(2n+1)} \frac{(x + y + t)^{2n+1}}{(2n + 1)\,!}$$

deoarece $\alpha > 1$, cît și

$$\left|\frac{\partial u_2}{\partial x^i}\right|, \quad \left|\frac{\partial u_2}{\partial y^k}\right|, \quad \left|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right| < m^2 LM^2 \alpha^{2(2n+1)} \frac{(x + y + t)^{2n}}{(2n)\,!}$$

Rezultatul obținut este general, conform celor arătate la începutul acestui paragraf, și anume

$$| u_q | < L \cdot (mM \alpha^{nq+1})^q \frac{(x + y + t)^{nq+1}}{(nq + 1)\,!}$$

$$\left|\frac{\partial u_q}{\partial x^i}\right|, \quad \left|\frac{\partial u_q}{\partial y^k}\right|, \quad \left|\frac{\partial u_q}{\partial t}\right| < L \cdot (mM \alpha^{nq+1})^q \frac{(x + y + t)^{nq}}{(nq)\,!}$$

inegalități care dovedesc convergența uniformă a seriei (3), Cap. III, pentru $\lambda = 1$, cît și a seriilor ce se obțin derivînd parțial în raport cu y^k, și de două ori în raport cu x^i.

CAPITOLUL V

PROBLEMA LUI CAUCHY PENTRU ECUAȚIA

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \, \partial x^j} = F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial u}{\partial y^k}\right)$$

§ 1. Punerea problemei. Ne propunem să găsim soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \, \partial x^j} = F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial u}{\partial y^k}\right) \tag{1}$$

cu $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, m$. În partea a doua a ecuației (1) F este o funcție de $2m + 2n + 2$ argumente:

$$x^1, x^2, \ldots, x^n;\ y^1, y^2, \ldots, y^m,\ t,\ u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x^n};\ \frac{\partial u}{\partial y^1}, \frac{\partial u}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial y^m}$$

în următoarele ipoteze:

a) Într-un domeniu $\mathcal{D}$ din spațiul cu $n + m + 1$ dimensiuni x, y, t, cu $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ și $y = (y^1, y^2, \ldots, y^m)$, funcțiile a_{ij}, sînt analitice în variabilele $x^1, x^2, \ldots, x^n$ și regulate în variabilele $y^1, y^2, \ldots, y^m, t$.

b) Funcția $F(x, y, t, u, v, w)$ continuă în cele $2n + 2m + 2$ argumente este mărginită $|F| < N$, pentru

$$|u - u_0| < L,\ |v_i - v_{i0}| < L,\ |w_k - w_{k0}| < L \tag{2}$$

și orice $(x, y, t) \in \mathcal{D}$.

c) Există $m + n + 1$ numere pozitive A, B_i, C_k $(i = 1, 2, \ldots, n;$ $k = 1, 2, \ldots, m)$ astfel că pentru orice pereche de valori

$$\begin{aligned} &(u_1;\ v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n};\ w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1m}),\\ &(u_2;\ v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n};\ w_{21}, w_{22}, \ldots, w_{2m}), \end{aligned} \tag{3}$$

situate în vecinătatea (2), să avem

$$\begin{aligned} &|F(x, y, t, u_1, v_1, w_1) - F(x, y, t, u_2, v_2, w_2)| <\\ &< A\,|u_1 - u_2| + B_i\,|v_{1i} - v_{2i}| + C_k\,|w_{1k} - w_{2k}|, \end{aligned} \tag{4}$$

pentru orice (x, y, t) în $\mathcal{D}$.

d) Pe o suprafață S situată în $\mathcal{D}$ se cunosc valorile φ și ψ ale funcției u și ale derivatei transversale $\dfrac{du}{d\nu}$ definită la Cap. III, § 2.

Să considerăm acum șirul de funcții

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_q, \ldots \tag{5}$$

definite în $\mathcal{D}$ de

$$\begin{aligned} &u_0 = 0,\\ &\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^i\,\partial x^j} = F_0,\\ &\frac{\partial u_2}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^i\,\partial x^j} = F_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{\partial u_q}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x^i\,\partial x^j} = F_{q-1},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{6}$$

u_q fiind soluţia ecuaţiei

$$\frac{\partial u_q}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x^i\,\partial x^j} = F_{q-1} \tag{6'}$$

care pe S, împreună cu derivata transversală, ia valorile φ, ψ respectiv şi unde

$$F_{q-1} = F\left(x,\ y,\ t,\ u_{q-1},\ \frac{\partial u_{q-1}}{\partial x^i},\ \frac{\partial u_{q-1}}{\partial y^k}\right), \tag{7}$$

F_0 obţinîndu-se din F înlocuind pe u şi derivatele sale parţiale cu zero.

Dacă în sistemul (6) facem înlocuirile

$$u_0 = u_0,\ u_1 = u_1 \tag{8}$$

$$\theta_2 = u_2 - u_1,\ \theta_3 = u_3 - u_2,\ \ldots,\ \theta_q = u_q - u_{q-1},\ \ldots,$$

sistemul (6) se transformă în :

$$\begin{gathered}
u_0 = 0,\\
\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^i\,\partial x^j} = F_0,\\
\frac{\partial \theta_2}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^i\,\partial x^j} = F_1 - F_0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial \theta_q}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2 \theta_q}{\partial x^i\,\partial x^j} = F_{q-1} - F_{q-2},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{9}$$

iar convergenţa uniformă a şirului

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_q,\ \ldots$$

se transformă în convergenţa uniformă a seriei

$$u_0 + u_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_q + \ldots \tag{10}$$

Din relaţiile (8) *rezultă că pe suprafaţa S, funcţiile θ_2, θ_3, ..., θ_q, sînt nule, împreună cu derivatele lor transversale.*

§ 2. Determinarea funcţiilor u_1 şi θ_q. Vom considera domeniul de integrare Ω un cilindru generat de un domeniu Δ din spaţiul cu n dimensiuni x^1, x^2, ..., x^n, prin translaţie de-a lungul axelor oy^k $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ şi ot, în sensul crescător al coordonatelor

$$\Omega = \{(x,\ y,\ t)\,|\,x \in \Delta,\ y \in I,\ t \in [\tau,\ t_1]\} \tag{11}$$

cu

$$I = \{(y^1, y^2, \dots, y^m) \mid y^1 \in [\eta_1, y_1^1], \dots, y^m \in [\eta_m, y_1^m]\}$$

astfel ca $(\xi, \eta, \tau) \in \mathcal{D}$.

a) Dacă v este soluția fundamentală a ecuației

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \, \partial x^j} = 0 \tag{12}$$

ce se determină ca la Cap. II, atunci u_1 este dat de formula (27), Cap. III

$$u_1(\xi, \eta, \tau) = (-1)^m (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{\partial^m}{\partial \eta_1 \, \partial \eta_2 \dots \partial \eta_m} \left[\int_S \left[\varphi \left(vw - \nu \frac{dv}{d\nu} \right) + \nu v \psi \right] d(S) - \int_\Omega v F_0 \, d(\Omega) \right], \tag{13}$$

unde φ și ψ sînt valorile pe care le ia soluția căutată u și derivata ei transversală $\frac{du}{d\nu}$ pe S, iar F_0 este valoarea funcției F din (1) cînd se înlocuiesc u, $\frac{\partial u}{\partial x^i}$, $\frac{\partial u}{\partial y^k}$ cu zero.

b) Funcțiile $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_q, \dots$, împreună cu derivatele lor transversale $\frac{d\theta_2}{d\nu}, \frac{d\theta_3}{d\nu}, \dots, \frac{d\theta_q}{d\nu}, \dots$ sînt nule pe S, încît dacă aplicăm formula (27), Cap. III, și ținem seamă de aceste condiții avem

$$\theta_q(\xi, \eta, \tau) = (-1)^{m+1} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{\partial^m}{\partial \eta_1 \partial \eta_2 \dots \partial \eta_m} \int_\Omega v (F_{q-1} - F_{q-2}) \, d(\Omega) =$$

$$= -(4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_\tau^{t_1} dt \int_\Delta v (F_{q-1} - F_{q-2}) \, d(\Delta) \tag{14}$$

cu

$$F_q = F\left(x, y, t, u_{q-1}, \frac{\partial u_{q-1}}{\partial x^i}, \frac{\partial u_{q-1}}{\partial y^k} \right), \tag{15}$$

unde u_q, conform lui (6′), este dat de

$$u_q = (-1)^m (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{\partial^m}{\partial \eta_1 \, \partial \eta_2 \dots \partial \eta_m} \left[\int_S \left| \varphi \left((vw - \nu \frac{dv}{d\nu} \right) + \nu v \psi \right] d(S) - \right.$$

$$\left. - \int_\Omega v F_{q-1} \, d(\Omega) \right], \tag{16}$$

pentru $q = 2, 3, \dots$.

§ 3. Convergența seriei (10). *a*) Avem

$$u_n = u_0 + u_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n,$$

prin urmare convergența uniformă a seriei (10) este echivalentă cu convergența uniformă a șirului (9). Conform condițiilor (*c*) din § 1 din acest capitol

$$\begin{aligned} | F_{q-1} - F_{q-2} | < A \, | u_{q-1} - u_{q-2} | + B_i \left| \frac{\partial u_{q-1}}{\partial x^i} - \frac{\partial u_{q-2}}{\partial x^i} \right| + \\ + C_k \left| \frac{\partial u_{q-1}}{\partial y^k} - \frac{\partial u_{q-2}}{\partial y^k} \right| \end{aligned} \tag{17}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, m$, însă

$$\theta_{q-1} = u_{q-1} - u_{q-2}$$

prin urmare inegalitatea (17) se scrie

$$| F_{q-1} - F_{q-2} | \leqslant A \, | \theta_{q-1} | + B_i \left| \frac{\partial \theta_{q-1}}{\partial x^i} \right| + C_k \left| \frac{\partial \theta_{q-1}}{\partial y^k} \right|$$

deci

$$| \theta_q | < (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_\tau^{t_1} \mathrm{d}t \int_\Delta |v| \left(A \, | \theta_{q-1} | + B_i \left| \frac{\partial \theta_{q-1}}{\partial x^i} \right| + C_k \left| \frac{\partial \theta_{q-1}}{\partial y^k} \right| \right) \mathrm{d}\,(\Delta). \tag{18}$$

Din expresia lui u_1 dată de (13), conform unei discuții făcută la Cap. IV, § 1, urmează că u_1 și derivatele parțiale $\frac{\partial u_1}{\partial x^i}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y^k}$ sînt mărginite în $\mathcal{D}$ de un număr $\mathcal{L} > 0$,

$$| u_1 |, \ \left| \frac{\partial u_1}{\partial x^i} \right|, \ \left| \frac{\partial u_1}{\partial y^k} \right| < \mathcal{L}; \qquad i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, m;$$

vom alege pe Ω *astfel ca* $\mathcal{L} = L$.

b) Vom face și de astă dată o restricție asupra volumului Ω (deci și asupra domeniului $\mathcal{D}$), anume îi cerem ca, față de sistemul de coordonate ales, toate punctele volumului Ω și frontierei $F\Omega$ să aibă *toate* coordonatele strict pozitive, astfel ca să existe un număr $\alpha > 1$, încît oricare ar fi $(x, y, t) \in \Omega$ politopul T definit de

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant \xi_i \leqslant \alpha \, x^i, && i = 1, 2, \ldots, n \\ & 0 \leqslant \eta_k \leqslant \alpha \, y^k, && k = 1, 2, \ldots, m \\ & 0 \leqslant \tau \leqslant \alpha \, t, && \end{aligned} \tag{19}$$

să conțină pe Ω, deci

$$\text{vol}\ T > \text{vol}\ \Omega$$

cît și politopul T' definit de

$$\begin{aligned} &0 \leqslant \xi_i \leqslant \alpha\, x^i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ &0 \leqslant \tau \leqslant \alpha t \end{aligned} \tag{20}$$

să conțină volumul generat de domeniul Δ, printr-o deplasare de la τ la t_1.

c) Condițiile îndeplinite de volumul Ω cît și de funcțiile $u_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \ldots$ arată că sîntem în cazul Cap. IV, § 2, deci $\theta_q, \dfrac{\partial \theta_q}{\partial x^i}, \dfrac{\partial \theta_q}{\partial y^k}, \dfrac{\partial \theta_q}{\partial t}$ satisfac următoarele inegalități

$$| \theta_q | < L\,[(m + n + 1)\, M\, \alpha^{nq+1}]^q \cdot \frac{(x + y + t)^{nq+1}}{(nq + 1)\,!} \tag{21}$$

$$\left|\frac{\partial \theta_q}{\partial x^i}\right|, \left|\frac{\partial \theta_q}{\partial y^k}\right|, \left|\frac{\partial \theta_q}{\partial t}\right| < L\,[(m + n + 1)\, M\, \alpha^{nq+1}]^q \cdot \frac{(x + y + t)^{nq}}{(nq)\,!}, \tag{22}$$

unde M un număr pozitiv astfel ca

$$A\,|\, v\,|, \; B_i\,|\, v\,|, \; C_k\,|\, v\,| < M$$

pentru $(x, y, t) \in \mathcal{D}$, ceea ce asigură convergența uniformă a seriei (10) în Ω, cît și a seriilor obținute derivînd termen cu termen seria (10), odată în raport cu t și y^k și de două ori în raport cu x^i.

Pentru ca demonstrația să fie completă, trebuie să mai arătăm că șirul de valori astfel obținute $u_1, u_2, \ldots, u_q, \ldots$, pentru $(x, y, t) \in \mathcal{D}$, împreună cu derivatele lor parțiale nu ies din vecinătatea (1'). Am văzut că alegem volumul Ω astfel ca u_1 împreună cu derivatele sale parțiale să îndeplinească această condiție.

Deoarece termenul

$$(-1)^m \cdot (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{\partial^m}{\partial \eta_1\, \partial \eta_2 \ldots \partial \eta_m} \int_S \left[\varphi \left(vw - \nu \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\nu} \right) + \nu v\, \psi \right] \mathrm{d}\,(S)$$

este același pentru toate funcțiile u_q, numai termenul

$$(4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_\tau^{t_1} \mathrm{d}t \int_\Delta vF\, \mathrm{d}\,(\Delta)$$

este important în cele ce urmează. Pentru u_1 avem

$$\left| (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_\tau^{t_1} \mathrm{d}t \int_\Delta v\, F_0\, \mathrm{d}\,(\Delta) \right| < NK,$$

unde am pus

$$\left| (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_\tau^{t_1} \mathrm{d}t \int_\Delta v\, \mathrm{d}\,(\Delta) \right| < K$$

pentru orice (ξ, η, τ) în $\mathcal{D}$. Această inegalitate este însă adevărată şi pentru $F_1, F_2, \ldots$ deoarece u_1 îndeplinind condiţiile (2) urmează că

$$|F_1| < N,$$

prin urmare

$$\left| (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\tau}^{t_1} dt \int_{\Delta} v F_1 \, d\,(\Delta) \right| < NK$$

deci şi u_2 îndeplineşte condiţiile (2), ş.a.m.d.

Primită la redacţie la 30 august 1963

BIBLIOGRAFIE

1. I. GH. PETROVSCHI, *Prelegeri asupra teoriei ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1953.
2. J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's problem in Linear Partial Differential Equations.* New York, 1952.
3. MARCEL N. ROŞCULEŢ, *Contribuţii la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip parabolic. V. Problema lui Cauchy pentru ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi, liniare, cu coeficienţi variabili.* Studii şi cercetări matematice, **XIII**, *2* (1962).
4. V. I. SMIRNOV, *Curs de matematici superioare,* vol. 4, Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
5. GR. C. MOISIL, *Sur les géodésiques des espaces de Riemann singuliers.* Bull. Math. de la soc. Roumaine de sc., **42**, (1) (1940).
6. GH. VRĂNCEANU, *Lecţii de geometrie diferenţială,* vol. I, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952.
7. E. PICARD, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives.* Journal de Math., **16** (1890).

NOTE ISTORICE

N. MILESCU, *Aritmologie*

În ultimul timp Institutul de matematică al Academiei R.P.R. a intrat în posesia unor copii după unele lucrări rare ce interesează istoria matematicilor din țara noastră. Este vorba în primul rînd de lucrarea spătarului Nicolae Milescu *Aritmeticon*, după care am primit o copie prin bunăvoința Directorului Institutului de matematică din Kiev, prof. J. A. Mitropolski. Originalul se găsește în biblioteca mănăstirii Ciudov din apropiere de Kiev.

Se pare că este singura copie ce există în țara noastră. În lucrare, scrisă de Milescu în 1672 la Moscova, lucruri simple ale aritmeticii sînt utilizate pentru a expune fapte și lucruri disparate, din cultura generală de atunci.

Se pregătește acum traducerea în limba romînă a lucrării după care va putea fi consultată la Biblioteca Institutului de matematică.

Acad. *Gh. Vrănceanu*

JANOS BOLYAI, *manuscrise*

Institutul de matematică al Academiei R.P.R. a realizat în 1962 un microfilm după opera nepublicată a lui Janos Bolyai, operă al cărei manuscris se găsește la Biblioteca documentară Teleki-Bolyai din Tg. Mureș. Este vorba de multe mii de pagini manuscrise, de scrisori, de lucrări matematice etc. Aceste manuscrise sînt în limba maghiară și unele din ele vor fi traduse în limba romînă, pentru acei ce urmăresc probleme legate de istoria matematicilor. În special este interesantă scrisoarea lui Janos Bolyai scrisă tatălui său, din Timișoara, la 3 noiembrie 1823, în care spune printre altele:

„...Întîi de toate răspund la chestiunea binomului. Quo ad. exp. integros positivos, firește demonstrația este perfectă așa cum ai scris-o..." și scrisoarea continuă cu circa 70 de rînduri relativ la demonstrația formulei binomului $(1 + x)\frac{n}{m}$, pentru exponenți fracționari, utilizînd în text din cînd în cînd expresii în limba latină și cîte o dată în limba germană. Rezultă că aceasta era o problemă pe care Farkas Bolyai o pusese fiului său, și această partea a scrisorii se încheie cu cuvintele: „...Despre tema aceasta vom mai discuta: vom încerca și pentru exponenți negativi..." și mai departe scrisoarea continuă „...Ipoteza mea este deja gata și imediat ce o voi pune în ordine o și elaborez, iar cînd voi avea posibilitatea voi edita o lucrare despre paralele; în momentul de față *nu este* inventată, dar drumul pe care l-am urmat promite aproape cu siguranță atingerea scopului, bineînțeles dacă aceasta este posibil. Nu este gata dar am ajuns la rezultate atît de sublime încît și eu m-am uimit și ar fi un păcat etern ca ele să se piardă; dacă le vei vedea tată, le vei cunoaște; acum nu pot grăi mai mult decît atît: *din nimic am creat o altă lume nouă*; tot ce am trimis pînă acum este un castel din cărţi de joc faţă de un turn. Sînt convins că nu mi se face cinste mai puţină decît dacă aşi fi descoperit-o...".

Această scrisoare este importantă prin aceea că arată că în 1823 Janos Bolyai întrevedea rezolvarea problemei paralelelor, pe care încă nu o găsise. Se ştie că în acelaşi timp N. I. Lobacevski era preocupat de aceeaşi problemă la Universitatea din Kazan şi că în februarie 1826 face o expunere în faţa Consiliului Facultăţii de matematică relativ la această problemă, însă publică prima lucrare în 1829, în timp ce Bolyai publică lucrarea sa în 1831.

Cunoaşterea momentelor în care cei doi mari geometri Lobacevski şi Bolyai au ajuns la descoperirea unei noi geometrii, diferită de geometria lui Euclid, este desigur o problemă importantă a istoriei geometriei şi un studiu amănunţit al operei nepublicate a lui Bolyai ar putea poate răspunde în parte la această problemă.

Acad. *Gh. Vrănceanu*

PAUL SIPOS

Institutul de matematică al Academiei R.P.R. posedă un microfilm, trimis de Universitatea din Debreczen, ce reproduce un lung memoriu al matematicianului polonez I. Woyciechowsky, publicat la Budapesta în 1932, despre Paul Sipos, remarcabilă personalitate culturală din secolul XVIII. Textul tradus al acestei lucrări se găseşte de asemenea la Institut.

Paul Sipos este primul matematician maghiar ale cărui lucrări sînt la nivelul ştiinţei contemporane. El are şi pentru noi o importanţă deosebită fiindcă s-a născut şi a activat în Transilvania ca şi Farkas şi Janos Bolyai. Spre deosebire de ultimii, Sipos este puţin cunoscut la noi. Redăm după Woyciechowsky, cîteva date despre Sipos.

Paul Sipos s-a născut la Aiud la 16 octombrie 1759. Primele studii le-a făcut la colegiul vestit din acest oraş, unde se dădea o importanţă deosebită matematicii şi fizicii. A fost rector şi profesor de matematici şi fizică la Orăştie (1783—1787), colegiu creat atunci. După ce şi-a continuat studiile la Frankfurt, Göttingen şi Viena a revenit ca rector şi profesor la Orăştie (1798—1805). Între 1805 şi 1810 a fost profesor de matematici la clasele superioare ale colegiului din Sarospatak (Ungaria). A decedat la 13 septembrie 1816.

Paul Sipos a terminat în 1795 disertaţia *Beschreibung* premiată de Academia din Berlin pe care a publicat-o în colecţia de Memorii din 1796. În această lucrare Sipos descrie şi utilizează un instrument pe care îl numeşte *izometru*, în genul raportorului, dar mărginit de un arc de cochlevidă. Această curbă — întîlnită prima oară de Fontana din Pavia (1780) — nu era cunoscută atunci nici de autor, nici de matemacienii contemporani. Cu ajutorul izometrului, Sipos împarte un arc de cerc în oricîte părţi egale şi rectifică elipsa, stabilind o corespondenţă între lungimea coardelor cochlevidei şi lungimea elipsei.

După încercarea lui Kepler — şi a unor autori japonezi ignoraţi atunci — aceasta este una din primele lucrări de rectificare a elipsei. Woyciechowsky face un istoric dezvoltat al tuturor formulelor propuse în acea vreme şi ulterior, şi dovedeşte că metoda dată de Sipos e cea mai practică, dînd o aproximaţie mai bună chiar decît formula cunoscută a lui R. Sorreau din 1913.

Sipos a publicat încă două lucrări de matematici. În 1807 a editat la Bratislava sub numele *Specimen*, o tabelă trigonometrică originală în care calculează logaritmii funcţiilor trigonometrice din valoarea logaritmului arcului. În a treia lucrare intitulată *Berechtigung* calculează log sin x, log tg x, pentru arcele mici.

N. Mihăileanu

RECENZII

M. SIMONNARD, *Programation linéaire*. Dunod, Paris, 1962, 410 pag.

Volumul de faţă este un tratat matematic de programare liniară. El se adresează matematicienilor care se ocupă de aplicaţii ale programării liniare şi îşi propune să le pună acestora la îndemînă un instrument de lucru în rezolvarea practică a problemelor.

Din această cauză, în expunere, accentul cade pe algoritmii de calcul: generali — metode simplex, pentru structuri particulare (problemele de transporturi), sau speciale (de programare parametrică, rezolvare în numere întregi etc.) pentru a căror înţelegere completă sînt însă detaliat prezentate, pornind de la un minim de cunoştinţe şi teoremele de bază ca şi demonstraţia validităţii fiecărei metode. În acest fel, autorul reuşeşte o dezvoltare sistematică a teoriei programării liniare, al cărei interes teoretic creşte prin faptul că legătura programării liniare ca metodă de calcul cu teoria mulţimilor convexe, teoria matricilor şi teoria grafelor îşi găseşte locul meritat, deşi, din necesităţi de prezentare, rezultate importante folosite sînt condensate în apendice.

Forma expunerii, în primul rînd conciziunea şi omogenitatea ei, este foarte mult ajutată de alegerea potrivită a notaţiilor şi de întrebuinţarea aproape exclusivă a scrierii matriciale

Prima parte a cărţii (cap. I—VI) cuprinde, după capitolul introductiv care conţine enunţarea problemei şi teoremele de bază ale programării liniare, expunerea metodei simplex (fundamentarea metodei, algoritmul metodei directe, obţinerea programului iniţial de bază, convergenţa algoritmului) şi a variantelor ei: metoda simplex revizuită, metoda simplex duală şi simplex direct-duală, fiecare cu un plan de expunere analog cu cel dat mai sus pentru metoda simplex directă, ca şi un capitol teoretic asupra dualităţii problemelor de programare liniară (Cap. V).

Contribuţia autorului în prezentarea acestei părţi de teorie şi metode generale, cuprinsă în parte chiar în cărţile cele mai elementare de programare liniară, este prezentarea clară şi concisă, căutarea maximei generalităţi, examinarea pînă la capăt a tuturor posibilităţilor. De asemenea, discuţiile comparative asupra eficacităţii întrebuinţării metodelor, asupra programării lor la maşini şi a duratei rezolvării, bazate pe o bogată experienţă personală şi pe cunoaşterea rezultatelor obţinute în acest domeniu în principalele centre de calcul din Franţa, Anglia şi S.U.A., constituie îndrumări preţioase pentru toţi rezolvitorii de probleme.

Spre deosebire de prima parte, restul cărţii cuprinde capitole al căror conţinut, în mare parte, nu a mai fost inclus în monografii sau căruia i s-a acordat o mai mică importanţă. Necesitatea rezolvării unor probleme practice, de aceste tipuri, pe de o parte şi completarea în ultimul timp a rezultatelor obţinute, pe de altă parte, au condus la expunerea lor în această carte.

Partea a doua tratează structuri speciale. Astfel, capitolul VII se ocupă de problema post-optimizării şi de cea a programării parametrice. Deşi deosebite la prima vedere, aceste probleme au fost incluse în acelaşi capitol, deoarece amîndouă pornesc de la ideea modificării problemei iniţiale : la problemele de programare parametrică, datele iniţiale variază continuu în funcţie de un parametru liniar, iar la problemele de post-optimizare datele se schimbă discret : se modifică termenii liberi sau coeficienţii, se adaugă o restricţie sau mai intervine o variabilă. Se rezolvă problema modificării vectorului coeficienţilor funcţiei-obiectiv a vectorului termenilor liberi, sau a unei coloane a matricii coeficienţilor, prin reducere la aplicarea adaptată uneia din formule a metodei simplex.

Capitolele VIII şi IX tratează despre programarea în numere întregi. Se defineşte mai întîi problema de programare liniară ,,total în numere întregi'' ca fiind o problemă de programare liniară în care se impune condiţia ca toate soluţiile să fie întregi şi problema de programare liniară ,,parţial în numere întregi'' în care numai unei părţi a variabilelor i se cere ca soluţiile să fie întregi. Capitolul VIII se ocupă cu rezolvarea problemelor total în numere întregi. Se dau doi algoritmi : algoritmul discret (aplicabil numai în cazul în care toate datele iniţiale sînt numere întregi) şi cel ciclic. Problemele parţial în numere întregi (Cap. IX) se rezolvă prin algoritmul mixt, o combinaţie între cele două probleme numite mai sus. Ele revin, în urma adăugării unei condiţii suplimentare la fiecare etapă, la aplicarea iteraţiei algoritmului simplex, după care condiţia se suprimă. Capitolul se încheie cu o discuţie asupra altor metode cunoscute (cele expuse se datoresc lui R. Gomory) şi asupra problemelor deschise.

Capitolul X cuprinde rezolvarea problemelor de programare liniară cu variabile mărginite şi principiul descompunerii al lui Dantzig şi Wolfe.

În multe probleme practice se iveşte necesitatea de a impune variabilelor, în afară de condiţia de nenegativitate, care se mărgineşte inferior, şi o restricţie care să le mărginească superior. Deoarece adăugarea restricţiilor ca condiţii în sistem ar duce la creşterea considerabilă a acestuia, problema a fost rezolvată prin adaptarea criteriilor de ieşire şi intrare în bază în algoritmul simplex direct sau dual.

Principiul descompunerii porneşte de la necesitatea de a rezolva probleme de programare liniară, oricît de mari, cu ajutorul maşinilor electronice disponibile. Ea constă în ,,descompunerea'' unei probleme în mai multe probleme de dimensiuni mai mici şi într-o problemă de legătură, de dimensiuni comparabile, cu cele ale problemei iniţiale, dar în general mai mici. Problema este tratată într-un caz particular în care este deosebit de utilă, însă, după cum se remarcă încă din introducerea la capitol, se generalizează evident. Comentariile asupra aplicabilităţii problemei demonstrează utilitatea şi adaptabilitatea ei la diferite scopuri.

A treia şi ultima parte a cărţii tratează problema transporturilor cu diferitele ei variante ; Cap. XI metoda simplex pentru problema transporturilor, Cap. XII şi XIII despre reţele de transport (generalităţi), flux maximal, flux compatibil cu cererile, flux compatibil cu valori pe arce, problema distribuţiei), Cap. XV probleme de transport cu capacităţi, probleme de transport simple şi de afectare. O parte din aceste probleme sînt cazuri particulare ale unor structuri speciale ale problemelor de programare liniară generale sau se reduc uşor la acestea. Expunerea lor este făcută în foarte strînsă legătură cu graful asociat problemei, o serie de definiţii şi proprietăţi sînt exprimate pentru grafuri. Acest mod de prezentare are avantaje de concizime şi eleganţă.

Şi acestea, ca şi toate celelalte capitole, se încheia cu darea ,,reţetelor'', adică cu enumerarea, în ordinea cea mai indicată, a operaţiilor care trebuie efectuate în fiecare iteraţie. Exemplele, edificator alese, sînt de asemenea folositoare. Interpretările geometrice şi economice, nelipsite în fiecare capitol, ajută la înţelegerea şi la fixarea principiilor teoretice ale metodelor de calcul.

În sfîrşit, severa selectare a materialului prezentat a fost în întregime subordonată scopului cărţii. Astfel, dezvoltarea dată capitolelor mai puţin clasice, dar foarte utile, din partea a doua și a treia, a fost făcută în detrimentul prezentării legăturii programării liniare cu teoria jocurilor, a unor aplicații importante cum este balanța legăturilor între ramuri, a elementelor de programare neliniară și stocastică, care au fost cu bună știință excluse.

Așa cum se prezintă, cartea are calitățile necesare pentru a fi de un real folos atît matematicienilor care se interesează de rezultate recente în aceste domenii, care găsesc aici sintetizate o întreagă serie de contribuții publicate în articole disparate, cît și celor care caută o expunere sistematică și riguroasă, bazată pe ultimele rezultate ale bazelor programării liniare, și de asemenea practicienilor care urmăresc formarea unei tehnici de calcul sau pur și simplu rezolvarea, în cele mai bune condiții, ale unei probleme.

A. Sălăgeanu

G. MIHOC, V. URSEANU, *Matematici aplicate în statistică*. Colecția „Teoria probabilităților”, IV, Editura Academiei R.P.R., București, 1962.

În această lucrare autorii și-au propus să aleagă și să prezinte cele mai potrivite procedee ale statisticii matematice care se pot aplica în domeniul statisticii ca știință socială. În studierea acestor probleme, autorii au abordat și noile teorii apărute în matematică în ultimii ani, care reprezintă o importanță considerabilă în aplicațiile practice. Originalitatea punerii și tratării problemelor fac ca această lucrare să se prezinte la un nivel științific ridicat. Accesibilitatea expunerii nu este realizată prin sacrificarea rigurozității științifice ; unele considerații și demonstrații care interesează numai pe matematicieni sînt tipărite cu litere de caracter mic.

Este imposibil de a scoate în evidență într-o recenzie toate elementele care caracterizează valoarea lucrării de față. Ea este împărțită în șase părți, respectiv în 26 de capitole.

În prima parte sînt expuse problemele fundamentale ale teoriei probabilităților și statisticii matematice, indispensabile pentru oricine se ocupă de aplicarea și utilizarea metodelor probabilistico-statistice. Pe cuprinsul a 8 capitole se tratează : fundamentarea teoretică a teoriei probabilităților, scheme clasice din teoria probabilităților, valori medii, dispersii, funcții de repartiție și funcții caracteristice, legi de probabilitate clasice, legea numerelor mari.

În partea a doua (capitolele 9—11) pentru prima dată în literatura noastră de specialitate se acordă locul cuvenit analizei legăturilor statistice dintre caracteristicile repartițiilor. Statisticianul sau economistul poate aprofunda metoda mediilor, corelației, regresiei etc. Este de relevat modul clar și reușit în care prin analiza metodei grupărilor noțiunea de repartiție din statistica matematică este făcută accesibilă statisticienilor și economiștilor.

În partea a treia (capitolele 12—14), consacrată seriilor dinamice, autorii subliniază utilitatea noțiunii de tendință centrală (cunoscută în statistica internațională de obicei sub numele de „trend”), problemă puțin tratată pînă acum în literatura noastră statistică. Se studiază problema ajustării și interpolării seriilor dinamice și se dau apoi metodele de calcul al ritmului mediu de dezvoltare. Această parte a lucrării prezintă un deosebit interes pentru statisticieni și economiști. Concluziile cu care se încheie considerațiile privind analiza seriilor dinamice sînt de mare utilitate practică. De exemplu, se subliniază faptul că cel mai potrivit și sigur domeniu de aplicare a mediei geometrice este acela al calculului ritmului mediu de dezvoltare în planurile de perspectivă. Teoria este ilustrată cu numeroase exemple concrete, judicios alese.

Partea a patra (capitolele 15—18) este consacrată exclusiv metodei indicilor, care prin conținutul său este strîns legată de activitatea economiștilor și statisticienilor. Ea este tratată sistematic și aprofundat, ținînd seama de cele mai moderne contribuții științifice obținute în această direcție. Astfel, după ce este expusă esența indicilor, se dă o clasificare a lor și se definesc indicii în formă de bază și în formă de lanț, folosindu-se în special schema lui V. Peregudov. Ca aplicații la calculul indicilor se consideră mai ales indicii cu structură variabilă și indicele caracteristicii funcționale în ipoteza unei producții eterogene. Tratarea aprofundată și documentată, înfățișînd problemele studiate în lumina noilor considerații teoretice ale statisticienilor din țările socialiste și mai cu seamă ale statisticienilor sovietici.

Metoda indicilor se continuă cu studiul indicilor teritoriali, în care contribuția statisticienilor sovietici s-a remarcat în mod deosebit. Lucrarea prezintă pentru prima dată o sinteză a problemelor teoretice și practice esențiale ale elaborării indicilor teritoriali, tratîndu-se problema alegerii bazei de comparație și a sistemului corespunzător de ponderi, ca apoi să se treacă la indicarea metodelor efective de calcul. Considerațiile privind studiul indicilor teritoriali se încheie cu o serie de observații și concluzii care reprezintă o contribuție originală a autorilor și care deschide largi perspective de cercetare în această direcție.

Se trece apoi la studiul aplicațiilor coeficientului de corelație liniară în lucrări de analiză prin metoda indicilor și la aplicarea legii numerelor mari la elaborarea indicilor. Se expun și se dezvoltă lucrările statisticienilor sovietici L. S. Kazineț și I. I. Lukomski, aducîndu-se cu această ocazie unele precizări și unele condiții care permit o mai justă aplicare ale rezultatelor lui Lukomski, ceea ce face ca problema să capete o nouă înfățișare cu bogate perspective de dezvoltare.

Partea cincea (capitolele 19—22) este consacrată metodei selecției, care joacă un rol central în statistica matematică și teoretică. Astfel după ce se expune metoda selecției și principiului ei în cercetările statistice, insistîndu-se asupra reprezentabilității selecției și formulării matematice corespunzătoare, se trece la studiul diferitelor tipuri de selecție. În acest sens sînt studiate sondajele cu o fază, cu două sau mai multe faze, ca și sondajele de volum mic. După descrierea acestor tipuri de sondaje în formularea matematică corespunzător, se indică și diverse metode de verificarea ipotezelor. Această parte se termină cu unele considerații generale, deosebit de utile, asupra metodei selecției.

Partea a șasea, și ultima (capitolele 23—26), se ocupă de metodele moderne ale matematicii moderne, care au contigență cu calculul statistic. Astfel, primul capitol este consacrat calculului cu numere întîmplătoare, sau cum i se mai spune — metodei Monte Carlo. După ce se expun problemele clasice ale calculului numărului π, problema acului, calculul unei arii mărginite de o curbă convexă, calculul integralelor definite, studiul mersului la întîmplare, rătăcirea aleatoare uniformă pe o suprafață plană, aplicații la ecuația lui Laplace, aproximarea prin polinoame, inversa unei matrici, se trece la utilizarea proceselor cu legături complete în calculul unor anumite valori. Se știe că procesele cu legături complete au fost introduse în teoria probabilităților de către O. Onicescu și G. Mihoc încă din anul 1935, dînd astfel naștere unui capitol bine constituit astăzi al teoriei proceselor aleatoare. Pe lîngă dezvoltările teoretice deosebit de valoroase la care a condus această teorie și care în majoritate aparține matematicienilor romîni, aceasta și-a găsit o largă aplicație mai ales în teoria învățării. În lucrare autorii ilustrează utilizarea acestor procese în calculul probabilităților totale limită în cazul unor lanțuri ergodice.

Următorul capitol este consacrat programării liniare ; el conține o expunere clară și accesibilă a bazelor acestui relativ tînăr domeniu al matematicii. După cîteva considerații generale privind programarea liniară, se trece la metoda simplex care dă posibilitatea rezolvării efective a problemelor de programare liniară folosind un algoritm relativ nu prea complicat. Se trece apoi la studiul bazelor matematice ale programării liniare și la problema transporturilor, subliniindu-se în special rolul deosebit al acestei probleme pentru economia noastră națională.

Un capitol este consacrat legăturilor dintre ramuri. După ce se dă fundamentarea teoretică a acestei balanțe și a schemei corespunzătoare, se indică coeficienții tehnici și unele aplicații.

Ultimul capitol este consacrat diverselor generalizări ale programării liniare. Autorii scot mai întîi în evidență caracterul statistic al acestei metode, ceea ce conduce inevitabil la folosirea teoriei probabilităţilor şi statisticii matematice în rezolvarea acestor probleme. Se pune astfel în evidenţă programarea aleatoare în care coeficienţii care intervin în problema respectivă sînt variabile aleatoare. Pentru acest caz general, care conţine drept caz particular programarea liniară obişnuită, se indică unele procedee de rezolvare mai ales în cazul variabilelor aleatoare normale şi independente. În continuare se expune problema generală de programare aleatoare aşa cum a fost pusă de către matematicienii romîni, începînd cu G. Mihoc, a căror contribuţie este foarte valoroasă. Indiscutabil, problema programării aleatoare ridică o serie întreagă de probleme, care desigur că vor fi rezolvate ulterior prin instrumente puternice ca : teoria jocurilor, teoria deciziilor statistice, analiza secvenţială etc. Capitolul se încheie cu cîteva consideraţii privind programarea dinamică, domeniu deosebit de important al matematicii moderne, datorită numeroaselor ei posibilităţi de rezolvare a problemelor concrete, folosind modelarea matematică.

Lucrarea de faţă, prin modul în care a fost concepută, este unică în felul ei. Pe lîngă marea ei valoarea ştiinţifică, ea este scrisă într-o formă accesibilă, cu numeroase exemplificări judicios alese, constituind totodată un manual de largă circulaţie pentru economişti şi statisticieni. Lucrarea desigur că va constitui mult timp cartea de căpătîi a fiecărui economist şi statistician, atît în ceea ce priveşte îmbogăţirea cunoştinţelor cît şi în ceea ce priveşte aplicaţiile concrete. De asemenea, matematicienii vor găsi în ea lucrări deosebit de utile.

R. Theodorescu

Information Retrieval and Machine Translation (*Găsirea informaţiilor şi traducerea mecanică*) Interscience Publishers, New York, Londra, 1960, 686 pag.

Această carte cuprinde comunicările prezentate la „Conferinţa internaţională pentru stabilirea unui limbaj comun pentru automatizarea documentaţiei şi traducerii", ce a avut loc, în 1959, la Cleveland, Ohio, S.U.A.

Căutarea mecanică a documentelor tehnico-ştiinţifice a devenit una din problemele importante ale documentaţiei, dat fiind uriaşa creştere a volumului materialelor publicate. Vechile metode de indexare, vechile forme ale fişelor bibliografice, repertoriile de subiecte nu mai corespund volumului de documentare necesar. De aceea s-au căutat noi căi. Principiul noilor metode este de a întrebuinţa extrasul de subiecte principale, ba chiar abstractele în sine, ca grupuri de unităţi convenţionale numite caracteristici, interconectate între ele în mod sintetic.

Comunicarea colectivului de cercetători sovietici Cherenin, Iavrenţieva şi Zidkova arată că de aici derivă legături de similitudine şi subordonare între aceste unităţi. Această idee permite stabilirea legăturilor cu ajutorul unor maşini, care efectuează operaţii logice simple asupra caracteristicilor standard, ceea ce este egal cu a efectua operaţii aritmetice cu numere de către o maşină de calculat după ce s-a realizat reprezentarea cifrică a caracteristicilor. Parametrii de intrare sînt extrasele de subiecte, procesul mecanic poate fi redus la găsirea, identificarea lor în calitate de similar sau subordonat faţă de problema dată şi la înregistrarea unor numere corespunzătoare subiectului, sau adnotărilor bibliografice ale articolelor căutate.

Termenul de „indexare" rămîne valabil şi aici, cuprinzînd operaţia de a prezenta extrasul de subiecte principale sub forma caracteristicilor standard. Totalitatea şi angrenajul acestor caracteristici se numeşte „limba informaţională", cuvintele sale fiind caracteristicile standard, iar gramatica sa este sistemul de legături sintetice între ele. Caracteristicile codificate în cifre, împreună cu codurile simbolurilor de interconexiune, formează „limbajul maşinii".

Cunoscutul documentarist indian Ranganathan arată greutățile clasificării zecimale față de clasificarea Colon (întrebuințată în Asia) și analiza aspectelor (facetarea). În clasificarea zecimală trebuie enumerate toate caracteristicile de subiecte într-o secvență definitivă, deci se pot lucra numai cu subiecte vechi și cunoscute. Cu actuala activitate umană atît de intensă, s-a ivit mereu necesitatea de noi micro-subiecte în cadrul celor de bază, care nu puteau fi încadrate în secvența rigidă a subiectelor deja existente.

Dar stabilirea caracteristicilor standard și a subclaselor ei încă nu ne poate descrie un document în lumină fidelă. Aici mai intervine și o altă problemă : aceea a interrelațiilor în cadrul sistemelor, adică indicarea legăturilor între diferitele grupuri sau subgrupuri ale sistemului. Unele comunicări analizează metodele întrebuințate, altele dau exemplu concret de rezultatele obținute cu una sau alta din aceste metode. Astfel de metode întrebuințate sînt : folosirea de semne separate pentru relații, semne componente, semne grupante, termeni ordinanți, termeni de interfixare. Aceștia din urmă arată relația grupului în cauză, cu toate celelalte grupuri din sistem. Una din comunicări descrie detaliat o metodă de interfixare a diferiților descriptori dintr-un sistem.

Una dintre cele mai importante probleme ale documentării o formează rezumatele, care pot forma baza indexării, clasificării sau traducerii automate. Ele pot fi : tradiționale, telegrafice sau „auto-rezumate".

Confecționarea pe cale electronică a rezumatelor (autoabstractelor), se bazează pe înșirarea unor propoziții din documentul de bază, prin calculul frecvenței așa-ziselor „vedete" sau „cuvinte cheie".

Una dintre comunicări dă o sumară descriere a unui program de autoabstractizare, precum și un exemplu concret de rezumat confecționat pe cale mecanică.

Metoda se bazează pe calcularea valorilor de rezolvare a diferitelor propoziții în text, prin frecvența cuvintelor și stabilirea cuvintelor „cheie". Propozițiile avînd valoarea mai mare decît cea medie sînt selectate pentru autoabstract, iar cele cu valoare mai mică sînt lăsate afară. În felul acesta mașina nu fabrică singură propoziții, ci doar alege pe cele mai semnificative, pe care le reproduce neschimbat în rezumat.

Foarte valoroase sînt comunicările care relatează automatizarea documentației într-o anumită ramură științifică, pentru stabilirea unei limbi informaționale în aceea ramură.

Astfel comunicarea colectivului de cercetători sovietici Zuckerman-Terentiev se ocupă de traducerea nomenclaturii chimice a compușilor organici în limbaj mașină, fie pentru autorezumare, fie pentru traducerea mecanică. Codul este bazat pe formula chimică a compusului ; compușii care au nume speciale se traduc mai înainte în codul formulei lor, și de aici se mînuiesc mai departe.

De asemenea, comunicarea lui O. Nacke din R. F. Germană, se ocupă de principiile de creare a unui limbaj comun pentru mașină, în domeniul medicinii. Sanatoriile și spitalele sînt obligate prin lege să țină evidența fiecărui bolnav în parte, cu istoricul bolii, diagnosticul stabilit tratamentul aplicat și rezultatul obținut. În felul acesta arhiva spitalelor reprezintă cea mai mare colecție a observațiilor științifice, totodată cea mai puțin întrebuințată din cauza timpului enorm ce ar putea pretinde depistarea unui caz căutat. Automatizarea acestei evidențe va pune la dispoziția medicilor din toată lumea experiența acumulată a spitalelor și sanatoriilor.

Comunicarea făcută de americanul Allen Kent, care este de altfel și redactorul cărții, cuprinde pe scurt analiza metodelor de traducere automată întrebuințate pînă acum.

Se descrie traducerea cuvînt cu cuvînt, fără și cu rezolvarea automată a ambiguităților. Se mai tratează problema limbii intermediare artificiale, spre a servi ca punte între limbile de intrare și cele de ieșire. Se propun două meta-limbi de acest fel : una pentru a servi traducerea automată şi una — abstras din prima — care să servească pentru clasificarea şi identificarea mecanică a documentelor.

Rezumatele în limbile străine pot fi codificate astfel încît cu ajutorul maşinii să poată fi interpretate în limba dorită, prin metoda răspunsurilor la întrebările puse maşinii.

Comunicarea mai tratează şi problema trasliteraţiei semnelor dintr-un alfabet într-altul, a polisemantismului, a angajamentelor în secvenţa cuvintelor etc.

În ultimul timp logica simbolică a fost folosită în domenii foarte diferite ca : analiza de documente, clasificare biologică sau proiectarea logică a maşinilor electronice de calcul. Unele din aceste aplicaţii întrebuinţează numai partea logicii simbolice, cunoscută sub numele de algebra booleană.

În automatizarea documentării intervin tocmai celelalte părţi ale logicii simbolice care se află în afara algebrei booleene.

O încercare de a folosi logica simbolică, combinată cu teoria probabilităţilor, calculul matricial şi teoria grupurilor este descrisă într-una din comunicări. Metoda se bazează pe analiza unei matrici de elemente „adevărate" şi „false" printr-un program de permutare a propoziţiilor, cu utilizarea unor subprograme standard, cu ajutorul cărora orice combinaţie de propoziţie poate fi construită automat. S-au elaborat unele programe prin care se iau decizii pentru selectarea materialelor, condiţiilor experimentale, sau a proceselor.

Exemplu se dă în introducerea în maşină a unei serii de simptome constatate la un bolnav. Maşina va tipări, la ieşire, diagnosticul constînd din una sau mai multe boli şi va indica şi tratamentul adecvat.

Multe comunicări dau o descriere a organizării documentării, la un anumit centru, instituţie etc.

Astfel, o comunicare de la Oficiul de Patente din S.U.A. ne dă codurile şi instrucţiunile pentru perforarea şi verificarea anumitor porţiuni din titulatura patentelor din S.U.A., precum şi a tuturor specificărilor, cererilor şi referinţelor citate în textele acestora. Alte comunicări cuprind : prepararea mecanică a „Chemical Abstracts"-urilor, căutarea automată a documentelor la un centru de cercetare în domeniul documentării şi comunicării etc.

Unele comunicări cuprind descrierea, bazele, caracteristicile, performanţele, avantajele şi scopul anumitor maşini. Astfel sistemul „Magnacard" de utilizare al cartelelor magnetice, sortează şi selectează 6 000 cartele pe minut. Benzile de filme „Minicard" înguste de cel mult 30 mm, au o capacitate de înmagazinare a datelor de peste 5 ori capacitatea obişnuită a cartelelor perforate. Datele cifrice apar în sistem binar ca nişte căsuţe opace, sau transparente, iar după selectare tot automat apar şi textele cerute, care în prealabil au fost transpuse tot automat — în formă adecvată sistemului.

Cartea mai cuprinde şi selecţii din discuţiile purtate la această conferinţă internaţională, se conclude că dacă prin această conferinţă sau altele de acest gen, se va cădea de acord asupra calităţilor limbii informaţionale, atunci acestea se vor putea introduce, independent de sistemele, organizările, maşinile la care se aplică.

Domonkos Erica

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R. P. R.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoremele de descompunere ale algebrei)**, 619 p., 25,50 lei.
D. BARBILIAN, **Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)**, 380 p., 15,35 lei.
JANKÓ BELA, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații liniare**, 223 p., 8,85 lei.
N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU și A. CORNEA, **Seminar S. Stoilov 1959 — 1960, Teoria potențialului pe suprafețe riemanniene**, 160 p., 5 lei.
G. CIUCU și R. THEODORESCU, **Procese cu legături complete**, 232 p., 9,85 lei.
C. CONSTANTINESCU, **Seminar M. Nenculcea, Teoria mulțimilor**, 108 p., 3,25 lei.
C. CORDUNEANU, **Funcții aproape-periodice**, 191 p., 8,30 lei.
ROMULUS CRISTESCU, **Spații liniare ordonate**, 332 p., 11,10 lei.
I. CUCULESCU, **Seminar O. Onicescu, Algebre Lie**, 148 p., 5,15 lei.
C. FOIAȘ, **Seminar M. Nicolescu 1959 — 1960, Teoria spectrală în algebre Banach (necomutative) axată pe noțiunea de rezolventă**, 82 p., 2,85 lei.
ALEXANDRU FRODA, **Algebră superioară (fundamente : mulțimi și operații, divizibilitate, spații liniare, forme patratice)**, 455 p., 24,50 lei.
G. GALBURĂ, **Corpuri de funcții algebrice și varietăți algebrice**, 180 p., 7,85 lei.
M. GHERMĂNESCU, **Ecuații funcționale**, 523 p., 25,60 lei.
A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale**, 484 p., 21,50 lei.
CAIUS JACOB, **Introduction mathématique à la mécanique des fluides**, 1288 p. 66,50 lei.
TRAIAN LALESCU, **Introducere în teoria ecuațiilor integrale**, 135 p., 5,90 lei.
LEON LIVOSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice și hidraulice**, 52 p., 18,50 lei.
* * * **Lucrările celui de-al III-lea Congres al matematicienilor romîni**, 228 p., 8,55 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie și topologie, Iași, 2 — 5 iunie 1958**, 264 p., 9,75 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie diferențială din 9 — 12 iunie 1955, organizată de Secția de științe matematice și fizice a Academiei R.P.R.**, 368 p., 9,50 lei.
G. MARINESCU, **Spații vectoriale normate**, (295) p., 6 lei.
G. MARINESCU, **Spații vectoriale topologice și pseudotopologice**, 219 p., 8,80 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie neeuclidiană**, 144 p., 4,30 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă**, 495 p., 25,90 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă, Teoria corespondenței**, 144 p., 4,30 lei.
G. MIHOC și V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 732 p., 34,70 lei.
Gr. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 142 p., 8,55 lei, vol. II, 155 p., 8,25 lei.
Gr. C. MOISIL, **Funcționarea în mai mulți timpi a schemelor cu relee ideale**, 279 p., 12 lei.
Gr. C. MOISIL, **Introducerea în algebră, I. Inele și ideale**, vol. I, 256 p., 9,10 lei.
GR. C. MOISIL, **Matricele asociate sistemelor de ecuații cu derivate parțiale. Introducere în studiul cercetărilor lui L. N. Lopatinschi**, 64 p., 1,20 lei.
GR. C. MOISIL, **Scheme cu comandă directă cu contacte și relee**, 205 p., 9,65 lei.
ALEXANDRU MYLLER, **Scrieri matematice**, 595 p. + 1 pl. 30,40 lei.
VERA MYLLER-LEBEDEV, **Lecții de algebră**, 396 p., 8,75 lei.
MIRON NICOLESCU, **Analiza matematică**, vol. II, 420 p., 11,90 lei.
OCTAV ONICESCU, **Numere și sisteme aleatoare**, 260 p., 11,20 lei.
OCTAV ONICESCU, **Strategia jocurilor, cu aplicații la programarea liniară**, 228 p., 8,45 lei.
OCTAV ONICESCU și colab., **Calculul probabilităților și aplicații**, 788 p., 15 lei.
O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU și R. THEODORESCU, **Seminar de funcții sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 123 p., 4,23 lei.
* * * **Opera matematică a lui Alexandru Pantazi**, 496 p., 24,20 lei.
DIMITRIE POMPEI, **Opera matematică**, 535 p. + 1 pl., 30,20 lei.
N. RANCU și L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicații în producție**, 898 p. + 20 pl., 45 lei.
SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor și ale algebrelor booleene**, 159 p., 5,75 lei.
S. STOILOV, **Teoria funcțiilor de o variabilă complexă**, vol. I, 308 p., 10 lei, vol. II în colaborare cu Cabiria Andreian-Cazacu, 379 p., 25,70 lei.
P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticității**, vol. I, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.
GHEORGHE ȚIȚEICA, **Geometria diferențială proiectivă a rețelelor**, 287 p., 8 lei.
DRAGOȘ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 76 p., 3,15 lei.
SERGIU VASILACHE, **Elemente de teoria mulțimilor și structurilor algebrice**, 235 p., 5 lei.
GH. VRĂNCEANU, **Leçons de géometrie différencielle**, vol. I, 407 p., 26,50 lei ; vol. II, 428 p., 27,50 lei.
GH. VRĂNCEANU, **Lecții de geometrie diferențială**, vol. III, 455 p., 15 lei.

M.

B

Revista apare de 10 ori pe an.

Prețul unui abonament este de 12 lei.

În țară abonamentele se fac la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii și difuzorii voluntari din întreprinderi și instituții.

Orice comandă din străinătate (numere izolate sau abonamente) se face prin:

CARTIMEX
Căsuța poștală 134 – 135
București R. P. Romînă

sau prin reprezentanții săi din străinătate

I. P. „Informația" – c. 65

Lei – 12.

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

2

TOMUL 15

1964

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — *redactor responsabil*

Membri

ACAD. GR. C. MOISIL — *redactor responsabil adjunct*;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. AL. GHIKA;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
ACAD. GH. MIHOC;
CIPRIAN FOIAŞ — *secretar de redacție*.

Manuscrisele, cărțile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondență, se trimit la comitetul de redacție pe adresa: str. Mihail Eminescu nr. 47, Bucureşti.

TOMUL 15, nr. 2
1964

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1833

SUMAR

Pag.

S. POPP, Schema Vâlcovici-Birkhoff la mari viteze subsonice 149

IVAN SINGER, Baze în spaţii Banach. II 157

N. RADU, Intersecţii de ideale în unele inele 209

M. P. MIHĂILESCU, O metodă de aproximare a deformării curbelor de încărcare. II 217

ANA DAVIDESCU MOISIL, Asupra unui caz de echilibru al corpurilor elastice izotrope 225

ANA DAVIDESCU MOISIL, Asupra ecuaţiilor elasticităţii anizotrope . . 231

LEŢ LUPU, Grupuri de mişcări ale spaţiilor V_3 cu metrica indefinită . . . 235

DAN PASCALI, O nouă reprezentare a polinoamelor areolare în plan . . 249

GRECU EFTIMIE, Asupra spaţiilor Riemann cu conexiune constantă de genul doi 253

KECS WILHELM, Reprezentarea cîmpurilor vectoriale cu ajutorul funcţiilor generalizate 265

ANCA CREANGĂ-SÎMBOAN, Asupra planurilor optime de estimaţie . . 275

RECENZII 279

SZAKI KÖNYVTÁR
833

SCHEMA VÂLCOVICI-BIRKHOFF LA MARI VITEZE SUBSONICE

DE

S. POPP

1. Cercetările legate de teoria suprafețelor de discontinuitate a lui Helmholtz [1] și Kirchhoff [2] pentru fluidele incompresibile au luat un mare avînt, îndeosebi, în urma memoriului fundamental, din 1907, al lui Levi-Civita [3], care a generat un curent de numeroase lucrări de primă importanță în hidrodinamică.

Între acestea se situează lucrările lui H. Villat [4], [5], U. Cisotti [6], [7] și V. Vâlcovici [8], [9], urmate de acelea ale altor cercetători.

Studiul acelorași probleme Helmholtz-Kirchhoff, însă pentru fluidele compresibile în mișcare subsonică, are la bază teza de doctorat a lui S. A. Ciaplîghin [10]. Metodele dezvoltate de Ciaplîghin în teza sa au condus, ulterior, la o serie de lucrări remarcabile dintre care cităm pe acelea ale lui D. Riabonchinsky [11], B. Demtchenko [12], C. Jacob [13], [14] etc.

În 1957, S. V. Falcovici [15] a dat un procedeu elegant care permite extinderea metodei exacte a lui S. A. Ciaplîghin la cazuri mai generale decît acelea considerate pînă la data menționată.

Metoda lui Falcovici a fost folosită, în mai multe lucrări, de V. I. Troșin [16], [17], [18].

Într-o lucrare recentă, C. Iacob [19] prezintă o trecere în revistă, cu o foarte bogată bibliografie, a principalelor soluții exacte obținute pînă acum în teoria jeturilor gazoase la mari viteze subsonice și dă, totodată, o generalizare a soluției exacte a lui S. V. Falcovici [15].

2. În cele ce urmează, ne ocupăm de generalizarea soluției exacte dată de V. I. Troșin [16] referitoare la cazul jetului subsonic care iese dintr-un canal cu pereții rectilinii și lovește o placă normală la direcția curentului.

Noi vom considera cazul analog în care obstacolul este un diedru.

Cercetări asupra unor probleme de acest gen, în fluid incompresibil, au fost efectuate de V. Vâlcovici [8] în teza sa de doctorat de la Göttingen din 1913.

Rezultatele obţinute de V. Vâlcovici în lucrarea citată, prin studiul teoretic comparat referitor la acţiunea hidrodinamică exercitată de un curent liber sau de un curent situat într-un canal asupra aceluiaşi obstacol au fost, la acea epocă, foarte utile pentru compararea cercetărilor experimentale ale lui Eiffel şi Prandtl.

În 1950—1952, G. Birkhoff [20] a reluat studiul acestor probleme.

Recent, M. Kadosch [21], în cartea sa referitoare la mecanismul devierii jeturilor propulsive, consacră un capitol întreg (Cap. IV) consideraţiilor teoretice legate de schema mai sus menţionată, pe care o numeşte „schema Vâlcovici-Birkhoff'' arătînd, totodată, actualitatea cercetărilor efectuate de cei doi autori citaţi, cercetări pe care se axează, în prezent, metodele de lucru folosite la „Centre d'Etudes de Suresnes de la S.N.E.C.M.A.'' (Franţa) pentru rezolvarea unor probleme importante de aviaţie modernă.

3. Fie mişcarea plană, permanentă, irotaţională, a unui curent compresibil, subsonic, care iese dintr-un canal cu pereţii rectilinii paraleli şi loveşte un obstacol solid de forma unui diedru, reprezentat în planul mişcării prin segmentele OP_1 şi OP_2 care fac cu direcţia vitezei V_1 a curentului la infinit amonte unghiurile μ şi $-\mu$ $\left(\mu \neq \frac{\pi}{2}\right)\cdot$ Pereţii canalului se întind la infinit amonte, fiind limitaţi la celălalt capăt în punctele B_1 şi B_2. De la extremităţile B_1 şi B_2, respectiv P_1 şi P_2, se desprind linii libere (fig. 1).

Considerăm în planul mişcării axa Ox, avînd direcţia vitezei $\overline{V}_1$ şi axa Oy perpendiculară pe aceasta în vîrful O.

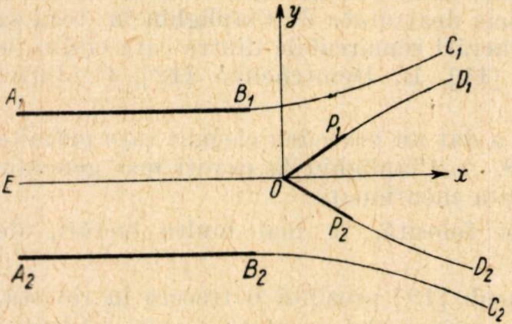


Fig. 1

Adoptăm pentru gaz legea izentropică,

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = \frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}}. \tag{3.1}$$

Luînd ca variabile independente pe τ şi θ, conform teoriei cunoscute [10], sistemul lui Ciaplîghin se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= \frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} &= -\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

în care φ este potențialul vitezelor, ψ funcția de curent, θ unghiul pe care-l face viteza cu axa Ox, $\tau = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V^2}{c_0^2}$, V fiind mărimea vitezei, c_0 valoarea vitezei de propagare a sunetului în punctul de viteză nulă, iar $\beta = \frac{1}{\gamma - 1}\cdot$

După obținerea funcțiilor $\varphi\ (\tau,\ \theta)$ și $\psi\ (\tau,\ \theta)$ din sistemul (3.2), ținînd seama de condițiile la limită ale problemei, se face trecerea la planul mișcării cu ajutorul formulei

$$\mathrm{d}\,(x + iy) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{V}\left(\mathrm{d}\,\varphi + i\frac{\rho_0}{\rho}\,\mathrm{d}\,\psi\right)\cdot \tag{3.3}$$

Trecînd la planul hodografic cu coordonatele polare τ, θ și ținînd seama de simetria configurației studiate, domeniului ocupat de curent din semiplanul superior ($y \geqslant 0$) îi va corespunde un sector de cerc de deschidere μ și de rază egală cu $\tau_2 = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V_2^2}{c_0^2}$, V_2 fiind viteza pe liniile libere B_1C_1, P_1D_1 (fig. 2).

Pe conturul acestui domeniu funcția ψ va lua următoarele valori :

$$\begin{aligned}
&\psi = 0 \quad \text{pentru } 0 < \tau < \tau_1,\ \theta = 0,\\
&\psi = \frac{Q}{2} \text{ pentru } \tau_1 < \tau < \tau_2,\ \theta = 0,\\
&\psi = 0 \quad \text{pentru } 0 < \tau < \tau_2,\ \theta = \mu,\\
&\psi = \frac{Q}{2} \text{ pentru } \tau = \tau_2,\ 0 < \theta < \alpha,\\
&\psi = 0 \quad \text{pentru } \tau = \tau_2,\ \alpha < \theta < \mu,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

α fiind unghiul direcțiilor asimptotice al liniilor libere cu axa Ox, iar Q o constantă.

Eliminînd funcția φ din sistemul (3.2), rezultă ecuația în ψ :

$$4\,\tau^2\,(1 - \tau)\frac{\partial^2\psi}{\partial\,\tau^2} + 4\,\tau\,[1 + (\beta - 1)\ \tau]\frac{\partial\psi}{\partial\,\tau} + {}$$

$$+ [1 - (2\beta + 1)\ \tau]\frac{\partial^2\psi}{\partial\,\theta^2} = 0. \tag{3.5}$$

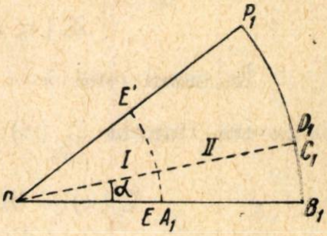


Fig. 2

În regiunea subsonică, pentru care $0 < \tau < (2\beta + 1)^{-1}$, ecuația (3.5) este de tip eliptic.

Determinarea funcției ψ revine, așadar, la rezolvarea unei probleme Dirichlet pentru ecuația lui Ciaplîghin (3.5) în interiorul domeniului reprezentat în figura 2, cu condițiile la limită (3.4).

Conform procedeului lui Falcovici, împărțim domeniul pentru care se caută soluția în două domenii I și II (fig. 2), ducînd arcul de cerc EE' de rază $\tau = \tau_1$ (τ_1 corespunzînd vitezei V_1). După ce formăm soluția ecuației (3.5) în domeniul I, căutăm prelungirea analitică a acesteia în domeniul II, ținînd seama de condițiile (3.4).

Adoptînd notațiile utilizate de C. Iacob [19], luăm soluțiile ecuației (3.5) în domeniile I și II de forma :

$$\frac{\pi}{Q}\psi_{I} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z(\tau, \lambda_n) \sin 2\lambda_n\theta \quad \text{pentru } 0 < \tau < \tau_1 \tag{3.6}$$

$$\frac{\pi}{Q}\psi_{II} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\theta}{2\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n Z(\tau, \lambda_n) +$$

$$+ B_n Z(\tau, -\lambda_n)] \sin 2\lambda_n \theta \quad \text{pentru } \tau_1 < \tau < \tau_2 \tag{3.7}$$

cu $\lambda = \frac{n\pi}{2\mu}$, considerînd $\mu \neq \frac{p}{q}\pi$ (p și q întregi, $p < q$), $Z(\tau, \lambda)$ și $Z(\tau, -\lambda)$ fiind funcțiile lui Ciaplîghin care reprezintă integralele liniar independente ale ecuației diferențiale liniare :

$$\tau^2(1-\tau)z''(\tau) + \tau[1+(\beta-1)\tau]z'(\tau) - \lambda^2[1-(2\beta+1)\tau]z(\tau) = 0.$$

După cum se știe [10], [14],

$$Z(\tau, \lambda) = \tau^{\lambda} F(a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda, \tau),$$

unde $F(a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda, \tau)$ este seria hipergeometrică a lui Gauss, iar a_λ, b_λ, c_λ se deduc din relațiile

$$a_\lambda + b_\lambda = 2\lambda - \beta,\ a_\lambda b_\lambda = -\beta\lambda(2\lambda+1),\ c_\lambda = 2\lambda + 1.$$

Wronskianul $W[Z(\tau, \lambda), Z(\tau, -\lambda)]$ are următoarea expresie :

$$W = \begin{vmatrix} Z(\tau, \lambda) & Z(\tau, -\lambda) \\ Z'_\tau(\tau, \lambda) & Z'_\tau(\tau, -\lambda) \end{vmatrix} = -2\lambda\frac{(1-\tau)^\beta}{\tau}. \tag{3.8}$$

În cazul cînd $\lambda = \frac{s}{2}$ $(s = 2, 3, \ldots)$, în locul funcției $Z(\tau, -\lambda)$ intervine funcția $\zeta_{\frac{s}{2}}(\tau)$ [19],

$$\zeta_{\frac{s}{2}}(\tau) = \lim_{\lambda = \frac{s}{2}} \left[Z(\tau, -\lambda) + C_s Z(\tau, \lambda)\frac{1}{\lambda - \frac{s}{2}} \right]$$

cu
$$C_s = (-1)^s \frac{(a_{\frac{s}{2}} - s)\ldots(a_{\frac{s}{2}} - 1)(b_{\frac{s}{2}} - s)\ldots(b_{\frac{s}{2}} - 1)}{2(s!)^2}.$$

În legătură cu funcțiile lui Ciaplîghin, mai sus menționate, se găsesc ample considerații în lucrările lui M. J. Lighthill [22] T. M. Cherry [23] și Caius Iacob [19].

Funcția ψ_{II} dată de (3.7), fiind prelungirea analitică a funcției ψ_I din domeniul $0 < \tau < \tau_1$ în domeniul $\tau_1 < \tau < \tau_2$, $(0 < \theta < \mu)$, pe arcul EE', va trebui să fie satisfăcute următoarele condiții de racordare ale soluțiilor $\psi_I(\theta, \tau)$ și $\psi_{II}(\theta, \tau)$:

$$\psi_I(\theta, \tau_1) = \psi_{II}(\theta, \tau_1), \tag{3.9}$$

$$\left[\frac{\partial \psi_I}{\partial \tau}\right]_{\tau=\tau_1} = \left[\frac{\partial \psi_{II}}{\partial \tau}\right]_{\tau=\tau_1}. \tag{3.10}$$

Avînd în vedere aceste condiții precum și expresiile (3.6) și (3.7), împreună cu condițiile la limită (3.4), se obține următorul sistem de ecuații pentru determinarea coeficienților a_n, A_n, B_n:

$$\begin{gathered}(a_n - A_n) Z(\tau_1, \lambda_n) - B_n Z(\tau_1, -\lambda_n) = \frac{1}{n},\\ (a_n - A_n) Z'_\tau(\tau_1, \lambda_n) - B_n Z'_\tau(\tau_1, -\lambda_n) = 0,\\ A_n Z(\tau_2, \lambda_n) + B_n Z(\tau_2, -\lambda_n) = -\frac{\cos \frac{n\pi\alpha}{\mu}}{n}.\end{gathered} \tag{3.11}$$

Făcînd calculele găsim:

$$\begin{gathered}A_n = -\frac{1}{nZ(\tau_2, \lambda_n)}\left\{\cos\frac{n\pi\alpha}{\mu} + \frac{Z'_\tau(\tau_1, \lambda_n) Z(\tau_2, -\lambda_n)}{W(\tau_1)}\right\}\\ B_n = \frac{Z'_\tau(\tau_1, \lambda_n)}{nW(\tau_1)}\\ a_n = -\frac{1}{nZ(\tau_2, \lambda_n)}\left\{\cos\frac{n\pi\alpha}{\mu} + \frac{1}{W(\tau_1)}[Z'_\tau(\tau_1, \lambda_n) Z(\tau_2, -\lambda_n) -\right.\\ \left. Z'_\tau(\tau_1 - \lambda_n) Z(\tau_2, \lambda_n)]\right\}\end{gathered} \tag{3.12}$$

wronskianul W fiind dat de (3.8).

Aceste valori ale coeficienților A_n, B_n, a_n, introduse în relațiile (3.6) și (3.7), conduc la următoarele expresii ale funcțiilor ψ_I și ψ_{II}:

$$\begin{gathered}\frac{\pi}{Q}\psi_I = -\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{\cos\frac{n\pi\alpha}{\mu} - \frac{1}{W(\tau_1)}[Z'_\tau(\tau_1, -\lambda_n) Z(\tau_2, \lambda_n) -\right.\\ \left. - Z'_\tau(\tau_1, \lambda_n) Z(\tau_2, -\lambda_n)]\right\}\frac{Z(\tau, \lambda_n)}{Z(\tau_2, \lambda_n)} \sin 2\lambda_n\theta,\end{gathered} \tag{3.13}$$

$$\frac{\pi}{Q}\psi_{II} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\theta}{2\mu} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{\cos\frac{n\pi\alpha}{\mu}\,\frac{Z(\tau,\lambda_n)}{Z(\tau_2,\lambda_n)} + \right. \qquad (3.14)$$

$$+\frac{1}{W(\tau_1)}\,Z(\tau_2,-\lambda_n)Z(\tau,\lambda_n) - Z(\tau_1,-\lambda_n)Z(\tau_2,\lambda_n)\,\frac{Z'_{\tau}(\tau_1,\lambda_n)}{Z(\tau_2,\lambda_n)}\sin 2\lambda_n\theta.$$

Făcînd, în (3.13), $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$, se găsește expresia funcției de curent corespunzătoare diedrului în curent liber, obținută de C. Iacob [24] :

$$\frac{\pi}{Q}\psi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1 - \cos\frac{n\pi\alpha}{\mu}\right)\frac{Z(\tau,\lambda_n)}{Z(\tau_0,\lambda_n)}\sin 2\lambda_n\theta. \qquad (3.15)$$

4. Ne propunem, acum, să punem în evidență expresia lungimii pereților $OP_1 = OP_2 = l$.

Ținînd seama că pe acești pereți $\psi = 0$ și $\theta = \text{const.}$, formula (3.3) ne dă

$$\mathrm{d}y = \frac{\sin\theta}{V}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\,\mathrm{d}\tau\,\bigg|_{\theta=\mu}$$

sau, cu expresia lui $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau}$ din sistemul (3.2),

$$\mathrm{d}y = -\frac{\sin\theta}{V}\,\frac{1-(2\beta+1)}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=\mu}. \qquad (4.1)$$

Substituind în (4.1) pe ψ_I și ψ_{II} dați de (3.13) și (3.14) și integrînd de la $\tau = 0$ $(y = 0)$ la $\tau = \tau_2$ $(y = l \sin \mu)$ după efectuarea calculelor, se găsește

$$\frac{V_2}{Q}l = \mu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2-\mu^2}\left\{\frac{\cos\dfrac{n\pi\alpha}{\mu}}{(1-\tau_2)^{\beta}}\left[1 + 2\tau\frac{Z'_{\tau}(\tau_2,\lambda_n)}{Z(\tau_2,\lambda_n)}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(1-\tau_1)^{\beta}}\left[\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{1/2} + 2\tau_1\frac{Z'_{\tau}(\tau_1,\lambda_n)}{Z(\tau_2,\lambda_n)}\right]\right\} +$$

$$+\frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{(1-\tau_1)^{\beta}} - \frac{1}{(1-\tau_2)^{\beta}}\right]. \qquad (4.2)$$

Introducînd funcția lui Ciaplîghin

$$X(\tau,\lambda) = \frac{\tau}{\lambda}\,\frac{Z'_{\tau}(\tau,\lambda)}{Z(\tau,\lambda)} \qquad (4.3)$$

și avînd în vedere formulele

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2-\mu^2}\cos\frac{n\pi\alpha}{\mu} = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{\cos\alpha}{\mu} - \frac{1}{\mu}\right],\\
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2-\mu^2} = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{1}{\sin\mu} - \frac{1}{\mu}\right],
\end{aligned} \tag{4.4}$$

expresia (4.2) se scrie, în definitiv, sub forma

$$\begin{aligned}
l = \frac{Q}{V_2}\Bigg\{&\frac{1}{2\sin\mu}\left[\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{(1-\tau_1)^{\beta}} - \frac{\cos\alpha}{(1-\tau_2)^{\beta}}\right] +\\
&+\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{\pi^2 n^2-\mu^2}\left[\frac{Z(\tau_1,\lambda_n)\,X(\tau_1,\lambda_n)}{(1-\tau_1)^{\beta}\,Z(\tau_2,\lambda_n)} -\right.\\
&\left.-\frac{X(\tau_2,\lambda_n)}{(1-\tau_2)^{\beta}}\cos\frac{n\pi\alpha}{\mu}\right]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Pentru $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$, formula (4.5) conduce la expresia dată de C. Iacob [24] pentru diedrul în curent liber :

$$\begin{aligned}
l = \frac{Q(1-\tau_0)^{-\beta}}{V_0}\Bigg\{&\frac{1-\cos\alpha}{2\sin\mu} +\\
&+\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{\pi^2 n^2-\mu^2}\left(1-\cos\frac{n\pi\alpha}{\mu}\right)X(\tau_0)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

5. Acțiunea hidrodinamică a fluidului asupra diedrului se găsește aplicînd teorema impulsului.

Obținem, astfel,

$$R_x = Q\rho_0 V_2\left\{\frac{V_1}{V_2} - \cos\alpha - \frac{1-\tau_1}{2(\beta+1)\sqrt{\tau_1\tau_2}}\left[\left(\frac{1-\tau_2}{1-\tau_1}\right)^{\beta+1} - 1\right]\right\}, \tag{5.1}$$

$R_y = 0$ datorită simetriei.

Deoarece $P_1P_2 = 2\ l \sin\mu$, putem scrie și expresia coeficientului de rezistență k sub forma

$$k = \frac{R_x}{2\rho_2 V_2^2\, l\sin\mu,}, \tag{5.2}$$

unde $\rho_2 = \rho_0(1-\tau_2)\beta$.

Înlocuind în (5.2) pe l cu expresia sa (4.5), rezultă

$$k = \frac{\sqrt{\dfrac{\tau_1}{\tau_2}} - \cos\alpha - \dfrac{1-\tau_1}{2(\beta+1)\sqrt{\tau_1\tau_2}}\left[\left(\dfrac{1-\tau_2}{1-\tau_1}\right)^{\beta+1} - 1\right]}{2(1-\tau_2)^{\beta}\sin\mu\left\{\pi\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{\pi^2 n^2-\mu^2}\left[\frac{Z(\tau_1,\lambda_n)\,X(\tau_1,\lambda_n)}{(1-\tau_1)^{\beta}\,Z(\tau_2,\lambda_n)} - \frac{X(\tau_2,\lambda_n)}{(1-\tau_2)^{\beta}}\cos\frac{n\pi\alpha}{\mu}\right|\right.}$$

cu
$$f(\tau_1,\ \tau_2)=\frac{1}{2\sin\mu}\left[\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{(1-\tau_1)^{\beta}}-\frac{\cos\alpha}{(1-\tau_2)^{\beta}}\right].$$

Luînd în diversele formule obținute în această lucrare $\alpha=0$, se rezolvă cazul particular interesant al diedrului în canal infinit de ambele părți.

Cazul $\mu=\frac{\pi}{2}$ revine la acela al plăcii normale pe direcția curentului, tratat de V. I. Troșin [16], în rezolvarea căruia intervine funcția lui Cherry $\zeta_{\frac{s}{2}}$ menționată la punctul 3.

Primită la redacție la 14 iunie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. H. von Helmholtz, Monatscherichte Akad., Berlin, 1868, p. 215.
2. G. Kirchhoff, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **70**, 289 (1869).
3. T. Levi-Civita, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **23**, 1 (1907).
4. H. Villat, Teză de doctorat, Paris, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, **28**, 203—301 (1911).
5. H. Villat, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, **29**, 127—197 (1912).
6. U. Cisotti, Rendiconti di Palermo, **25**, 145 (1908); ibid., **28**, 307 (1909).
7. U. Cisotti, Rendiconti dei Lincei, **20**, 314 și 494 (1911).
8. V. Vâlcovici, *Inaugural Dissertation*, Göttingen, 1913.
9. V. Vâlcovici, Annali di Matematica pura et Applicata **23**, 27 (1914); Comptes rendus, Paris, **157**, 1131.
10. С. А. Чаплыгин, Ученые записки Московского Университета, 1—121 (1904); Собр. соч., том II, стр. 19—137, Москва, 1948.
11. D. Riabouchinsky, Comptes rendus, Paris, **194**, 1215 (1932).
12. B. Demtchenko, Publications Mathématiques de l'Universite de Belgrade, **2**, 85 (1933).
13. C. Jacob, Comptes rendus, Paris, **197**, 125 (1933); Mathematica, Cluj, **8**, 205—211 (1934); Bulletin scient. de l'Ecole Polytechnique de Timișoara, **7**, 47—59 și 224—244 (1937).
14. C. Jacob, *Introduction mathématique à la Mécanique des fluides*, Bucarest—Paris, 1959.
15. С. В. Фалкович, Приклад. Мат. и Мех., **21**, 459 (1957).
16. В. И. Трошин, Приклад. Мат. и Мех., **23**, 766—769 (1959).
17. В. И. Трошин, Приклад, Мат. и Мех., **23**, 944—947 (1959).
18. В. И. Трошин, Вестник Моск. Ун-та Мат. и Мех., 59—64 (1960).
19. C. Iacob, Archivum Mehaniki Stosowanej 3/4, 14, 1962, p. 603—619.
20. G. Birkhoff, M. Plesset, N. Simmons, Quarterly of Applied Mathematics, p. I, VIII, **2** (1950); p. II, IX, **4** (1952).
21. M. Kadosch, *Mécanisme de la deviation des jets propulsifs*. Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'air, Paris, 1959, B.S.T. nr. 124.
22. M. J. Lighthill, Proceedings of the Royal Society, A, **191**, 323—341, 341—351, 352—369 (1947).
23. T. M. Cherry, Proceedings of the Royal Society, A, **192**, 45—79 (1947); **220**, 507—522 (1950).
24. C. Jacob, Mathematica, Cluj, **8**, 205—211 (1934).

BAZE ÎN SPAŢII BANACH. II

DE

IVAN SINGER

INTRODUCERE

Lucrarea de faţă este a doua parte a unei lucrări formate din trei părţi, în care ne propunem să expunem rezultatele cunoscute pînă în prezent asupra bazelor în spaţii Banach. Partea întîi a lucrării (a se vedea [74]) conţine capitolele I şi II. Partea II cuprinde capitolele III şi IV. Pentru notaţiile şi noţiunile neexplicate în lucrarea de faţă, trimitem la [74].

CAPITOLUL III

GENERALIZĂRI ALE NOŢIUNII DE BAZĂ

Necunoaşterea existenţei unei baze în orice spaţiu Banach separabil infinitdimensional (problema bazei; a se vedea [74], problema 1.1) a făcut necesară introducerea unor clase de şiruri infinite $\{x_n\}$ într-un spaţiu Banach arbitrar E, cu proprietăţile următoare : *a*) Dacă spaţiul E are o bază, orice bază a spaţiului E aparţine acestor clase, şi *b*) şirurile $\{x_n\}$ dintr-o asemenea clasă posedă o parte (depinzînd de clasa respectivă şi aleasă astfel încît să fie utilă pentru aplicaţii) din proprietăţile pe care le au bazele. Capitolul de faţă va fi consacrat acestor generalizări ale noţiunii de bază.

În tot decursul acestui capitol vom presupune, fără a mai menţiona special, că E este un spaţiu Banach *infinitdimensional*, iar şirurile $\{x_n\}$ considerate sînt *infinite* (altminteri teoremele de existenţă şi neexistenţă ar fi triviale sau false).

§ 1. ŞIRURI BAZICE. BAZE RELATIV LA O CLASĂ DE ŞIRURI DE INDICI

Reamintim (a se vedea [74], Cap. I, definiţia 1.10) că un şir $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E se numeşte *şir bazic*, dacă $\{x_n\}$ este o bază a subspaţiului vectorial închis $[x_n]$ al lui E generat de şirul $\{x_n\}$.

Problema existenţei şirurilor bazice are un răspuns afirmativ. Anume, avem

TEOREMA 3.1. *Fie E un spaţiu Banach. Atunci pentru orice număr γ_0 satisfăcînd $0 < \gamma_0 < 1$, există un şir bazic $\{x_n\}$ de indice $\gamma_{\{x_n\}} \geqslant \gamma_0$.*

(Pentru noţiunea de indice a unui şir bazic, a se vedea [74], Cap. I, §7).

Faptul că în orice spaţiu Banach există un şir bazic a fost menţionat, fără demonstraţie, de S. Banach ([2], p. 238). Teorema 3.1 a fost demonstrată, independent, de S. Mazur [8] şi B. R. Gelbaum ([24], § 1). Existenţa unui şir bazic în orice spaţiu Banach rezultă, de asemenea, din următoarea teoremă a lui C. Bessaga şi A. Pelczyński ([6], teorema 3) :

TEOREMA 3.2. *Fie E un spaţiu Banach separabil şi fie F un spaţiu Banach cu bază $\{z_n\}$, conţinînd un subspaţiu vectorial închis echivalent cu* [1] *spaţiul E. Fie $\{y_n\}$ un şir din E, cu proprietăţile* :

$$\inf_{1 \leqslant n < \infty} \|y_n\| > 0, \tag{3.1}$$

$$\lim_{n \to \infty} g_j(y_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{3.2}$$

unde $\{g_n\} \subset F^*$ este şirul de funcţionale coeficienţi asociat bazei $\{z_n\}$. Atunci există un subşir $\{x_n\} = \{y_{i_n}\}$ al lui $\{y_n\}$ care este un şir bazic. Acest şir bazic este echivalent cu un şir bazic bloc relativ la $\{z_n\}$.

COROLARUL 3.1. *Fie E un spaţiu Banach separabil şi fie F un spaţiu Banach cu bază $\{z_n\}$, conţinînd un subspaţiu vectorial închis echivalent cu spaţiul E. Fie $\{y_n\}$ un şir din E, slab convergent către 0 şi satisfăcînd (3.1). Atunci există un subşir $\{x_n\} = \{y_{i_n}\}$ al lui $\{y_n\}$, care este un şir bazic, echivalent cu un şir bazic bloc relativ la $\{z_n\}$.*

În sfîrşit, existenţa unui şir bazic în orice spaţiu Banach rezultă şi din următoarea teoremă, încă nepublicată, a lui M. I. Kadeţ şi A. Pelczyński, care ne-a fost comunicată de A. Pelczyński :

TEOREMA 3.3. *Fie $\{y_n\}$ un şir mărginit necompact într-un spaţiu Banach E. Atunci există un subşir infinit $\{y_{i_n}\}$ al lui $\{y_n\}$, cu proprietatea că subspaţiul $[y_{i_n}]$ are o bază.*

Este evidentă următoarea observaţie : *un şir $\{x_n\} \subset E$ este o bază a spaţiului lui E dacă şi numai dacă $\{x_n\}$ este un şir bazic fundamental* [2] *în E.* În baza acestei observaţii, din [74], Cap. I, teoremele 1.2, 1.3 şi 1.5, se pot deduce o serie de caracterizări ale şirurilor bazice, ale căror formulări explicite le omitem.

---

[1] Un asemenea spaţiu F totdeauna există, de exemplu $F = C([0,1])$ cu $\{z_n\}$ = baza Schauder.

[2] Folosim termenul „şir fundamental" în sensul lui Banach [2], adică : mulţimea combinaţiilor liniare finite $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ ($\alpha_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$) este densă în E.

DEFINIŢIA 3.1. Fie $\mathfrak{M}$ o clasă de subşiruri ale mulţimii $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Un şir $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E se numeşte [33] *o bază relativ la* $\mathfrak{M}$ a spaţiului E, dacă $\{x_n\}$ este un şir fundamental în E şi dacă pentru orice şir $\{i_n\} \in \mathfrak{M}$ subşirul $\{x_{i_n}\}$ al lui $\{x_n\}$ este un şir bazic.

De exemplu, în spaţiul $C_{2\pi}$ şirul

$$x_0(t) \equiv \frac{1}{2}, \quad x_{2n-1}(t) = \sin nt, \quad x_{2n}(t) = \cos nt \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

este o bază relativ la clasa tuturor şirurilor lacunare[3]) de numere întregi pozitive ([3], p. 178—179). Şirul de polinoame Cebîşev

$$x_n(t) = \cos(n \arccos t) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

este o bază a spaţiului $C([-1, +1])$ relativ la clasa tuturor şirurilor crescătoare $\{i_n\} \subset \mathcal{N}$ satisfăcînd

$$\frac{i_{n+1}}{i_n} = 2p_n + 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

unde $p_n \in \mathcal{N}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ (V. N. Nikolski [57], § 7). Şirul de puteri

$$x_n(t) = t^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.5}$$

este o bază a spaţiului $C([0,1])$ relativ la clasa tuturor şirurilor crescătoare $\{i_n\} \subset \mathcal{N}$ satisfăcînd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{i_{n+1}}{i_n} > A,$$

unde A este o constantă absolută (V. I. Gurarii [33]).

Pentru un şir crescător $\{i_n\} \subset \mathcal{N}$ vom nota prin $\mathfrak{M}_{\{i_n\}}$ clasa tuturor şirurilor crescătoare $\{j_n\} \subset \mathcal{N}$ cu proprietatea că $\{j_n\}$ nu conţine cel puţin unul dintre numerele perechii (i_n, i_{n+1}) $(n = 1, 2, \ldots)$. Cu această notaţie, avem

TEOREMA 3.4. *Pentru orice şir crescător* $\{i_n\} \subset \mathcal{N}$ *există în orice spaţiu Banach separabil E o bază relativ la clasa* $\mathfrak{M}_{\{i_n\}}$ (V. I. Gurarii [33], teorema 5).

În particular, pentru $i_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ rezultă

COROLARUL 3.2. *În orice spaţiu Banach separabil E există un şir fundamental* $\{x_n\}$ *cu proprietatea că orice subşir* $\{x_{i_n}\}$ *al lui* $\{x_n\}$, *pentru care* $i_{n+1} - i_n > 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *este un şir bazic.* (V. I. Gurarii [33], corolarul teoremei 5).

---

[3]) Reamintim că un şir crescător $\{i_n\} \subset \mathcal{N}$ se numeşte *lacunar* dacă există o constantă $\lambda > 1$ astfel încît

$$\frac{i_{n+1}}{i_n} > \lambda \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

§ 2. CLASE SPECIALE DE ŞIRURI BAZICE

Clasele speciale de baze introduse în Capitolul II implică, în mod natural, introducerea a tot atîtor clase speciale de şiruri bazice. Anume, se spune că un şir bazic $\{x_n\}$ într-un spaţiu Banach E este un *şir bazic monoton* (respectiv un *şir bazic normal*, ş.a.m.d.), dacă $\{x_n\}$ este o bază monotonă respectiv normală, ş.a.m.d.) a subspaţiului $[x_n]$. În paragraful de faţă ne vom ocupa de problema existenţei şirurilor bazice aparţinînd acestor clase (într-un spaţiu Banach arbitrar, fără nici o ipoteză de separabilitate).

Problema 3.1. Există oare în orice spaţiu Banach E un şir bazic monoton? Dar un şir bazic strict monoton?

În legătură cu această problemă observăm că din [74], Cap. II, exemplul 2.2, rezultă existenţa unui spaţiu Banach real E cu proprietatea următoare: pentru orice subspaţiu vectorial închis E_1 al lui E există un subspaţiu E_2 al lui E astfel încît $E_2 \supset E_1$, dim $E_2/E_1 = 1$, şi încît E_2 nu are nici o bază monotonă (şi prin urmare nici o bază strict monotonă).

De altă parte, răspunsul la problema existenţei şirurilor bazice nemonotone şi non-strict monotone este afirmativ, cum rezultă din oricare din teoremele din § 1.

Pentru şiruri bazice normale avem

TEOREMA 3.5. *Fie E un spaţiu Banach. Există atunci în E un şir bazic normal $\{x_n\}$ astfel încît operatorul P_m definit, pentru fiecare număr întreg pozitiv m, prin*

$$P_m(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)\, x_i \qquad (x \in [x_n]), \qquad (3.6)$$

(*unde* $\{\varphi_n\} \subset [x_n]^*$ *notează şirul de funcţionale coeficienţi asociat bazei* $\{x_n\}$ *a spaţiului* $[x_n]$), *este o proiecţie a lui* $[x_n]$ *pe* $L_{(m)} = [x_1, \ldots, x_m]$, *de normă* $\|P_m\| \leqslant 1 + \frac{1}{m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ (M. M. Day [15]).

De altă parte, existenţa şirurilor bazice non-normale este o consecinţă imediată a teoremelor din § 1.

Pentru orice număr întreg $k \geqslant 0$, răspunsul la problema existenţei şirurilor bazice k-generatoare, respectiv k-mărginit complete este negativ, cum ne arată exemplul spaţiului $E = l$, respectiv $E = c_0$ (a se vedea [74], Cap. II, exemplele 2.4 şi 2.8).

În cazul $k = 0$, răspunsul la problema existenţei şirurilor bazice non-k-generatoare, respectiv non-k-mărginit complete, este de asemenea negativ, cum ne arată exemplul unui spaţiu reflexiv oarecare (a se vedea [74], Cap. II, exemplele 2.5 şi 2.9).

Problema 3.2. Fie k un număr întreg > 0. Există oare în orice spaţiu Banach E un şir bazic non-k-generator? Dar un şir bazic non-k-mărginit complet?

În legătură cu această problemă are interes următoarea propoziţie, care reduce problema la cazul spaţiilor non-cvasireflexive:

PROPOZIŢIA 3.1. *Fie E un spaţiu Banach cvasireflexiv. Atunci pentru orice număr întreg $k>0$ există în E un şir bazic non-k-mărginit complet.*

Răspunsul la problema existenţei şirurilor bazice de tip l_+, P, P^* este negativ, cum ne arată exemplul unui spaţiu reflexiv oarecare (a se vedea [74], Cap. II, exemplele 2.10 şi 2.11). De altă parte, din § 1 şi din [74], Cap. II, teorema 2.8, rezultă că răspunsul la problema existenţei şirurilor bazice de tip non-l_+, non-P, non-P^* este afirmativ.

Problema 3.3. Există oare în orice spaţiu Banach E un şir bazic necondiţionat $\{x_n\}$? (C. Bessaga şi A. Pelczyński [7]).

Această problemă este *deosebit de importantă*, deoarece, cum vom vedea în Cap. IV, un răspuns afirmativ la ea ar implica [10] un răspuns afirmativ la problema omeomorfismului spaţiilor Banach separabile infinitdimensionale (pusă de S. Banach în [2], p. 242 şi rămasă nerezolvată pînă în prezent). De asemenea, un răspuns afirmativ la problema 3.3 ar implica [7] şi teorema lui Dvoretzky-Rogers (după care în orice spaţiu Banach infinitdimensional există o serie necondiţionat convergentă care nu este absolut convergentă).

În legătură cu problema 3.3 are interes

PROPOZIŢIA 3.2. *Fie E un subspaţiu vectorial închis al unui spaţiu Banach B cu bază necondiţionată $\{z_n\}$. Fie $\{y_n\}$ un şir din E, cu proprietăţile (3.1), (3.2). Atunci există un subşir $\{x_n\}=\{y_{i_n}\}$ al lui $\{y_n\}$, care este un şir bazic necondiţionat echivalent cu un şir bazic bloc în raport cu baza necondiţionată $\{z_n\}$* (C. Bessaga şi A. Pelczyński [6], corolarul 1).

TEOREMA 3.6. *În orice spaţiu Banach E există un şir bazic condiţionat* [4]).

Această teoremă a fost publicată recent de V. I. Gurarii [32], însă cu un an înainte de apariţia lucrării [32], A. Pelczyński ne-a comunicat într-o scrisoare că a reuşit să demonstreze teorema 3.6.

Problema 3.4. Există oare în orice spaţiu Banach E un şir bazic ortogonal? Dar un şir bazic strict ortogonal?

De altă parte, răspunsul la problema existenţei şirurilor bazice neortogonale şi non-strict ortogonale este afirmativ, deoarece răspunsul la problema existenţei şirurilor bazice nemonotone şi non-strict monotone este astfel.

Problema 3.5. Există oare în orice spaţiu Banach E un şir bazic simetric? Dar un şir bazic perfect omogen?

De altă parte, existenţa şirurilor bazice nesimetrice şi non-perfect omogene este o consecinţă imediată a teoremei 3.6 (a se vedea şi [74], Cap. II, propoziţia 2.15).

În baza observaţiei făcute după teorema 3.3, din [74], Cap. II, teorema 2.8, se pot deduce relaţiile existente între diversele tipuri de şiruri bazice.

---

[4]) Reamintim că prin convenţia făcută la începutul acestui capitol, prin „spaţiu Banach" înţelegem „spaţiu Banach infinitdimensional". Teorema 3.6 implică deci o caracterizare a spaţiilor Banach infinitdimensionale.

Pentru spații Banach adjuncte E^* se pun, în mod natural, următoarele probleme în legătură cu existența șirurilor $\{f_n\}$ aparținînd unor clase speciale de șiruri bazice :

Problema 3.6. Fie E^* un spațiu adjunct. Există oare în E^* un șir bazic $\{f_n\}$ cu proprietatea că subspațiul $[f_n]$ al lui E^* este de codimensiune infinită și izomorf cu un spațiu adjunct?

Problema 3.7. Fie E^* un spațiu adjunct. Există oare în E^* un șir bazic $\{f_n\}$ cu proprietatea că subspațiul $[f_n]$ al lui E^* este de codimensiune infinită și $\sigma\,(E^*, E)$ - închis? [5]

Problema 3.8. Fie E^* un spațiu adjunct. Există oare în E^* un șir bazic mărginit complet?

Un răspuns afirmativ la problema 3.7 sau la problema 3.8 ar implica un răspuns afirmativ la problema 3.6. Dacă E este reflexiv, răspunsul la problemele 3.6, 3.7 și 3.8 este evident afirmativ.

§ 3. BAZE SLABE

DEFINIȚIA 3.2. Un șir $\{x_n\}$ dintr-un spațiu Banach E se numește ***bază slabă*** a spațiului E, dacă pentru orice $x \in E$ există un șir *unic* de scalari [6] $\{\alpha_n\} \subset K$ astfel încît $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ converge slab către x, adică încît

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = f(x) \qquad (f \in E^*). \tag{3.7}$$

Se vede ușor că orice bază este o bază slabă. Este însă adevărată și reciproca, anume avem

TEOREMA 3.7. *Orice bază slabă $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E este o bază a acestui spațiu.*

Teorema 3.7. a fost dată, fără demonstrație, de S. Banach ([2], p. 238). O demonstrație a ei a fost dată de S. Karlin ([45], teorema 1).

§ 4. PSEUDOBAZE. SEMIBAZE

Definiția noțiunii de bază (a se vedea [74], definiția 0.1) are două părți componente : 1) existența, pentru orice $x \in E$, a unui șir de scalari $\{\alpha_n\} \subset K$, astfel încît să avem $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ și 2) unicitatea acestui șir de scalari. Luînd șiruri care au numai una din aceste proprietăți, se obțin generalizări ale noțiunii de bază.

---

[5] Recent, A. Pełczyński ne-a pus problema următoare : Are oare orice spațiu Banach un spațiu cît cu bază? Această problemă este evident echivalentă cu problema 3.7. De asemenea, el a pus problema : Are orice spațiu adjunct separabil E^* un spațiu cît cu bază? Această problemă revine la găsirea în E^{**} a unui șir bazic $\{\Phi_n\}$ cu proprietatea că subspațiul $[\Phi_n]$ al lui E^{**} este $\sigma\,(E^{**}, E^*)$-închis.

[6] Reamintim că prin K notăm [74] unul oarecare dintre corpul numerelor complexe sau corpul numerelor reale.

DEFINIŢIA 3.3. Un şir $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E se numeşte [24] *pseudobază* a spaţiului E, dacă pentru orice $x \in E$ există un şir de scalari $\{\alpha_n\} \subset K$ astfel încît să avem

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i. \tag{3.8}$$

Orice pseudobază este, evident, un şir fundamental în E, deci orice spaţiu Banach E cu pseudobază este separabil.

Existenţa unei pseudobaze în orice spaţiu Banach separabil precum şi exemple de pseudobaze care nu sînt baze rezultă din

PROPOZIŢIA 3.3. *Fie E un spaţiu Banach separabil. Atunci*

a) *Spaţiul E posedă o pseudobază liniar independentă*[7]) *densă în spaţiul E.*

b) *Orice şir dens în sfera unitate $S_E = \{x \in E \mid \|x\| \leqslant 1\}$ este o pseudobază a spaţiului E.*

Afirmaţia a) a fost demonstrată de B. R. Gelbaum ([24], § 3, teorema 1).

Pentru pseudobazele din afirmaţia b) se poate demonstra

TEOREMA 3.8. *Pentru orice pseudobază densă în sfera unitate S_E există o submulţime $\mathcal{A}$ a spaţiului l cu proprietatea următoare: pentru orice $x \in E$ există un şir unic de scalari $\{\alpha_n\} \in \mathcal{A}$ astfel încît să avem (3.8), şi încît aplicaţia $x \to \{\alpha_n\}$ a lui E pe $\mathcal{A}$ să fie un omeomorfism.*

În acest caz rezultă că coeficienţii α_i ai reprezentării (3.8) sînt funcţionale continue de x; aceste funcţionale nu sînt însă, în general, liniare.

DEFINIŢIA 3.4. Un şir $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E se numeşte [47] *semibază*[8]) a spaţiului E, dacă $\{x_n\}$ este fundamental în E şi dacă

$$\{\alpha_n\},\ \{\beta_n\} \subset K, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x_i \ \text{implică}\ \alpha_n = \beta_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.9}$$

Evident, $\{x_n\}$ este o semibază a spaţiului E dacă şi numai dacă $\{x_n\}$ este fundamental în E şi nu admite dezvoltări netriviale ale lui zero (a se vedea [74], Cap. I, definiţia 1.6).

Existenţa unei semibaze în orice spaţiu Banach separabil E şi exemple de semibaze care nu sînt baze vor rezulta din consideraţiile din § 7, ţinînd seama de observaţia (a se vedea [74], Cap. I, § 6) că un şir tare liniar independent nu admite dezvoltări netriviale ale lui zero.

§ 5. ŞIRURI TARE LINIAR INDEPENDENTE

Reamintim că un şir $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E se numeşte (a se vedea [74], cap. I, definiţia 1.5) tare liniar independent în E, dacă există un şir $\{f_n\} \subset E^*$ astfel încît (x_n, f_n) să fie un sistem biortogonal;

---

[7]) Adică: orice subşir finit al acestei pseudobaze este liniar independent.

[8]) În [47] se foloseşte pentru această noţiune termenul *cvasibază*, însă acelaşi termen a fost introdus, independent, în [24], pentru o altă noţiune, pe care o vom considera în § 15.

pentru prescurtare, în acest paragraf vom scrie t.l.i. în loc de ,,tare liniar independent''. Dacă şirul t.l.i. $\{x_n\}$ este fundamental (adică $[x_n] = E$), atunci şirul $\{f_n\} \subset E^*$ este, evident, univoc determinat de şirul $\{x_n\}$, şi îl vom numi *şirul de funcţionale asociat* şirului t.l.i. fundamental $\{x_n\}$.

Observăm că orice şir t.l.i. $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E este un şir t.l.i. fundamental în spaţiul Banach $[x_n]$, deoarece sistemul (x_n, φ_n), unde şirul $\{\varphi_n\} \subset [x_n]^*$ este definit prin

$$\varphi_j = f_j\,|_{[x_n]} \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{3.10}$$

este biortogonal; vom spune că $\{\varphi_n\}$ este *şirul de funcţionale asociat* şirului t.l.i. $\{x_n\}$.

Existenţa unui şir t.l.i. în orice spaţiu Banach E este o consecinţă imediată a teoremei 3.1.

Pentru şiruri t.l.i., următoarea teoremă de stabilitate a fost demonstrată recent de V. I. Gurarii şi M. I. Kadeţ ([34], teorema 3):

TEOREMA 3.9. *Fie* $\{x_n\}$ *un şir t.l.i. într-un spaţiu Banach E. Atunci pentru orice număr* $\varepsilon > 0$ *există un şir de numere* $\varepsilon_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *astfel încît pentru orice şir* $\{y_n\} \subset E$ *satisfăcînd*

$$\|x_n - y_n\| < \varepsilon_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.11}$$

aplicaţia liniară u care duce pe x_n *în* y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *să fie o* ε*-izometrie*[9]) *a lui* $[x_n]$ *pe* $[y_n]$.

Ne vom ocupa acum de unele clase speciale de şiruri t.l.i., care se definesc ca o extensiune naturală a claselor speciale de şiruri bazice introduse în § 2.

DEFINIŢIA 3.5. Un şir t.l.i. $\{x_n\} \subset E$ (cu şirul de funcţionale asociat $\{\varphi_n\} \subset [x_n]^*$) se numeşte *şir t.l.i. monoton*, dacă pentru orice $x \in [x_n]$, numărul $\|s_n x\|$ este o funcţie nedescrescătoare de n, unde $\{s_n\}$ notează şirul de operatori sumă parţială asociat sistemului biortogonal (x_n, φ_n).

PROPOZIŢIA 3.4. *Un şir* $\{x_n\}$ *dintr-un spaţiu Banach E este un şir t.l.i. monoton dacă şi numai dacă* $\{x_n\}$ *este un şir bazic monoton.*

DEFINIŢIA 3.6. Un şir t.l.i. $\{x_n\} \subset E$ (cu şirul de funcţionale asociat $\{\varphi_n\} \subset [x_n]^*$) se numeşte E *- mărginit*, dacă $\sup\limits_{1 \leqslant n < \infty} \|x_n\| < \infty$, E^* - mărginit dacă $\sup\limits_{1 \leqslant n < \infty} \|\varphi_n\| < \infty$, şi (E,E^*)*-mărginit* dacă el este simultan E-mărginit şi E^*-mărginit.

Din [74], Cap. I, propoziţia 1.2, rezultă că un şir bazic $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E este un şir t.l.i. (E,E^*)-mărginit dacă şi numai dacă

$$0 < \inf_{1 \leqslant n < \infty} \|x_n\| \leqslant \sup_{1 \leqslant n < \infty} \|x_n\| < \infty\,^{10}); \tag{3.12}$$

pentru şiruri t.l.i. însă o asemenea propoziţie nu mai este adevărată, condiţia (3.12) ne mai fiind suficientă. Ea este însă necesară, prin

---

[9]) O aplicaţie T a unui spaţiu Banach F într-un spaţiu Banach G se numeşte ε*-izometrie*, dacă avem

$$(1 - \varepsilon)\|z\| \leqslant \|Tz\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|z\| \text{ pentru orice } z \in F.$$

[10]) Adică, dacă şi numai dacă $\{x_n\}$ este o bază mărginită a lui $[x_n]$ (a se vedea [74], Cap. II, § 9).

PROPOZIŢIA 3.5. *Pentru orice şir t.l.i.* (E, E^*)*-mărginit* $\{x_n\}$, *cu şirul de funcţionale asociat* $\{\varphi_n\}\subset[x_n]^*$, *avem*

$$\inf_{1\leqslant n<\infty}\|x_n\|>0,\quad \inf_{1\leqslant n<\infty}\|\varphi_n\|>0. \tag{3.13}$$

PROPOZIŢIA 3.6. *Fie* $\{x_n\}$ *un şir t.l.i. într-un spaţiu Banach* E *şi fie* $\{\varphi_n\}\subset[x_n]^*$ *şirul de funcţionale asociat. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

1°. *Şirul t.l.i.* $\{x_n\}$ *este* E^**-mărginit.*

2°. $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0$ *pentru orice* $x\in[x_n]$.

3°. *Există o constantă* $\alpha>0$ *astfel încît*

$$\operatorname{dist}\,(x_n,\ [x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n+1},\ldots])\geqslant\alpha\quad(n=1,2,\ldots). \tag{3.14}$$

4°. *Există o constantă* $M>0$ *astfel încît*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\alpha_i|\leqslant M\left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\right\| \tag{3.15}$$

pentru orice scalari $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in K$.

Echivalenţele 1° ⟺ 2° ⟺ 3° au fost date de M. M. Grinblium [26].

DEFINIŢIA 3.7. Un şir t.l.i. $\{x_n\}\subset E$ (cu şirul de funcţionale asociat $\{\varphi_n\}\subset[x_n]^*$) se numeşte *şir t.l.i. normal*, dacă avem

$$\|x_n\|=\|\varphi_n\|=1\quad(n=1,2,\ldots). \tag{3.16}$$

Problema existenţei şirurilor t.l.i. normale (deci şi problema existenţei şirurilor t.l.i. (E, E^*)-mărginite) are un răspuns afirmativ, în virtutea teoremei 3.5. Acest rezultat a fost regăsit recent de A. Iu. Levin şi Iu. I. Petunin ([53], teorema 1), care nu au cunoscut teorema 3.5.

DEFINIŢIA 3.8. Un şir t.l.i. $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E se numeşte *şir t.l.i. generator*, dacă pentru şirul de funcţionale asociat $\{\varphi_n\}\subset[x_n]^*$ avem

$$[\varphi_n]=[x_n]^*. \tag{3.17}$$

Problema existenţei şirurilor t.l.i. generatoare are un răspuns negativ, cum ne arată

Exemplul 3.1. Spaţiul Banach $E=l$ nu conţine nici un şir t.l.i. generator.

DEFINIŢIA 3.9. Un şir t.l.i. $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E se numeşte *şir t.l.i. mărginit complet*, dacă din $\{\alpha_n\}\subset K$, $\sup\limits_{1\leqslant n<\infty}\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\|<\infty$ rezultă că seria $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i$ converge.

PROPOZIŢIA 3.7. *Un şir t.l.i.* $\{x_n\}$ *dintr-un spaţiu Banach* E *este mărginit complet dacă şi numai dacă* $\{x_n\}$ *este un şir bazic mărginit complet.*

Această propoziţie a fost dată de A. Wilansky ([77], teorema 3), însă demonstraţia schiţată în [77] se pare că nu este corectă. Propoziţia este totuşi adevărată, ea fiind o consecinţă imediată a teoremei 1.3 (implicaţia $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$) din [74], Cap. I. Propoziţia 3. 7, împreună cu exemplele corespunzătoare din § 2, arată că răspunsul la problema existenţei şirurilor t.l.i. mărginit complete şi non-mărginit complete este negativ.

DEFINIŢIA 3.10. Un şir t.l.i. $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E se numeşte *şir t.l.i. cvasi mărginit complet*, dacă pentru orice şir $\{\alpha_n\} \subset K$ cu proprietatea $\sup\limits_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| < \infty$ există un element $x \in [x_n]$ astfel încît

$$\varphi_n(x) = \alpha_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.18}$$

unde $\{\varphi_n\} \subset [x_n]^*$ este şirul de funcţionale asociat şirului t.l.i. $\{x_n\}$.

Orice şir t.l.i. mărginit complet este evident cvasimărginit complet. Reciproca nu este însă adevărată, cum ne arată

Exemplul 3.2. Fie E un spaţiu Banach reflexiv şi fie $\{x_n\}$ un şir t.l.i. în E, care nu este un şir bazic. Atunci şirul t.l.i. $\{x_n\}$ este cvasimărginit complet dar nu este mărginit complet.

DEFINIŢIA 3.11. Un şir t.l.i. $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E se numeşte *şir t.l.i. de tip* l_+, dacă el este (E, E^*)-mărginit, şi dacă există o constantă $\eta > 0$ astfel încît să avem, pentru orice şir finit de scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \geqslant \eta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \tag{3.19}$$

Teorema 2.5 din [74], Cap. II, rămîne valabilă, cu aceeaşi demonstraţie, pentru şiruri t.l.i. $\{x_n\}$ (în loc de baze $\{x_n\}$).

Problema 3.9. Există oare în orice spaţiu Banach un şir t.l.i. de tip l_+?

Spre deosebire de situaţia din cazul şirurilor bazice (a se vedea § 2), în spaţiul Banach reflexiv $E = L^2([-1, +1])$ există un şir t.l.i. de tip l_+, cum ne arată

Exemplul 3.3. Fie $E = L^2([-1, +1])$. Fie $t_0 = 0$, $t_i = t_{i-1} + \frac{1}{2^i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, şi fie $H_i = [t_{i-1}, t_i]$. Fie a_0 funcţia caracteristică a lui $[-1,0]$, şi a_i funcţia caracteristică a lui H_i. Fie

$$h_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } t \in \left[t_{n-1}, \dfrac{t_{n-1} + t_n}{2} \right] \\ -1 \text{ pentru } t \in \left(\dfrac{t_{n-1} + t_n}{2}, t_n \right] \\ 0 \text{ pentru } t \notin H_n \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.20}$$

şi fie

$$x_n = -\frac{1}{\sqrt{2}^n} a_0 + \sqrt{2}^n h_n + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\infty} a_j \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.21}$$

Atunci $\{x_n\}$ este un şir t.l.i. de tip l_+ (V. Pták [62]).

DEFINIŢIA 3.12. Un şir t.l.i. $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E se numeşte *şir t.l.i. de tip P*, dacă el este $(E, E\ )$-mărginit, şi dacă

$$\sup_{1\leqslant n<\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| < \infty. \tag{3.22}$$

$\{x_n\}$ se numeşte *şir t.l.i. de tip P^**, dacă el este (E, E^*)-mărginit, şi dacă pentru şirul de funcţionale asociat $\{\varphi_n\} \subset [x_n]^*$ avem

$$\sup_{1\leqslant n<\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \right\| < \infty. \tag{3.23}$$

Exemplul 3.4. Un spaţiu Banach reflexiv E nu conţine nici un şir t.l.i. de tip P, P^*.

Teoremele 2.6, 2.7 şi 2.8 din [74], Cap. II, se extind cu uşurinţă la şiruri t.l.i. (E, E^*)-mărginite $\{x_n\}$ în loc de baze $\{x_n\}$.

§ 6. SISTEME BIORTOGONALE MAXIMALE

DEFINIŢIA 3.13. Fie E un spaţiu Banach şi fie (x_n, f_n), (y_n, g_n) ($\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset E$, $\{f_n\}$, $\{g_n\} \subset E^*$) două sisteme biortogonale. Se spune [16] că (y_n, g_n) este o *extensiune* a lui (x_n, f_n), dacă $\{x_n\}$ este un subşir al lui $\{y_n\}$ şi $\{f_n\}$ este un subşir al lui $\{g_n\}$. Se spune [16] că un sistem biortogonal (x_n, f_n) este *maximal*, dacă el nu are nici o extensiune afară de însăşi (x_n, f_n).

De exemplu, orice sistem biortogonal E-fundamental (x_n, f_n) ([74], Cap. I, definiţia 1.1) este maximal. De asemenea, orice sistem biortogonal (x_n, f_n) cu proprietatea că şirul $\{f_n\} \subset E$ este total, este maximal.

TEOREMA 3.10. *Fie E un spaţiu Banach separabil. Orice sistem biortogonal (x_n, f_n) ($\{x_n\} \subset E$, $\{f_n\} \subset E^*$) are o extensiune maximală.*

Teorema 3.10 a fost demonstrată, sub o formă mai generală, de J. Dieudonné ([16], propoziţia 2).

Sisteme biortogonale maximale pot exista şi în spaţii Banach neseparabile, cum ne arată

Exemplul 3.5. Fie $\{x_n\}$ şirul de vectori unitari în spaţiul $E = m$, şi fie şirul $\{f_n\} \subset E^*$ definit prin

$$f_n(x) = \xi_n \qquad (x = \{\xi_n\} \in m). \tag{3.24}$$

Atunci şirul $\{f_n\}$ este total, deci (x_n, f_n) este un sistem biortogonal maximal.

PROPOZIŢIA 3.7. *Fie E un spaţiu Banach, (x_n, f_n) $(\{x_n\}\subset E, \{f_n\}\subset E^*)$ un sistem biortogonal, şi fie V subspaţiul vectorial σ (E^*, E)-închis al lui E^*, generat de şirul $\{f_n\}$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

1°. *(x_n, f_n) este un sistem biortogonal maximal.*

2°. $V_\perp \subset [x_n]$.

3°. $[x_n]^\perp \subset V$.

Propoziţia 3.7 a fost dată, sub o formă mai generală, de J. Dieudonné ([16], propoziţia 3).

Există sisteme biortogonale maximale într-un spaţiu Hilbert real separabil $H \equiv H^*$, astfel încît $[x_n]$ şi V sînt subspaţii de codimensiune infinită, cum ne arată

Exemplul 3.6. a) Fie H_1 un spaţiu Hilbert real separabil, $\{e_n\}$ o bază ortonormată a lui H_1 şi fie

$$x_n = e_1 + e_{n+1}, \quad x_n^* = e_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (3.25)$$

Atunci (x_n, x_n^*) este un sistem biortogonal maximal (fiindcă $[x_n] = H_1$), dar codim $[x_n]^* = 1$. 11)

b) Fie H_1 un spaţiu Hilbert real separabil, şi fie $G^1, G^2, \ldots$ o infinitate numărabilă de subspaţii vectoriale închise infinitdimensionale ale lui H_1, două cîte două ortogonale, astfel încît să avem $H = \bigoplus_{i=1}^{\infty} G^i$. În baza exemplului 3.6 *a*), fie (x_n^i, x_n^{i*}) un sistem biortogonal maximal în G^i, cu $[x_n^i] = G^i$ şi codim $[x_n^{i*}] = 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Să aranjăm toate x_n^i într-un şir $\{x_n\}$, după procedeul diagonal clasic (adică prin creşterea lui $n + i$) şi să aranjăm după aceeaşi lege toate x_n^{i*} într-un şir $\{x_n^*\}$. Atunci (x_n, x_n^*) este un sistem biortogonal maximal în H_1, cu $[x_n] = H_1$ şi codim $[x_n^*] = \infty$.

c) Fie H un spaţiu Hilbert separabil şi fie H_1, H_2 două subspaţii vectoriale închise infinitdimensionale ale lui H, ortogonale şi astfel încît $H = H_1 \oplus H_2$. În baza exemplului 3.6 *b*), fie (x_n, x_n^*) un sistem biortogonal maximal în H_1, cu $[x_n] = H_1$ şi codim $[x_n^*] = \infty$. În mod similar, fie (y_n, y_n^*) un sistem biortogonal maximal în H_2, cu codim $[y_n] = \infty$ şi $[y_n^*] = H_2$. Atunci

$$(\{x_n\} \cup \{y_n\}, \quad \{x_n^*\} \cup \{y_n^*\}) \qquad (3.26)$$

este un sistem biortogonal maximal în H, cu codim $[\{x_n\} \cup \{y_n\}] = \infty$ şi codim $[\{x_n^*\} \cup \{y_n^*\}] = \infty$.

Exemplul 3.6 *a*) se află în monografia lui S. Kaczmarz şi H. Steinhaus ([41], Cap. VIII, § 1). Exemplul 3.6 *b*) se datoreşte, în esenţă, lui G. Julia [40]. Exemplul 3.6 *c*) se datoreşte, în esenţă, lui J. Dieudonné [16].

În următoarele trei paragrafe ne vom ocupa de clase importante de sisteme biortogonale maximale.

---

11) H_1 fiind un spaţiu Hilbert real, subspaţiul vectorial $\sigma(H_1^*, H_1)$-închis V al lui $H_1^* \equiv H_1$ generat de $\{x_n^*\}$ coincide cu subspaţiul vectorial tare închis $[x_n^*]$ generat de $\{x_n^*\}$.

§ 7. ŞIRURI TARE LINIAR INDEPENDENTE FUNDAMENTALE

În timp ce şirurile tare liniar independente constituie o generalizare nu numai a bazelor, ci şi a şirurilor bazice, şirurile tare liniar independente fundamentale constituie o generalizare a bazelor. Problema existenţei lor are un răspuns afirmativ, cum ne arată

TEOREMA 3.11. *Fie* $\{y_n\}$ *un şir fundamental într-un spaţiu Banach* E, *cu proprietatea că toate subşirurile sale finite sînt liniar independente. Atunci există în* E *un şir tare liniar independent fundamental* $\{x_n\}$, *astfel încît*

$$[x_1, \ldots, x_m] = [y_1, \ldots, y_m] \qquad (m = 1, 2, \ldots). \qquad (3.27)$$

Teorema 3.11 a fost dată, într-o formă mai generală, de G. W. Mackey ([54], lema 2), şi V. Klee ([47], propoziţia 2.2), însă în diverse spaţii particulare ea a fost cunoscută şi înainte. De exemplu, pentru $E = L^2([0,1])$ ea se află la S. Lewin [51], iar pentru $E = L^p([0,1])$ $(p \geqslant 1)$ în monografia lui Kaczmarz-Steinhaus ([41], Cap. 8, § 2), unde ea este numită teorema de ,,biortogonalizare'' (deoarece constituie o generalizare a teoremei de ,,ortogonalizare'' clasice din $L^2([0,1])$ a lui E. Schmidt [63]).

Pentru problemele de existenţă ale claselor speciale de şiruri tare liniar independente fundamentale, condiţia de fundamentalitate înseamnă o restricţie severă. De exemplu, spre deosebire de situaţia din cazul şirurilor tare liniar independente, este deschisă următoarea problemă, pusă încă de S. Banach ([2], p. 238):

Problema 3.10. Există oare în orice spaţiu Banach separabil un şir tare liniar independent fundamental (E, E^*)-mărginit? În particular, există oare în orice spaţiu Banach separabil E un şir tare liniar independent fundamental normal?

Vom da acum o caracterizare a fundamentalităţii şirurilor tare liniar independente.

DEFINIŢIA 3.14. Un şir tare liniar independent $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E se numeşte *maximal*, dacă nu există în E nici un şir tare liniar independent conţinînd şirul $\{x_n\}$.

Un sistem biortogonal (x_n, f_n) $(\{x_n\} \subset E,\ \{f_n\} \subset E^*)$ poate fi maximal şi fără ca şirul tare liniar independent $\{x_n\}$ să fie maximal. Cu alte cuvinte, se poate întîmpla ca (x_n, f_n) să fie maximal, dar să existe un şir $\{g_n\} \subset E^*$ astfel încît (x_n, g_n) să fie un sistem biortogonal nemaximal, cum ne arată

Exemplul 3.7. Fie (x_n, f_n) sistemul biortogonal maximal din exemplul 3.5, şi fie şirul $\{g_n\} \subset E^*$ definit prin

$$g_n(x) = \xi_n - \operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \xi_n \qquad (x = \{\xi_n\} \in E = m), \qquad (3.28)$$

unde Lim notează limita generalizată în sensul lui Banach [2]. Atunci (x_n, g_n) este un sistem biortogonal nemaximal, deci şirul tare liniar independent $\{x_n\}$ nu este maximal.

PROPOZIŢIA 3.8. *Un şir tare liniar independent* $\{x_n\}$ *dintr-un spaţiu Banach* E *este maximal dacă şi numai dacă el este fundamental în spaţiul* E.

§ 8. BAZE GENERALIZATE

DEFINIŢIA 3.15. Un şir $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E se numeşte [1] ***bază generalizată*** a spaţiului E, dacă există un şir total de funcţionale $\{f_n\} \subset E^*$ astfel încît (x_n, f_n) să fie un sistem biortogonal. Orice asemenea şir total $\{f_n\} \subset E$ se numeşte ***şir admisibil*** (relativ la baza generalizată $\{x_n\}$). Aplicaţia $u : x \to \{f_n(x)\}$ a lui E în spaţiul s al tuturor şirurilor de scalari, se numeşte ***aplicaţia admisibilă*** determinată de $\{f_n\}$.

Din definiţie rezultă că orice bază generalizată este un şir tare liniar independent. Mai mult, din observaţia făcută la începutul § 6 rezultă că *dacă* $\{x_n\}$ *este o bază generalizată* E *şi* $\{f_n\} \subset E$ *un şir admisibil oarecare, atunci* (x_n, f_n) *este un sistem biortogonal maximal*. Reciproca acestei afirmaţii nu este însă adevărată, cum ne arată exemplul 3.6 *a*).

Este evident că un şir $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E este o bază generalizată a spaţiului E dacă şi numai dacă există un şir de funcţionale liniare continue $\{f_n\} \subset E^*$ astfel încît (x_n, f_n) să fie un sistem biortogonal şi încît aplicaţia $u : x \to \{f_n(x)\}$ a lui E în s să fie biunivocă.

DEFINIŢIA 3.16. Fie E, F două spaţii Banach. Se spune [1] că o bază generalizată $\{x_n\}$ a spaţiului E este *echivalentă* [12]) cu o bază generalizată $\{y_n\}$ a spaţiului F, dacă există şiruri admisibile $\{f_n\} \subset E^*$ pentru $\{x_n\}$ şi $\{g_n\} \subset F^*$ pentru $\{y_n\}$ astfel încît

$$u(E) = v(F), \tag{3.29}$$

unde u notează aplicaţia admisibilă determinată de $\{f_n\}$ şi v notează aplicaţia admisibilă determinată de $\{g_n\}$.

TEOREMA 3.12. *Fie* E, F *două spaţii Banach şi fie* $\{x_n\}$ *o bază generalizată a spaţiului* E. *Dacă* w *este un izomorfism al lui* E *pe* F *şi* $y_n = w(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *atunci* $\{y_n\}$ *este o bază generalizată a spaţiului* F, *echivalentă cu* $\{x_n\}$. *Reciproc, dacă* $\{y_n\}$ *este o bază generalizată a spaţiului* F *echivalentă cu* $\{x_n\}$, *atunci există un izomorfism* w *al lui* E *pe* F *astfel încît* $y_n = w(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (M. G. Arsove şi R. E. Edwards [1], teorema 2).

§ 9. BAZE ÎN SENS LARG. ŞIRURI BAZICE ÎN SENS LARG

DEFINIŢIA 3.17. Un şir $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E se numeşte [56] ***bază în sens larg*** a spaţiului E, dacă $\{x_n\}$ este simultan un şir tare liniar independent fundamental în E şi o bază generalizată a spaţiului E.

Cu alte cuvinte, $\{x_n\}$ este o bază în sens larg a spaţiului E, dacă el este un şir fundamental în E şi dacă există un şir total $\{f_n\} \subset E^*$ (evident unic) astfel încît (x_n, f_n) să fie un sistem biortogonal.

Există şiruri tare liniar independente fundamentale care nu sînt baze în sens larg, cum ne arată exemplul 3.6 *a*).

---

[12]) În [1] se foloseşte termenul „similară".

PROPOZIŢIA 3.9. *Fie* $\{x_n\}$ *un şir tare liniar independent fundamental într-un spaţiu Banach* E. *Următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

1°. $\{x_n\}$ *este o bază în sens larg a spaţiului* E.

2°. $\bigcap_{n=1}^{\infty} L^{(n)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots] = \{0\}$.

3°. *Pentru orice* $x \in E$ *astfel încît seria* $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) x_i$ *converge, avem* $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) x_i = x$.

Echivalenţa 1° ⟺ 2° a fost dată de M. M. Grinblium [26].

Există baze generalizate, care nu sînt baze în sens larg, cum ne arată exemplul 3.5. În această privinţă, avem

PROPOZIŢIA 3.10. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază generalizată a unui spaţiu Banach* E. *Următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

1°. $\{x_n\}$ *este o bază în sens larg a spaţiului* E.

2°. *Există un singur şir admisibil* $\{f_n\} \subset E^*$ (M. G. Arsove şi R. E. Edwards [1], teorema 1).

Problema existenţei bazelor în sens larg are un răspuns afirmativ :

TEOREMA 3.13. *Orice spaţiu Banach separabil are o bază în sens larg* (A. I. Markuşevici [56], § 4).

Un exemplu de bază în sens larg al unui spaţiu Banach E, care nu este o bază a spaţiului E, a fost dat în [74], Cap. I, exemplul 1.7. În această privinţă, avem

PROPOZIŢIA 3.11. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază în sens larg a unui spaţiu Banach* E, *şi fie* $A = \left\{\{\alpha_n\} \subset K \mid \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \text{ converge}\right\}$. *Următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

1°. $\{x_n\}$ *este o bază a spaţiului* E.

2°. *Oricare ar fi şirul de scalari* $\{\beta_n\} \subset K$ *cu proprietatea că seriile* $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \alpha_i$ *converg pentru toate* $\{\alpha_n\} \in A$, *sistemul de ecuaţii*

$$f(x_n) = \beta_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.30}$$

are o soluţie $f \in E^*$ (M. M. Grinblium [27], teorema 2).

Bazele în sens larg constituie generalizări convenabile ale bazelor, deoarece ele păstrează numeroase proprietăţi ale bazelor. De exemplu, avem următoarea proprietate de stabilitate :

TEOREMA 3.14. *Fie* E *un spaţiu Banach cu bază în sens larg* $\{x_n\}$, *şi fie* $\{y_n\}$ *un şir din* E *cu proprietatea că există o constantă* λ, $0 < \lambda < 1$, *astfel încît să avem*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - y_i) \right\| \leqslant \lambda \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \tag{3.31}$$

pentru orice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. *Atunci* $\{y_n\}$ *este o bază în sens larg a spațiului* E, *echivalentă cu baza în sens larg* $\{x_n\}$ (A. I. Markușevici [56]).

COROLARUL 3.3. *Fie* E *un spațiu Banach cu bază în sens larg* $\{x_n\}$ (*avînd șirul asociat* $\{f_n\} \subset E^*$), *și fie* $\{y_n\}$ *un șir din* E *cu proprietatea*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - y_i\| \, \|f_i\| = \delta < 1. \tag{3.32}$$

Atunci $\{y_n\}$ *este o bază în sens larg a spațiului* E, *echivalentă cu baza în sens larg* $\{x_n\}$.

COROLARUL 3.4. *Fie* E *un spațiu Banach cu bază în sens larg* $\{x_n\}$. *Atunci există un șir de constante* $\gamma_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *cu proprietatea*: *dacă un șir* $\{y_n\}$ *satisface*

$$\|x_n - y_n\| < \frac{1}{\gamma_n} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.33}$$

atunci șirul $\{y_n\}$ *este o bază în sens larg a spațiului* E, *echivalentă cu baza în sens larg* $\{x_n\}$.

De altă parte, bazele în sens larg au o serie de proprietăți despre care nu se știe dacă bazele le au sau nu. De exemplu, avem următoarea teoremă de prelungire a bazelor în sens larg:

TEOREMA 3.15. *Fie* E *un spațiu Banach separabil*, E_1 *un subspațiu vectorial închis al lui* E, *și* $\{x_n\}$ *o bază în sens larg a lui* E_1. *Atunci* $\{x_n\}$ *poate fi extins pînă la o bază în sens larg a spațiului* E (V. I. Gurarii și M. I. Kadeț [34], teorema 1).

De asemenea, avem următoarea teoremă generală de biortogonalizare, care constituie o întărire a teoremei 3.11:

TEOREMA 3.16. *Fie* E *un spațiu Banach*, $\{y_n\} \subset E$ *un șir liniar independent* [13]) *fundamental în* E, $\{g_n\} \subset E^*$ *un șir liniar independent total și* Γ *subspațiul vectorial al lui* E^* *generat de șirul* $\{g_n\}$. *Atunci există în* E *o bază în sens larg* $\{x_n\}$, *cu asociatul* $\{f_n\} \subset E^*$, *astfel încît*

$$[x_1, \ldots, x_m] = [y_1, \ldots, y_m] \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{3.34}$$

și încît subspațiul vectorial al lui E^* *generat de* $\{f_n\}$ *să coincidă cu* Γ.

Teorema 3.16 a fost demonstrată, sub o formă mai generală, de V. F. Gapoșkin și M. I. Kadeț ([22], teorema 4). Observăm că existența unei baze în sens larg $\{x_n\}$ satisfăcînd (3.34) se poate demonstra și cu metoda folosită de A. I. Markușevici în [56], § 4.

DEFINIȚIA 3.18. Un șir $\{x_n\}$ dintr-un spațiu Banach E se numește *șir bazic în sens larg*, dacă $\{x_n\}$ este o bază în sens larg a subspațiului $[x_n]$ al lui E.

Orice bază generalizată este evident un șir bazic în sens larg. Reciproca nu este însă adevărată, cum ne arată exemplul unui șir bazic care nu este o bază generalizată (de exemplu un subșir oarecare al unei baze).

---

[13]) Adică: orice subșir finit al său este liniar independent.

§ 10. BAZE APROXIMATIVE. BAZE APROXIMATIVE GENERALIZATE

Am văzut că bazele în sens larg constituie, din anumite puncte de vedere, o generalizare convenabilă a bazelor și că orice spațiu Banach separabil are o bază în sens larg. Totuși, bazele în sens larg nu posedă una din proprietățile bazelor, importantă în multe aplicații. Anume, dacă $\{x_n\}$ este o bază în sens larg a unui spațiu Banach E, dar nu este o bază a lui E, atunci nu avem $\lim\limits_{i\to\infty} s_n(x) = x$ pentru orice $x\in E$, unde $\{s_n\}$ notează șirul de operatori sumă parțială asociat bazei în sens larg $\{x_n\}$ (adică $s_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i,\ x\in E,\ n = 1, 2, \ldots$, unde $\{f_n\}$ este șirul de funcționale asociat bazei în sens larg $\{x_n\}$).

În cele ce urmează vom introduce într-un spațiu Banach arbitrar E alte clase de șiruri infinite $\{x_n\}$ (tare liniar independente sau nu) cu proprietatea că orice bază a spațiului E aparține acestor clase și astfel încît pentru anumite șiruri de operatori „sumă" $\{u_n\}$ asociate șirului $\{x_n\}$ (care generalizează șirul $\{s_n\}$ de operatori sumă parțială) să avem $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = x$ pentru orice $x\in E$. Din cauza acestei din urmă proprietăți, vom numi aceste șiruri $\{x_n\}$ „baze aproximative". Problema existenței bazelor aproximative cît și cea a existenței claselor particulare de baze aproximative pe care le vom considera, este deschisă.

DEFINIȚIA 3.19. Un șir $\{x_n\}$ dintr-un spațiu Banach E se numește[14]) *bază aproximativă* a spațiului E, dacă există un șir dublu de funcționale $\{h_{nm}\}\subset E^*$ (nu neapărat unic) și un șir crescător de întregi pozitivi $\{m_n\}$ astfel încît

$$\lim_{n\to\infty}\left\| x - \sum_{i=1}^{m_n} h_{ni}(x)\, x_i \right\| = 0 \text{ pentru orice } x\in E. \tag{3.35}$$

Orice asemenea șir dublu $\{h_{nm}\}\subset E^*$ este evident total.

Orice bază aproximativă $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E este un șir fundamental în E, deoarece mulțimea tuturor combinațiilor liniare de forma $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i$, unde r_i sînt scalari raționali și n un număr natural, este o mulțime numărabilă peste tot densă în E. Prin urmare, orice spațiu Banach E cu o bază aproximativă $\{x_n\}$ este separabil. Nu se știe dacă este adevărată și afirmația reciprocă :

Problema 3.11. Există oare în orice spațiu Banch separabil o bază aproximativă?

Un răspuns negativ la această problemă ar implica un răspuns negativ la problema bazei.

---

[14]) Această clasă de șiruri a fost introdusă, fără a folosi termenul „bază aproximativă" de I. Maddaus [55]. El numește „spații de tip A" spațiile Banach în care există o bază aproximativă, însă aici nu vom folosi acest termen.

PROPOZIŢIA 3.12. a) *Un spaţiu Banach E are o bază aproximativă dacă şi numai dacă există un şir de endomorfisme liniare continue de rang finit* $\{u_n\} \subset \mathfrak{L}(E, E)$ *astfel încît*

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = x \qquad (x \in E). \qquad (3.36)$$

b) *Un şir* $\{x_n\} \subset E$ *este o bază aproximativă a spaţiului* E *dacă şi numai dacă există un şir de aplicaţii liniare continue* $u_n \in \mathfrak{L}(E, L_{(n)})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *unde* $L_{(n)} = [x_1, \ldots, x_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *astfel încît să avem* (3.36).

Afirmaţia a) este conţinută, implicit, în lucrarea [61] a lui R. S. Phillips.

Orice bază $\{x_n\}$ *a unui spaţiu Banach* E *este o bază aproximativă* a spaţiului E, deoarece punînd $m(n) = n$, $h_{nj} = f_j$ $(j = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$, unde $\{f_n\} \subset E^*$ este şirul de funcţionale coeficienţi asociat bazei $\{x_n\}$, vom avea

$$\sum_{i=1}^{m_n} h_{ni}(x)\, x_i = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i \qquad (x \in E,\ n = 1, 2, \ldots). \qquad (3.37)$$

Cum vom vedea în exemplele din paragrafele următoare, există baze aproximative care nu sînt baze.

Problema 3.12. Există oare o bază în orice spaţiu Banach cu bază aproximativă?

Bazele aproximative au unele proprietăţi despre care nu se ştie dacă bazele le au sau nu. De exemplu, avem

PROPOZIŢIA 3.13. *Orice subspaţiu vectorial închis complementat* G *al unui spaţiu Banach* E *cu bază aproximativă are o bază aproximativă.*

DEFINIŢIA 3.20. Un şir $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E se numeşte bază aproximativă generalizată a spaţiului E, dacă există un şir dublu de funcţionale liniare continue $\{h_{nm}\} \subset E^*$ (nu neapărat unic) cu proprietatea următoare: pentru orice mulţime compactă $Q \subset E$ există subşiruri $\{x^Q_{p_n}\} \subset \{x_n\}$ şi $\{h^Q_{j_n i_m}\} \subset \{h_{nm}\}$, şi un şir crescător de numere întregi pozitive $\{l^Q_n\}$ astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{l^Q_n} h^Q_{j_n i_i}(x)\, x^Q_{p_i} \right\| = 0 \qquad \text{uniform pe } Q. \qquad (3.38)$$

Orice bază aproximativă generalizată, $\{x_n\}$ este un şir fundamental în E, iar şirul dublu $\{h_{nm}\} \subset E^*$ este total.

Problema 3.13. Există oare în orice spaţiu Banach separabil o bază aproximativă generalizată?

Reamintim următoarea noţiune introdusă de A. Grothendieck [29]: Se spune că un spaţiu Banach E are *proprietatea de aproximare*, dacă pentru orice mulţime compactă $Q \subset E$ şi orice $\varepsilon > 0$ există un endomorfism $u_{Q,\varepsilon} \in \mathfrak{L}(E, E)$ de rang finit, astfel încît

$$\| u_{Q,\varepsilon}(x) - x \| < \varepsilon \quad \text{pentru orice } x \in Q. \qquad (3.39)$$

TEOREMA 3.17. *Fie E un spațiu Banach separabil. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

1°. *E are o bază aproximativă generalizată ;*

2°. *E are proprietatea de aproximare ;*

3°. *Pentru orice spațiu Banach F, orice aplicație liniară compactă v a lui F în E se poate aproxima uniform prin aplicații liniare continue de rang finit ale lui F în E.*

Echivalența 2° ⇔ 3° a fost demonstrată de A. Grothendieck ([29], propoziția 35). Alte afirmații echivalente au fost date tot de A. Grothendieck [29].

Pentru bazele aproximative generalizate problema analogă problemei lui S. Karlin ([74], Cap. I, problema 1.6) are un răspuns afirmativ :

TEOREMA 3.18. *Fie E un spațiu Banach. Dacă spațiul adjunct E^* are o bază aproximativă generalizată, atunci și spațiul E are o bază aproximativă generalizată.*

Teorema 3.18 rezultă dintr-o propoziție a lui A. Grothendieck ([29], propoziția 36), ținînd seama de teorema 3.17.

§ 11. BAZE OPERATORIALE

DEFINIȚIA 3.21. Un șir $\{x_n\}$ dintr-un spațiu Banach E se numește [22] *bază operatorială* a spațiului E, dacă există un șir de aplicații liniare continue $T_n \in \mathfrak{L}(L_{(n)}, L_{(n)})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, unde $L_{(n)} = [x_1, \ldots, x_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$, cu următoarele două proprietăți :

$$a) \lim_{n\to\infty} T_n(x_j) = x_j \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{3.40}$$

b) Pentru orice $x \in E$ există o dezvoltare *unică*

$$x \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i, \tag{3.41}$$

astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} T_n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = x. \tag{3.42}$$

Noțiunea de mai sus a fost introdusă de M. I. Kadeț [43] sub denumirea de „bază de sumare generalizată" (Această denumire va fi justificată în § 14). În [43] Kadeț a dat de fapt o altă definiție, care însă este echivalentă cu cea de mai sus, în virtutea teoremei 3.19 de mai jos.

Din condiția *a*) și din unicitatea dezvoltării (3.41), (3.42), rezultă că orice bază operatorială $\{x_n\}$ este un șir liniar independent (adică orice subșir finit este liniar independent). Avem chiar mai mult, anume

TEOREMA 3.19. *Orice bază operatorială $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E este un șir tare liniar independent* ([22], teorema 1).

Există însă șiruri $\{x_n\}$ satisfăcînd condiția *b*) din definiția 3.21, care nu sînt tare liniar independente [22].

Din existența dezvoltării (3.41), (3.42) și din propoziția 3.12 *b*) rezultă

PROPOZIŢIA 3.14. *Orice bază operatorială* $\{x_n\}$ *a unui spațiu Banach* E *este o bază aproximativă a spațiului* E (*deci, în particular, un șir fundamental în* E).

De altă parte, avem următoarea generalizare a teoremei 1.15a) din [74], Cap. I:

TEOREMA 3.20. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază operatorială a unui spațiu Banach* E *și fie* $V = [f_n]$ *subspațiul vectorial închis al lui* E^* *generat de șirul* $\{f_n\} \subset E^*$ *asociat* [15] *lui* $\{x_n\}$. *Atunci avem*

$$r(V) > 0, \tag{3.43}$$

unde $r(V)$ *notează caracteristica*[16] *subspațiului* V (*deci, în particular, șirul* $\{f_n\} \subset E^*$ *este total*).

Sub o formă echivalentă, teorema 3.20 a fost dată de V. F. Gapoșkin și M. I. Kadeț ([22], teorema 2).

Din teoremele 3.19, 3.20 și propoziția 3.14 rezultă

COROLARUL 3.5. *Orice bază operatorială a unui spațiu Banach* E *este o bază în sens larg a spațiului* E.

Reciproca acestui corolar nu este însă adevărată, cum ne arată

Exemplul 3.8. Spațiul $E = c_0$ are o bază în sens larg care nu este o bază operatorială a lui E ([22], teorema 5). Aceasta este o consecință imediată a teoremelor 3.20 și 3.16, ținînd seama de faptul că în $E^* = c_0^*$ există un subspațiu vectorial total V cu $r(V) = 0$.

Problema 3.14. Există oare o bază operatorială în orice spațiu Banach separabil? Dar în orice spațiu Banach cu bază aproximativă?

TEOREMA 3.21. *Dacă un spațiu Banach reflexiv* E *are o bază operatorială, atunci orice altă bază în sens larg a spațiului* E *este o bază operatorială a spațiului* E.

Teorema 3.21 a fost dată, fără demonstrație, de M. I. Kadeț ([43], teorema 3). Pentru cazul particular al unui spațiu Hilbert, o demonstrație a fost dată de V. F. Gapoșkin și M. I. Kadeț ([22], teorema 3), cu mențiunea că acest rezultat se află, în esență, în lucrarea [52] a lui S. Lewin.

Orice bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E este evident o bază operatorială a spațiului E. Există însă baze operatoriale care nu sînt baze, cum ne arată exemplul 1.7 din [74], Cap. I.

Problema 3.15. Există oare o bază în orice spațiu Banach care are o bază operatorială?

DEFINIŢIA 3.22. O bază operatorială $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E (relativ la un șir de operatori $T_n : [x_1, \ldots, x_n] \to [x_1, \ldots, x_n]$, $n = 1, 2, \ldots$) se numește [22] *bază operatorială necondiționată*, dacă orice permutare $\{x'_n\}$ a lui $\{x_n\}$ este o bază operatorială relativ la un șir de operatori $T'_n : [x'_1, \ldots, x'_n] \to [x'_1, \ldots, x'_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ cu proprietatea că matricea operatorului T_j în baza $\{x_n\}$ coincide cu matricea operatorului T'_j în baza $\{x'_n\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

---

[15] Șirul $\{f_n\} \subset E^*$ există și este unic, în virtutea teoremei 3.19 și propoziției 3.14.

[16] Pentru această noțiune a se vedea [74], Cap. I, § 13.

TEOREMA 3.22. *Orice bază operatorială necondiţionată a unui spaţiu Banach E este o bază necondiţionată a lui E* (V. F. Gapoşkin şi M. I. Kadeţ [22], teorema 6).

Din teorema 3.21 rezultă că dacă în definiţia 3.22 nu s-ar cere ca matricile operatorilor T_j şi T'_j (în bazele $\{x_n\}$ respectiv $\{x'_n\}$) să coincidă, atunci teorema 3.22 nu ar mai fi adevărată.

În paragraful următor ne vom ocupa de o clasă particulară de baze operatoriale. O altă clasă particulară importantă de baze operatoriale va interveni în § 13.

§ 12. BAZE CU PARANTEZE

DEFINIŢIA 3.23. Un şir $\{x_n\}$ de elemente dintr-un spaţiu Banach E se numeşte [43] *bază cu paranteze* a spaţiului E, dacă există un şir $\{f_n\} \subset E^*$ şi un şir crescător de numere întregi pozitive $\{m_n\}$ astfel încît (x_n, f_n) să fie un sistem biortogonal şi încît să avem

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{m_n} f_i(x)\, x_i \right\| = 0 \qquad (x \in E). \tag{3.44}$$

Orice bază cu paranteze $\{x_n\}$ a unui spaţiu Banach E este o bază operatorială a spaţiului E. În adevăr, nu avem decît să punem

$$T_{m_n}(x) = T_{m_n+1}(x) = \ldots = T_{m_{n+1}-1}(x) = s_{m_n}(x) \quad (x \in E,\ n = 1, 2, \ldots), \tag{3.45}$$

$$a_i = f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{3.46}$$

Ţinînd seama de rezultatele din § 11, rezultă că *orice bază cu paranteze $\{x_n\}$ a unui spaţiu Banach E este o bază în sens larg a spaţiului E şi o bază aproximativă a spaţiului E.* Reciprocele acestor afirmaţii nu sînt adevărate, cum ne arată exemplul 1.7 din [74], Cap. I.

Problema 3.16. Există oare o bază cu paranteze în orice spaţiu Banach separabil? Dar în orice spaţiu Banach cu bază aproximativă? Dar în orice spaţiu Banach cu bază operatorială?

TEOREMA 3.23. *Fie E un spaţiu Banach, şi fie (x_n, f_n) ($\{x_n\} \subset E$, $\{f_n\} \subset E^*$) un sistem biortogonal cu proprietatea că $r([f_n]) > 0$. Atunci există o partiţie a şirului $\{x_n\}$ în două subşiruri $\{x'_n\}$ şi $\{x''_n\}$ cu proprietatea că fiecare din aceste subşiruri este o bază cu paranteze în învelişul său vectorial închis* (M. I. Kadeţ [43], teorema 1).

COROLARUL 3.6. *Pentru orice bază în sens larg (deci, în particular, pentru orice bază operatorială) $\{x_n\}$ a unui spaţiu Banach reflexiv E există o partiţie a şirului $\{x_n\}$ în două subşiruri $\{x'_n\}$ şi $\{x''_n\}$, astfel încît $\{x'_n\}$ şi, respectiv, $\{x''_n\}$ să fie o bază cu paranteze a lui $[x'_n]$ şi, respectiv, $[x''_n]$.*

Din teorema 3.23 rezultă că există baze cu paranteze care nu sînt baze. (Nu avem decît să pornim de la un sistem biortogonal (x_n, f_n) cu $[f_n] = E^*$ pentru care nici un subşir $\{x'_n\} \subset \{x_n\}$ nu este un şir bazic).

Problema 3.17. Există oare o bază în orice spaţiu Banach care are o bază cu paranteze?

§ 13. T-BAZE (BAZE DE SUMARE)

Reamintim mai întîi cîteva noțiuni.

Fie E un spațiu Banach și fie $T = (t_{nm})$ o matrice de scalari. Un șir $\{z_n\} \subset E$ se numește *T-sumabil* către $x \in E$, dacă elementele $y_n = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{m} t_{ni} z_i$ $(n = 1, 2, \dots)$ există și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$. O serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ din E se numește *T-sumabilă* către $x \in E$, dacă șirul $\{z_n\} = \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right\}$ al sumelor sale parțiale este T-sumabil către x.

Matricea de scalari $T = (t_{nm})$ este numită *matrice consistentă* (sau *matrice Toeplitz*), dacă orice șir convergent $\{z_n\} \subset E$ este T-sumabil către limita sa. După cum se știe, pentru aceasta este necesar și suficient să fie îndeplinite următoarele trei condiții :

$$\text{a)}\ \sum_{j=1}^{\infty} |t_{nj}| \leqslant M < \infty \qquad (n = 1, 2, \dots), \tag{3.47}$$

$$\text{b)}\ \lim_{n\to\infty} t_{nj} = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots), \tag{3.48}$$

$$\text{c)}\ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} t_{ni} = 1. \tag{3.49}$$

O matrice consistentă T se numește uneori și *metodă de sumare.*

DEFINIȚIA 3.24. Fie $T = (t_{nm})$ o matrice consistentă. Un șir $\{x_n\}$ dintr-un spațiu Banach E se numește [23] *T-bază* a spațiului E, sau [50] *bază de sumare* a spațiului E, dacă pentru orice $x \in E$ există un șir *unic* de scalari $\{\alpha_n\} \subset K$ astfel încît seria $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ să fie T-sumabilă către x.

Cu alte cuvinte, $\{x_n\}$ este o T-bază dacă pentru orice $x \in E$ există un șir unic $\{\alpha_n\} \subset K$ astfel încît notînd

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \tag{3.50}$$

$$\sigma_{n,m}(x) = \sum_{j=1}^{m} t_{nj} s_j, \tag{3.51}$$

să existe limitele

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_{n,m}(x) = \sigma_n(x) \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{3.52}$$

și să avem

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = x. \tag{3.53}$$

Şirul de funcţionale liniare $\{f_n\}$ definit prin

$$f_j(x) = \alpha_j \text{ pentru orice } x \in E,\ j = 1, 2, \ldots \qquad (3.54)$$

unde $\{\alpha_n\}$ este şirul de scalari corespunzînd elementului x prin definiţia 3.24, se numeşte *şirul de funcţionale asociat* T-bazei $\{x_n\}$.

TEOREMA 3.24. *Fie* $\{x_n\}$ *o* T*-bază a unui spaţiu Banach* E. *Atunci funcţionalele liniare* f_n *asociate bazei* $\{x_n\}$ *sînt continue, adică avem*

$$f_n \in E^\star \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (3.55)$$

şi (x_n, f_n) *constituie un sistem biortogonal.*

În unele cazuri particulare (pentru matrici triunghiulare) teorema 3.24 a fost dată, independent, de B. R. Gelbaum ([23], teorema 16) şi V. Ia. Kozlov ([50], teorema 1). Sub forma generală de mai sus ea a fost remarcată de M. M. Day în recenzia [13] lucrării lui Kozlov, şi regăsită apoi de V. F. Gapoşkin ([20], teorema 1).

COROLARUL 3.7. *Orice* T*-bază relativ la o matrice triunghiulară* $T = (t_{nm})$ [17]) *este o bază operatorială* [22].

Acest corolar justifică denumirea de ,,bază de sumare generalizată", menţionată în § 11. Pentru a cuprinde drept caz particular *toate* T-bazele (şi nu numai cele relative la o matrice triunghiulară), se pot introduce [22] baze operatoriale multiple (înlocuind şirul de operatori $\{T_n\}$ din definiţia 3.21 printr-un şir dublu $\{T_{nm}\}$ şi condiţiile a), b) din definiţia 3.21 prin condiţii corespunzătoare).

Problema 3.18. Există oare o T-bază în orice spaţiu Banach separabil? Dar în orice spaţiu Banach cu bază operatorială?

Orice bază $\{x_n\}$ a unui spaţiu Banach E este evident o T-bază a spaţiului E, oricare ar fi matricea consistentă $T = (t_{nm})$. Există însă T-baze care nu sînt baze, cum ne arată exemplul 1.7 din [74], Cap. I.

Problema 3.19. Există oare o bază în orice spaţiu Banach cu T-bază?

T-bazele păstrează numeroase proprietăţi ale bazelor. Astfel, avem următoarele rezultate asupra dualităţii tari :

TEOREMA 3.25. *Fie* $\{x_n\}$ *o* T*-bază a unui spaţiu Banach* E. *Atunci şirul de funcţionale* $\{f_n\} \subset E^\star$ *asociat* T*-bazei* $\{x_n\}$ *este o* T*-bază*[18]) *a spaţiului* $[f_n]$ (V. F. Gapoşkin [20], teorema 3).

COROLARUL 3.8. *Fie* E *un spaţiu Banach şi fie* (x_n, f_n) $(\{x_n\} \subset E, \{f_n\} \subset E^\star)$ *un sistem biortogonal. Dacă* $\{f_n\}$ *este o* T*-bază a spaţiului* $E^\star$, *atunci* $\{x_n\}$ *este o* T*-bază a spaţiului* E (V. F. Gapoşkin [20], teorema 5).

COROLARUL 3.9. *Fie* E *un spaţiu Banach reflexiv cu* T*-bază* $\{x_n\}$ *şi fie* $\{f_n\} \subset E^\star$ *şirul de funcţionale asociat* T*-bazei* $\{x_n\}$. *Atunci* $\{f_n\}$ *este o* T*-bază a spaţiului* $E^\star$ (V. F. Gapoşkin [20], teorema 4).

De asemenea, se poate demonstra o teoremă de dualitate slabă care conţine drept caz particular teorema 1.16 din [74], Capitolul I (O teoremă analogă, în termeni de T-retro-baze slabe* în loc de baze Schauder slabe*, a fost dată de B. R. Gelbaum [23], teorema 17).

---

[17]) Adică : $t_{nm} = 0$ pentru orice $m > n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

[18]) Relativ la aceeaşi matrice consistentă T.

Se definește, în mod natural, noțiunea de *T-bază slabă*, cerînd în (3.52) și (3.53) convergența slabă în loc de convergența tare (Gelbaum [23], Gapoșkin [20]). Generalizînd teorema 3.7, se arată că *orice T-bază slabă este o T-bază.* În cazul particular al matricilor triunghiulare acest rezultat a fost remarcat, în esență, de B. R. Gelbaum ([23], teoremele 16 și 1′), iar în cazul general el a fost demonstrat de V. F. Gapoșkin ([20], teorema 2).

Avem următoarea teoremă de caracterizare a T-bazelor, care generalizează teorema 1.2 din [74], Cap. I :

TEOREMA 3.26. *Fie E un spațiu Banach, și fie (x_n, f_n) ($\{x_n\} \subset E$, $\{f_n\} \subset E^*$) un sistem biortogonal. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

1°. *$\{x_n\}$ este o T-bază a spațiului E.*

2°. *$\{x_n\}$ este fundamental în E și*

$$\sup_{1 \leqslant n < \infty} \| \sigma_n(x) \| < \infty \quad \textit{pentru orice } x \in E,$$

unde $\{\sigma_n\}$ notează șirul de operatori liniari continui definit prin (3.52).

3°. *$\{x_n\}$ este fundamental în E și avem $\sup_{1 \leqslant n < \infty} \| \sigma_n \| < \infty$.*

Implicația 2° ⇒ 1° a fost dată de B. R. Gelbaum ([23], teorema 1′).

Fie acum (x_n, f_n) ($\{x_n\} \subset E$, $\{f_n\} \subset E^*$) un sistem biortogonal, și fie T o matrice consistentă. Să notăm

$$T_{nm} = \sum_{j=m}^{\infty} t_{nj} \quad (n, m = 1, 2, \ldots). \tag{3.56}$$

Atunci, pentru orice $p = \sum_{i=1}^{l} \beta_i x_i$, limitele $\sigma_n(p)$ definite prin (3.52) există și avem

$$\sigma_n(p) = \sum_{i=1}^{l} T_{ni} \beta_i x_i . \tag{3.57}$$

PROPOZIȚIA 3.15. *Fie E un spațiu Banach, (x_n, f_n) ($\{x_n\} \subset E$, $\{f_n\} \subset E^*$) un sistem biortogonal, și T o matrice consistentă. Atunci pentru orice $p = \sum_{i=1}^{l} \beta_i x_i$ limitele $\sigma_n(p)$ definite prin (3.52) există și avem*

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(p) = p. \tag{3.58}$$

Prin urmare, dacă șirul $\{x_n\}$ este fundamental în E, mulțimea

$$E_1 = \{x \in E \mid \sigma_n(x) \textit{ există } (n = 1, 2, \ldots) \textit{ și } \lim_{n \to \infty} \sigma_n(x) = x\} \tag{3.59}$$

este densă în spațiul E.

Vom da acum, pentru o matrice triunghiulară T, o caracterizare intrinsecă a T-bazelor, care generalizează teorema 1.5 din [74], Cap. I. Vom folosi notațiile P, S_l din [74], Cap. I, § 7. De asemenea, vom nota pentru o matrice consistentă T,

$$\theta_n(p) = \sum_{j=1}^{\infty} t_{nj} S_j = \sum_{i=1}^{l} T_{ni} \beta_i x_i \quad \left(p = \sum_{i=1}^{l} \beta_i x_i \in P\right), \tag{3.60}$$

unde T_{nm} sînt scalarii (3.56).

TEOREMA 3.27. *Fie E un spaţiu Banach, fie $\{x_n\}$ un şir fundamental în E, astfel încît $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2,\ldots)$, şi fie $T = (t_{nm})$ o matrice consistentă triunghiulară (adică $t_{nm} = 0$ pentru $n < m$). Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

1°. *$\{x_n\}$ este o T-bază a spaţiului E.*

2°. *Există o constantă $C_1 > 0$ astfel încît*

$$\left\| \sum_{i=1}^{l} T_{ni}\, \beta_i\, x_i \right\| \leqslant C_1 \left\| \sum_{i=1}^{l} \beta_i\, x_i \right\| \tag{3.61}$$

pentru orice întreg l şi orice $\beta_1,\ldots, \beta_l \in K$.

3°. *Există o constantă $C_2 > 0$ astfel încît*

$$\sup_{\substack{p\in P\\ \|p\|\leqslant 1}} \| \theta_n (p) \| \leqslant C_2 \qquad (n = 1, 2,\ldots). \tag{3.62}$$

În cazul particular al matricei $T = (t_{nm})$, unde $t_{nm} = \dfrac{1}{n}$ $(m=1,\ldots, n;$ $n = 1, 2,\ldots)$ şi $t_{nm} = 0$ pentru $n < m$, teorema 3.27 a fost demonstrată în lucrarea [70] ([70], teorema 1).

O teoremă de izomorfism pentru T-baze echivalente, care conţine drept caz particular teorema 1.6 din [74], Cap. I, rezultă din teorema 3.12. O parte a acestei teoreme generale de izomorfism a fost dată şi de V. F. Gapoşkin ([20], teorema 6). Tot el a observat în [20] că, datorită teoremei de izomorfism, se transpun pentru T-baze teoremele de stabilitate cunoscute pentru baze.

§ 14. PROPRIETĂŢI SPECIFICE ALE T-BAZELOR. CLASE SPECIALE DE T-BAZE

Ne vom ocupa acum de proprietăţi ale T-bazelor care sînt specifice T-bazelor, adică de proprietăţi ale T-bazelor, pe care nu le au bazele.

În primul rînd, spre deosebire de situaţia din cazul bazelor, se poate întîmpla ca pentru o T-bază $\{x_n\}$ cu proprietatea $\| x_n \| = 1$ $(n = 1, 2,\ldots)$ să avem $\sup\limits_{1\leqslant n<\infty} \| f_n \| = \infty$. Într-adevăr, aceasta are loc pentru T-baza din

Exemplul 3.9. Fie H un spaţiu Hilbert şi fie $\{e_n\}$ un şir ortonormat fundamental în H. Atunci şirul $\{x_n\}$ definit prin

$$x_n = e_n - e_{n+1} \qquad (n = 1, 2,\ldots) \tag{3.63}$$

este o $T = (t_{nm})$-bază a spaţiului H, unde $t_{nm} = \dfrac{1}{n}$ $(m=1,\ldots, n; n= = 1, 2, \ldots)$ şi $t_{nm} = 0$ pentru $n < m$, astfel încît pentru şirul $\{f_n\} \subset H^*$ asociat lui $\{x_n\}$ avem $\sup\limits_{1\leqslant n<\infty} \| f_n \| = \infty$ [50].

Prin urmare, se pune problema ordinelor posibile de creştere ale şirurilor $\{\| f_n \|\}$ (V. Ia. Kozlov [50]).

DEFINIŢIA 3.25. Se spune [20] că o metodă de sumare T *are ordinul de creştere* $\varphi(n)$ (> 0), dacă din T-sumabilitatea unui şir de scalari $\{\alpha_n\} \subset K$ rezultă că

$$|\alpha_n| = O(\varphi(n)) \tag{3.64}$$

(adică $\sup\limits_{1 \leqslant n < \infty} \frac{\varphi(n)}{|\alpha_n|} < \infty$).

TEOREMA 3.28. *Fie* $\{x_n\}$ *o T-bază a unui spaţiu Banach* E, *astfel încît* $\|x_n\| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *şi fie* $\{f_n\} \subset E^*$ *şirul de funcţionale asociat T-bazei* $\{x_n\}$. *Dacă metoda* T *are ordinul de creştere* $\varphi(n)$, *atunci şirul* $\{\|f_n\|\}$ *nu creşte mai repede decît* $O(\varphi(n))$ (V. F. Gapoşkin [20], teorema 8).

COROLARUL 3.10. *Fie* $\{x_n\}$ *o* (C, α)-*bază*[19] *a unui spaţiu Banach* E $(\alpha \geqslant 0)$ *cu* $\|x_n\| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *şi fie* $\{f_n\} \subset E^*$ *şirul de funcţionale asociat* (C, α)-*bazei* $\{x_n\}$. *Avem atunci*

$$\|f_n\| = O(n^\alpha) \tag{3.65}$$

(V. F. Gapoşkin [20], teorema 9).

Se poate însă arăta că într-un anumit sens ordinul de creştere din corolarul 3.10 nu se mai poate micşora. Anume, pentru orice $\alpha > 0$ şi ε cu $0 < \varepsilon < \alpha$ există ([20], teorema 9) (C, α)-baze pentru care avem exact

$$\|f_n\| = O(n^{\alpha - \varepsilon}). \tag{3.66}$$

Nu pentru orice metodă de sumare T există un ordin de creştere care să fie o margine superioară pentru ordinul de creştere al lui $\{\|f_n\|\}$, cum ne arată

Exemplul 3.10. Fie E un spaţiu Banach cu bază $\{x_n\}$, avînd şirul asociat de funcţionale coeficienţi $\{f_n\} \subset E^*$. Fie

$$y_{2n-1} = x_{2n-1} + \alpha_n x_{2n} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.67}$$

$$y_{2n} = x_{2n-1} + \beta_n x_{2n} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.68}$$

unde $0 < \alpha_n < \beta_n < 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, şi fie T matricea consistentă

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{3.69}$$

---

[19] Adică o T-bază a spaţiului E pentru metoda de sumare $T = (C, \alpha)$ a lui Cesaro, de ordin α. Reamintim că o serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i$ este (C, α)-sumabilă $(\alpha \geqslant 0)$ către y, dacă şirul $\left\{\sigma_n^{(\alpha)}\right\}$ definit prin

$$\sigma_n^{(\alpha)} = \frac{1}{\binom{\alpha + n}{n}} \sum_{i=0}^{n} \binom{n - i + \alpha}{n - i} y_i$$

converge către y cînd $n \to \infty$. Menţionăm că o $(C, 1)$-bază a spaţiului E se mai numeşte şi *bază Cesaro* a lui E [70].

Atunci $\{y_n\}$ este o T-bază a lui E, cu $0 < \inf\limits_{1\leqslant n<\infty} \| y_n \| \leqslant \sup\limits_{1\leqslant n<\infty} \| y_n \| < \infty$, dar șirul de funcționale $\{g_n\} \subset E^*$ asociat *T-bazei* $\{y_n\}$ este

$$g_{2n-1} = \frac{1}{\beta_n - \alpha_n} (\beta_n f_{2n-1} - f_{2n}) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (3.70)$$

$$g_{2n} = \frac{1}{\beta_n - \alpha_n} (-\alpha_n f_{2n-1} + f_{2n}) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (3.71)$$

deci alegînd convenabil pe $\{\alpha_n\}$ și $\{\beta_n\}$, normele $\| g_n \|$ pot deveni oricît de mari [20].

Deoarece orice T-bază este un șir tare liniar independent (și fundamental), clasele particulare de șiruri tare liniar independente introduse în § 5 definesc, în mod natural, clase particulare respective de T-baze, dintre care vom utiliza (în capitolul următor) *T-bazele generatoare.* Afară de acestea, menționăm acum alte clase particulare de T-baze.

DEFINIȚIA 3.26. O T-bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește [70] *T-mărginit completă*, dacă din relațiile $\{\alpha_n\} \subset K$, $\sup\limits_{1\leqslant n<\infty} \left\| \sum\limits_{j=1}^{\infty} t_{nj} \sum\limits_{i=1}^{j} \alpha_i x_i \right\| < \infty$, rezultă că seria $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ este T-sumabilă.

Dacă, în particular, T este o matrice triunghiulară, și T_{nm} sînt definite prin (3.56), T-baza $\{x_n\}$ este T-mărginit completă dacă și numai dacă din relațiile $\{\alpha_n\} \subset K$, $\sup\limits_{1\leqslant n<\infty} \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} T_{ni}\, \alpha_i\, x_i \right\| < \infty$, rezultă că seria $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ este T-sumabilă.

DEFINIȚIA 3.27. O T-bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește *T-necondiționată*, dacă orice permutare $\{x_{\sigma(n)}\}$ a ei este de asemenea o T-bază a spațiului E.

Avem următorul caz particular al teoremei 3.22 :

TEOREMA 3.29. *Orice T-bază T-necondiționată a unui spațiu Banach E este o bază necondiționată a spațiului E* (V. F. Gapoșkin [20], teorema 12 și [21], teorema 3).

COROLARUL 3.11. *În orice spațiu Banach separabil E, pentru orice metodă de sumare T există o bază în sens larg a spațiului E, care nu este o T-bază a lui E. Cu alte cuvinte, nu există nici o metodă de sumare T „universală”* (V. F. Gapoșkin [20], teorema 13).

În legătură cu T-baza din [74], Cap. I, exemplul 1.7, are interes

COROLARUL 3.12. *Pentru orice metodă de sumare T există o permutare a sistemului trigonometric (3.3) care nu este o T-bază a spațiului* $C_{2\pi}$ (V. F. Gapoșkin [20]).

În legătură cu corolarul 3.11 de mai sus V. F. Gapoșkin [20] a pus problema următoare : există oare un spațiu Banach separabil E avînd o bază în sens larg care să nu fie o T-bază a spațiului E pentru nici o metodă de sumare T? După cum au observat V. F. Gapoșkin și M. I. Kadeț [22], răspunsul la această problemă este afirmativ, deoarece avem

PROPOZIŢIA 3.16. *Orice bază condiţionată* $\{x_n\}$ *a unui spaţiu Banach* E *are o permutare* $\{x_{\sigma(n)}\}$ *care nu este o* T*-bază pentru nici o metodă de sumare* T.

Teorema 3.21 arată că pentru bazele operatoriale o afirmaţie similară nu mai este adevărată. Aceasta constituie încă o justificare a introducerii noţiunii de bază operatorială.

§ 15. CVASIBAZE

DEFINIŢIA 3.28. Un şir $\{x_n\}$ de elemente dintr-un spaţiu Banach E se numeşte [24] *cvasibază* a spaţiului E, dacă există un şir (nu neapărat unic) de funcţionale liniare continue $\{f_n\} \subset E^*$ astfel încît să avem

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, x_i \qquad (x \in E). \tag{3.72}$$

Orice cvasibază $\{x_n\}$ a unui spaţiu Banach E este o bază aproximativă a spaţiului E (deci, în particular, un şir fundamental în E). De altă parte, orice şir $\{f_n\} \subset E^*$ cu proprietatea (3.72) este total, deci orice cvasibază este o bază în sens larg. De asemenea, orice cvasibază $\{x_n\}$ a unui spaţiu Banach E este, evident, o pseudobază (definiţia 3.3) a spaţiului E.

Problema 3.20. Există oare o cvasibază în orice spaţiu Banach separabil? Dar în orice spaţiu Banach cu pseudobază? Dar în orice spaţiu Banach cu bază operatorială? Dar în orice spaţiu Banach cu T-bază?

PROPOZIŢIA 3.17. *Fie* $\{x_n\}$ *o pseudobază a unui spaţiu Banach* E. *Fie* $\mathcal{E}_0$ *spaţiul Banach*

$$\left\{\{\alpha_n\} \subset K \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \text{ există}\right\}, \tag{3.73}$$

norma fiind definită prin $\|\{\alpha_n\}\| = \sup\limits_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|$. *Fie* G_0 *subspaţiul vectorial închis*

$$\left\{\{\alpha_n\} \subset K \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i = 0\right\} \tag{3.74}$$

al spaţiului $\mathcal{E}_0$. *Următoarele afirmaţii sînt echivalente*:

1°. $\{x_n\}$ *este o cvasibază a spaţiului* E.

2°. G_0 *este complementat în* $\mathcal{E}_0$.

(B. R. Gelbaum [24], § 3, teorema 2).

Orice bază $\{x_n\}$ a unui spaţiu Banach E este evident o cvasibază a spaţiului E. Există cvasibaze care nu sînt baze, cum ne arată

Exemplul 3.11. Fie E un spaţiu Banach cu bază $\{x_n\}$, şi fie $G \neq E$ un subspaţiu vectorial închis al lui E, complementat în E. Fie P o proiecţie lui E pe G, şi fie

$$y_n = P(x_n) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.75}$$

Atunci $\{y_n\}$ este o cvasibază a lui G, dar nu este o bază a lui G.

Problema 3.21. Există oare o bază în orice spaţiu Banach cu cvasibază? Dar o bază operatorială? Dar o T-bază?

§ 16. SCHEMA INTERDEPENDENŢEI DIVERSELOR GENERALIZĂRI ALE NOŢIUNII DE BAZĂ

Din cele ce precedă rezultă că între diversele clase de şiruri considerate în capitolul de faţă avem următoarea schemă de incluziuni stricte:

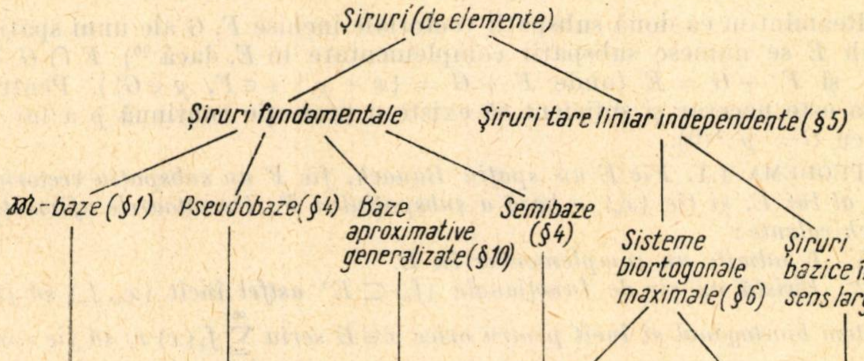

Şiruri (de elemente)
Şiruri fundamentale
Şiruri tare liniar independente (§5)
𝔐-baze (§1)
Pseudobaze (§4)
Baze aproximative generalizate (§10)
Semibaze (§4)
Sisteme biortogonale maximale (§6)
Şiruri bazice în sens larg (§5)
Baze aproximative (§10)
Şiruri tare liniar independente fundamentale (=maximale) (§7)
Baze generalizate (§8)
Şiruri bazice (§1,2)
Baze în sens larg (§9)
Baze operatoriale (§11)
Cvasibaze (§15)
Baze cu paranteze (§12)
T-baze (§13,14)
Baze (=baze slabe) (§3)

Fig. 1

Observăm însă că mulţimea tuturor claselor de şiruri de mai sus, ordonată prin incluziune, generează o latice mai cuprinzătoare decît cea dată prin diagrama de mai sus. În adevăr, de exemplu, un şir $\{x_n\}$ care este simultan o bază generalizată şi un şir bazic într-un spaţiu Banach E, nu este neapărat o bază a spaţiului E, cum ne arată şirul vectorilor unitari din spaţiul $E = m$.

CAPITOLUL IV

APLICAŢII LA STUDIUL STRUCTURII SPAŢIILOR BANACH

§ 1. BAZE ŞI SUBSPAŢII COMPLEMENTARE

Reamintim că două subspaţii vectoriale închise F, G ale unui spaţiu Banach E se numesc subspaţii complementare în E, dacă [20]) $F \cap G = \{0\}$ şi $F + G = E$ (unde $F + G = \{x + y \mid x \in F,\ y \in G\}$). Pentru aceasta este necesar şi suficient să existe o proiecţie continuă p a lui E pe F cu $G = p^{-1}(0)$.

TEOREMA 4.1. *Fie E un spaţiu Banach, fie F un subspaţiu vectorial închis al lui E, şi fie $\{x_n\}$ o bază a subspaţiului F. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

1°. *F admite un complementar în E.*

2°. *Există un şir de funcţionale $\{f_n\} \subset E^*$ astfel încît (x_n, f_n) să fie un sistem biortogonal şi încît pentru orice $x \in E$ seria $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, x_i$ să fie convergentă* (S. Karlin [45], teorema 8).

DEFINIŢIA 4.1. Fie E un spaţiu Banach cu bază şi fie F un subspaţiu vectorial închis al lui E. Se spune [76] că o bază $\{x_n\}$ a spaţiului E *trece prin subspaţiul F*, dacă ea conţine un subşir conţinut în F şi care este o bază a lui F.

TEOREMA 4.2. *Fie E un spaţiu Banach cu bază, F un subspaţiu vectorial închis al lui E, şi $\{x_n\}$ o bază a spaţiului E, care trece prin subspaţiul F. Dacă F admite un complementar G în E, atunci există o bază $\{x'_n\}$ a lui E care trece prin F şi G şi coincide pe F cu $\{x_n\}$.*

Teorema 4.2 a fost dată de V. G. Vinokurov ([76], teorema 2). Ea se mai poate obţine imediat şi dintr-o teoremă ulterioară a lui B. R. Gelbaum, pe care am dat-o în [74], Cap. I, propoziţia 1.4.

TEOREMA 4.3. *Fie E un spaţiu Banach, F un subspaţiu vectorial închis al lui E, $\{y_n\}$ o bază a subspaţiului F, şi $\{w_n\}$ o bază a spaţiului cît $E/F = \omega(E)$ (unde ω = aplicaţia canonică a lui E pe E/F). Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

1°. *F admite un complementar G în E şi G are o bază $\{z_n\}$ astfel încît şirul $\{x_n\}$ definit prin*

---

[20]) Ajunge să dăm definiţia sub această formă deoarece în cazul subspaţiilor vectoriale închise ale spaţiilor Banach complementarele algebrice sînt, după cum se ştie, şi complementare topologice.

$$x_{2n-1} = y_n, \quad x_{2n} = z_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.1}$$

este o bază a spaţiului E.

2°. *Există un şir* $\{z_n\} \subset E$ *cu proprietăţile:*

$$\omega(z_n) = w_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i z_i \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i w_i \text{ converge}. \tag{4.3}$$

3°. *Există un şir* $\{z_n\} \subset E$ *cu proprietăţile:*

a) *Şirul (4.1) este o bază a spaţiului E.*

b) *Şirul* $\{z_n\}$ *satisface* (4.2).

c) $$\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i z_i + \beta_i y_i) \text{ converge} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i z_i \text{ converge}. \tag{4.4}$$

(B. R. Gelbaum [24], § 2, teorema 2).

Problema 4.1. Fie E un spaţiu Banach cu bază şi F un subspaţiu vectorial închis cu bază al spaţiului E, care admite un complementar G în E. Are atunci subspaţiul G o bază?

Problema 4.2. Fie E un spaţiu Banach cu bază şi F un subspaţiu vectorial închis al lui E, care admite un complementar în E. Are atunci subspaţiul F o bază?

Un subspaţiu al unui spaţiu Banach se numeşte [34] *netrivial*, dacă el este infinitdimensional şi de codimensiune infinită.

Problema 4.3. Există oare în orice spaţiu Banach separabil E un subspaţiu vectorial închis netrivial complementat cu bază?

Dacă în această problemă se omite condiţia ca spaţiul E să fie separabil, răspunsul va fi negativ. În adevăr, după cum a arătat A. Grothendieck ([28], p. 169, corolarul 2), nici un subspaţiu (infinitdimensional[21]) separabil (şi prin urmare, nici un subspaţiu cu bază) al spaţiului $E = m$ nu este complementat în m.

§ 2. ŞIRURI TARE LINIAR INDEPENDENTE FUNDAMENTALE ŞI SUBSPAŢII CVASICOMPLEMENTARE

Reamintim că două subspaţii vectoriale închise F, G ale unui spaţiu Banach E se numesc [54] subspaţii cvasicomplementare în E, dacă $F \cap G = \{0\}$ şi $F + G$ este dens în E. După cum se ştie [54], orice subspaţiu vectorial închis F al unui spaţiu *separabil* E admite un cvasicomplementar G în E.

DEFINIŢIA 4.2. Fie E un spaţiu Banach separabil şi fie F un subspaţiu vectorial închis al lui E. Se spune [76] că un şir tare liniar independent fundamental $\{x_n\} \subset E$ *trece prin subspațiul* F, dacă el conține un subșir conținut în F și fundamental în F (acest subșir va fi atunci, evident, un șir tare liniar independent în F).

---

[21] În acest capitol vom menţine convenţia făcută în Cap. III: spaţiile şi subspaţiile considerate vor fi presupuse infinitdimensionale, iar şirurile considerate vor fi presupuse infinite, fără menţiune specială.

TEOREMA 4.4. *Fie* E *un spațiu Banach separabil și fie* F, G *subspații cvasicomplementare în* E. *Atunci există un șir tare liniar independent fundamental* $\{x_n\} \subset E$ *care trece prin* F *și* G (V. G. Vinokurov [76], teorema 1).

TEOREMA 4.5. *Fie* E *un spațiu Banach separabil și fie* F, G *subspații cvasicomplementare în* E. *Fie* $\{x_n\} \subset E$ *un șir tare liniar independent fundamental astfel încît* $[y_n] = F$, $[z_n] = G$, *unde*

$$y_n = x_{2n-1},\ z_n = x_{2n} \quad (n = 1, 2, \ldots)\ ^{22}). \tag{4.5}$$

Fie $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\} \subset K$ *două șiruri de scalari cu proprietatea*

$$|\alpha_n| + |\beta_n| > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4.6}$$

și fie

$$R(\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}) = [\alpha_n y_n + \beta_n z_n]. \tag{4.7}$$

a) *Dacă* $\beta_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *atunci* F *și* $R(\{\alpha_n\}, \{\beta_n\})$ *sînt cvasicomplementare în* E.

b) *Dacă* $\alpha_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *atunci* G *și* $R(\{\alpha_n\}, \{\beta_n\})$ *sînt cvasicomplementare în* E.

c) *Dacă* F *și* G *sînt subspații complementare în* E *și* $\beta_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *atunci pentru ca* F *și* $R(\{\alpha_n\}, \{\beta_n\})$ *să fie complementare în* E, *este necesar și suficient să existe o aplicație liniară continuă a lui* G *în* F, *care transformă* $\{\beta_n y_n\}$ *în* $\{\alpha_n x_n\}$.

d) *Dacă* F *și* G *sînt subspații complementare în* E *și* $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *atunci pentru ca* $R(\{\alpha_n\}, \{\beta_n\})$ *să fie complementar direct atît al lui* F *cît și al lui* G, *este necesar și suficient să existe un izomorfism al lui* G *pe* F *care transformă* $\{\beta_n y_n\}$ *în* $\{\alpha_n x_n\}$ (V. G. Vinokurov [76], teorema 3).

COROLARUL 4.1. *Fie* E *un spațiu Banach separabil și fie* F, G *subspații vectoriale închise ale lui* E, *astfel încît* $F \cap G = \{0\}$. *Dacă subspațiul* F *este infinitdimensional, atunci există un cvasicomplementar* G_1 *al lui* F *astfel încît* $G_1 \cap G = \{0\}$ (V. G. Vinokurov [76], teorema 5).

Folosind teoremele 3.15 și 3.9 din Cap. III, se obține

PROPOZIȚIA 4.1. *Fie* F, G *două subspații vectoriale închise netriviale ale unui spațiu Banach separabil* E, *astfel încît* $F \supset G$. *Atunci*

a) *Pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un subspațiu vectorial închis* $\widetilde{G}$ *al lui* E, ε*-izometric cu* G *și cvasicomplementar lui* F.

b) *Pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un subspațiu vectorial închis* $\widetilde{F}$ *al lui* E, ε*-izometric cu* F *și cvasicomplementar lui* G (V. I. Gurarii și M. I. Kadeț [34], teorema 4).

Luînd, în particular, $G = F$, se obține

---

[22] Un asemenea șir $\{x_n\}$ există în virtutea teoremei 4.4.

COROLARUL 4.2. *Fie F un subspaţiu vectorial închis netrivial al unui spaţiu Banach separabil E. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un subspaţiu vectorial închis $\tilde{F}$ al lui E, ε-izometric cu F şi cvasicomplementar lui F* (V. I. Gurarii şi M. I. Kadeţ [34], corolarul 1).

Din propoziţia 4.1 şi din Cap. III, teorema 3.1, se obţine

TEOREMA 4.6. *Într-un spaţiu Banach separabil E orice subspaţiu vectorial închis F are un cvasicomplementar cu bază* (V. I. Gurarii şi M. I. Kadeţ [34], teorema 5).

Reamintim că se numeşte *suma cvasidirectă* a două subspaţii F, G ale unui spaţiu Banach E subspaţiul vectorial închis al lui E generat de $F + G = \{x + y \mid x \in F,\ y \in G\}$.

Din teoremele 4.6 şi 3.1 rezultă

COROLARUL 4.3. *Orice spaţiu Banach separabil E se poate reprezenta ca suma cvasidirectă a două subspaţii cu bază* (V. I. Gurarii şi M. I. Kadeţ [34], corolarul 2).

§ 3. BAZE ŞI SPAŢII ADJUNCTE

Reamintim că un spaţiu Banach E este numit *canonic izomorf* (respectiv *canonic echivalent*) *cu un spaţiu adjunct*, dacă există un subspaţiu vectorial închis V al spaţiului adjunct E^* astfel încît E şi V^* să fie canonic izomorfe (respectiv canonic echivalente), adică astfel încît aplicaţia canonică φ a lui E în spaţiul adjunct V^*, definită pentru orice $x \in E$ prin

$$[\varphi(x)](f) = f(x) \qquad (f \in V), \qquad (4.8)$$

să fie un izomorfism (respectiv un izomorfism izometric) al lui E pe întreg V^*.

Din [74], Cap. II, teorema 2.4 (echivalenţa 1° ⇔ 5°) rezultă

TEOREMA 4.7. *Fie E un spaţiu Banach cu bază $\{x_n\}$ şi fie $\{f_n\} \subset E^*$ şirul de funcţionale coeficienţi asociat bazei $\{x_n\}$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

1°. *E este canonic izomorf cu $[f_n]^*$.*

2°. *Baza $\{x_n\}$ este mărginit completă.*

Dacă baza $\{x_n\}$ este monotonă, aceste afirmatii sînt echivalente cu următoarea:

3°. *E este canonic echivalent cu $[f_n]^*$.*

Alte afirmaţii echivalente se pot adăuga în baza teoremei 2.4 din [74], Cap. II.

Implicaţia 2° ⇒ 1° a fost demonstrată de S. Karlin ([45], teorema 10), iar implicaţia 3° ⇒ 1° de M. M. Day ([14], Cap. IV, § 3, lema 2). Implicaţiile 1° ⇒ 2° şi 1° ⇒ 3° au fost date în [72] ([72], teorema 5).

Afirmaţia 1° implică, evident:

4°. *E este canonic izomorf cu un spaţiu adjunct.*

Implicaţia reciprocă 4° ⇒ 1° nu este însă adevărată, cum ne arată

Exemplul 4.1. Fie J spaţiul Banach din [74], Cap. II, exemplul 2.3, adică spaţiul tuturor şirurilor de scalari $\{\alpha_n\} \subset K$ pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ şi

$$\|\{\alpha_n\}\| = \sup\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_{p_{2i-1}} - \alpha_{p_{2i}}\right)^2 + \left(\alpha_{p_{2n+1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \infty, \qquad (4.9)$$

unde sup se ia peste toate numerele întregi pozitive n și toate șirurile crescătoare finite de numere întregi pozitive $p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}$. Atunci spațiul J are proprietatea 4° de mai sus, dar șirul $\{x_n\}$ definit prin

$$x_n = \{\delta_{nj}\}_{j=1}^{\infty} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (4.10)$$

este o bază a spațiului J, care nu este mărginit completă.

Cum vom vedea în teorema 4.9, implicația 4° ⇒ 1° de mai sus are loc în cazul cînd $\{x_n\}$ este o bază necondiționată a spațiului E.

TEOREMA 4.8. *Fie E un spațiu Banach cu bază mărginit completă monotonă $\{x_n\}$. Atunci există un spațiu Banach B cu bază generatoare și un spațiu Banach E_1 echivalent cu spațiul E, astfel încît* [23])

$$B^{**} = \pi(B) \oplus E_1, \qquad (4.11)$$

$$\|y + z\| \geqslant \|z\| \qquad (y \in \pi(B),\ z \in E_1) \qquad (4.12)$$

(R. C. James [38], teorema 1).

COROLARUL 4.4. *Pentru orice număr întreg pozitiv n există un spațiu Banach B_n astfel, încît al n-lea spațiu adjunct al lui B_n este primul adjunct neseparabil al lui B_n* (R. C. James [38], teorema 2).

Observăm că există spații Banach separabile ale căror spații adjuncte de orice ordin sînt toate separabile (de pildă spațiul J din exemplul 4.1).

§ 4. BAZE NECONDIȚIONATE ȘI SPAȚII ADJUNCTE. BAZE CONDIȚIONATE ȘI SPAȚII ADJUNCTE

Rezultatele din paragraful precedent sînt valabile și în cazul cînd spațiul E are o bază necondiționată, dar în acest caz avem și o serie de alte rezultate.

PROPOZIȚIA 4.2. *Dacă spațiul adjunct E^* (al unui spațiu Banach E) conține un subspațiu izomorf cu spațiul c_0, atunci el conține și un subspațiu izomorf cu spațiul m (și, prin urmare, este neseparabil).*

Propoziția 4.2 a fost demonstrată de C. Bessaga și A. Pełczyński ([6], teorema 4). O demonstrație foarte simplă a fost dată, ulterior, de R. C. James ([38], p. 570—571). Propoziția 4.2 se folosește în demonstrația teoremei următoare :

TEOREMA 4.9. *Fie E un spațiu Banach cu bază necondiționată $\{x_n\}$ și fie $\{f_n\} \subset E^*$ șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

1°. *E este canonic izomorf cu $[f_n]^*$.*

2°. *E este canonic izomorf cu un spațiu adjunct.*

3°. *E este izomorf cu un spațiu adjunct.*

4°. *Baza $\{x_n\}$ este mărginit completă.*

---

[23]) Reamintim că prin π notăm aplicația canonică a lui B în B^{**}.

5°. *E nu conţine nici un subspaţiu izomorf cu* c_0.

6°. *E este secvenţial slab complet.*

Dacă există o permutare $\{x_{\sigma(n)}\}$ *a bazei* $\{x_n\}$ *care să fie o bază monotonă, aceste afirmaţii sînt echivalente cu următoarele :*

7°. *E este canonic echivalent cu* $[f_n]^*$.

8°. *E este canonic echivalent cu un spaţiu adjunct.*

9°. *E este echivalent cu un spaţiu adjunct.*

Teorema 4.9 a fost demonstrată în [66] şi [67], teoremele 1 şi 2. O parte din implicaţiile din teorema 4.9 au fost date de S. Karlin [45], R. C. James [35] şi M. M. Day [14]. În a doua parte a teoremei 4.9, ipoteza că există o permutare monotonă $\{x_{\sigma(n)}\}$ a bazei $\{x_n\}$ este esenţială, cum ne arată

Exemplul 4.2. Fie E hiperplanul închis din spaţiul l definit prin

$$E = \{x = \{\xi_n\} \in l \,\Big|\, \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j+1}\, \xi_j = 0\}. \tag{4.13}$$

Atunci E are o bază necondiţionată $\{x_n\}$ şi cuplul $(E, \{x_n\})$ satisface 1°—6° din teorema 4.9, dar nu satisface 7°—9° din teorema 4.9 (oricum am lua baza necondiţionată $\{x_n\}$ a lui E).

Alte afirmaţii echivalente cu cele din teorema 4.9 se obţin din

PROPOZIŢIA 4.3. *Fie E un spaţiu Banach. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

1°. *E nu conţine nici un subspaţiu izomorf cu* c_0.

2°. *Pentru orice serie slab necondiţionat Cauchy* $\sum_{i=1}^{\infty} z_i$ *din E avem* $\inf_{1 \leqslant n < \infty} \| z_n \| = 0$.

3°. *Orice serie slab necondiţionat Cauchy* $\sum_{i=1}^{\infty} z_i$ *din E este necondiţionat convergentă (în sensul normei).*

4°. *Orice serie slab necondiţionat Cauchy* $\sum_{i=1}^{\infty} z_i$ *din E este slab convergentă către un element din E.*

5°. *Dacă Q este un spaţiu metric compact infinit, orice aplicaţie liniară continuă a spaţiului Banach C (Q) în E este slab compactă.*

6°. *Dacă F este un spaţiu Banach, orice aplicaţie liniară continuă a spaţiului Banach* $(c_0)_F$ *(al tuturor şirurilor* $\{y_n\} \subset F$ *cu* $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$, $\|\{y_n\}\| = \sup_{1 \leqslant n < \infty} \| y_n \|$*) în E este slab compactă.*

Echivalenţele 1° ⟺ 2° ⟺ 3° au fost demonstrate de C. Bessaga şi A. Pelczyński ([6], teorema 5). Echivalenţa 1° ⟺ 4° a fost remarcată în [19], p. 742. Echivalenţa 1° ⟺ 5° aparţine lui A. Pelczyński ([58], corolarul 1), iar implicaţia 1° ⇒ 6° a fost demonstrată în [19], p. 745.

Vom da acum cîteva aplicaţii ale teoremei 4.9.

Implicaţia 3° ⇒ 4° din teorema 4.9 dă un răspuns afirmativ la o problemă pusă de R. C. James [35].

De altă parte, J. Dixmier [17] a pus problema dacă pentru un spaţiu Banach arbitrar E avem oare implicaţia 3° ⇒ 8° din teorema 4.9?

Deşi V. Klee [46] a arătat că răspunsul este negativ pentru E = un izomorf convenabil al spaţiului m, teorema 4.9 arată un caz particular important în care răspunsul este afirmativ.

Din teorema 4.9 rezultă următorul răspuns parţial la problema lui S. Karlin pe care am menţionat-o în [74] ([74], Cap. I, problema 1.6) :

COROLARUL 4.5. *Dacă spaţiul adjunct E^* are o bază necondiţionată $\{x_n\}$, atunci E^* este canonic izomorf cu spaţiul adjunct B^* al unui spaţiu Banach B cu bază necondiţionată. Dacă baza $\{x_n\}$ are o permutare $\{x_{\sigma(n)}\}$ care este o bază monotonă, E^* este canonic echivalent cu B^*.*

Corolarul 4.5 a fost dat în [66], [67].

COROLARUL 4.6. *Dacă un spaţiu Banach E are o bază necondiţionată mărginit completă (respectiv non-mărginit completă), atunci orice altă bază necondiţionată a spaţiului E este de asemenea mărginit completă (respectiv non-mărginit completă).*

Deoarece spaţiul L^1 ([0,1]) satisface 6° din teorema 4.9, dar nu satisface 3° din teorema 4.9, avem

COROLARUL 4.7. *Spaţiul $L^1([0,1])$ nu are nici o bază necondiţionată.*

Corolarul 4.7 a fost obţinut, independent, în [66] şi în lucrarea lui A. Pelczyński [58] ([58], propoziţia 9).

Deoarece spaţiul J (din exemplul 4.1) satisface 5° din teorema 4.9, dar nu satisface 6° din teorema 4.9, avem

COROLARUL 4.8. *Spaţiul J nu are nici o bază necondiţionată* (R. C. James [35], p. 523).

Pentru un spaţiu Banach cu bază condiţionată $\{x_n\}$ o mare parte din implicaţiile din teorema 4.9 nu mai sînt adevărate, cum ne arată

PROPOZIŢIA 4.4. *Fie E un spaţiu Banach cu bază condiţionată $\{x_n\}$. Avem atunci implicaţiile din tabelul 1 (unde numerele se referă la afirmaţiile respective din teorema 4.9)* :

Tabelul 1

⇒	1°	2°	3°	4°	5°	6°
1°	+	+	+	+	+	— J^*
2°	— J	+	+	— J	+	— J
3°	— J	+	+	— J	+	— J
4°	+	+	+	+	+	— J^*
5°	— L^1	— L^1	— L^1	— J	+	— J
6°	— L^1	— L^1	— L^1	— L^1	+	+

Aici semnul + (respectiv —) înseamnă că implicaţia este (respectiv nu este) adevărată. În dreptul semnelor am trecut şi spaţiile care furnizează contraexemplele dorite (desigur, sînt posibile şi alte contraexemple), luate cu bazele lor naturale (în J^* se ia baza formată din şirul de funcţionale coeficienţi asociat bazei (4.10) a lui J).

TEOREMA 4.10. *Fie E un spaţiu Banach cu bază necondiţionată $\{x_n\}$, şi fie $\{f_n\} \subset E^\star$ şirul de funcţionale coeficienţi asociat bazei $\{x_n\}$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

1°. *Spaţiul adjunct $E^\star$ este separabil.*
2°. *Spaţiul adjunct $E^\star$ este secvenţial slab complet.*
3°. *Baza $\{x_n\}$ este generatoare.*
4°. *$\{f_n\}$ este un şir fundamental în spaţiul $E^\star$.*
5°. *$\{f_n\}$ este o bază a spaţiului $E^\star$.*
6°. *$\{f_n\}$ este o bază mărginit completă a spaţiului $E^\star$.*
7°. *$\{f_n\}$ este o bază necondiţionată a spaţiului $E^\star$.*
8°. *E nu conţine nici un subspaţiu izomorf cu l.*
9°. *E nu conţine nici un subspaţiu complementat*[24] *izomorf cu l.*
10°. *Orice mulţime mărginită din E este condiţionat slab secvenţial compactă*[25].

Echivalenţele 1° $\Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow$ 8° se află în monografia lui M. M. Day ([14], Cap. IV, § 4, teorema 5). O parte din aceste implicaţii au fost date de S. Karlin [45] şi R. C. James [35]. Echivalenţa 8° $\Leftrightarrow$ 9° a fost dată de R. C. James ([36], demonstraţia teoremei 2). În sfîrşit, echivalenţa 8° $\Leftrightarrow$ 10° este conţinută implicit în lucrarea [35] a lui R. C. James. Alte afirmaţii echivalente cu cele din teorema 4.10 se obţin din

PROPOZIŢIA 4.5. *Fie E un spaţiu Banach. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

1°. *E nu conţine nici un subspaţiu complementat izomorf cu l.*
2°. *$E^\star$ nu conţine nici un subspaţiu izomorf cu c_0.*
3°. *$E^\star$ nu conţine nici un subspaţiu izomorf cu m.*
4°. *Nu există nici o aplicaţie liniară continuă a lui E pe l.*
5°. *E nu are nici un spaţiu cît izomorf cu l.*

Echivalenţele 1° $\Leftrightarrow$ 2° $\Leftrightarrow$ 3° au fost date de C. Bessaga şi A. Pelczyński ([6], teorema 4 ; implicaţia 2° $\Rightarrow$ 3° nu este altceva decît propoziţia 4.2 din paragraful precedent). Echivalenţele 1° $\Leftrightarrow$ 4° $\Leftrightarrow$ 5° sînt binecunoscute, ele se află de exemplu în [31], [4].

Din teorema 4.10 rezultă

COROLARUL 4.9. *Dacă un spaţiu Banach E are o bază necondiţionată generatoare (respectiv non-generatoare), atunci orice altă bază necondiţionată a spaţiului E este de asemenea generatoare (respectiv non-generatoare).*

Deoarece spaţiul C ([0,1]) satisface 2° din teorema 4.10, dar nu satisface 1° din teorema 4.10, avem

COROLARUL 4.10. *Spaţiul C ([0,1]) nu are nici o bază necondiţionată.*

Corolarul 4.10 a fost obţinut de S. Karlin ([45], teorema 14) şi a constituit primul exemplu de spaţiu separabil care nu are nici o bază necondiţionată. În mod similar se obţine şi următorul rezultat mai general : *Dacă Q este un spaţiu compact nenumărabil, spaţiul Banach C (Q) nu are nici o bază necondiţionată.* Mai mult, Z. Semadeni a observat [64], în baza unui rezultat al lui C. Bessaga şi A. Pelczyński [11], *că orice spaţiu* $C(Q)$ *care are o bază necondiţionată, este izomorf cu spaţiul* c_0.

---

[24] Se numeşte subspaţiu complementat al lui E orice subspaţiu care admite un complementar în E.

[25] Adică : orice şir de elemente dintr-o mulţime mărginită $A \subset E$ conţine un subşir Cauchy pentru topologia slabă $\sigma(E, E^\star)$.

Din teorema 4.10 se poate regăsi şi corolarul 4.8, deoarece spaţiul J satisface 1° dar nu satisface 2°.

Pentru un spaţiu Banach cu bază condiţionată $\{x_n\}$ o mare parte din implicaţiile din teorema 4.10 nu mai sînt adevărate, cum ne arată

PROPOZIŢIA 4.6. *Fie* E *un spaţiu Banach cu bază condiţionată* $\{x_n\}$. *Avem atunci implicaţiile din tabelul 2* (*unde numerele se referă la afirmaţiile respective din teorema 4.10*) :

Tabelul 2

⇒	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
1°	+	$-\ J$	$-\ J^\star$	$-\ J^\star$	$-\ J^\star$	$-\ J^\star$	$-\ J$	+	+	+
2°	$-\ C$	+	$-\ C$	$-\ C$	$-\ C$	$-\ C$	$-\ C$	$-\ C$	+	$-\ C$
3°	+	$-\ J$	+	+	+	+	$-\ J$	+	+	+
4°	+	$-\ J$	+	+	+	+	$-\ J$	+	+	+
5°	+	$-\ J$	+	+	+	+	$-\ J$	+	+	+
6°	+	$-\ J$	+	+	+	+	$-\ J$	+	+	+
7°	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
8°	?	$-\ J$	$-\ J^\star$	$-\ J^\star$	$-\ J^\star$	$-\ J^\star$	$-\ J$	+	$-\ C$	?
9°	$-\ C$	$-\ J$	$-\ J^\star$	$-\ J^\star$	$-\ J^\star$	$-\ J^\star$	$-\ J$	+	+	$-\ C$
10°	?	$-\ J$	$-\ J^\star$	$-\ J^\star$	$-\ J^\star$	$-\ J^\star$	$-\ J$	+	+	+

Aici semnele $+$, $-$, J şi $J^\star$ au aceeaşi semnificaţie ca în propoziţia 4.4, iar C notează spaţiul $C([0,1])$ cu o bază arbitrară. Semnul × înseamnă că în ipotezele date proprietatea 7° nu poate avea loc. Rubricile cu semn de întrebare ne dau

Problema 4.4. Fie E un spaţiu Banach cu bază condiţionată $\{x_n\}$. Sînt oare echivalente următoarele afirmaţii :

1°. Spaţiul adjunct $E^\star$ este separabil.

8°. E nu conţine nici un subspaţiu izomorf cu l.

10°. Orice mulţime mărginită din E este condiţionat slab secvenţial compactă ?

Această problemă a fost pusă de C. Bessaga şi A. Pelczyński ([7], problema 5.4), *în ipoteza mai generală că spaţiul* E *este separabil* [26]). Din tabelul 2 avem 1° ⇒ 10° ⇒ 8°, deci problema revine la valabilitatea celorlalte implicaţii.

---

[26]) Problema implicaţiei 10° ⇒ 1° a fost pusă de S. Banach ([2], p. 243) în ipoteza şi mai generală că E este un spaţiu Banach arbitrar. Un răspuns negativ la această problemă generală rezultă din teorema clasică a lui W. F. Eberlein [18] (orice spaţiu reflexiv neseparabil satisface 10°, dar nu satisface 1°).

Pentru problema omeomorfismului spaţiilor Banach separabile infinitdimensionale (a se vedea Cap. III, § 2, observaţia făcută la problema 3.3), au interes şi problemele următoare :

Problema 4.5. Fie E un spaţiu Banach avînd una oarecare din următoarele proprietăţi :

a) nici un subspaţiu infinitdimensional F al lui E nu este slab complet ;

b) nici un subspaţiu infinitdimensional F al lui E nu este izomorf cu un spaţiu adjunct ;

c) nici un şir bazic $\{x_n\}$ din E nu este mărginit complet.

Conţine oare atunci E un subspaţiu izomorf cu c_0?

Problema 4.6. Fie E un spaţiu Banach cu proprietatea că nici un subspaţiu infinitdimensional F al lui E nu are dualul F^* separabil. Conţine oare atunci E un subspaţiu izomorf cu l?

Problema 4.7. Fie F un spaţiu Banach cu proprietatea că nici un subspaţiu infinitdimensional F al lui E nu este reflexiv. Conţine oare atunci E sau un subspaţiu izomorf cu c_0 sau un subspaţiu izomorf cu l?

În cazul cînd E conţine un şir bazic necondiţionat, răspunsul la problemele de mai sus este afirmativ. Prin urmare, dacă răspunsul la problema 3.3 ar fi afirmativ, răspunsul la problemele 4.5, 4.6 şi 4.7 ar fi de asemenea afirmativ.

Rezultatele din acest paragraf permit diverse formulări echivalente ale problemelor 4.5, 4.6 şi 4.7.

§ 5. PROPRIETĂŢI ALE SUBSPAŢIILOR SPAŢIILOR BANACH CU BAZĂ NECONDIŢIONATĂ

În acest paragraf ne vom ocupa de generalizări ale unor rezultate din paragraful precedent la cazul cînd E este un subspaţiu vectorial închis al unui spaţiu Banach cu bază necondiţionată.

TEOREMA 4.11. *Fie E un subspaţiu vectorial închis al unui spaţiu Banach B cu bază necondiţionată $\{x_n\}$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

1°. *E nu conţine nici un subspaţiu izomorf cu c^0.*

2°. *E este secvenţial slab complet.*

TEOREMA 4.11 a fost demonstrată de C. Bessaga şi A. Pelczyński ([5], teorema 2 şi [7], teorema 2). Alte condiţii echivalente se obţin din propoziţia 4.3.

Problema 4.8. În condiţiile teoremei 4.11, sînt oare afirmaţiile 1°, 2° din teorema 4.11 echivalente cu afirmaţia următoare :

3°. *E este canonic izomorf cu un spaţiu adjunct?* [27])

---

[27]) Se ştie [65] că 3° are loc dacă şi numai dacă E este izomorf cu un spaţiu adjunct.

Problema 4.8 a fost pusă în [66]. Avem, evident, implicațiile 3°⇒1°⇒ ⇒ 2°. Implicația 3° ⇒ 2° a fost remarcată de C. Bessaga și A. Pelczyński ([7], corolarul 4).

Se pune, în mod natural, problema dacă în condițiile teoremei 4.11 afirmațiile 1°, 2° din teorema 4.11 sînt oare echivalente cu afirmația următoare :

4°. *E este canonic izomorf cu $[f_n|_E]^*$, unde $\{f_n\} \subset B^*$ este șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$?*

Răspunsul la această problemă este negativ, cum ne arată

Exemplul 4.3. Fie $B = l = c_0^*$, $\{x_n\} =$ baza naturală a lui l, și E un subspațiu vectorial închis al lui l cu $r(E) > 0$. Atunci E satisface 2° din teorema 4.11, dar nu satisface 4° de mai sus [72].

De asemenea, ținînd seama de teorema 4.9, este natural să se pună problema dacă în condițiile teoremei 4.11 și în ipoteza suplimentară că $\{x_n\}$ are o permutare $\{x_{\sigma(n)}\}$ care este o bază monotonă a lui B, sînt oare afirmațiile 1°, 2° din teorema 4.11 echivalente cu afirmația următoare :

5°. *E este canonic echivalent cu un spațiu adjunct?* [28])

Răspunsul la această problemă este negativ, cum ne arată

Exemplul 4.4. Fie $B = l$, $\{x_n\}$ baza naturală a lui B și E subspațiul lui B definit prin (4.13). Atunci $\{x_n\}$ este monotonă și E satisface 1°, 2° din teorema 4.11, dar E nu satisface 5° de mai sus [72].

Deși nu se cunoaște răspunsul la problema 4.8, avem următoarea generalizare a corolarului 4.7 :

PROPOZIȚIA 4.7. *Spațiul L^1 ([0,1]) nu este izomorf cu nici un subspațiu al unui spațiu Banach cu bază necondiționată* (A. Pelczyński [59]).

Deoarece spațiul J satisface 1° din teorema 4.11, dar nu satisface 2° din teorema 4.11, avem

COROLARUL 4.11. *Spațiul J nu este izomorf cu nici un subspațiu al unui spațiu Banach cu bază necondiționată* (C. Bessaga și A. Pelczyński [7], corolarul 2).

Tot exemplul spațiului J ne arată că pentru un subspațiu E al unui spațiu Banach cu bază condiționată, sau, ceea ce este echivalent[29]), *pentru un spațiu E separabil, implicația 1° ⇒ 2° din* teorema 4.11 nu mai este adevărată (de altă parte, implicația 2° ⇒ 1° rămîne, evident, adevărată).

TEOREMA 4.12. *Fie E un subspațiu vectorial închis al unui spațiu Banach B cu bază necondiționată $\{x_n\}$ și fie $\{f_n\} \subset B^*$ șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

1°. *Spațiul adjunct E^* este separabil.*

2°. *Spațiul adjunct E^* este secvențial slab complet.*

3°. *Orice element $g \in E^*$ se poate reprezenta (în sensul convergenței în normă) sub forma*

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i|_E. \tag{4.14}$$

---

[28]) Se știe [65] că 4° are loc dacă și numai dacă E este echivalent cu un spațiu adjunct.

[29]) Deoarece un spațiu este separabil dacă și numai dacă el este echivalent cu un subspațiu al lui $C([0,1])$.

4°. *E nu conţine nici un subspaţiu izomorf cu l.*

5°. *E nu conţine nici un subspaţiu complementat izomorf cu l.*

6°. *Orice mulţime mărginită din E este condiţionat slab secvenţial compactă.*

Teorema 4.12 a fost demonstrată de C. Bessaga şi A. Pelczyński ([5], teorema 1 şi [7], teorema 1). Alte condiţii echivalente rezultă din propoziţia 4.5.

Deoarece spaţiul $C([0,1])$ satisface 2°, dar nu satisface 1°, avem

COROLARUL 4.12. *Spaţiul $C([0,1])$ nu este izomorf cu nici un subspaţiu al unui spaţiu Banach cu bază necondiţionată.*

Corolarul 4.12 a fost dat de C. Bessaga şi A. Pelczyński ([7], corolarul 3).

Problema 4.9. Există oare un spaţiu Banach E care nu are nici o bază necondiţionată, dar care este un subspaţiu al unui spaţiu Banach cu bază necondiţionată?

Problema 4.9 a fost pusă de C. Bessaga şi A. Pelczyński ([7], problema 5.3). Ei au conjecturat că răspunsul este afirmativ [7] şi anume că proprietăţile cerute le are spaţiul E construit în

Exemplul 4.5. Fie J_{2n+1} spaţiul $(2n+1)$-dimensional în care norma este definită prin

$$\|\{\alpha_j\}_{j=1}^{2n+1}\|_n = \sup_{l\leqslant n} \sup_{p_1<\cdots<p2l+1} \left[\sum_{i=1}^{l} (\alpha_{p_{2i}} - \alpha_{p_{2i-1}})^2 - \alpha_{p2l_1+}^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.15)$$

şi fie $E = (J_3 \times J_5 \times \ldots)_{l^2}$, adică spaţiul tuturor şirurilor $x = \{y_n\}$, $y_n \in J_{2n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, cu proprietatea

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_n^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \qquad (4.16)$$

în care norma este definită prin (4.16). Atunci E poate fi scufundat izomorf în spaţiul Banach $B = (c_0 \times c_0 \times \ldots)_{l^2}$ care are o bază necondiţionată şi se conjecturează [7] că spaţiul E nu are nici o bază necondiţionată.

Pentru un subspaţiu E al unui spaţiu Banach B cu bază condiţionată $\{x_n\}$ (sau, ceea ce este echivalent, pentru un spaţiu E separabil) o mare parte din implicaţiile din teorema 4.12 nu mai sînt adevărate. Anume, în acest caz, rămîne valabil tabelul de implicaţii din propoziţia 4.6 (tabelul 2, cu modificările corespunzătoare evidente), cu excepţia coloanei 3°, pentru care nu cunoaştem situaţia (ştim numai că $2° \not\Rightarrow 3°$).

§ 6. BAZE ŞI SPAŢII CVASIREFLEXIVE

Reamintim că un spaţiu Banach E se numeşte *cvasireflexiv* (*de ordin n*) dacă spaţiul $E^{**}/\pi(E)$ este de dimensiune finită (de dimensiune n), unde π notează aplicaţia canonică a lui E în E^{**}. Spaţiul J din exemplul 4.1 este cvasireflexiv de ordin 1. Un spaţiu E este reflexiv dacă şi numai dacă el este cvasireflexiv de ordin 0.

TEOREMA 4.13. *Un spaţiu Banach E cu o bază $\{x_j\}$ este cvasireflexiv de ordin n dacă şi numai dacă există un număr întreg k cu $0 \leqslant k \leqslant n$, astfel încît baza $\{x_j\}$ să fie $(n - k)$-mărginit completă şi k-generatoare* ([75], teorema 3).

COROLARUL 4.13. *Un spaţiu Banach E cu o bază $\{x_j\}$ este cvasireflexiv dacă şi numai dacă există numere întregi nenegative k_1, k_2 astfel încît baza $\{x_j\}$ să fie k_1-mărginit completă şi k_2-generatoare. În acest caz E este cvasireflexiv de ordin $n = k_1 + k_2$* ([75], corolarul 3).

În cazul particular $n = 0$, teorema 4.13 a fost dată de R. C. James ([35], teorema 1). În acest caz particular, ea are forma următoare :

COROLARUL 4.14. *Un spaţiu Banach E cu o bază $\{x_j\}$ este reflexiv dacă şi numai dacă baza $\{x_j\}$ este mărginit completă şi generatoare* (R. C. James [35], teorema 1).

Din acest corolar rezultă imediat

COROLARUL 4. 15. *Dacă un spaţiu Banach E are o bază generatoare şi mărginit completă (respectiv o bază care nu posedă una din aceste două proprietăţi), atunci orice altă bază a spaţiului E este de asemenea generatoare şi mărginit completă (respectiv lipsită de cel puţin una din aceste proprietăţi).*

În cazul particular $n = 1$, din partea de necesitate a teoremei 4.13 şi din corolarul 4.14 rezultă

COROLARUL 4.16. *Dacă E este un spaţiu Banach cu bază, cvasireflexiv de ordin 1, atunci orice bază a lui E este sau mărginit completă, sau generatoare, dar nici o bază a lui E nu este simultan mărginit completă şi generatoare* (Y. Cuttle [12], teorema 3.6).

Numărul k din teorema 4.13 este, evident, univoc determinat de baza $\{x_j\}$. El depinde însă de baza $\{x_j\}$, cum ne arată

Exemplul 4.6. Fie $E = J$ spaţiul cvasireflexiv de ordin 1 din exemplul 4.1. Atunci baza naturală (4.10) a lui E este 0-generatoare şi 1-mărginit completă, iar şirul $\{y_m\} \subset E$ definit prin

$$y_m = \sum_{j=1}^{m} x_j \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{4.17}$$

(unde $\{x_j\}$ este baza (4.10)), este o bază 1-generatoare şi 0-mărginit completă a spaţiului E [75].

Din partea de necesitate a teoremei 4.13 rezultă şi

COROLARUL 4.17. *Fie E un spaţiu Banach cvasireflexiv de ordin n. Atunci pentru orice şir bazic $\{z_j\}$ din E există numere întregi nenegative k_1, k_2 cu $k_1 + k_2 \leqslant n$ astfel încît $\{z_j\}$ este o bază k_1-mărginit completă şi k_2-generatoare a lui* $[z_j]$ ([75], corolarul 2).

Observăm că pentru şiruri bazice necondiţionate avem totdeauna $k_1 = k_2 = 0$ [75]. De altă parte, în orice spaţiu Banach cvasireflexiv există şiruri bazice simultan 0-mărginit complete şi 0-generatoare [75] (fapt care implică şi propoziţia 3.1 din Cap. III).

Avem următoarea teoremă de dualitate :

TEOREMA 4.14. *Fie E un spaţiu Banach cvasireflexiv de ordin n, şi fie k un număr întreg astfel încît $0 \leqslant k \leqslant n$. Atunci*

a) *E are o bază k-mărginit completă dacă şi numai dacă E^* are o bază k-generatoare.*

b) *E are o bază k-generatoare dacă şi numai dacă E^* are o bază k-mărginit completă.*

c) *E are o bază dacă şi numai dacă E^* are o bază.*

Teorema 4.14 a fost dată în lucrarea [75] ([75], teorema 5). Cazul particular $k = 0$ a fost dat în [73]. În cazul particular $k = 0$, partea de necesitate din b) şi partea de suficienţă din c) au fost date de Y. Cuttle ([12], teoremele 3.3 şi 3.5). Acest din urmă rezultat arată un caz important în care răspunsul la problema lui S. Karlin pe care am menţionat-o în [74], Cap. I, problema 1.6, este afirmativ.

DEFINIŢIA 4.3. Fie E un spaţiu Banach cvasireflexiv de ordin n, cu o bază $\{x_j\}$, fie F un subspaţiu n-dimensional al lui E^{**}, astfel încît $E^{**} = \pi(E) \oplus F$, şi fie $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ o bază arbitrară a lui F. Orice bază a lui E^{**} de forma

$$\{\Phi_k\}_{k=1}^{n} \cup \{\pi(x_j)\}_{j=1}^{\infty} \tag{4.18}$$

se numeşte [12] *bază ataşată lui* $\{x_n\}$.

Evident, toate bazele ataşate lui $\{x_n\}$ sînt echivalente.

PROPOZIŢIA 4.8. *Fie E un spaţiu Banach cvasireflexiv cu bază $\{x_j\}$. Atunci, pentru ca baza $\{x_j\}$ să fie k-mărginit completă (respectiv k-generatoare) este necesar şi suficient ca toate bazele lui E^{**}, ataşate lui $\{x_j\}$, să fie k-mărginit complete (respectiv k-generatoare).*

Cazul particular $k = 0$ a fost dat de Y. Cuttle ([12], teorema 3.1).

§ 7. BAZE NECONDIŢIONATE ŞI SPAŢII REFLEXIVE

TEOREMA 4.15. *Fie E un spaţiu Banach cu bază necondiţionată $\{x_n\}$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

1°. *E este reflexiv.*

2°. *E (sau, respectiv, $\{x_n\}$) satisface una oarecare din afirmaţiile teoremei 4.9 sau propoziţiei 4.3 şi una oarecare din afirmaţiile teoremei 4.10 sau propoziţiei 4.5.*

3°. *Orice mulţime mărginită din E^* este condiţionat slab (adică $\sigma(E^*, E^{**})$) secvenţial compactă.*

4°. *E^* nu conţine nici un subspaţiu izomorf cu l.*

5°. *Nici E, nici E^* nu conţin subspaţii izomorfe cu l.*

6°. *E^{**} este separabil.*

O parte din echivalenţele cuprinse în echivalenţa 1° ⟺ 2°, precum şi echivalenţa 1° ⟺ 5°, au fost date de R. C. James [35] şi M. M. Day [14]. Echivalenţele 1° ⟺ 3° ⟺ 4° au fost date de C. Bessaga şi A. Pełczyński ([5], teorema 3), iar echivalenţa 1° ⟺ 6° aparţine lui S. Karlin [45].

Pentru un spaţiu Banach cu bază condiţionată $\{x_n\}$ o mare parte din implicaţiile din teorema 4.15 nu mai sînt adevărate. Anume, se poate enunţa o propoziţie similară propoziţiilor 4.4 şi 4.6. De asemenea, menţionăm că exemplul spaţiului J infirmă, în acest caz general, implicaţiile 6° ⇒ 1°, 5° ⇒ 1°, 4° ⇒ 1°, 3° ⇒ 1° şi o parte a implicaţiilor cuprinse în implicaţia 2° ⇒ 1°.

TEOREMA 4.16. *Fie E un subspațiu vectorial închis unui spațiu Banach B cu bază necondiționată $\{x_n\}$. Atunci rămîn valabile echivalențele din teorema 4.15, înlocuind 2° prin*

$2'^\circ$. *E (sau, respectiv, $\{f_n|_E\}$) satisface una oarecare din afirmațiile teoremei 4.11 sau propoziției 4.3 și una oarecare din afirmațiile teoremei 4.12 sau propoziției 4.5.*

Teorema 4.16 (cu excepția echivalenței $1^\circ \Leftrightarrow 6^\circ$ care însă rezultă imediat din celelalte și a unei părți a echivalențelor cuprinse în $1^\circ \Leftrightarrow 2'^\circ$) a fost demonstrată de C. Bessaga și A. Pelczyński ([7], corolarul 1 și [5], teorema 3).

Pentru un subspațiu E al unui spațiu Banach cu bază condiționată $\{x_n\}$, sau, ceea ce este echivalent, pentru un spațiu E separabil, o mare parte din implicațiile din teorema 4.16 nu mai sînt adevărate. Vom omite aici detaliile.

Problema 4.10. Fie E un subspațiu reflexiv al unui spațiu Banach cu bază necondiționată. Poate fi E scufundat într-un spațiu Banach reflexiv cu o bază necondiționată?

Problema 4.11. Fie E un spațiu Banach reflexiv separabil. Poate fi E scufundat într-un spațiu Banach cu bază necondiționată?

Problema 4.12. Fie E un spațiu Banach reflexiv separabil. Poate fi E scufundat într-un spațiu Banach reflexiv cu bază?

Problemele 4.10, 4.11 și 4.12 au fost puse de C. Bessaga și A. Pelczyński ([7], problemele 5.22, 5.21 și 5.2).

§ 8. ȘIRURI BAZICE ȘI SPAȚII CU BAZĂ REFLEXIVE

DEFINIȚIA 4.4. Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$. Se numește [71] *subspațiu bloc*[30]) al spațiului E orice subspațiu vectorial închis generat de un șir bazic bloc (relativ la baza $\{x_n\}$)[31]).

TEOREMA 4.17. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$. Următoarele afirmații sînt echivalente*:

1°. *E este reflexiv.*

2°. *Orice bază a oricărui subspațiu bloc este mărginit completă.*

3°. *Orice bază a oricărui subspațiu bloc este generatoare.*

4°. *Nici o bază a nici unui subspațiu bloc nu este de tip P.*

5°. *Nici o bază a nici unui subspațiu bloc nu este de tip P^*.*

6°. *Nici o bază a nici unui subspațiu bloc nu este de tip l_+.*

Teorema 4.17 a fost demonstrată în [71] ([71], teorema 2). Alte afirmații echivalente se obțin din [74], Cap. II, teoremele 2.1, 2.4, 2.5, 2.6 și 2.7.

COROLARUL 4.18. *Teorema 4.17 rămîne valabilă dacă în enunțul ei se înlocuiește „orice bază a oricărui subspațiu bloc" și „nici o bază a nici unui subspațiu bloc" respectiv prin „orice șir bazic" și „nici un șir bazic"* ([71], corolarul 1).

---

[30]) Vom omite, pentru prescurtare, cuvintele „relativ la baza $\{x_n\}$".

[31]) Pentru noțiunea de șir bazic bloc a se vedea [74], Cap. II, § 9.

În teorema 4.17 nu se poate înlocui ,,orice (nici o) bază a oricărui (nici unui) subspaţiu bloc prin ,,orice (nici un) şir bazic bloc'', cum ne arată

Exemplul 4.7. *a*) Fie $E = c_0$ cu baza sa naturală. Atunci orice şir bazic bloc este generator şi de tip non-l_+ şi non-P^*, dar E este nereflexiv.

b) Fie $E = l$ cu baza sa naturală. Atunci orice şir bazic bloc este mărginit complet şi de tip non-P, dar E este nereflexiv.

Se pot totuşi da caracterizări ale reflexivităţii în termenii şirurilor bazice bloc, de exemplu următoarea consecinţă a teoremei 4.17 :

COROLARUL 4.19. *Fie E un spaţiu Banach cu bază $\{x_n\}$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

1°. *E este reflexiv.*

2°. *Nici un şir bazic bloc nu este de tip P sau de tip l_+.*

Corolarul 4.19 a fost demonstrat în [71] ([71], corolarul 2).

Chiar dacă în teorema 4.17 sau în corolarul 4.18 se porneşte de la un spaţiu E cu bază necondiţionată $\{x_n\}$, nu se poate înlocui ,,orice (nici o) bază a oricărui (nici unui) subspaţiu bloc'' prin ,,orice (nici o) bază necondiţionată a oricărui (nici unui) subspaţiu bloc'', sau respectiv ,,şir bazic'' prin ,,şir bazic necondiţionat'', cum ne arată tot spaţiile din exemplul 4.7, în care proprietăţile considerate ale şirurilor bazice bloc le au şi toate şirurile bazice necondiţionate. Totuşi, pentru spaţii Banach cu bază necondiţionată avem

COROLARUL 4.20. *Fie E un spaţiu Banach cu bază necondiţionată $\{x_n\}$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

1°. *E este reflexiv.*

2°. *Orice bază a oricărui subspaţiu bloc este sau generatoare, sau mărginit completă* ([71], corolarul 3).

Problema 4.13. Se poate oare înlocui, în rezultatele din acest paragraf, ,,şir bazic'' (sau ,,bază a ... spaţiu bloc'') prin ,,bază a spaţiului E''? ([71], problema 2).

§ 9. GENERALIZĂRI ALE BAZEI ŞI SPAŢII REFLEXIVE

Vom considera mai întîi şirurile bazice şi reflexivitatea unui spaţiu arbitrar.

TEOREMA 4.18. *Fie E un spaţiu Banach. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

1°. *E este reflexiv.*

2°. *Orice subspaţiu cu bază* [32]) *al lui E este reflexiv.*

3°. *Orice şir bazic din E este mărginit complet.*

4°. *Orice şir bazic din E este generator.*

5°. *Nici un şir bazic din E nu este de tip P.*

6°. *Nici un şir bazic din E nu este de tip P^*.*

7°. *Nici un şir bazic din E nu este de tip l_+.*

---

[32]) Reamintim că în virtutea teoremei 3.1 există totdeauna asemenea subspaţii.

Echivalența 1° ⟺ 2° a fost demonstrată de A. Pelczyński [60] (în [60] se menționează că acest rezultat a fost anunțat, fără demonstrație, de R. C. James). Echivalențele 2° ⟺ ... ⟺ 7° sînt o consecință imediată a teoremei 4.17. Alte afirmații echivalente se obțin din [74], Cap. II, teoremele 2.1, 2.4, 2.5, 2.6 și 2.7.

Implicația 7° ⇒ 1° din teorema 4.18 constituie o întărire a unor rezultate ale lui R. C. James ([37], lema 1 și [39], propoziția (iii). De altă parte, datorită corolarului 2.1 din [74], Cap. II, § 7 (care rămîne valabil dacă se înlocuiește „bază" prin „șir bazic"), implicația 5° ⇒ 1° din teorema 4.18 ne dă următoarea întărire a teoremei clasice a lui W. F. Eberlein [18] despre caracterizarea spațiilor reflexive :

COROLARUL 4.21. *Orice spațiu Banach nereflexiv E conține un șir bazic* $\{x_n\} \subset E$ *cu* $\sup\limits_{1 \leqslant n < \infty} \|x_n\| < \infty$ *care nu are nici un subșir slab convergent.*

Trecem acum la caracterizări ale reflexivității unui spațiu arbitrar în termenii șirurilor tare liniar independente.

TEOREMA 4.19. *Fie E un spațiu Banach. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

1°. *E este reflexiv.*

2°. *Nici un șir tare liniar independent din E nu este de tip P.*

3°. *Nici un șir tare liniar independent din E nu este de tip* P^*.

Teorema 4.19 a fost demonstrată de V. Pták ([62], teoremele 1 și 2). Alte condiții echivalente se obțin din observația făcută după definiția 3.12 (Cap. III).

Implicațiile 1° ⇒ 2°, 1° ⇒ 3° constituie o întărire a implicațiilor corespunzătoare din teorema 4.18, iar implicațiile 2° ⇒ 1°, 3° ⇒ 1° sînt consecințe ale implicațiilor corespunzătoare din teorema 4.18.

Vom considera acum T-bazele și reflexivitatea unui spațiu Banach cu T-bază. Avem următoarea generalizare a corolarului 4.14 :

TEOREMA 4.20. *Fie E un spațiu Banach cu T-bază* $\{x_n\}$, *unde* $T = (t_{nm})$ *este o matrice consistentă triunghiulară. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

1°. *E este reflexiv.*

2°. *T-baza* $\{x_n\}$ *este generatoare și T-mărginit completă.*

În cazul particular al matricei $T = (t_{nm})$, unde $t_{nm} = \frac{1}{n}$, $m = 1, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$ (și $t_{nm} = 0$ pentru $n < m$), teorema 4.20 a fost demonstrată în lucrarea [70] ([70], teorema 2).

Problema 4.14. Să se dea caracterizări ale reflexivității în termenii altor generalizări ale noțiunii de bază (bazelor în sens larg, bazelor aproximative etc.).

Problema 4.15. Extinzînd teorema 4.18, să se dea caracterizări ale cvasireflexivității de ordin n în termenii proprietăților șirurilor bazice[33]).

---

[33]) Recent A. Pelczyński ne-a informat că a reușit, împreună cu M. I. Kadeț, să dea un răspuns afirmativ la problema posibilității extinderii la spații cvasireflexive de ordin n a echivalenței 1° ⟺ 2° din teorema 4.18.

§ 10. PROPRIETĂŢI ALE SPAŢIILOR CU BAZĂ SIMETRICĂ ŞI APLICAŢII LA ALTE CLASE DE SPAŢII BANACH

S. Banach a pus [2] următoarea problemă : este oare orice spaţiu Banach (infinitdimensional) izomorf cu toate hiperplanele sale închise? Următoarea teoremă şi corolariile ei dau un răspuns parţial la această problemă.

TEOREMA 4.21. *Fie E un spaţiu Banach cu bază simetrică. Atunci E este izomorf cu toate hiperplanele sale închise.*

Teorema 4.21 a fost demonstrată în [68] ([68], teorema 4).

COROLARUL 4.22. *Fie E un spaţiu Banach avînd un subspaţiu complementat cu bază simetrică. Atunci E este izomorf cu toate hiperplanele sale închise* ([68], corolarul 1).

COROLARUL 4.23. *Următoarele spaţii Banach E au proprietatea că E este izomorf cu toate hiperplanele sale închise* :

a) *Orice spaţiu adjunct B^* al unui spaţiu B cu proprietatea că B este izomorf cu toate hiperplanele sale închise.*

b) *Spaţiile* c_0, l^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $C([0,1])$, $L^p([0,1])$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, *şi* J.

c) *Orice spaţiu Banach separabil conţinînd un subspaţiu izomorf cu* c_0 (*în particular, orice subspaţiu vectorial închis* [34]) *complementat al lui* $C([0,1])$.

d) *Orice spaţiu Banach E al cărui spaţiu adjunct conţine un subspaţiu izomorf cu c_0.*

e) *Orice spaţiu adjunct B^* al unui spaţiu Banach B conţinînd un spaţiu izomorf cu c_0.*

f) *Orice subspaţiu vectorial închis complementat al lui* $L^p([0,1])$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

g) *Orice spaţiu Banach E care conţine un subspaţiu izomorf cu $C(Q)$, unde Q este un spaţiu compact stonian* (*în particular, orice spaţiu Banach E conţinînd un subspaţiu izomorf cu m*).

h) *Orice subspaţiu vectorial închis al lui* l^p $(1 \leqslant p < \infty)$.

i) *Orice subspaţiu vectorial închis E al unui spaţiu Banach nereflexiv B cu bază necondiţionată.*

Corolarul 4.23 a fost demonstrat în [69] ([69], teoremele 1—6 şi corolariile lor) şi [68] ([68], corolariile 2,3), cu excepţia lui f), care a fost demonstrat în [69] numai pentru $p = 1$.

COROLARUL 4.24. *Rezultatele de mai sus rămîn valabile dacă în ele se înlocuieşte „hiperplan închis" prin „subspatiu vectorial închis de codimensiune finită"* ([68], corolarul 4).

C. Bessaga şi A. Pelczyński au pus [9] următoarea problemă : este oare orice spaţiu Banach (infinitdimensional) cu bază necondiţionată izomorf cu pătratul său[35]? Următoarea teoremă dă un răspuns parţial la această problemă.

TEOREMA 4.22. *Fie E un spaţiu Banach cu bază simetrică. Atunci*

---

[34] Se subînţelege : infinitdimensional.

[35] Adică cu produsul cartezian $E \times E$. În [9] problema a fost enunţată numai pentru spaţii E reflexive.

a) *E este izomorf cu pătratul său.*

b) *Spațiul adjunct E^* este izomorf cu pătratul său.*

Teorema 4.22 a fost demonstrată în [68] ([68], teorema 5). O afirmație echivalentă cu a) a fost regăsită ulterior, de M. I. Kadeț și A. Pelczyński ([44], corolarul 10).

§ 11. PROPRIETĂŢI ALE SPAŢIILOR CU BAZĂ PERFECT OMOGENĂ

TEOREMA 4.23. *Fie E un spațiu Banach cu bază perfect omogenă. Atunci toate subspațiile infinitdimensionale ale lui E sînt de aceeași dimensiune liniară.*

Teorema 4.23 a fost demonstrată de C. Bessaga și A. Pelczyński ([6], corolarul 5). În cazurile particulare $E = c_0$ și $E = l^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, teorema a fost dată de S. Banach ([2], Cap. XII, teorema 1).

PROPOZIȚIA 4.9. *Fie $\{x_n\}$ o bază perfect omogenă a unui spațiu Banach nereflexiv E. Atunci $\{x_n\}$ este echivalentă sau cu baza naturală a spațiului c_0, sau cu baza naturală a spațiului l.*

Rezultatele ce urmează se referă la spațiile concrete $E = c_0$ și $E = l^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ cu bază perfect omogenă, adică (ținînd seama de propoziția 4.9) la toate spațiile nereflexive cu bază perfect omogenă și la spațiile reflexive l^p $(1 < p < \infty)$ (acestea din urmă ar epuiza toate spațiile reflexive cu bază perfect omogenă, dacă răspunsul la problema 2.13 din [74], Cap. II ar fi afirmativ).

TEOREMA 4.24. *Fie E unul din spațiile c_0 sau l^p $(1 \leqslant p < \infty)$. Atunci orice subspațiu vectorial închis infinitdimensional care admite un complementar în E este izomorf cu E* (A. Pelczyński [58], teorema 1).

TEOREMA 4.25. a) *Fie G un subspațiu al lui $E = c_0$ sau $E = l^2$, izomorf cu E. Atunci G admite un complementar în E.*

b) *Fie G un subspațiu al lui $E = l^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ izometric izomorf cu E. Atunci G admite un complementar în E.*

Teorema 4.25 a fost demonstrată de A. Pelczyński ([58], teoremele 3 și 2).

§ 12. PROPRIETĂŢI TOPOLOGICE ALE SPAŢIILOR BANACH SEPARABILE CARE CONŢIN UN ŞIR BAZIC NECONDIŢIONAT

S. Banach a pus ([2], p. 242) problema următoare : Sînt oare orice două spații Banach separabile infinitdimensionale omeomorfe ? Această problemă a rămas nerezolvată pînă astăzi, dar s-au obținut o serie de rezultate parțiale importante. De exemplu, M. I. Kadeț [42] și, independent, V. Klee [48], au demonstrat că *toate spațiile adjuncte separabile infinitdimensionale sînt omeomorfe.* Un alt rezultat profund este

TEOREMA 4.26. *Orice spațiu Banach care conține un șir bazic necondiționat este omeomorf cu spațiul l.*

Această teoremă (împreună cu alte rezultate importante asupra problemei de mai sus a lui Banach) a fost obținută de C. Bessaga și A. Pelczyński [10]. Din ea rezultă că un răspuns afirmativ la problema 3.3 ar implica un răspuns afirmativ la problema de mai sus a lui Banach.

În spaţiile Banach există şi alte probleme topologice nerezolvate, de exemplu următoarele : Este oare orice spaţiu Banach separabil infinitdimensional omeomorf cu toate hiperplanele sale închise? Dar cu sfera sa unitate $\{x \in E \mid \|x\| \leqslant 1\}$? Dar cu suprafaţa $\{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ a sferei sale unitate? Un răspuns parţial la aceste probleme este dat de

TEOREMA 4.27. *Fie E un subspaţiu infinitdimensional al unui spaţiu Banach cu bază necondiţionată* [36]). *Atunci E este omeomorf cu*

a) *toate hiperplanele sale închise,*

b) *toate semispaţiile sale închise,*

c) *sfera sa unitate $\{x \in E \mid \|x\| \leqslant 1\}$, şi*

d) *suprafaţa $\{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ a sferei sale unitate.*

Afirmaţiile b) şi c) au fost demonstrate de V. Klee [49]. În aceeaşi lucrare, V. Klee a demonstrat că orice spaţiu adjunct separabil infinitdimensional este omeomorf cu mulţimile din b) şi c); se poate arăta că orice asemenea spaţiu este omeomorf şi cu mulţimile din a) şi d).

§ 13. BAZE ÎN PRODUSE TENSORIALE NORMATE

DEFINIŢIA 4.5. Fie E un spaţiu Banach cu bază $\{x_n\}$ şi F un spaţiu Banach cu bază $\{y_n\}$. Se numeşte [25] *produsul tensorial al bazelor* $\{x_n\}$ *şi* $\{y_n\}$, şi se notează prin $\{x_n\} \otimes \{y_n\}$, mulţimea $\{x_i \otimes y_j \in E \otimes F \mid i, j = 1, 2, \ldots\}$ aranjată într-un şir în ordinea următoare :

$$\begin{aligned} &x_1\otimes y_1,\ x_1\otimes y_2,\ x_2\otimes y_2,\ x_2\otimes y_1,\ x_1\otimes y_3,\ x_2\otimes y_3,\ x_3\otimes y_3,\\ &x_3\otimes y_1, \ldots, x_1\otimes y_k,\ x_2\otimes y_k, \ldots, x_k\otimes y_k,\ x_k\otimes y_{k-1}, \ldots, x_k\otimes y_2,\ x_k\otimes y_1, \ldots \end{aligned} \tag{4.18'}$$

În mod similar se defineşte produsul tensorial a două şiruri tare liniar independente, a două sisteme biortogonale, ş.a.m.d.

TEOREMA 4.28. *Fie E un spaţiu Banach cu bază $\{x_n\}$ şi F un spaţiu Banach cu bază $\{y_n\}$. Atunci $\{x_n\} \otimes \{y_n\}$ este o bază a produsului tensorial proiectiv completat $E \overset{\wedge}{\otimes} F$ precum şi a produsului tensorial injectiv completat $E \overset{\vee}{\otimes} F$* (B. R. Gelbaum şi J. Gil de Lamadrid [25], teoremele 1 şi 2') [37]).

Chiar dacă bazele $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sînt necondiţionate, baza $\{x_n\} \otimes \{y_n\}$ nu este, în general, necondiţionată [25].

Problema 4.16. Fie E un spaţiu Banach cu bază $\{x_n\}$, F un spaţiu Banach cu bază $\{y_n\}$, şi α o normă rezonabilă [30] pe produsul tensorial $E \otimes F$. Este oare atunci $\{x_n\} \otimes \{y_n\}$ o bază a produsului tensorial completat $E \overset{\alpha}{\otimes} F$? (B. R. Gelbaum şi J. Gil de Lamadrid [25]).

Primită la redacţie la 10 septembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. M. G. ARSOVE, R. E. EDWARDS, *Generalized bases in topological linear spaces*, Studia Math., **19**, 95–113 (1960).
2. S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*. Monografje Matematyczne, Warszawa, 1932.
3. Н. К. БАРИ, *Тригонометрические ряды*, Москва, Физматгиз, 1961.

---

[36]) Ştim că atunci E conţine un şir bazic necondiţionat (Cap. III, propoziţia 3.2).

[37]) Folosim aici terminologia din lucrarea [30] a lui A. Grothendieck.

4. C. Bessaga, A. Pełczyński, *Some remarks on conjugate spaces containing subspaces isomorphic to the space* c_0, Bull. Acad. Pol. Sci., **6**, 249–250 (1958).
5. — *On subspaces of a space with an absolute basis*, Bull. Acad. Pol. Sci., **6**, 313–315 (1958).
6. — *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Math., **17**, 151–164 (1958).
7. — *A generalization of results of R. C. James concerning absolute bases in Banach spaces*, Studia Math., **17**, 165–174 (1958).
8. — *Własności baz w przestrzeniach typu* B_0, Prace Mat., **3**, 123–142 (1959).
9. — *Banach spaces non isomorphic to their cartesian squares*. I, Bull. Acad. Pol. Sci., **8**, 77–80 (1960).
10. — *Some remarks on homeomorphism of Banach spaces*, Bull. Acad. Pol. Sci., **8**, 757–761 (1960).
11. — *Spaces of continuous functions*. IV (*On isomorphical classification of spaces* $C(S)$), Studia Math., **19**, 53–62 (1960).
12. Y. Cuttle, *On quasi-reflexive Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **12**, 936–940 (1961).
13. M. M. Day, *Review of the paper of V. Ia. Kozlov „On a generalization of the concept of basis"*, Mathematical Reviews, **12**, 110 (1951).
14. — *Normed linear spaces*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer Verlag, 1958.
15. — *On the basis problem in normed spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **13**, 655–658 (1962).
16. J. Dieudonné, *On biorthogonal systems*, Michigan Math. J., **2**, 7–20 (1953/54).
17. J. Dixmier, *Sur un théorème de Banach*, Duke Math. J., **15**, 1057–1071 (1948).
18. W. F. Eberlein, *Weak compactness in Banach spaces*. I, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **33**, 51–53 (1947).
19. C. Foiaş, I. Singer, *Some remarks on the representation of linear operators in spaces of vector-valued continuous functions*, Revue de math. pures et appl., **5**, 729–752 (1960).
20. В. Ф. Гапошкин, *О базисах суммирования*, Научн. докл. высш. шк., **1**, 24–27 (1958).
21. — *О безусловно суммируемых рядах в банаховых пространствах*, Научн. докл. высш. шк., **1**, 87–95 (1958).
22. В. Ф. Гапошкин, М.И. Кадец, *Операторные базисы в пространствах Банаха*, Матем. сб., **61** (103), 3–12 (1963).
23. B. R. Gelbaum, *Expansions in Banach spaces*, Duke Math. J., **17**, 187–196 (1950).
24. — *Notes on Banach spaces and bases*, An. Acad. Bras. Ci., **30**, 29–36 (1958).
25. B. R. Gelbaum, J. Gil de Lamadrid, *Bases of tensor products of Banach spaces*, Pacific J. Math., **11**, 1281–1286 (1961).
26. M. M. Grinblum, *Biorthogonal systems in Banach spaces*, ДАН СССР, **47**, 75–78 (1945).
27. М. М. Гринблюм, *Об одном признаке базиса*, ДАН СССР, **59**, 9–11 (1948).
28. A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type* $C(K)$, Canad. J. Math., **5**, 129–173 (1953).
29. — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc., **16**, 1–191 (1955).
30. — *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. São Paulo, **8**, 1–79 (1956).
31. — *Espaces vectoriels topologiques*, ed. 2, São Paulo, 1958.
32. В. И. Гурарий, *О наклонах подпространств и условных базисах в пространстве Банаха*, ДАН СССР, **145**, 504–506 (1962).
33. — *О базисах в пространствах непрерывных функций*, ДАН СССР, **148**, 493–495 (1963).
34. В. И. Гурарий, М. И. Кадец, *О минимальных системах и квазидополнениях в пространстве Банаха*, ДАН СССР, **145**, 256–258 (1962).
35. R. C. James, *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Ann. of Math., **52**, 518–527 (1950).
36. — *Projections in the space* (m), Proc. Amer. Math. Soc., **6**, 899–902 (1955).
37. — *Reflexivity and the supremum of linear functionals*, Ann. of Math., **66**, 159–169 (1957).
38. — *Separable conjugate spaces*, Pacific J. Math., **10**, 563–571 (1960).
39. — *Characterizations of reflexive Banach spaces*, Studia Math., seria specjalna, Z. 1, 55–56 (1963).

40. G. JULIA, *Exemples de structures des systèmes duaux de l'espace hilbertien*, Comptes rendus Acad. Sci. (Paris), **216**, 465—468 (1943).

41. S. KACZMARZ, H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen,* Monografje Matematyczne, Warszawa-Lwów, 1935.

42. М. И. КАДЕЦ, *Про зв'язок миж слабою та сильною збижнистю*, Доповіді Акад Наук Укр. ССР, **9**, 949—952 (1959).

43. — *О биортогональных системах и базисах суммирования*, Функц. анал. и его применение, Акад. Наук Азерб. ССР, Баку, 106—108 (1961).

44. M. I. KADEC, A. PELCZYŃSKI, *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p*, Studia Math., **21**, 161—176 (1962).

45. S. KARLIN, *Bases in Banach spaces*, Duke Math. J., **15**, 971—985 (1948).

46. V. KLEE, *Some characterizations of reflexivity*, Rev. Ci. (Lima), **52**, 15—23 (1950).

47. — *On the borelian and projective types of linear subspaces*, Math. Scand., **6**, 189—199 (1958).

48. — *Mappings into normed linear spaces*, Fundam. Math., **49**, 25—34 (1960).

49. — *Topological equivalence of a Banach space with its unit cell,* Bull. Amer. Math. Soc., **67**, 286—290 (1961).

50. В. Я. КОЗЛОВ, *Об одном обобщении понятия базиса*, ДАН СССР, **73**, 643—646 (1950).

51. S. LEWIN, *Über einige mit der Konvergenz im Mittel verbundenen Eigenschaften von Funktionenfolgen*, Math. Zeitschr., **32**, 491—511 (1930).

52. — *Integralgleichungen und Funktionalräume*, Матем. сб., **39**, 3—72 (1932).

53. А. Ю. ЛЕВИН, Ю. И. ПЕТУНИН, *Некоторие вопросы, связанные с понятием ортогональности в пространстве Банаха*, Успехи Матем. наук, **18**, 3(111), 167—170 (1963).

54. G. W. MACKEY, *Note on a theorem of Murray*, Bull. Amer. Math. Soc., **52**, 322—325 (1946).

55. I. MADDAUS, *On completely continuous linear transformations*, Bull. Amer. Math., Soc., **44**, 279—282 (1938).

56. A. MARKOUCHEVITCH, *Sur les bases (au sens large) dans les espaces linéaires*, DAH CCCP, **41**, 227—229 (1943).

57. В. Н. НИКОЛЬСКИЙ, *Некоторые вопросы наилучшего приближения в функциональном пространстве*, Труды физ.-мат. фак. Калининск. гос. пед. инст.-та, **16**, 119—160 (1954).

58. A. PELCZYŃSKI, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math., **19**, 209—228 (1960)·

59. — *On the impossibility of embedding of the space L in certain Banach spaces*, Coll· Math., **8**, 199—203 (1961).

60. — *A note on the paper of I. Singer ,,Basic sequences and reflexivity of Banach spaces''*, Studia Math., **21**, 371—374 (1962).

61. R. S. PHILLIPS, *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., **48**, 516—541 (1940).

62. V. PTÁK, *Biorthogonal systems and reflexivity of Banach spaces*, Czechosl. Math. J., **9** (84), 319—326 (1959).

63. E. SCHMIDT, *Entwicklung willkürlichen Funktionen nach Systemen vorgeschriebener*, Math. Ann., **63**, 433—476 (1907).

64. Z. SEMADENI, *Isomorhic properties of Banach spaces of continuous functions*, Studia Math., seria specjalna, Z. 1, 93—108 (1963).

65. I. SINGER, *On Banach spaces reflexive with respect to a linear subspace of their conjugate space*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. RPR, **2**, 449—462 (1958).

66. — *Sur les espaces de Banach à base absolue, canoniquement équivalents à un dual d'espace de Banach*, Comptes rendus Acad. Sci. (Paris), **251**, 620—621 (1960).

67. — *Sur les espaces de Banach à base absolue, canoniquement équivalents à un dual d'espace de Banach*. II, Comptes rendus Acad. Sci. (Paris), **251**, 2456—2458 (1960).

68. — *О банаховых пространствах с симметричным базисом*, Revue de math. pures et appl., **6**, 159—166 (1961).

69. — *Sur un problème d'isomorphie de S. Banach*, Rend. dei Lincei, **30**, 343—346 (1961).

70. — *On Cesaro bases in Banach spaces*, Revue de math. pures et appl., **7**, 135—142 (1962).

71. I. SINGER, *Basic sequences and reflexivity of Banach spaces*, Studia Math., **21**, 351–369 (1962).
72. — *On Banach spaces reflexive with respect to a linear subspace of their conjugate space.* III, Revue de Math. pures et appl., **8**, 139–150 (1963).
73. — *On bases in quasi-reflexive Banach spaces*, Revue de math. pures et appl., **8**, 309–311 (1963).
74. — *Baze în spaţii Banach.* I., Studii şi cercetări matematice, **14**, 533–585 (1963).
75. — *Bases and quasi-reflexivity of Banach spaces*, Math. Ann. (sub tipar).
76. B. Г. ВИНОКУРОВ, *О биортогональных системах, проходящих через заданные подпространства*, ДАН СССР, **85**, 685–687 (1952).
77. A. WILANSKY, *The basis in Banach space*, Duke Math. J., **18**, 795–798 (1951).

INTERSECȚII DE IDEALE ÎN UNELE INELE

DE

N. RADU

Fiind dat un domeniu de integritate noetherian O și $\mathfrak{a}$ un ideal al său se știe că $\bigcap\limits_{m=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n = (0)$ Chevalley [1] a demonstrat un rezultat analog pentru domeniile de integritate care sînt întregi peste un domeniu de integritate neotherian și anume: dacă O este un domeniu de integritate local noetherian, $\mathfrak{m}$ idealul său maximal și O' un domeniu de integritate întreg peste O, atunci $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n O' = (0)$.

În § 2 al acestei note se extinde acest rezultat la o clasă mai largă de domenii de integritate. Pentru aceasta se dovedește utilă înlocuirea intersecțiilor puterilor unui ideal prin aceea a tuturor idealelor care au același radical ca și idealul considerat, care intersecție, după cum se constată cu ușurință, coincide cu prima cînd idealul are bază finită [2].

Demonstrația teoremei 4 din care se deduce direct rezultatul lui Chevalley este mult mai simplă decît cea dată în [1]. Totodată în § 1 se demonstrează cîteva propoziții asupra intersecțiilor idealelor care au același radical cu un ideal dat în cazul inelelor în care orice ideal se descompune în intersecție, eventual infinită, de ideale primare.

§ 1. Fie O un inel comutativ și $\mathfrak{a}$ un ideal al său. Vom nota prin $\mathfrak{a}_\alpha$, α fiind un element al unei mulțimi de indici $I_{\mathfrak{a}}$, un ideal care are proprietatea că $\sqrt{\mathfrak{a}_\alpha} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. În [2] S. Mori a demonstrat propoziții asupra intersecțiilor $\bigcap\limits_{\alpha \in I_{\mathfrak{a}}} \mathfrak{a}_\alpha$ în clasa inelelor Lasker, adică a acelor inele în care orice ideal se reprezintă ca o intersecție finită de ideale primare.

Observăm că în cazul în care $\mathfrak{a}$ are bază finită, atunci $\bigcap\limits_{\alpha \in I_{\mathfrak{a}}} \mathfrak{a}_\alpha = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n$ și deci în cazul inelelor noetheriene propozițiile respective devin propoziții cunoscute asupra intersecțiilor puterilor unui ideal.

În cele ce urmează arătăm că unele dintre aceste propoziții sînt adevărate și în clasa D, a inelelor în care orice ideal se descompune într-o intersecție eventual infinită de ideale primare.

Fie $\mathfrak{a}$ un ideal al unui inel comutativ O; vom nota prin $\bar{\mathfrak{a}}$ intersecția tuturor idealelor primare care conțin pe $\mathfrak{a}$.

LEMA 1. *Fie O un inel comutativ și $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ două ideale ale sale, atunci pentru orice ideal $\mathfrak{c} \subset \bigcap\limits_{\alpha \in I_{\mathfrak{a}}} (\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{b})$ există egalitatea*

$$\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}} = \overline{\mathfrak{c} + \mathfrak{b}}.$$

Demonstrație. Incluziunea

$$\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}} \subset \overline{\mathfrak{c} + \mathfrak{b}}$$

este evidentă. Rămîne să demonstrăm incluziunea inversă. Pentru aceasta va fi suficient să demonstrăm că orice ideal primar $\mathfrak{q}$ care divide pe $\mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}$ divide și pe $\mathfrak{c} + \mathfrak{b}$. Din

$$\mathfrak{q} \supset \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}$$

rezultă

$$\mathfrak{q} \supset \mathfrak{b},\ \mathfrak{q} \supset \mathfrak{a}\mathfrak{c}$$

Dacă $\sqrt{\mathfrak{q}} \not\supset \mathfrak{a}$, atunci $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{c}$ și evident $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{c} + \mathfrak{b}$, afirmația fiind astfel demonstrată. Dacă $\sqrt{\mathfrak{q}} \supset \mathfrak{a}$, atunci există $\alpha \in I_{\mathfrak{a}}$ astfel încît $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{a}_\alpha$, căci pentru orice $\mathfrak{a}_{\alpha_1}$, $\alpha_1 \in I_{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{a}_{\alpha_1} \cap \mathfrak{q}$ și $\sqrt{\mathfrak{a}_{\alpha_1} \cap \mathfrak{q}} = \sqrt{\mathfrak{a}_{\alpha_1}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Prin urmare și în acest caz $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{c}$ și lema este complet demonstrată.

CONSECINȚA 1. *Dacă inelul O aparține clasei D, atunci pentru orice ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ și $\mathfrak{c} \subset \bigcap\limits_{\alpha \in I_{\mathfrak{a}}} (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ există egalitatea*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c} + \mathfrak{b}.$$

LEMA 2. *Fie O un inel din clasa D cu element unitate, $\mathfrak{a}$ și $\mathfrak{q}$ două ideale din O cu proprietatea că $\mathfrak{q}$ este primar și $\mathfrak{a} + \mathfrak{q} \neq O$, atunci $\bigcap\limits_{\alpha \in I_{\mathfrak{a}}} (\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$.*

Demonstrație. Fie $a \in \bigcap\limits_{\alpha \in I_{\mathfrak{a}}} (\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{q})$. Conform consecinței 1 avem

$$aO + \mathfrak{q} = \mathfrak{a}a + \mathfrak{q}. \tag{1}$$

Dacă $a \in \mathfrak{q}$, atunci din această relație rezultă $a = \alpha a + q$, unde $\alpha \in \mathfrak{a}$, $q \in \mathfrak{q}$ sau

$$a - \alpha a \in q. \tag{2}$$

Elementul $\alpha \notin \sqrt{\mathfrak{q}}$, căci, în cazul contrar, ar exista un număr natural n astfel încît $\alpha^n \notin \mathfrak{q}$ și atunci din (2) obținem

$$\alpha a - \alpha^2 a \in \mathfrak{q}$$

adică

$$a - \alpha^2 a = a - \alpha a + \alpha a - \alpha^2 a \in \mathfrak{q}$$

şi în general

$$a - \alpha^m a \in \mathfrak{q} \text{ pentru orice } m.$$

Dar din

$$a - \alpha^n a \in \mathfrak{q}$$

se deduce că $a \in \mathfrak{q}$ împotriva ipotezei.

Din (2) rezultă $a(1 - \alpha) \in \mathfrak{q}$, dar $1 - \alpha \notin \sqrt{\mathfrak{q}}$ căci în cazul contrar ar exista un număr natural n astfel încît

$$(1 - \alpha)^n \in \mathfrak{q} \text{ adică } \mathfrak{a} + \mathfrak{q} = O$$

împotriva ipotezei. Prin urmare $1 - \alpha \notin \sqrt{\mathfrak{q}}$, deci $a \in \mathfrak{q}$ şi lema este demonstrată.

TEOREMA 1. *Dacă O este un inel din clasa D cu element unitate şi dacă $\mathfrak{a}$ şi $\mathfrak{b}$ sînt două ideale astfel încît există o reprezentare a lui $\mathfrak{b}$ sub forma*

$$\mathfrak{b} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{q}_i,$$

unde $\mathfrak{q}_i$ sînt ideale primare, I o mulţime de indici, pentru care numai un număr finit $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ au proprietatea că $\mathfrak{a} + \mathfrak{q}_i = O$, atunci

$$\bigcap_{\alpha \in I_{\mathfrak{a}}} (\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{b}) = \bigcap_{\substack{i \in I \\ i \neq 1, \ldots, s}} \mathfrak{q}_i.$$

Demonstraţie. Evident,

$$\bigcap_{\alpha \in I_{\mathfrak{a}}} (\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{q}_i) \supset \bigcap_{\alpha \in I_{\mathfrak{a}}} (\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{b}) \supset \mathfrak{b}$$

şi deci pentru $i \neq 1, \ldots s$, conform lemei 2, obţinem

$$\bigcap_{\substack{i \in I \\ i \neq 1, 2, \ldots, s}} \mathfrak{q}_i \supset \bigcap_{\alpha \in I_{\mathfrak{a}}} (\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{b}).$$

Să demonstrăm şi incluziunea inversă. Fie $\beta \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ i \neq 1, \ldots, s}} \mathfrak{q}_i = \mathfrak{b}'$. Deoarece $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}' \cap \mathfrak{b}''$, unde $b'' + a = O$, $\mathfrak{b}'' = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{q}_i$, există $b'' \in \mathfrak{b}''$ şi $a \in \mathfrak{a}$ astfel încît $b'' + a = 1$, de unde rezultă

$$\beta b'' + \beta a = \beta \in \mathfrak{b} + \beta \mathfrak{a}.$$

Dar evident un element a cu proprietăţile de mai sus poate fi luat din orice $\mathfrak{a}_\alpha$, deci obţinem că

$$\beta \in \mathfrak{b} + \mathfrak{a}_\alpha \text{ pentru toţi } \alpha \in I_{\mathfrak{a}}$$

adică

$$\beta \in \bigcap_{\alpha \in I_{\mathfrak{a}}} (\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{b})$$

şi teorema este demonstrată.

CONSECINȚA 2. *Din demonstrație se deduce că dacă O este inel cu proprietățile din teoremă,* $\mathfrak{a}$ *și* $\mathfrak{b}$ *sînt două ideale astfel încît* $\mathfrak{b}$ *poate fi reprezentat sub forma* $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}' \cap \mathfrak{b}''$, *unde* $\mathfrak{q} + \mathfrak{b}'' = O$, *atunci* $\bigcap\limits_{\alpha\in I_{\mathfrak{a}}} (\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{b}) \supset \mathfrak{b}'$.

CONSECINȚA 3. *Dacă O este un inel cu element unitate din clasa D,* $\mathfrak{a}$ *un ideal al lui O care aparține radicalului lui Jacobson al inelului O, atunci pentru orice ideal b al lui O,* $\bigcap\limits_{\alpha\in I_{\mathfrak{a}}} (\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$.

În adevăr, dacă $\mathfrak{b} = \bigcap\limits_{i\in I} \mathfrak{q}_i$ este o reprezentare a lui b ca intersecție de ideale primare, atunci $\mathfrak{a} + \mathfrak{q}_i \neq O$ pentru toți i și deci conform teoremei 1 avem egalitatea cerută.

Pentru inelele din clasa D care nu au element unitate putem demonstra următoarea teoremă:

TEOREMA 2. *Fie O un inel din clasa D și* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *două ideale din O cu proprietatea că există un element $e \in O$, $e \notin \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ astfel încît pentru orice element $a \in \mathfrak{a}$ imaginea lui $e - a$ prin omomorfismul $O \to O/\mathfrak{b}$ nu este divizor al lui 0 în $O/\mathfrak{b}$, atunci*

$$\bigcap_{\alpha\in I_{\mathfrak{a}}} (\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}.$$

Demonstrație. Deoarece avem $\bigcap\limits_{\alpha\in I_{\mathfrak{a}}} (\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{b}) \supset \mathfrak{b}$, teorema va fi demonstrată dacă vom demonstra și incluziunea inversă. Fie $\beta \in \bigcap\limits_{\alpha\in I_{\mathfrak{a}}} (\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{b})$; atunci, conform consecinței 1, avem $\beta O + \mathfrak{b} = \beta\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, deci $\beta e = \beta a + b$, unde $a \in \mathfrak{a}$ iar $b \in \mathfrak{b}$. Prin urmare

$$\beta e - \beta a \in \mathfrak{b},$$

adică

$$(e - a)\,\beta \in \mathfrak{b}$$

de unde rezultă $\beta \in \mathfrak{b}$ și teorema este demonstrată.

CONSECINȚA 4. *Fie O un inel din clasa D,* $\mathfrak{q}$ *un ideal primar și* $\mathfrak{a}$ *un ideal astfel încît* $\mathfrak{a} + \sqrt{\mathfrak{q}} \neq O$, *atunci* $\bigcap\limits_{\alpha\in I_{\mathfrak{a}}} (\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$.

În adevăr, există atunci un element $e \in O$, $e \notin a + \sqrt{\mathfrak{q}}$ și evident clasa lui $e - a$ este un nondivizor al lui zero în $O/\mathfrak{q}$ oricare ar fi $a \in \mathfrak{a}$.

DEFINIȚIE. *Un inel comutativ O cu element unitate îl numim cvasilocal dacă are un singur ideal maximal.*

Observație. Din consecința 4 rezultă că pentru un inel cvasilocal O cu idealul maximal $\mathfrak{m}$ faptul că $O \in D$ este echivalent cu $\bigcap\limits_{\alpha\in I_{\mathfrak{m}}} (\mathfrak{m}_\alpha + \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ pentru orice ideal $\mathfrak{a}$ al inelului O.

Fie O un inel cvasilocal și $\mathfrak{m}$ idealul său maximal; dacă O aparține clasei D, atunci din consecința 4 rezultă că în topologia indusă în inelul O de idealele $\mathfrak{m}_\alpha$, $\alpha \in I_{\mathfrak{m}}$ luate ca sistem de vecinătăți ale lui zero, toate idealele sînt închise. În cazul în care $\mathfrak{m}$ are bază finită, această topologie coincide cu cea dată de puterile lui $\mathfrak{m}$ ca sistem de vecinătăţi ale lui zero. Ţinînd seama de un rezultat al lui I. S. Cohen [4] găsim că

Inelele cvasilocale din clasa D pentru care idealul maximal are bază finită sînt noetheriene.

TEOREMA 3. *Fie O un inel comutativ cu element unitate. Dacă pentru orice ideal maximal $\mathfrak{p}$ al lui O inelul $O_{\mathfrak{p}}$ aparţine clasei D, atunci O aparţine clasei D.*

Demonstraţie. Fie $\mathfrak{a}$ un ideal al lui O. Pentru toate idealele maximale $\mathfrak{p}_\alpha$, $\alpha \in I$ ale inelului O considerăm idealul $\mathfrak{a}O_{\mathfrak{p}_\alpha}$ al lui $O_{\mathfrak{p}_\alpha}$ care conform ipotezei are descompunere în ideale primare

$$\mathfrak{a}O_{\mathfrak{p}_\alpha} = \bigcap_{i\in I_\alpha} \mathfrak{q}'_{i\alpha},$$

unde $\mathfrak{q}'_{i\alpha}$, $i \in I_\alpha$ sînt ideale primare în $O_{\mathfrak{p}_\alpha}$.

Considerăm idealul

$$\bar{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\substack{\alpha\in I\\ i\in I_\alpha}} \mathfrak{q}_{i\alpha}. \tag{3}$$

Să arătăm că $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$. Evident, $\mathfrak{a} \subset \bar{\mathfrak{a}}$. Fie $x \in \bar{\mathfrak{a}}$, atunci $x \in \mathfrak{a}O_{\mathfrak{p}_\alpha} \cap O$ oricare ar fi $\alpha \in I$. Aceasta înseamnă că pentru toţi $\alpha \in I_\alpha$ există $m_\alpha \in O\backslash\mathfrak{p}_\alpha$ şi un $a_\alpha \in \mathfrak{a}$ astfel încît $m_\alpha x = a_\alpha$ adică $x \in \mathfrak{a} : m_\alpha O$ oricare ar fi α. Aşadar

$$x \in \bigcap_{\alpha} (\mathfrak{a} : m_\alpha O) = \mathfrak{a} : \sum_{\alpha\in I} m_\alpha O = \mathfrak{a} : O = \mathfrak{a}$$

deoarece $\sum_{\alpha\in I} m_\alpha O$ nu aparţine nici unui ideal maximal.

Evident şi reciproca acestei teoreme este adevărată, adică dacă O este un inel din clasa D, atunci pentru orice sistem multiplicativ S care nu conţine pe 0, O_S aparţine deci lui D.

CONSECINŢA 5. *Dacă O este un inel în care idealele prime nenule sînt maximale, atunci O aparţine clasei D.*

§ 2. Fiind dat un inel O, ca de obicei spunem că $\dim O = n$, unde n este un număr întreg nenegativ, dacă pentru orice lanţ

$$\mathfrak{p}_0 < \mathfrak{p}_1 < \ldots < \mathfrak{p}_k \tag{1}$$

de ideale prime ale inelului O, avem $k \leqslant n$ şi există cel puţin un lanţ (1) cu $k = n$. Dacă în O pentru orice număr natural n există un lanţ de tipul (1) cu $k \geqslant n$, atunci o să punem $\dim O = \infty$.

DEFINIŢIE. *Un domeniu de integritate O spunem că aparţine clasei C dacă:*

a) $\dim O < \infty$;

b) *pentru orice ideal prim $\mathfrak{p}$ al lui O cu proprietatea că* $\dim O/\mathfrak{p} > 1$ *există idealele prime $\mathfrak{p}_i$, $i \in I$, astfel încît $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$ (evident în acest caz $\mathfrak{p}$ este chiar intersecţia idealelor prime minimale care conţin pe $\mathfrak{p}$).*

Se observă imediat că dacă $O \in C$, atunci şi orice factorizare a sa printr-un ideal prim aparţine clasei C.

LEMA 1. *Domeniile de integritate noetheriene cu dimensiune finită aparțin clasei* C.

Demonstrație. Să verificăm condiția *b*). Fie $\mathfrak{p}$ un ideal prim al unui domeniu de integritate noetherian O astfel încît din $\dim O/\mathfrak{p} > 1$. A arăta că $\mathfrak{p}$ este intersecție de ideale prime, revine la a arăta că în $O/\mathfrak{p}$ idealul (0) este intersecție de ideale prime, adică într-un domeniu de integritate noetherian O cu $\dim O > 1$ idealul (0) este intersecție de ideale prime. În adevăr, fie $\mathfrak{a} = \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathfrak{p}_\alpha$, unde $\mathfrak{p}_\alpha$, $\alpha \in I$, sînt ideale prime minimale $\neq (0)$ ale inelului O. Ele sînt în număr infinit, căci în caz contrar ar exista un element neinversibil al lui O care nu ar aparține nici unui ideal prin minimal ceea ce în inelele noetheriene nu este posibil. Dar datorită faptului că I este o mulțime infinită, rezultă $\mathfrak{a} = (0)$.

LEMA 2. *Dacă domeniul de integritate* O *aparține clasei* C *și* O' *este un domeniu de integritate întreg peste* O *atunci* $O' \in C$.

Demonstrație. Este suficient să considerăm cazul în care $\dim O > 1$ și să verificăm ultima condiție pentru idealul prim (0) al lui O'. Pentru aceasta să considerăm mulțimea M a idealelor prime diferite de (0) minimale din O' și $\mathfrak{a} = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in M} \mathfrak{p}$. Fie $\gamma \in \mathfrak{a}$; atunci γ verifică o relație de forma

$$\gamma^n + a_1 \gamma^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

unde $a_n \neq 0$ dacă $\gamma \neq 0$. Evident, $a_n \in \mathfrak{a} = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in M} \mathfrak{p}$, deci aparține tuturor idealelor prime nenule minimale din O, adică $a_n = 0$ și deci $\gamma = 0$ și, prin urmare, $\mathfrak{a} = (0)$.

CONSECINȚA 1. *Domeniile de integritate care sînt extinderi ale domeniilor de integritate noetheriene aparțin clasei* D.

TEOREMA 4. *Fie* O *un inel din clasa* C *și* $\mathfrak{a}$ *un ideal al său; avem* $\bigcap\limits_{\alpha \in I_\mathfrak{a}} \mathfrak{a}_\alpha = (0)$.

Demonstrație. Vom face demonstrația prin inducție în raport cu $\dim O$. Pentru cazul în care $\dim O = 1$, din consecința 5, § 1, rezultă că O aparține deci clasei D și din teorema 2, se deduce relația cerută. Presupunem proprietatea adevărată pentru toate inelele O din clasa C pentru care $\dim O < n$. Fie O un inel cu $\dim O = n$. Fie $\mathfrak{p}$ un ideal prim nenul minimal al inelului O; atunci $\dim O/\mathfrak{p} < n$ și dacă se notează cu $\bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathfrak{a}}_\alpha$ respectiv imaginile lui $\mathfrak{a}$ și $\mathfrak{a}_\alpha$ în inelul $O/\mathfrak{p}$ din ipoteza inductivă rezultă $\bigcap\limits_{\alpha \in I_\mathfrak{a}} \bar{\mathfrak{a}}_\alpha = (0)$ (căci dacă se notează cu $\bar{\mathfrak{a}}'$, $\alpha \in I_{\bar{\mathfrak{a}}}$, idealele din O care au același radical ca și $\mathfrak{a}$, avem evident $\bigcap\limits_{\alpha \in I_{\bar{\mathfrak{a}}}} \mathfrak{a}'_\alpha \supset \bigcap\limits_{\alpha \in I_\mathfrak{a}} \bar{\mathfrak{a}}_\alpha$), adică $\bigcap\limits_{\alpha \in I_\mathfrak{a}} (\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ și deci cu atît mai mult $\bigcap\limits_{\alpha \in I_\mathfrak{a}} \mathfrak{a}_\alpha \subset \mathfrak{p}$. Această relație fiind adevărată oricare ar fi idealul prim nenul minimal al inelului O, rezultă că $\bigcap\limits_{\alpha \in I_\mathfrak{a}} \mathfrak{a}_\alpha$ aparține tuturor acestor ideale și deci $\bigcap\limits_{\alpha \in I_\mathfrak{a}} \mathfrak{a}_\alpha = (0)$.

CONSECINŢA 2. *Dacă O' este un domeniu de integritate întreg peste inelul local noetherian O cu idealul maximal* $\mathfrak{m}$, *atunci* $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n O' = (0)$ [1].

În adevăr, avem

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n O' = \bigcap_{\alpha \in I_{\mathfrak{m}O'}} \mathfrak{m}'_\alpha = (0).$$

Primită la redacţie la 8 octombrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. C. CHEVALLEY, *La notion d'anneau de décomposition*. Nagoya Math. J., **7**, june, 21—33 (1954).
2. S. MORI, *Über den Durchschnitt* $\bigcap\limits_{\alpha} \mathfrak{a}_\alpha$ *der ideale* $\mathfrak{a}_\alpha$. Memoirs of the College of Sciences University of Kyoto A., Math., **29**, 79—91 (1955).
3. O. ZARISKI and P. SAMUEL, *Commutative Algebra*, vol. I şi II D. Van Nostrand, 1958, 1960.
4. I. S. COHEN, *On the Structure and Ideal Theory of Complete Local Rings*. Trans. Amer. Math. Soc., **59**, 54—106 (1946).

O METODĂ DE APROXIMARE A DEFORMĂRII CURBELOR DE ÎNCĂRCARE. II

DE

M. P. MIHĂILESCU

Se consideră ecuația curbei de încărcare a unui material, pentru o stare bidimensională de tensiune, sub forma

$$y = y\,(x)$$

Efectuînd, dintr-un punct C al acestei curbe, o încărcare oarecare de mărime P, curba se va deforma mai accentuat în partea încărcării și mai puțin în partea opusă (efectul Bauschinger). Forma pe care o ia curba în urma încărcării permite aproximarea deformării acestei curbe cu deformarea unui fir flexibil sub acțiunea unei forțe concentrate, problemă tratată în [1].

Utilizînd ecuațiile de echilibru ale firului flexibil sub forma diferențială, se poate da o soluție mai exactă, ce urmărește mai ușor proprietățile caracteristice unui anumit material, eventual apariția anizotropiei în timpul deformării.

Se presupune că porțiunea de curbă situată de partea încărcării și limitată de punctele A și B (figură), în care tangenta la curbă are aceeași direcție cu încărcarea, se deformează ca un fir flexibil supus acțiunii unei forțe concentrate P în punctul C, și care deplasează curba în acest punct din C în C', ale cărui coordonate sînt cunoscute. După deformare, firul $AC'B$ va păstra la capete două porțiuni comune cu firul nedeformat ACB, fie ele AE și BD; astfel problema se reduce la aflarea ecuației curbei $EC'D$, care trece prin punctul cunoscut C'.

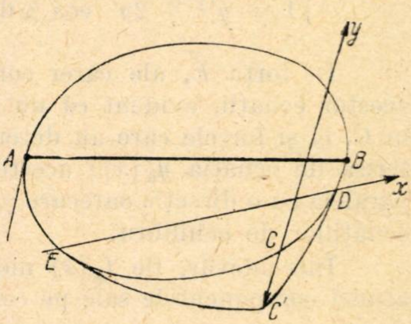


Fig.

Sistemul de coordonate în care se va lucra este indicat în figură: axa x este dirijată după dreapta ce uneşte punctele E şi D, iar axa y după direcţia de încărcare. Relativ la acest sistem, ecuaţia curbei iniţiale ECD este dată de:

$$y = y_0(x) \text{ pentru } a \leqslant x \leqslant b. \tag{1}$$

Ecuaţiile de echilibru ale unui fir flexibil sînt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) &= -f_1, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) &= -f_2, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

unde T este tensiunea în fir, dirijată în fiecare punct după tangentă, iar $\vec{F}(f_1, f_2)$ forţa care acţionează asupra elementului de arc $\mathrm{d}s$. Deoarece axele sînt oblice şi formează un unghi β, elementul de arc $\mathrm{d}s$ se exprimă prin relaţia:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \sqrt{1 + y'^2 - 2y'\cos\beta}\,\mathrm{d}x \text{ pentru } x < x_1, \\ \mathrm{d}s &= \sqrt{1 + y'^2 + 2y'\cos\beta}\,\mathrm{d}x \text{ pentru } x > x_1, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

unde x_1 este punctul pentru care $y'(x_1) = 0$; deci ecuaţiile de echilibru se mai scriu:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 \mp 2y'\cos\beta}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{T}{\sqrt{1 + y'^2 \mp 2y'\cos\beta}}\right) &= -f_1, \\ \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 \mp 2y'\cos\beta}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{Ty'}{\sqrt{1 + y'^2 \mp 2y'\cos\beta}}\right) &= -f_2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

În forţa $\vec{F}$, ale cărei componente figurează în membrul drept al acestor ecuaţii, evident că nu intră numai forţa concentrată P aplicată în C, ci şi forţele care au determinat iniţial firul ECD să ia forma descrisă de ecuaţia $y_0(x)$; aceste forţe se pot exprima printr-o distribuţie paralelă cu o direcţie oarecare γ, cu $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$, şi se calculează cu ajutorul ecuaţiilor de echilibru.

Într-adevăr, fie $f_0(x)$ modulul forţei ce acţionează în punctul x; atunci componentele sale pe cele două axe vor fi:

$$\left.\begin{aligned} f_{0x} &= -f_0\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin\beta} \\ f_{0y} &= -f_0\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

şi vor verifica împreună cu funcţia $y_0(x)$ ecuaţiile :

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+y_0'^2 \mp 2y_0'\cos\beta}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{T}{\sqrt{1+y_0'^2\mp 2y_0'\cos\beta}}\right)&=f_0\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta},\\ \frac{1}{\sqrt{1+y_0'^2 \mp 2y_0'\cos\beta}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{Ty_0'}{\sqrt{1+y_0'^2\mp 2y_0'\cos\beta}}\right)&=f_0\frac{\sin\gamma}{\sin\beta},\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

unde semnul de sub radical este luat după cum x este mai mic sau mai mare decît x_0, pentru care $y_0'(x_0)=0$. Deoarece

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{Ty_0'}{\sqrt{1+y_0'^2\mp 2y_0'\cos\beta}}\right)=y_0'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{T}{\sqrt{1+y_0'^2\mp 2y_0'\cos\beta}}\right)+\\ +\frac{Ty_0''}{\sqrt{1+y_0'^2\mp 2y_0'\cos\beta}},$$

din cele două ecuaţii de mai sus se obţine

$$f_0\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=y_0'f_0\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta}+y_0''\frac{T}{1+y_0'^2\mp 2y_0'\cos\beta} \tag{7}$$

sau

$$\frac{f_0}{\sin\beta}=\frac{Ty_0''}{[\sin\gamma-y_0'\sin(\beta-\gamma)]\,(1+y_0'^2\mp 2y_0'\cos\beta)}. \tag{8}$$

Pentru a calcula pe $T=T(x)$ se introduce expresia găsită pentru $\dfrac{f_0}{\sin\beta}$ în prima ecuaţie de echilibru :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{T}{\sqrt{1+y_0'^2\mp 2y_0'\cos\beta}}\right)=\frac{Ty_0''\sin(\beta-\gamma)}{[\sin\gamma-y_0'\sin(\beta-\gamma)]\sqrt{1+y_0'^2\mp 2y_0'\cos\beta}}. \tag{9}$$

Expresia (9) este o ecuaţie diferenţială în T, a cărei soluţie este :

$$T=\frac{T_0\sqrt{1+y_0'^2\mp 2y_0'\cos\beta}}{\sin\gamma-y_0'\sin(\beta-\gamma)}. \tag{10}$$

Cunoscînd funcţia $T(x)$, rezultă imediat şi expresia distribuţiei $f_0(x)$:

$$f_0^{1,2}(x,\gamma)=\frac{T_0\,y_0''\sin\beta}{[\sin\gamma-y_0'\sin(\beta-\gamma)]^2\sqrt{1+y_0'^2\mp 2y_0'\cos\beta}}. \tag{11}$$

Se observă că funcţiile $T(x)$ şi $f_0(x)$ sînt calculate excepţie făcînd de o constantă multiplicativă ; într-adevăr, înmulţind ecuaţiile de echilibru cu o constantă arbitrară, rezultă că sistemul format din $f_0(x)$, respectiv $T(x)$ înmulţite cu acea constantă, verifică aceleaşi ecuaţii ; cu alte cuvinte constanta de integrare T_0 din expresia lui $f_0(x)$ poate fi aleasă astfel încît calculele ulterioare să fie simplificate.

Pentru calculul stării de echilibru a porțiunii EC' a firului, atunci cînd asupra sa acționează, în afară de distribuția $f_0(x)$, și o forță concentrată P într-un punct C, se introduc în ecuațiile de echilibru, în locul forțelor f_1 și f_2, componentele distribuției $f_0^{1,2}(x, \gamma)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 \mp 2y' \cos\beta}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{T}{\sqrt{1 + y'^2 \mp 2y' \cos\beta}}\right) &= f_0^{1,2} \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin\beta}, \\ \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 \mp 2y' \cos\beta}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{Ty'}{\sqrt{1 + y'^2 \mp 2y' \cos\beta}}\right) &= f_0^{1,2} \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Utilizînd aceleași substituții ca mai sus, se obține

$$\frac{y''}{[\sin\gamma - y' \sin(\beta - \gamma)]^2 \sqrt{1 + y'^2 \mp 2y' \cos\beta}} = \frac{f_0^{1,2}}{T_1 \sin\beta}, \tag{13}$$

unde noua constantă de integrare a fost notată cu T_1.

Integrînd această expresie de la a la x, avem

$$\int_a^x \frac{y''\,\mathrm{d}x}{[\sin\gamma - y' \sin(\beta - \gamma)]^2 \sqrt{1 + y'^2 \mp 2\,y' \cos\beta}} = \frac{1}{T_1 \sin\beta} \int_a^x f_0^{1,2}\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

Integrala primului membru va fi

$$\int_a^x \frac{y''\,\mathrm{d}x}{[\sin\gamma - y' \sin(\beta - \gamma)]^2 \sqrt{1 + y'^2 \mp 2y' \cos\beta}} = \\ = \frac{1}{\sin(\beta - \gamma)} \int_A^B \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\dfrac{a_{1,2}\,t^2 + 2b_{1,2}\,t + 1}{t^2 \sin^2(\beta - \gamma)}}} \tag{15}$$

cu

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sin\gamma - y'(a) \sin(\beta - \gamma)} \\ B &= \frac{1}{\sin\gamma - y' \sin(\beta - \gamma)} \end{aligned} \tag{16}$$

adică

$$\int_a^x \frac{y''\,\mathrm{d}x}{[\sin\gamma - y' \sin(\beta - \gamma)]^2 \sqrt{1 + y'^2 \mp 2y' \cos\beta}} = \left[\frac{1}{a_{1,2}} \sqrt{a_{1,2}\,t^2 + 2b_{1,2}\,t + 1} - \right. \\ \left. - \frac{b_{1,2}}{a_{1,2}\sqrt{a_{1,2}}} \ln 2\left(\sqrt{a_{1,2}(a_{1,2}\,t^2 + 2b_{1,2}\,t + 1)} + a_{1,2}\,t + b_{1,2}\right)\right]_A^B. \tag{17}$$

Primul semn ce trebuie considerat sub radical este semnul —, pentru $x < x_1$, cu $y'(x_1) = 0$. Dacă ordonata y^0 a punctului C' este mai mare decît $y_0(x_0)$, atunci este evident că $x_1 = 0$ și pentru calculul porțiunii EC'

nu se întrebuințează decît prima serie de coeficienți a_1 și b_1; însă, dacă $y^0 < y_0(x_0)$, atunci x_1 nu este cunoscut. Pentru a-l putea obține, se calculează y' din expresia (11), unde sub radical se consideră prima serie de coeficienți a_1, b_1, și se găsește x_1 din relația $y'(x_1) = 0$.

Calculul lui $y'(x)$ pentru $x > x_1$ se va face din expresia integrată (17), unde limitele de integrare sînt luate în felul următor:

$$\left[\frac{1}{a_1}\sqrt{a_1 t^2 + 2b_1 t + 1} - \frac{b_1}{a_1\sqrt{a_1}} \ln 2\left(\sqrt{a_1(a_1 t^2 + 2b_1 t + 1)} + a_1 t + b_1\right)\right]_A^C +$$

$$+ \left[\frac{1}{a_2}\sqrt{a_2 t^2 + 2b_2 t + 1} - \frac{b_2}{a_2\sqrt{a_2}} \ln 2\left(\sqrt{a_2(a_2 t^2 + 2b_2 t + 1} + a_2 t + b_2\right)\right]_C^B, \quad (18)$$

unde

$$C = \frac{1}{\sin\gamma - y'(x_1)\sin(\beta - \gamma)} = \frac{1}{\sin\gamma}. \quad (19)$$

Integrala membrului al doilea va fi

$$\int_a^x f_0^{1,2}\, \mathrm{d}x = \int_a^x f_0^1\, \mathrm{d}x \quad \text{dacă } x_0 \geqslant x \quad (20)$$

și

$$\int_a^x f_0^{1,2}\, \mathrm{d}x = \int_a^{x_0} f_0^1\, \mathrm{d}x + \int_{x_0}^x f_0^2\, \mathrm{d}x \quad \text{dacă } x_0 \leqslant x \quad (21)$$

ceea ce, ținînd seama de expresia lui $f_0^{1,2}(x, \gamma)$, se scrie

$$\int_a^x f_0^1\, \mathrm{d}x = T_0 \sin\beta \left[\frac{1}{a_1}\sqrt{a_1 t^2 + 2b_1 t + 1} -\right.$$

$$\left. - \frac{b_1}{a_1\sqrt{a_1}} \ln 2\left(\sqrt{a_1(a_1 t^2 + 2b_1 t + 1)} + a_1 t + b_1\right)\right]_{\frac{1}{\sin\gamma - y_0'(a)\sin(\beta-\gamma)}}^{\frac{1}{\sin\gamma - y_0'\sin(\beta-\gamma)}} \quad (22)$$

$$\int_{x_0}^x f_0^2\, \mathrm{d}x = T_0 \sin\beta \left[\frac{1}{a_2}\sqrt{a_2 t^2 + 2b_2 t + 1} -\right.$$

$$\left. - \frac{b_2}{a_2\sqrt{a_2}} \ln 2\left(\sqrt{a_2(a_2 t^2 + 2b_2 t + 1)} + a_2 t + b_2\right)\right]_{\frac{1}{\sin\gamma}}^{\frac{1}{\sin\gamma - y_0'\sin(\beta-\gamma)}}. \quad (23)$$

Astfel, după integrarea ecuațiilor de echilibru, se obține, în general, o relație de forma:

$$h(y') = h(y_0')$$

care, explicitată în raport cu y', devine

$$y' = p\,(y_0')$$

și integrînd de la a la x:

$$y = \int_a^x p\,(y_0')\,\mathrm{d}x \tag{24}$$

Se observă că expresia lui y depinde de raportul $\frac{T_0}{T_1}$. Determinarea acestui raport se face din condiția ca firul EC' să treacă prin punctul C' de ordonată y^0:

$$y\,(0) = y^0$$

Astfel soluția este construită în întregime, pe porțiunea $a \leqslant x \leqslant 0$; în expresia ei mai figurează însă unghiul necunoscut β care va fi ales, în funcție de materialul a cărui curbă de încărcare este supusă deformării, astfel încît curba obținută EC' să corespundă cît mai bine rezultatelor experimentale.

Pentru a obține ecuația porțiunii DC', se refac toate raționamentele și calculele, însă începînd din punctul $x = b$. În expresia integrată limita interioară de integrare va fi b, iar $y\,(0) = y^0$ va fi condiția din care se determină raportul T_0/T_2, unde T_2 este valoarea constantă de integrare pentru această porțiune de curbă.

Mai jos se vor expune mai pe larg soluțiile referitoare la cîteva valori ale lui γ, ce permit un calcul simplificat.

1°. Pentru cazul $x_1 \leqslant 0$, deci pentru porțiunea $x \geqslant 0$ a curbei, sub radicalul din expresia (11) apare doar semnul $-$; în acest caz, dacă se alege

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta \left(\text{sau } \gamma = \beta - \frac{\pi}{2} \text{ pentru } \beta \geqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

integrarea se face repede sub o formă relativ simplă.

Într-adevăr, introducînd această valoare a lui γ în expresia lui f_0, se obține

$$f_0\left(x, \frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{y_0'' \, T_0 \sin\beta}{(y_0' + \cos\beta)^2 \sqrt{1 + y_0'^2 + 2y_0' \cos\beta}}$$

iar ecuația de echilibru are forma

$$\frac{y''}{(y' + \cos\beta)^2 \sqrt{1 + y'^2 + 2y'\cos\beta}} = \frac{T_0}{T_1} \cdot \frac{y''}{(y_0' + \cos\beta)^2 \sqrt{1 + y_0'^2 + 2y_0'\cos\beta}}.$$

Integrînd obținem

$$-\frac{1}{(y' + \cos\beta)\sqrt{1 + y'^2 + 2y'\cos\beta}} - \frac{1}{\sin^2\beta} \cdot \frac{y' + \cos\beta}{\sqrt{1 + y'^2 + 2y'\cos\beta}}\Bigg|_b^x =$$

$$= -\frac{T_0}{T_1}\left[\frac{1}{(y_0' + \cos\beta)\sqrt{1 + y_0'^2 + 2y_0'\cos\beta}} + \frac{y_0' + \cos\beta}{\sin^2\beta\sqrt{1 + y_0'^2 + 2y_0'\cos\beta}}\right|_b^x$$

de unde

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2 + 2y' \cos \beta}}{y' + \cos \beta} = \varphi(x);$$

ridicînd la pătrat se obține expresia lui y'

$$y' = -\cos \beta \pm \frac{\sin \beta}{\sqrt{\varphi^2 - 1}}.$$

Pentru ca $y'(b) = y_0'(b)$, trebuie ca în expresia lui y' să fie ales semnul +, deci printr-o nouă integrare:

$$y = -\cos \beta (x - b) + \sin \beta \int_b^x \frac{du}{\sqrt{\varphi^2(u) - 1}}.$$

Din condiția

$$b \cos \beta = \sin \beta \int_0^b \frac{du}{\sqrt{\varphi^2(u) - 1}}$$

se determină raportul T_0/T_1.

2°. Cazul $\beta = \gamma$. Expresia lui f_0 în acest caz va fi

$$f_0^{1,2}(x, \beta) = \frac{T_0 y_0''}{\sin \beta \sqrt{1 + y_0'^2 \mp 2y_0' \cos \beta}}$$

iar ecuația de echilibru

$$\frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2 \mp 2y' \cos \beta}} = \frac{T_0}{T_1} \cdot \frac{y_0''}{\sqrt{1 + y_0'^2 \mp 2y_0' \cos \beta}}.$$

Integrînd obținem

$$\ln\left(y' \mp \cos \beta + \sqrt{1 + y'^2 \mp 2y' \cos \beta}\right)_{a,b}^{x} =$$

$$= \frac{T_0}{T_1} \ln\left(y_0' \mp \cos \beta + \sqrt{1 + y_0'^2 \mp 2y_0' \cos \beta}\right)_{a,b}^{x}$$

sau, în general,

$$y' \mp \cos \beta + \sqrt{1 + y'^2 \mp 2y' \cos \beta} = g(x)$$

de unde

$$y' = -\frac{\sin^2 \beta \pm 2g(x) \cos \beta}{2g(x)}$$

şi

$$y = -\frac{\sin^2\beta}{2}\int_{a,b}^{x}\frac{du}{g(u)} \mp \cos\beta\int_{a,b}^{x} g(u)\,du$$

iar condiţia

$$\frac{\sin^2\beta}{2}\int_{a,b}^{0}\frac{du}{g(u)} = \mp \cos\beta\int_{a,b}^{0} g(u)\,du$$

determină raportul T_0/T_1.

Primită la redacţie la 30 august 1963

BIBLIOGRAFIE

1. MIHĂILESCU, M. P., *O metodă de aproximare a deformării curbelor de încărcare* (I). Studii şi cercetări matematice, XV, *1* (1964).
2. NAGHDI, P. M., *Stress-Strain Relations in Plasticity and Thermoplasticity*. Plasticity, Proc. Second Symp. Nav. Struct. Mech. Pergamon Press, 1960.
3. ЩЕДРОВ, *Основы механики гибкой нити*. Москва.

ASUPRA UNUI CAZ DE ECHILIBRU AL CORPURILOR ELASTICE IZOTROPE

DE

ANA DAVIDESCU MOISIL

Cazul nou particular al teoriei elasticității ce-l vom studia este cel pentru care rotația locală:

$$\omega_x, \ \omega_y, \ \omega_z$$

și tensiunile:

$$\sigma_x, \ \sigma_y, \ \sigma_z, \ \tau_{yz}, \ \tau_{zx}, \ \tau_{xy}$$

sînt independente de z, adică

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial z} = \frac{\partial \omega_y}{\partial z} = \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

și

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Condițiile (2) echivalează cu condiția ca deformările:

$$\varepsilon_x, \ \varepsilon_y, \ \varepsilon_z, \ \gamma_{yz}, \ \gamma_{zx}, \ \gamma_{xy}$$

să fie independente de z, deci

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Legea lui Hooke, izotropă:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\,[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\,\tau_{yz} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

precum și definițiile lui $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{yz}, \ldots, \omega_z$, dau :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)],\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2G}\,\tau_{xy} - \omega_z,\\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2G}\,\tau_{zx} + \omega_y\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

. . . .

Ținînd seama de (1) și (2), condițiile de completă integrabilitate arată că :

$$\begin{aligned}
\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) &= a\\
\tau_{zx} + 2G\,\omega_y &= b\\
\tau_{yz} - 2G\,\omega_x &= c
\end{aligned} \tag{6}$$

a, b, c fiind constante ; neglijînd o deplasare solidă vom lua $a = b = c = 0$. Celelalte trei condiții de integrabilitate

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2G}\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial y} &= \frac{1}{2G}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_x}{\partial x}\\
\frac{1}{2G}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial y} &= -\frac{\mu}{E}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{E}\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} - \frac{\mu}{E}\frac{\partial \sigma_z}{\partial x}\\
\frac{1}{E}\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} - \frac{\mu}{E}\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\mu}{E}\frac{\partial \sigma_z}{\partial y} &= \frac{1}{2G}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x}
\end{aligned} \tag{7}$$

în care înlocuim pe σ_z, τ_{zy}, τ_{zx} cu $\mu(\sigma_x + \sigma_y)$, $2G\,\omega_x$, $-\,2G\,\omega_y$, împreună cu ecuațiile lui Cauchy :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0\\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\\
\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0
\end{aligned} \tag{8}$$

dau un sistem de șase ecuații pentru funcțiile :

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy},\ \omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z\,.$$

Ecuația

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0 \tag{9}$$

leagă funcțiile ω_x, ω_y, ω_z.

Vom pune sistemul sub o formă în care σ_x, σ_y, τ_{xy} şi ω_z sînt legate de patru ecuaţii :

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{E}{1-\mu^2}\,\frac{\partial \omega_z}{\partial x}\\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\\ \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{1-\mu^2}{E}\,\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1-\mu^2}{E}\,\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\end{gathered} \tag{10}$$

iar τ_{yz} şi τ_{zx} sînt legate de ecuaţiile :

$$\begin{gathered}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 0\\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0\end{gathered} \tag{11}$$

$\tau_{yz} + i\tau_{zx}$ este deci o funcţie monogenă de $x + iy$.

Ecuaţiile (10) se pot scrie

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - j\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \tag{12}$$

unde

$$\varphi = \{\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy},\ \omega_z\} \tag{13}$$

iar

$$j = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\dfrac{E}{1-\mu^2}\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{1-\mu^2}{E} & \dfrac{1-\mu^2}{E} & 0 & 0 \end{Bmatrix}. \tag{14}$$

Vom aplica sistemului (10), metoda aplicată de acad. Gr. C. Moisil.

Se consideră polinomul :

$$f(S) = \begin{vmatrix} -S & 0 & 1 - \dfrac{E}{1-\mu^2} \\ 0 & -S & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -S & 0 \\ \dfrac{1-\mu^2}{E} & \dfrac{1-\mu^2}{E} & 0 & -S \end{vmatrix} \tag{15}$$

Dezvoltînd determinantul se găsește :

$$f(S) = (S^2 + 1)^2 \tag{16}$$

deci j satisface ecuația lui Sobrero :

$$(j^2 + 1)^2 = 0. \tag{17}$$

Se consideră funcția hipercomplexă ([1] — [7]) :

$$F = \sigma_y + \left(\tau_{xy} + \frac{E}{1-\mu^2}\,\omega_z\right) j - \sigma_x j^2 + \tau_{xy} j^3$$

și variabila hipercomplexă :

$$z = x + jy$$

Se vede că

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - j\frac{\partial}{\partial x}\right) F = 0$$

deoarece coeficienții lui $1, j, j^2, j^3$ din dezvoltarea lui $\left(\frac{\partial}{\partial y} - j\frac{\partial}{\partial x}\right) F$ sînt nuli în virtutea ecuațiilor (10). Se deduce că :

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$$

este independentă de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Primită la redacție la 20 iunie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. L. SOBRERO, *Algebra delle funzioni ipercomplexe e sue applicazioni alla teoria dell'elasticitá.* Memorie dell'Academia d'Italia, **VI**, 1—64 (1939).
2. — *Theorie der ebenen Elastizität unter Benutzung eines Systems hyperkomplexer Zahlen.* Leipzig, 1934.

3. GR. C. MOISIL, *Sisteme de ecuații cu derivate parțiale și numere hipercomplexe.* Analele Academiei R.P.R., seria A, **II**, 409 (memorial 14) (1949).

4. — *Metoda funcțiilor de variabilă hipercomplexă în hidrodinamica plană a lichidelor viscoase incompresibile.* Studii și cercetări matematice, **I**, 9 (1950).

5. MARIA IACOVACHE, *Aplicarea funcțiilor monogene în sensul lui Feodorov la teoria elasticității corpurilor cu izotropie transversă.* Revista Universității „C. I. Parhon" și a Politehnicii din București, seria științele naturii, **I**, 63.

6. GR. C. MOISIL, *Asupra unei formule de medie.* Revista Universității „C. I. Parhon" și a Politehnicii București, **I**.

7. — *L'application des founctions monogènes d'une variable hypercomplexe dans la théorie de l'elasticité plane des corps anisotropes.* Colloque de Krinica (Pologne), 1962.

ASUPRA ECUAŢIILOR ELASTICITĂŢII ANIZOTROPE

DE

ANA DAVIDESCU MOISIL

Se consideră cazul particular al tensiunilor şi rotaţiei locale independente de z, adică

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

şi

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial z} = \frac{\partial \omega_y}{\partial z} = \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Condiţiile (1) echivalează cu :

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Legea lui Hooke, generalizată, pentru corpurile anizotrope :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{zx} + a_{16}\tau_{xy} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{yz} &= a_{41}\sigma_x + a_{42}\sigma_y + a_{43}\sigma_z + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{zx} + a_{46}\,\tau_{xy} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

precum şi definiţiile lui $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{yz}, \ldots, \omega_z$ dau :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + \ldots + a_{16}\,\tau_{xy} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2}\gamma_{xy} - \omega_z \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2}\gamma_{zx} + \omega_y \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{5}$$

Din condiţiile de completă integrabilitate, ale funcţiilor u, v, w, rezultă 9 ecuaţii din care trei sînt :

$$\begin{gathered}
a_{51}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+a_{52}\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+a_{53}\frac{\partial\sigma_z}{\partial y}+a_{54}\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+a_{55}\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial y}+a_{56}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}-2\frac{\partial\omega_y}{\partial y}=\\
=a_{41}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+a_{42}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+a_{43}\frac{\partial\sigma_z}{\partial x}+a_{44}\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}+a_{45}\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+a_{46}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+2\frac{\partial\omega_x}{\partial x},\\
a_{61}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+a_{62}\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+a_{63}\frac{\partial\sigma_z}{\partial y}+a_{64}\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+a_{65}\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial y}+a_{66}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+2\frac{\partial\omega_z}{\partial y}=\\
=2a_{21}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+2a_{22}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+2a_{23}\frac{\partial\sigma_z}{\partial x}+2a_{24}\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}+2a_{25}\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+2a_{26}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\\
2a_{11}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+2a_{12}\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+2a_{13}\frac{\partial\sigma_z}{\partial y}+2a_{14}\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+2a_{15}\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial y}+2a_{16}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=\\
=a_{61}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+a_{62}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+a_{63}\frac{\partial\sigma_z}{\partial x}+a_{64}\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}+a_{65}\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+a_{66}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}-2\frac{\partial\omega_z}{\partial x}
\end{gathered}\tag{6}$$

iar celelalte şase dau relaţii finite care se pot reduce la :

$$\begin{gathered}
a_{31}\,\sigma_x+a_{32}\,\sigma_y+a_{33}\,\sigma_z+a_{34}\,\tau_{yz}+a_{35}\,\tau_{zx}+a_{36}\,\tau_{xy}=0\\
a_{41}\,\sigma_x+a_{42}\,\sigma_y+a_{43}\,\sigma_z+a_{44}\,\tau_{yz}+a_{45}\,\tau_{zx}+a_{46}\,\tau_{xy}-2\omega_x=0\\
a_{51}\,\sigma_x+a_{52}\,\sigma_y+a_{53}\,\sigma_z+a_{54}\,\tau_{yz}+a_{55}\,\tau_{zx}+a_{56}\,\tau_{xy}+2\omega_y=0.
\end{gathered}\tag{7}$$

Ecuaţiile (3) dau :

$$\frac{\partial\omega_y}{\partial y}=-\frac{\partial\omega_x}{\partial x}.\tag{8}$$

Funcţiile σ_x, σ_y, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy} şi ω_z satisfac deci următoarele şase ecuaţii :

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}=A_1\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+A_2\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+A_3\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}+A_4\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+A_5\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+A_6\frac{\partial\omega_z}{\partial x}\\
\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=-\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\\
\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=-\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}\\
\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial y}=B_1\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+B_2\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+B_3\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}+B_4\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+B_5\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+B_6\frac{\partial\omega_z}{\partial x}\\
\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=-\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\\
\frac{\partial\omega_z}{\partial y}=C_1\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+C_2\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+C_3\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}+C_4\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+C_5\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+C_6\frac{\partial\omega_z}{\partial x}
\end{gathered}\tag{9}$$

Valorile lui $A_1, \ldots, B_4$ sînt prea complicate spre a fi date aici. Sistemul (9) se poate scrie sub forma :

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - j\frac{\partial}{\partial x}\right)\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}, \omega_z\} = 0 \tag{10}$$

unde matricea j este

$$j = \begin{Bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \end{Bmatrix}. \tag{11}$$

Determinantul lui Cayley Hamilton va fi :

$$D(S) = \begin{vmatrix} A_1 - S & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 0 & -S & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -S & -1 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 - S & B_4 - S & B_5 & B_6 \\ -1 & 0 & 0 & & -S & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 - S \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Determinantul este de forma

$$D(S) = F_6 S^6 - F_5 S^5 + F_4 S^4 - F_3 S^3 + F_2 S^2 - F_1 S + F_0, \tag{13}$$

deci se capătă

$$D(S) = l_4 l_2 - l_3^2 = 0, \tag{14}$$

unde

$$\begin{aligned} l_4(S) &= \beta_{11} S^4 - 2\beta_{16} S^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66}) S^2 - 2\beta_{26} S + \beta_{22}, \\ l_3(S) &= \beta_{15} S^3 - (\beta_{14} + \beta_{56}) S^2 + (\beta_{25} + \beta_{46}) S - \beta_{24} = 0, \\ l_2(S) &= \beta_{55} S^2 - 2\beta_{45} S + \beta_{44}, \end{aligned} \tag{15}$$

cu

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}\, a_{j3}}{a_{33}}, \qquad (i, j = 1, 2, 4, 5, 6).$$

Ecuaţia (14) coincide cu cea dată de Lehniţki.

Forma (10) permite aplicarea metodei funcţiilor monogene de variabilă hipercomplexă.

Primită la redacţie la 20 iulie 1963

GRUPURI DE MIŞCĂRI ALE SPAŢIILOR V_3 CU METRICA INDEFINITĂ

DE

LEŢ LUPU

În lucrarea [1] acad. Gh. Vrănceanu a arătat că o transformare infinitezimală ce lasă invariantă forma pătratică $\pm (x^2 - yz)$ se scrie sub forma

$$U = A\left(z\frac{\partial f}{\partial z} - y\frac{\partial f}{\partial y}\right) + B\left(x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}z\frac{\partial f}{\partial x}\right) - C\left(\frac{1}{2}y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

unde A, B, C sînt componentele unui vector contravariant, a cărui lungime l este dată de $l^2 = A^2 - BC$ şi se poate întotdeauna reduce transformarea U la forma canonică

$$U = x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}z\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon\left(x\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2}y\frac{\partial f}{\partial x}\right), \tag{1}$$

unde $\varepsilon = \pm 1$ sau $\varepsilon = 0$.

O transformare infinitezimală în spaţiul pseudo-euclidian, în care lungimile sînt definite de forma pătratică $x^2 - yz$, poate fi considerată o rotaţie, o pseudo-rotaţie sau o transformare ce păstrează una din generatoarele conului $x^2 - yz = 0$, după cum $\varepsilon = -1$, $\varepsilon = 1$ sau $\varepsilon = 0$.

Vom considera spaţii omogene V_3, în care grupul de stabilitate este generat de o transformare pseudo-euclidiană adusă la forma canonică (1).

Pentru $\varepsilon = -1$ grupul de stabilitate va fi dat de rotaţii şi în acest caz avem un spaţiu V_3 cu metrică definită pozitiv sau nu ale cărui grupuri de mişcări au fost studiate de acad. Gh. Vrănceanu în lucrarea [2].

În lucrarea de faţă ne propunem să găsim grupuri de mişcări ale spaţiului Riemann V_3 cu metrică indefinită pornind de la grupul de stabilitate format din pseudo-rotaţii (cazul $\varepsilon = 1$) şi de transformări ce păstrează una din generatoare (cazul $\varepsilon = 0$).

Considerăm mai întîi al doilea caz : $\varepsilon = 0$.

Atunci transformarea U capătă forma

$$U = x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}z\frac{\partial f}{\partial x}$$

Să determinăm un grup G_4 tranzitiv format din operatori de forma

$$X = \frac{\partial f}{\partial x} + \ldots, Y = \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots, Z = \frac{\partial f}{\partial z} + \ldots, U = x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}z\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad (2)$$

unde punctele țin locul unor termeni ce se anulează în originea $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Parantezele lui Poisson formate de primii trei operatori cu ultimul sînt de forma

$$(XU) = Y + \alpha U, \ (YU) = \beta U, \ (ZU) = \frac{1}{2}X + \gamma U,$$

unde α, β, γ sînt constante.

Înlocuind pe X cu $X - 2\gamma U$, iar pe Y cu $Y - \alpha U$, parantezele de sus devin

$$(XU) = Y, \ (YU) = \beta U, \ (ZU) = \frac{1}{2}X. \qquad (3)$$

Formînd identitatea lui Iacobi cu operatorii X, Y, U, obținem

$$(XY)U + (YU)X + (UX)Y = 0,$$

sau, ținînd seama de (3),

$$(XY)U + \beta(UX) = 0,$$

de unde rezultă

$$(XY)U = \beta(XU) = \beta Y.$$

Luînd paranteza Poisson (XY) sub forma generală

$$(XY) = mX + nY + pZ + qU,$$

unde m, n, p, q sînt constante, va rezulta, prin înmulțire cu U,

$$(XY)U = m(XU) + n(YU) + p(ZU),$$

sau, ținînd seama de (3),

$$mY + n\beta U + \frac{1}{2}pX = \beta Y.$$

Rezultă deci

$$m = \beta, \ n\beta = 0, \ p = 0. \qquad (3')$$

Scriind identitatea formată cu operatorii X, U, Z, vom obţine

$$(XZ)U + (ZU)X + (UX)Z = 0,$$

sau, ţinînd seama de (3),

$$(XZ)U - (YZ) = 0,$$

de unde rezultă

$$(YZ) = (XZ)U.$$

Luînd paranteza (XZ) sub forma generală

$$(XZ) = aX + bY + cZ + dU, \tag{4}$$

cu a, b, c, d constante, vom avea prin înmulţire cu U şi ţinînd seama de (3′)

$$(YZ) = (XZ)U = aY + b\beta U + \frac{1}{2}cX. \tag{5}$$

Identitatea formată cu operatorii Y, Z, U se scrie :

$$(YZ)U + (ZU)Y + (UY)Z = 0.$$

Ţinînd seama de (3) şi (5), această identitate ne va conduce la relaţia :

$$a(YU) + \frac{1}{2}c(XU) + \frac{1}{2}(XY) + \frac{1}{2}\beta X = 0,$$

sau

$$a\beta U + \frac{1}{2}cY + \frac{1}{2}(XY) + \frac{1}{2}\beta X = 0. \tag{6}$$

Paranteza (XY) devine, ţinînd seama de (3′),

$$(XY) = \beta X + nY + qU.$$

Introducînd în relaţia (6), vom obţine

$$a\beta U + \frac{1}{2}cY + \frac{1}{2}(\beta X + nY + qU) + \frac{1}{2}\beta X = 0$$

sau

$$a\beta U + \frac{1}{2}cY + \frac{1}{2}nY + \frac{1}{2}qU + \beta X = 0.$$

Rezultă de aici condiţiile $a\beta + \frac{1}{2}q = 0$, $c + n = 0$, $\beta = 0$ deci în definitiv

$$q = 0,\ \beta = 0,\ c = -n.$$

Deci parantezele (XY), (YZ), (XZ) vor avea forma

$$(XY) = nY,\ (YZ) = aY - \frac{1}{2}nX,\ (XZ) = aX + bY - nZ + dU. \tag{7}$$

Identitatea formată cu operatorii X, Y, Z,

$$(XY)Z + (YZ)X + (ZX)Y = 0,$$

ne dă, ținînd seama de (7),

$$a(YX) - a(XY) = 0, \text{ deci } 2\,anY = 0.$$

Să presupunem $n \neq 0$. Atunci $a = 0$ și obținem următoarea structură.

$$(XU) = Y,\ (YU) = 0,\ (ZU) = \frac{1}{2}X,\ (XY) = nY,\ (YZ) =$$
$$= -\frac{1}{2}nX,\ (XZ) = bY - nZ + dU.$$

Luînd în loc de Z operatorul $Z + \frac{d}{n}U$, obținem structura sub forma

$$(XU) = Y,\ (YU) = 0,\ (ZU) = \frac{1}{2}X,\ (XY) = nY,\ (YZ) =$$
$$= -\frac{1}{2}nX,\ (XZ) = tY - nZ \text{ cu } t = b + \frac{d}{n}\cdot$$

Putem face o transformare de operatori și anume $X_1 = n\bar{X}_1$, $X_2 = n\bar{X}_2$, $\bar{X}_3 = \frac{t}{2}\bar{X}_2 + n\bar{X}_3$ astfel încît $t = 0$, $n = 1$ și atunci structura se scrie astfel :

$$(XU) = Y,\ (YU) = 0,\ (ZU) = \frac{1}{2}X,\ (XY) = Y,\ (YZ) =$$
$$= -\frac{1}{2}X, (XZ) = -Z.$$

Ultimele trei ecuații din această structură sînt verificate luînd operatorii X, Y, Z sub forma

$$X = \frac{\partial f}{\partial x},\ Y = e^{x}\frac{\partial f}{\partial y},\ Z = e^{-x}\left(-\frac{y}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y^2}{4}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

și aceștia formează un grup simplu tranzitiv în V_3.

Să considerăm sistemul :

$$dx = ds^1 - \frac{y}{2}e^{-x}\,ds^3,\ dy = e^{x}\,ds^2 - \frac{y^2}{4}e^{-x}\,ds^3,\ dz = e^{-x}\,ds^3$$

care rezolvat în raport cu ds^1, ds^2, ds^3 ne dă formele Pfaff invariate de operatorii grupului G_3' reciproc grupului generat de X, Y, Z ;

$$ds^1 = dx + \frac{y}{2}\,dz,\ ds^2 = e^{-x}(dy + \frac{y^2}{4}dz),\ ds^3 = e^{x}dz.$$

Transformările acestui grup G_3' sînt următoarele :

$$x' = x - \ln \frac{MD - NC}{(Cz + D)^2}$$

$$y' = \frac{y(Cz + D)^2}{MD - NC} - 4\,\frac{C(Cz + D)}{MD - NC}$$

$$z' = \frac{Mz + N}{Cz + D},$$

unde C, D, M, N sînt parametrii omogeni ai grupului cu determinantul $MD - NC \neq 0$.

Putem presupune că $\mathrm{d}s^1$, $\mathrm{d}s^2$, $\mathrm{d}s^3$ sînt formele Pfaff invariante de X, Y, Z, scrise într-un nou sistem de coordonate, deoarece grupurile G_3 şi G_3' au aceeaşi structură.

Ţinînd seama că metrica spaţiului are forma canonică :

$$\mathrm{d}s^2 = \pm \frac{1}{n^2}\left[(\mathrm{d}s^1)^2 - \mathrm{d}s^2\mathrm{d}s^3 + \frac{t}{2}(\mathrm{d}s^2)^2\right] \tag{7'}$$

vom avea prin înlocuire :

$$\mathrm{d}s^2 = \pm \frac{1}{n^2}\left| \mathrm{d}x^2 + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z - \mathrm{d}y\mathrm{d}z\left(1 - \frac{t}{4}e^{-2x}y^2\right) + \right. \\ \left. + \frac{t}{2}e^{-2x}\,\mathrm{d}y^2 + \frac{t}{32}e^{-2x}\,\mathrm{d}z^2\right] \tag{7''}$$

Dacă $n = 0$, structura devine

$$(XU) = Y,\ (YU) = 0,\ (ZU) = \frac{1}{2}X,\ (XY) = 0,\ (YZ) = \\ = aY,\ (XZ) = aX + bY + dU.$$

Introducînd notaţiile $X_1 = X$, $X_2 = Y$, $X_3 = Z$, $X_4 = U$ şi luînd $Z - bU$ în loc de Z, structura precedentă devine

$$(X_1X_4) = X_2,\ (X_2X_4) = 0,\ (X_3X_4) = \frac{1}{2}X_1,\ (X_1X_2) = 0,\ (X_2X_3) = \\ = aX_2,\ (X_1X_3) = aX_1 + \mathrm{d}X_4.$$

Ecuaţiile Maurer-Cartan asociate acestei structuri sînt următoarele :

$$\begin{aligned} \Delta s^1 &= a[\mathrm{d}s^1\mathrm{d}s^3] + \frac{1}{2}[\mathrm{d}s^3\mathrm{d}s^4],\quad \Delta s^3 = 0 \\ \Delta s^2 &= a[\mathrm{d}s^2\mathrm{d}s^3] + [\mathrm{d}s^1\mathrm{d}s^4],\quad \Delta s^4 = \mathrm{d}\,[\mathrm{d}s^1\mathrm{d}s^3]. \end{aligned} \tag{8}$$

Acest sistem are următoarele soluţii particulare :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^1 &= e^{ax^3}\mathrm{d}x^1 + \frac{1}{2}\,x^4\mathrm{d}x^3\\
\mathrm{d}s^2 &= x^4e^{ax^3}\mathrm{d}x^1 + \mathrm{d}x^2 + \left[\frac{\mathrm{d}}{2}\,(x^1)^2\,e^{2ax^3} - ax^2 + \frac{(x^4)^2}{4}\right]\mathrm{d}x^3\\
\mathrm{d}s^3 &= \mathrm{d}x^3\\
\mathrm{d}s^4 &= -\,\mathrm{d}e^{ax^3}x^1\,\mathrm{d}x^3 + \mathrm{d}x^4.
\end{aligned}
$$

Înlocuind aceste forme în metrica adusă la forma canonică (7′) vom obţine

$$
\mathrm{d}s^2 = \pm\left\{e^{2ax^3}(\mathrm{d}x^1)^2 + \left[ax^2 - \frac{\mathrm{d}}{2}\,(x^1)^2e^{2ax^3}\right](\mathrm{d}x^3)^2 - \mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\right\}\cdot \tag{9}
$$

Ecuaţiile lui Killing pentru această metrică sînt :

$$
\begin{gathered}
a\zeta^3 + \partial_1\zeta^1 = 0,\\
2e^{2ax^3}\partial_2\zeta^1 - \partial_1\zeta^3 = 0,\\
e^{2ax^3}\partial^3\zeta^1 - \frac{1}{2}\,\partial_1\zeta^2 + \left[ax^2 - \frac{\mathrm{d}}{2}(x^1)^2e^{2ax^3}\right]\partial_1\zeta^3 = 0,\\
\partial_2\zeta^3 = 0\\
-\frac{1}{2}\,\partial_3\zeta^3 - \frac{1}{2}\,\partial_2\zeta^2 + \left[ax^2 - \frac{\mathrm{d}}{2}\,(x^1)^2e^{2ax^3}\right]\partial_2\zeta^3 = 0,\\
-\mathrm{d}e^{2ax^3}x^1\zeta^1 + a\zeta^2 - \mathrm{d}a(x^1)^2e^{2ax^3}\zeta^3 - \partial_3\zeta^2 + 2\left[ax^2 - \frac{\mathrm{d}}{2}\,(x^1)^2e^{2ax^3}\right]\partial_3\zeta^3 = 0.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Soluţiile acestui sistem depind de rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$
2u^2 + 2au + d = 0 \tag{11}
$$

a ecuaţiei diferenţiale : $2\theta'' + 2a\theta' + \mathrm{d}\theta = 0$, θ fiind funcţie de variabila x^3.

Avem de considerat trei cazuri :

a) Ecuaţia (11) are rădăcini reale ($a^2 - 2d > 0$).

În acest caz ecuaţiile lui Killing au soluţiile :

$$
\begin{aligned}
\zeta^1 &= -\,aC_1x^1 + C_3e^{u_1x^3} + C_4e^{u_2x^3}\\
\zeta^2 &= 2x^1e^{2ax^3}(u_1C_3e^{u_1x^3} + u_2C_4e^{u_2x^3}) + C_2e^{ax^3}\\
\zeta^3 &= C_1,
\end{aligned}
$$

u_1, u_2 fiind rădăcinile ecuaţiei (11) iar C_1, C_2, C_3, C_4 constante arbitrare.

b) Ecuaţia (11) are rădăcini imaginare ($a^2 - 2d < 0$).

Atunci sistemul de ecuații al lui Killing are soluțiile :

$$\zeta^1 = -aC_1x^1 + e^{-\frac{a}{2}x^3}(C_3\cos px^3 + C_4\sin px^3)$$

$$\zeta^2 = -x^1e^{\frac{3a}{2}x^3}[C_3(a\cos px^3 + 2p\sin px^3) + C_4(a\sin px^3 - 2p\cos px^3)] + \\ + C_2e^{ax^3}$$

$$\zeta^3 = C_1,$$

unde $p = \frac{\sqrt{2d - a^2}}{2}$ iar C_1, C_2, C_3, C_4 constante arbitrare.

c) Ecuația (11) are rădăcini confundate ($a^2 = 2d$).

În acest caz ecuațiile lui Killing au soluțiile :

$$\zeta^1 = -aC_1x^1 + C_3e^{-\frac{a}{2}x^3} + C_4e^{-\frac{a}{2}x^3}\cdot x^3,$$

$$\zeta^2 = 2x^1e^{\frac{3a}{2}x^3}\left[-\frac{a}{2}(C_3 + C_4x^3) + C_4\right] + C_2e^{ax^3},$$

$$\zeta^3 = C_1.$$

Prin urmare spațiul V_3 cu metrica dată de (9) admite ca grup maxim de mișcări un G_4 și se constată că dintre curburile fațetelor tangente la cîte două linii de coordonate, numai curbura fațetei plane formată de vectorii tangenți liniilor de coordonate x^1, x^3 este nenulă și semnul ei depinde de semnul expresiei ($d - 2a^2$).

Să examinăm acum cazul cînd în relația (1) $\varepsilon = 1$, deci grupul de stabilitate al spațiului este dat de pseudo-rotații.

Printr-o transformare de variabile putem aduce operatorul U dat de (1) la următoarea formă canonică :

$$U = x\frac{\partial f}{\partial z} + z\frac{\partial f}{\partial x}$$

și în acest caz forma pătratică fundamentală este $x^2 + y^2 - z^2$.

Prin urmare vom considera un grup G_4 tranzitiv format din următorii operatori :

$$X = \frac{\partial f}{\partial x} + \ldots,\ Y = \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots,\ Z = \frac{\partial f}{\partial z} + \ldots,\ U = x\frac{\partial f}{\partial z} + z\frac{\partial f}{\partial x}\cdot$$

Formînd parantezele Poisson ale primilor trei operatori cu ultimul, vom obține

$$(XU) = Z + \alpha U,\ (YU) = \beta U,\ (ZU) = X + \gamma U.$$

Înlocuind pe X cu $X - \gamma U$ și pe Z cu $Z - \alpha U$, vom obține

$$(XU) = Z,\ (YU) = \beta U,\ (ZU) = X. \tag{12}$$

Pentru a obţine parantezele formate de ceilalţi operatori vom scrie identităţile Iacobi cu cei patru operatori.

În primul rînd operatorii X, Z, U verifică identitatea :

$$(XZ)U + (ZU)X + (UX)Z = 0$$

care devine, ţinînd seamă de (12),

$$(XZ)U = 0. \tag{13}$$

Operatorii Y, Z, U verifică identitatea

$$(YZ)U + (ZU)Y + (UY)Z = 0$$

şi ţinînd seama de (12) deducem

$$(YZ)U + (XY) + \beta X = 0. \tag{13'}$$

Pe de altă parte, formînd identitatea cu X, Y, U, avem

$$(XY)U + (YU)X + (UX)Y = 0$$

sau ţinînd seama de (12)

$$(XY)U - \beta Z + (YZ) = 0. \tag{13''}$$

Înmulţind ultima relaţie cu U şi ţinînd seama de (12), vom avea

$$(XY)U^2 - \beta X + (YZ)U = 0.$$

sau ţinînd seama de (13')

$$(XY)U^2 - (XY) - 2\beta X = 0. \tag{14}$$

Luînd paranteza (XY) sub forma generală

$$(XY) = lX + mY + nZ + pU \tag{15}$$

şi înmulţind de două ori succesiv cu U vom obţine

$$(XY)U^2 = lX + nZ$$

care introdusă în (14) ne va da

$$lX + nZ - (XY) - 2\beta X = 0.$$

Înlocuind în această relaţie pe (XY) dat de (15) rezultă

$$mY + pU - 2\beta X = 0 \text{ deci } m = p = \beta = 0.$$

Prin urmare parantezele Poisson (12) şi (15) capătă forma

$$(XU) = Z, \ (YU) = 0, \ (ZU) = X, \ (XY) = lX + nZ.$$

Pentru a obţine pe (YZ), îl scoatem din (13'') :

$$(YZ) = -(XY)U = -nX - lZ.$$

Vom obţine paranteza (XZ) folosind identitatea lui Iacobi relativă la operatorii X, Y, Z:

$$(XY)Z + (YZ)X + (ZX)Y = 0. \tag{16}$$

Dacă luăm pe (XZ) sub forma generală

$$(XZ) = tX + qY + rZ + sU$$

prin înmulţire cu U şi ţinînd seama de (12) şi de (13′) vom avea

$$(XZ)U = tZ + rX = 0$$

ceea ce implică $t = r = 0$, deci (XZ) devine

$$(XZ) = qY + sU.$$

Înmulţind cu Y, obţinem $(XZ)Y = 0$.

Ţinînd seama de parantezele (XY) şi (YZ) găsite mai înainte precum şi de faptul că $(XZ)Y = 0$, rezultă din (16)

$$2\,l(XZ) = 2\,lqY + 2\,lsU = 0.$$

Prin urmare vom avea de considerat două cazuri:

a) $l = 0$ şi

b) $q = s = 0$.

a) Dacă $l = 0$, structura grupului devine:

$$\begin{gathered}(XU) = Z,\ (YU) = 0,\ (ZU) = X,\ (XY) = nZ,\\ (YZ) = -nX,\ (XZ) = qY + sU.\end{gathered} \tag{16′}$$

Să presupunem mai întîi $q \neq 0$.

Dacă facem transformarea de operatori, în ipoteza $r = nq + s \neq 0$,

$$X_1 = X,\ X_2 = \frac{1}{r}(qY + sU),\ X_3 = Z,\ X_4 = U,$$

structura se scrie astfel:

$$\begin{gathered}(X_1X_4) = X_3,\ (X_2X_4) = 0,\ (X_3X_4) = X_1,\ (X_1X_2) = X_3,\ (X_2X_3) =\\ = -X_1,\ (X_1X_3) = rX_2\end{gathered} \tag{17}$$

Deci operatorii X_1, X_2, X_3 formează un subgrup simplu tranzitiv a cărui structură este

$$(X_1X_2) = X_3,\ (X_2X_3) = -X_1,\ (X_1X_3) = rX_2.$$

Ecuaţiile Maurer-Cartan asociate acestui grup sînt

$$\Delta s^1 = -[\mathrm{d}s^2\mathrm{d}s^3],\ \Delta s^2 = r\,[\mathrm{d}s^1\,\mathrm{d}s^3],\ \Delta s^3 = [\mathrm{d}s^1\,\mathrm{d}s^2]. \tag{18}$$

Soluţiile acestui sistem depind de natura rădăcinilor ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}(x^3)^2} + r\theta = 0,$$

θ fiind funcţie de x^3.

Dacă $r > 0$ formele invariante se pot lua astfel :

$$\mathrm{d}s^1 = \frac{1}{\sqrt{r}\,x^1} \sin \sqrt{r}\,x^3 \mathrm{d}x^1 + \frac{x}{\sqrt{r}} \cos \sqrt{r}\,x^3 \mathrm{d}x^2,$$

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{1}{x^1} \cos \sqrt{r}\,x^3 \mathrm{d}x^1 + x^1 \sin \sqrt{r}\,x^3 \mathrm{d}x^2,$$

$$\mathrm{d}s^3 = -\frac{x^1 \mathrm{d}x^2}{\sqrt{r}} + \mathrm{d}x^3.$$

Deoarece metrica spaţiului are forma canonică :

$$\mathrm{d}s^2 = \pm [(\mathrm{d}s^1)^2 + \rho^2(\mathrm{d}s^2)^2 - (\mathrm{d}s^3)^2], \quad \left(\rho = \frac{r}{q}\right)$$

rezultă făcînd înlocuirile :

$$\mathrm{d}s^2 = \pm \left[\frac{r\rho^2 \cos^2 \sqrt{r}\,x^3 + \sin^2 \sqrt{r}\,x^3}{r(x^1)^2} (\mathrm{d}x^1)^2 + \frac{(x^1)^2}{r} (r\rho^2 - 1) \sin^2 \sqrt{r}\,x^3 (\mathrm{d}x^2)^2 - \right.$$

$$\left. - (\mathrm{d}x^3)^2 + \frac{1 - r\rho^2}{r} \sin 2\sqrt{r}\,x^3 \cdot \mathrm{d}x^1 \cdot \mathrm{d}x^2 + \frac{2x^1}{\sqrt{r}} \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \right]. \tag{19}$$

Dacă $r < 0$ formele invariante vor fi :

$$\mathrm{d}s^1 = \frac{1}{\sqrt{-r}\,x^1} \operatorname{sh} \sqrt{-r}\,x^3 \mathrm{d}x^1 - \frac{x^1}{\sqrt{-r}} \operatorname{ch} \sqrt{-r}\,x^3 \mathrm{d}x^2$$

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{1}{x^1} \operatorname{ch} \sqrt{-r}\,x^3 \mathrm{d}x^1 + x^1 \operatorname{sh} \sqrt{-r}\,x^3 \mathrm{d}x^2$$

$$\mathrm{d}s^3 = \frac{x^1 \mathrm{d}x^2}{\sqrt{-r}} + \mathrm{d}x^3$$

iar metrica spaţiului se va scrie astfel :

$$\mathrm{d}s^2 = \pm \left[\frac{r\rho^2 \operatorname{ch}^2 \sqrt{-r}\,x^3 - \operatorname{sh}^2 \sqrt{-r}\,x^3}{r(x^1)^2} (\mathrm{d}x^1)^2 + \frac{(x^1)^2}{r} (r\rho^2 - 1) \operatorname{sh}^2 \sqrt{-r}\,x^3 (\mathrm{d}x^2)^2 - \right.$$

$$\left. - (\mathrm{d}x^3)^2 + \frac{2(1 - r\rho^2)}{r} \operatorname{sh} \sqrt{-r}\,x^3 \cdot \operatorname{ch} \sqrt{-r}\,x^3 \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 - \frac{2x^1}{\sqrt{-r}} \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \right], \tag{20}$$

Dacă $r = 0$, deci $s = -nq$, structura (16′) se poate aduce la forma :

$$(X_1X_4)=X_3,\ (X_2X_4)=0,\ (X_3X_4)=X_1,\ (X_1X_2)=0,\ (X_2X_3)=0,\ (X_1X_3)=X_2$$

Această structură este verificată dacă luăm operatorii X_1, X_2, X_3, X_4 sub forma

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1},\quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2},\quad X_3 = x^1\frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x^3},\quad X_4 = x^3\frac{\partial f}{\partial x^1} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[(x^1)^2 + (x^3)^2\right]\frac{\partial f}{\partial x^2} + x^1\frac{\partial f}{\partial x^3}.$$

Notînd cu ds^1, ds^2, ds^3 formele Pfaff invariante ale grupului (X_1, X_2, X_3), avem relaţiile

$$dx^1 = ds^1,\quad dx^2 = ds^2 + x^1 ds^3,\quad dx^3 = ds^3$$

de unde rezultă

$$ds^1 = dx^1,\quad ds^2 = dx^2 - x^1 dx^3,\quad dx^3 = dx^3.$$

Prin urmare, vom avea următoarea metrică :

$$ds^2 = \pm\left\{(dx^1)^2 + \frac{1}{q^2}(dx^2)^2 + \left[\frac{(x^1)^2}{q^2} - 1\right](dx^3)^2 - \frac{2}{q^2}x^1 dx^2 dx^3\right\}. \qquad (21)$$

Ecuaţiile lui Killing asociate acestei metrici sînt, pentru $q=1$,

$$\partial_1\zeta^1 = 0,$$

$$\partial_2\zeta^1 + \partial_1\zeta^2 - x^1\partial_1\zeta^3 = 0,$$

$$\partial_2\zeta^2 - x^1\partial_2\zeta^3 = 0,$$

$$\partial_3\zeta^1 - x^1\partial_1\zeta^2 + [(x^1)^2 - 1]\partial_1\zeta^3 = 0,$$

$$-\zeta^1 + \partial_3\zeta^2 - x^1\partial_3\zeta^3 - x^1\partial_2\zeta^2 + [(x^1)^2 - 1]\partial_2\zeta^3 = 0,$$

$$x^1\zeta^1 - x^1\partial_3\zeta^2 + [(x^1)^2 - 1]\partial_3\zeta^3 = 0.$$

Acest sistem are următoarele soluţii :

$$\zeta^1 = ax^3 + b,$$

$$\zeta^2 = \frac{a}{2}\left[(x^1)^2 + (x^3)^2\right] + bx^3 + c,$$

$$\zeta^3 = ax^1 + d$$

a,b,c,d fiind constante.

Aşadar, spaţiul V_3 cu metrica (21) admite un G_4 ca grup maxim de mişcări, proprietate ce se va menţine pentru orice valoare a lui q.

Să găsim transformările finite ale grupului tot în cazul $q=1$. Pentru aceasta, trebuie intregrat sistemul :

$$\frac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}t}=ay^3+b,\ \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t}=\frac{a}{2}[(y^1)^2+(y^3)^2]+by^3+c,\ \frac{\mathrm{d}y^3}{\mathrm{d}t}=ay^1+d.$$

Soluțiile acestui sistem sînt de forma :

$$y^1=C_1\mathrm{e}^{at}-C_2\mathrm{e}^{-at}\frac{d}{a}$$

$$y^2=\frac{1}{2}(C_1^2\mathrm{e}^{2at}-C_2^2\mathrm{e}^{-2at})-\frac{d}{a}(C_1\mathrm{e}^{at}+C_2\mathrm{e}^{-at})+\frac{d^2+2ac-b^2}{2a}t+C_3.$$

$$y^3=C_1\mathrm{e}^{at}+C_2\mathrm{e}^{-at}-\frac{b}{a},$$

C_1, C_2, C_3 fiind constante de integrare.

Făcînd $y^i=x^i$ și $t=0$, obținem

$$C_1=\frac{x^1+x^3}{2}+\frac{b+d}{2a},$$

$$C_2=x^2-\frac{x^1x^3}{2}+\frac{dx^3-bx^1}{2a}+\frac{bd}{2a^2},$$

$$C_3=\frac{x^3-x^1}{2}+\frac{b-d}{2a}.$$

Prin urmare transformările grupului vor fi :

$$y^1=\mathrm{e}^a\,\frac{x^1+x^3}{2}-\mathrm{e}^{-a}\,\frac{x^3-x^1}{2}+\mathrm{e}^a\frac{b+d}{2a}-\mathrm{e}^{-a}\frac{b-d}{2a}-\frac{d}{a}$$

$$y^2=x^2+\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2a}\left(\frac{x^1+x^3}{2}+\frac{b+d}{2a}\right)^2-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2a}\left(\frac{x^3-x^1}{2}+\frac{b-d}{2a}\right)^2-$$

$$-\frac{x^1x^3}{2}+\frac{dx^3-bx^1}{2}-\frac{d}{a}\left(\mathrm{e}^a\,\frac{x^1+x^3}{2}+\mathrm{e}^{-a}\frac{x^3-x^1}{2}\right)-\frac{d}{2a^2}\,[\mathrm{e}^a(b+d)+$$

$$+\mathrm{e}^{-a}(b-d)]+\frac{d^2+2ac-b^2}{2a}+\frac{bd}{2a^2}$$

$$y^3=\mathrm{e}^a\,\frac{x^1+x^3}{2}+\mathrm{e}^{-a}\,\frac{x^3-x^1}{2}+\mathrm{e}^a\frac{b+d}{2a}+\mathrm{e}^{-a}\,\frac{b-d}{2a}-\frac{b}{a}.$$

Să presupunem acum că $q=0$. În acest caz, luînd în loc de X_2 operatorul X_2-X_4, structura grupului capătă forma :

$(X_1X_4)=X_3$, $(X_2X_4)=0$, $(X_3X_4)=X_1$, $(X_1X_2)=0$, $(X_2X_3)=0$, $(X_1X_3)=SX_4$.

În acest caz spaţiul V_3 este reductibil, descompunîndu-se într-un spaţiu V_2 cu curbură constantă şi o dreaptă paralelă cu axa x^2.

În sfîrşit, să considerăm acum cazul în care $l \neq 0$ deci $q = s = 0$. Atunci structura grupului se scrie astfel:

$$(X_1X_4) = X_3,\quad (X_2X_4) = 0,\quad (X_3X_4) = X_1,\quad (X_1X_2) = lX_1 + nX_3,$$
$$(X_2X_3) = -nX_1 - lX_3,\quad (X_1X_3) = 0.$$

Luînd în loc de X_2 operatorul $\frac{1}{l}(X_2 - nX_4)$, această structură capătă forma

$$(X_1X_4) = X_3, (X_2X_4) = 0, (X_3X_4) = X_1, (X_1X_2) = X_1, (X_2X_3) = -X_3,$$
$$(X_1X_3) = 0.$$

Această structură este verificată dacă luăm operatorii X_1, X_2, X_3 şi X_4 sub forma

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1},\quad X_2 = x^1\frac{\partial f}{\partial x^1} + \frac{\partial f}{y x^2} + x^3\frac{\partial f}{\partial x^3}, X_3 = \frac{\partial f}{\partial x^3},\quad X_4 = x^3\frac{\partial f}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial f}{\partial x^3}.$$

Prin urmare avem sistemul

$$dx^1 = ds^1 + x^1 ds^2,\quad dx^2 = ds^2,\quad dx^3 = x^3 ds^2 + ds^3,$$

care rezolvat în raport cu ds^1, dx^2, ds^3 ne dă

$$ds^1 = dx^1 - x^1 dx^2,\quad ds^2 = dx^2,\quad ds^3 = dx^3 - x^3 dx^2.$$

Înlocuind în metrica

$$ds^2 = \pm[ds^1)^2 + l^2(ds^2)^2 - (ds^3)^2],$$

vom avea

$$ds^2 = \pm\{(dx^1)^2 + [(x^1)^2 - (x^3)^2 + l^2](dx^2)^2 - 2x^2 dx^1 dx^2 +$$
$$+ 2x^3 dx^2 dx^3 - (dx^3)^2\}.$$

Primită la redacţie la 29 iulie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. GH. VRĂNCEANU, *Transformări pseudo-ortogonale şi spinori*. Studii şi cercetări matematice, *2* (1961).
2. — *Lecţii de geometrie diferenţială*. vol. I, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1951.
3. G. I. KRUCICOVICI, *Clasificarea spaţiilor riemanniene tridimensionale după grupurile de mişcări*. Culegerea de articole *Grupuri de mişcări ale spaţiilor riemanniene*. Bucureşti, 1959.

O NOUĂ REPREZENTARE A POLINOAMELOR AREOLARE ÎN PLAN

DE

DAN PASCALI

În teza sa de doctorat [1], acad. N. Teodorescu a studiat polinoamele areolare, adică funcțiile $f(z)$ olomorfe (α) în domeniul D, care au derivata areolară de ordinul n olomorfă, și a stabilit pentru ele următoarea reprezentare :

$$f(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\,\varphi_1(z) + \bar{z}^2\,\varphi_2(z) + \ldots + \bar{z}^n\,\varphi_n(z),$$

unde $\varphi_k(z)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ sînt funcții olomorfe în D.

Mai jos vom stabili o nouă reprezentare a polinoamelor areolare cu ajutorul iterării operatorului lui Pompeiu

$$Tg(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{g(z)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\omega_z.$$

Această reprezentare mi-a fost sugerată de dezvoltarea funcțiilor poliarmonice a acad. M. Nicolescu [2], cu ajutorul funcției Green și de reprezentarea funcțiilor analitice generalizate prin aproximații succesive a lui I. N. Vekua [3].

În [4], I. N. Vekua a arătat că : dacă $f_1(z) \in C[\bar{D}]$, iar derivata ei areolară generalizată $g(z) = \dfrac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} \in L_p[\bar{D}]$, $p > 2$, atunci este valabilă formula de reprezentare a lui Pompei-Teodorescu

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{g(z)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\omega_z = \Phi(\zeta) + Tg(\zeta),$$

unde Γ este frontiera domeniului mărginit D, formată dintr-un număr finit de curbe simple, rectificabile și închise, disjuncte între ele.

Dacă notăm

$$K(z-\zeta) = -\frac{1}{\pi(z-\zeta)},$$

atunci putem scrie

$$Tg(\zeta) = \iint_D K(z-\zeta)\, g(z)\, \mathrm{d}\omega_z \quad \text{şi} \quad \frac{\partial Tg(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = g(\zeta).$$

Să considerăm operatorii iteraţi

$$K^n(z-\zeta) = \iint_D K^{n-1}(z-t)\, K(t-\zeta)\, \mathrm{d}\omega_t \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

şi

$$T^n g(\zeta) = \iint_D K^n(z-\zeta)\, g(z)\, \mathrm{d}\omega_z.$$

Dar

$$T^n g(\zeta) = \iint_D K(t-\zeta)\, \mathrm{d}\omega_t \iint_D K^{n-1}(z-t)\, g(z)\, \mathrm{d}\omega_z = T\,(T^{n-1} g(t)),$$

de unde

$$\frac{\partial T^n g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = T^{n-1} g(\zeta), \ldots, \frac{\partial^n T^n g(\zeta)}{\partial \zeta^n} = g(\zeta).$$

Dacă, în plus, funcţia $g(z)$ este olomorfă în D, atunci

$$\frac{\partial^{n+1} T^n g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}^{n+1}} = 0.$$

Să formăm polinomul formal

$$f(z) = \varphi_0(z) + T\varphi_1(z) + T^2\varphi_2(z) + \ldots + T^n\varphi_n(z), \tag{1}$$

unde $\varphi_k(z)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ sînt funcţii olomorfe în D. Prin derivări areolare succesive, obţinem

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \varphi_1(z) + T\varphi_2(z) + \ldots + \mathrm{T}^{n-1}\varphi_n(\mathrm{z})$$

. . . .

$$\frac{\partial^n f(z)}{\partial \bar{z}^n} = \varphi_n(z) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial^{n+1} f(z)}{\partial \bar{z}^{n+1}} = 0$$

adică $f(z)$ este polinom areolar de ordinul n.

Cum

$$\frac{\partial^k f(z)}{\partial \bar{z}^k} = \varphi_k(z) + T\left(\varphi_{k+1}(z) + T\,\varphi_{k+2}(z) + \ldots + T^{n-k-1}\,\varphi_n(z)\right)$$

funcţiile olomorfe $\varphi_k(z)$ sînt determinate de valorile lui $\frac{\partial^k f(z)}{\partial \bar{z}^k}$ pe Γ, şi anume :

$$\varphi_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\partial^k f(z)}{\partial \bar{z}^k}\,\frac{\mathrm{d}z}{z-\zeta}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n) \quad (2)$$

de unde rezultă :

TEOREMA 1. *Polinomul areolar $f(z)$ de ordinul n, în domeniul D al planului complex cu frontiera formată dintr-un număr finit de curbe simple, rectificabile, închise şi disjuncte două cîte două, se poate reprezenta sub forma* (1), *unde funcţiile olomorfe $\varphi_k(z)$ sînt date în acest domeniu de relaţiile* (2).

TEOREMA 2. *Dacă $f(z)$ admite n derivate areolare continue în $\bar{D}$, iar $\frac{\partial^{n+1} f(z)}{\partial \bar{z}^{n+1}} \in L_p[\bar{D}]$, $p > 2$, atunci*

$$f(z) = \varphi_0(z) + T\,\varphi_1(z) + \ldots + T^n\,\varphi_n(z) + R_n(z)$$

unde

$$R_n(z) = T^{n+1}\left(\frac{\partial^{n+1} f(z)}{\partial \bar{z}^{n+1}}\right).$$

Dezvoltarea (1) prezintă avantajul că se poate transpune fără dificultăţi la spaţiul cu mai multe dimensiuni, fără a folosi laboriosul calcul ca în cazul reprezentării date de M. Nedelcu [5].

BIBLIOGRAFIE

1. N. THEODORESCU, *La dérivée aréolaire et ses applications dans la physique-mathématique.* Thèses, Paris, 1931.
2. M. NICOLESCU, Rev. Univ. „C. I. Parhon", *4–5*, 52 (1954).
3. И. Н. ВЕКУА, Матем. Сб., **31/73/**: 2, 217 (1952).
4. — *Обобщенные аналитические функций.* Москва, 1959.
5. M. NEDELCU, Rev. de math. pures et appliquées, **IV**, *4* (1959); **V**, *1* (1960).

ASUPRA SPAȚIILOR RIEMANN CU CONEXIUNE CONSTANTĂ DE GENUL DOI

DE

GRECU EFTIMIE

În lucrarea de față vrem să determinăm spațiile Riemann cu conexiune constantă de genul doi. Ne vom ocupa mai întîi de spațille V_4 cu conexiune constantă de genul doi. Aceste spații au componentele a_{ij} ale tensorului fundamental de forma :

$$a_{ij} = tc_{ij} + sd_{ij} ,$$

unde c_{ij}, d_{ij} sînt constante, iar t, s sînt funcții de coordonatele x,y,z,u, ale spațiului, astfel încît raportul lor nu este o constantă. Notăm pentru simplificare :

$$t = \mathrm{e}^{2p}, \quad s = \mathrm{e}^{2q},$$

unde diferența $p-q$ nu este o constantă. Rezultă că metrica spațiului este de forma :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2p}\, \varphi\, (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u) + \mathrm{e}^{2q}\, \psi\, (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u)$$

unde φ, ψ sînt două forme diferențiale pătratice cu coeficienți constanți.

Vom studia mai întîi cazul cînd forma φ este pozitiv definită, deci reductibilă la o sumă de pătrate :

$$\varphi = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}u^2.$$

În acest caz forma ψ se poate totdeauna reduce prin transformări ortogonale la forma canonică :

$$\psi = A\,\mathrm{d}x^2 + B\,\mathrm{d}y^2 + C\,\mathrm{d}z^2 + D\,\mathrm{d}u^2,$$

unde A, B, C, D sînt rădăcinile (reale) ale ecuației caracteristice :

$$| \psi - \rho\varphi | = 0.$$

Metrica lui V_4 se scrie :

$$ds^2 = e^{2p}(dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2) + e^{2q}(A dx^2 + B dy^2 + C dz^2 + D du^2).$$

Luînd în loc de e^{2p}, e^{2q}, funcțiile $e^{2p} + Ae^{2q}$, respectiv e^{2q}, putem presupune că ψ are coeficientul lui dx^2 egal cu zero, deci obținem ca metrică :

$$ds^2 = e^{2p}(dx^2+dy^2+dz^2+du^2)+e^{2q}(a dy^2+b dz^2+c du^2).$$

Energia cinetică asociată acestei metrici se scrie :

$$T = \frac{1}{2} e^{2p}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+\dot{u}^2) + \frac{1}{2} e^{2q}(a\dot{y}^2 + b\dot{z}^2 + c\dot{u}^2).$$

Geodezicele sînt date de ecuațiile lui Lagrange care se scriu sub forma :

$$\frac{d}{dt}(e^{2p}\dot{x}) = e^{2p}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \dot{u}^2)p_x + e^{2q}(a\dot{y}^2 + b\dot{z}^2 + c\dot{u}^2)q_x,$$

$$\frac{d}{dt}(e^{2p}\dot{y}+ae^{2q}\dot{y})=e^{2p}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+\dot{u}^2)p_y+e^{2q}(a\dot{y}^2+b\dot{z}^2+c\dot{u}^2)q_y,$$

$$\frac{d}{dt}(e^{2p}\dot{z}+be^{2q}\dot{z})=e^{2p}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+\dot{u}^2)p_z+e^{2q}(a\dot{y}^2+b\dot{z}^2+c\dot{u}^2)q_z,$$

$$\frac{d}{dt}(e^{2p}\dot{u}+ce^{2q}\dot{u})=e^{2p}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+\dot{u}^2)p_u+e^{2q}(a\dot{y}^2+b\dot{z}^2+c\dot{u}^2)q_u.$$

Derivînd în raport cu t, avem succesiv :

$$e^{2p}\ddot{x}+2\dot{x}e^{2p}(p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}+p_u\dot{u})=e^{2p}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+\dot{u}^2)p_x+$$
$$+e^{2q}(a\dot{y}^2+b\dot{z}^2+c\dot{u}^2)q_x,$$

$$e^{2p}\ddot{y}+ae^{2q}\ddot{y}+2\dot{y}e^{2p}(p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}+p_u\dot{u})+2a\dot{y}e^{2q}(q_x\dot{x}+q_y\dot{y}+q_z\dot{z}+q_u\dot{u})=$$
$$=e^{2p}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+\dot{u}^2)p_y+e^{2q}(a\dot{y}^2+b\dot{z}^2+c\dot{u}^2)q_y,$$

$$e^{2p}\ddot{z}+be^{2q}\ddot{z}+2\dot{z}e^{2p}(p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}+p_u\dot{u})+2b\dot{z}e^{2q}(q_x\dot{x}+q_y\dot{y}+q_z\dot{z}+q_u\dot{u})=$$
$$=e^{2p}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+\dot{u}^2)p_z+e^{2q}(a\dot{y}^2+b\dot{z}^2+c\dot{u}^2)q_z,$$

$$e^{2p}\ddot{u}+ce^{2q}\ddot{u}+2\dot{u}e^{2p}(p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}+p_u\dot{u})+2c\dot{u}e^{2q}(q_x\dot{x}+q_y\dot{y}+q_z\dot{z}+q_u\dot{u})=$$
$$=e^{2p}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+\dot{u}^2)p_u+e^{2q}(a\dot{y}^2+b\dot{z}^2+c\dot{u}^2)q_u.$$

Aceste ecuații se scriu prin împărțire cu e^{2p} :

$$\ddot{x} = -\dot{x}^2 p_x - 2\dot{x}\dot{y}p_y - 2\dot{x}\dot{z}p_z - 2\dot{x}\dot{u}p_u + (\dot{y}^2+\dot{z}^2+\dot{u}^2)p_x +$$
$$+ e^{2(q-p)}q_x(a\dot{y}^2+b\dot{z}^2+c\dot{u}^2),$$

$$\ddot{y}+ae^{2(q-p)}(\ddot{y}+\dot{y}^2 q_y+2\dot{x}\dot{y}q_x+2\dot{y}\dot{z}q_z+2\dot{y}\dot{u}q_u)=(\dot{x}^2-\dot{y}^2+\dot{z}^2+$$
$$+\dot{u}^2)p_y-2\dot{y}(p_x\dot{x}+p_z\dot{z}+p_u\dot{u})+e^{2(q-p)}q_y(b\dot{z}^2+c\dot{u}^2),$$

$$\ddot{z}+be^{2(q-p)}(\ddot{z}+\dot{z}^2q_z+2\dot{x}\dot{z}q_x+2\dot{y}\dot{z}q_y+2\dot{z}\dot{u}q_u)=(\dot{x}^2+\dot{y}^2-\dot{z}^2+\dot{u}^2)\,p_z-2\dot{z}(p_x\dot{x}+$$
$$+p_y\dot{y}+p_u\dot{u})+e^{2(q-p)}\,q_z\,(a\dot{y}^2+c\dot{u}^2),$$
$$\ddot{u}+ce^{2(q-p)}(\ddot{u}+\dot{u}^2q_u+2\dot{x}\dot{u}q_x+2\dot{y}\dot{u}q_y+2\dot{z}\dot{u}q_z)=(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2-\dot{u}^2)\,p_u-2\dot{u}(p_x\dot{x}+$$
$$+p_y\dot{y}+p_z\dot{z})+e^{2(q-p)}\,q_u\,(a\dot{y}^2+b\dot{z}^2).$$

Pentru ca aceste ecuaţii să aibă coeficienţii constanţi este necesar să avem :

$$p = kx + ly + mz + nu,$$
$$e^{2(q-p)}\,q_x = \alpha, \quad q_y = \beta, \quad \ddot{y} + \dot{y}^2q_y = 0;$$
$$e^{2(q-p)}\,q_z = \gamma, \quad e^{2(q-p)}\,q_u = \delta,$$
$$b = c = 0.$$

Scriind condiţiile de integrabilitate, avem

$$\alpha\,(\beta-l) = 0, \quad \gamma\,(\beta-l)=0, \quad \delta\,(\beta-l)=0,$$
$$\alpha m - \gamma k = 0,$$
$$\alpha n - \delta k = 0,$$
$$\gamma n - \delta\, m = 0.$$

Se deosebesc două cazuri :

I. $\beta \neq l$. Rezultă $\alpha = \gamma = \delta = 0$. Deci $q = \beta y$. Celelalte condiţii de integrabilitate se verifică identic, oricare ar fi constantele k, m, n,

În acest caz metrica spaţiului se scrie :

$$ds^2 = e^{2(kx+ly+mz+nu)}\,(dx^2+dy^2+dz^2+du^2)+ae^{2\beta y}dy^2.$$

Deoarece faţă de o transformare ortogonală de variabile, k, m, n constituie componentele unui vector contravariant, se poate presupune că printr-o transformare ortogonală de variabile ce păstrează variabila y, vectorul (k, m, n) poate fi redus în aşa fel încît să aibă direcţia axei $0x$, astfel încît metrica spaţiului se poate scrie sub forma canonică :

$$ds^2 = e^{2(kx+ly)}(dx^2+dy^2+dz^2+du^2)+ae^{2\beta y}dy^2.$$

II. $\beta = l$. În acest caz, dacă α, γ, δ sînt diferite de zero, rezultă din condiţiile de integrabilitate că trebuie să avem $k = m = n = 0$.

Integrînd sistemul de ecuaţii

$$q_y = l, \; e^{2(q-p)}q_x = \alpha, \quad e^{2(q-p)}q_z = \gamma, \quad e^{2(q-p)}q_u = \delta$$

se obţine

$$q = ly + \frac{1}{2}\ln\,[2(\alpha x + \gamma z + \delta u)],$$

de unde

$$e^{2q} = 2\,e^{2ly}\,(\alpha x + \gamma z + \delta u).$$

Metrica spațiului se scrie :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2ly}[\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}u^2 + 2a\ (\alpha x + \gamma z + \delta u)\ \mathrm{d}y^2].$$

Vom studia acum cazul cînd forma φ nu este definită și vom presupune că φ este de tipul hiperbolic normal, deci reductibilă la forma canonică

$$\varphi = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - \mathrm{d}u^2.$$

În cazul acesta acad. prof. Gh. Vrănceanu a arătat [2] că ψ se poate totdeauna reduce prin transformări hiperbolice la forma canonică

$$\psi = A\ \mathrm{d}x^2 + B\mathrm{d}y^2 + C\mathrm{d}z^2 + 2D\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u + E\ \mathrm{d}u^2$$

Luînd în loc de z, u, variabilele $\frac{\sqrt{2}}{2}\ (z-u)$ și $\frac{\sqrt{2}}{2}\ (z+u)$ și schimbînd funcțiile p, q putem scrie

$$\varphi = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + 2\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u,$$

$$\psi = h\mathrm{d}y^2 + k\ \mathrm{d}z^2 + 2l\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}u + m\,\mathrm{d}u^2$$

și deci metrica spațiului se scrie :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2p}\ (\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}z\ \mathrm{d}u)+\mathrm{e}^{2q}\ (h\mathrm{d}y^2+k\mathrm{d}z^2+2l\mathrm{d}z\ \mathrm{d}u+m\ \mathrm{d}u^2).$$

Energia cinetică asociată acestei metrici se scrie

$$T = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2p}\ (\dot{x}^2+\dot{y}^2+2\dot{z}\dot{u}) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2q}\ (h\,\dot{y}^2+k\dot{z}^2+2\,l\dot{z}\dot{u}+m\dot{u}^2).$$

Geodezicele sînt date de ecuațiile lui Lagrange care se scriu sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\mathrm{e}^{2p}\dot{x}) = \mathrm{e}^{2p}\ (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{z}\dot{u})\ p_x + \mathrm{e}^{2q}(h\dot{y}^2+k\dot{z}^2+2l\dot{z}\dot{u}+m\dot{u}^2)\ q_x\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\mathrm{e}^{2p}\dot{y}+h\mathrm{e}^{2q}\dot{y}) = \mathrm{e}^{2p}\ (\dot{x}^2+\dot{y}^2+2\dot{z}\dot{u})\ p_y + \mathrm{e}^{2q}\ (h\dot{y}^2+k\dot{z}^2+2l\dot{z}\dot{u}+m\dot{u}^2)q_y\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\mathrm{e}^{2p}\dot{u}+k\mathrm{e}^{2q}\dot{z}+l\mathrm{e}^{2q}\dot{u}) = \mathrm{e}^{2p}\ (\dot{x}^2+\dot{y}^2+2\dot{z}\dot{u})p_z + \mathrm{e}^{2q}(h\dot{y}^2+k\dot{z}^2+2l\dot{z}\dot{u}+m\dot{u}^2)q_z\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\mathrm{e}^{2p}\dot{z}+l\mathrm{e}^{2q}\dot{z}+m\mathrm{e}^{2q}\dot{u}) = \mathrm{e}^{2p}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+2\dot{z}\dot{u})p_u + \mathrm{e}^{2q}(h\dot{y}^2+k\dot{z}^2+2l\dot{z}\dot{u}+m\dot{u}^2)q_u.$$

Derivînd în raport cu t, aceste ecuații se scriu în definitiv :

$$\ddot{x} = -\,\dot{x}^2\ p_x - 2\dot{x}\dot{y}p_y - 2\dot{x}\dot{z}p_z - 2\dot{x}\dot{u}p_u + \dot{y}^2p_x + 2\dot{z}\dot{u}p_x +$$
$$+\mathrm{e}^{2(q-p)}\ (h\dot{y}^2 + k\dot{z}^2 + 2l\dot{z}\dot{u} + m\dot{u}^2)\ q_x\,,$$

$$\ddot{y}+h\mathrm{e}^{2(q-p)}\ (\ddot{y}+\dot{y}^2q_y+2\dot{x}\dot{y}q_x+2\dot{y}\dot{z}q_z+2\dot{y}\dot{u}q_u) = (\dot{x}^2-\dot{y}^2+2\dot{z}\dot{u})p_y -$$
$$-2\dot{y}(p_x\dot{x}+p_z\dot{z}+p_u\dot{u})+\mathrm{e}^{2(q-p)}\ (k\dot{z}^2+2l\dot{z}\dot{u}+m\dot{u}^2)\ q_y\,,$$

$$\ddot{u}+2\dot{u}(p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}+p_u\dot{u})+2k\mathrm{e}^{2(q-p)}(q_x\dot{x}+q_y\dot{y}+q_u\dot{u})+$$
$$+2l\mathrm{e}^{2(q-p)}(q_x\dot{x}+q_y\dot{y}+q_z\dot{z})+k\mathrm{e}^{2(q-p)}(\ddot{z}+2q_z\dot{z}^2)+$$
$$+l\mathrm{e}^{2(q-p)}(\ddot{u}+2q_u\dot{u}^2)=(\dot{x}^2+\dot{y}^2+2\dot{z}\dot{u})p_z+\mathrm{e}^{2(q-p)}(h\dot{y}^2+k\dot{z}^2+2l\dot{z}\dot{u}+m\dot{u}^2)q_z,$$

$$\ddot{z}+2\dot{z}(p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}+p_u\dot{u})+2l\mathrm{e}^{2(q-p)}(q_x\dot{x}+q_y\dot{y}+q_u\dot{u})+$$
$$+2m\mathrm{e}^{2(q-p)}(q_x\dot{x}+q_y\dot{y}+q_z\dot{z})+l\mathrm{e}^{2(q-p)}(\ddot{z}+2q_z\dot{z}^2)+$$
$$+m\mathrm{e}^{2(q-p)}(\ddot{u}+2q_u\dot{u}^2)=(\dot{x}^2+\dot{y}^2+2\dot{z}\dot{u})p_u+$$
$$+\mathrm{e}^{2(q-p)}(h\dot{y}^2+k\dot{z}^2+2l\dot{z}\dot{u}+m\dot{u}^2)q_u.$$

Pentru ca aceste ecuații să aibă coeficienții constanți, este necesar să avem

$$p = ax + by + cz + eu,$$
$$\mathrm{e}^{2(q-p)}\, q_x = \alpha,$$
$$q_y = \beta,\ \ddot{y} + q_y\,\dot{y}^2 = 0,$$
$$\mathrm{e}^{2(q-p)}\, q_z = \gamma,\quad \mathrm{e}^{2(q-p)}\, q_u = \delta,$$
$$k = l = m = 0.$$

Scriind condițiile de integrabilitate ale ecuațiilor cu derivate parțiale de mai sus, obținem

$$\alpha\,(\beta - b) = 0,$$
$$\gamma\,(\beta - b) = 0,$$
$$\delta\,(\beta - b) = 0,$$
$$c\,\alpha - a\,\gamma = 0,$$
$$e\,\alpha - a\,\delta = 0,$$
$$e\,\gamma - c\,\delta = 0.$$

Se disting două cazuri:

I. $\beta \neq b$. Rezultă $\alpha = \gamma = \delta = 0$. Deci funcția q depinde doar de y și avem $q = \beta\, y$.

Celelalte condiții de integrabilitate se verifică identic, oricare ar fi constantele a, c, e.

În acest caz metrica spațiului se scrie:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2(ax+by+cz+eu)}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u)+h\mathrm{e}^{2\beta y}\,dy^2.$$

II. $\beta = b$. În acest caz dacă α, γ, δ sînt diferite de zero, rezultă din condițiile de integrabilitate că trebuie să avem $a = c = e = 0$.

Integrînd sistemul de ecuații cu derivate parțiale :

$$
\begin{aligned}
q_y &= b,\\
e^{2(q-p)}\, q_x &= \alpha,\\
e^{2(q-p)}\, q_z &= \gamma,\\
e^{2(q-p)}\, q_u &= \delta,
\end{aligned}
$$

rezultă $q = b\,y + f\,(x,\ z,\ u)$.

Înlocuind în ultimele trei ecuații de mai sus și ținînd seama că $p = b\,y$, rezultă sistemul

$$
\begin{aligned}
f_x &= \alpha\, e^{-2f}\\
f_z &= \gamma\, e^{-2f}\\
f_u &= \delta\, e^{-2f}
\end{aligned}
$$

care prin integrare ne dă

$$f = \frac{1}{2} \ln\ [2\,(\alpha x + \gamma z + \delta u)]$$

deci

$$q = b\,y + \frac{1}{2} \ln[2\,(\alpha x + \gamma z + \delta u)]$$

de unde rezultă

$$e^{2q} = 2\, e^{2by}\,(\alpha x + \gamma z + \delta u).$$

Metrica spațiului se scrie :

$$ds^2 = e^{2by}\,[dx^2 + dy^2 + 2\,dz\,du + 2h\,(\alpha x + \gamma z + \delta u)\,dy^2].$$

Vom căuta să extindem rezultatele obținute anterior la cazul unui spațiu V_n cu conexiune constantă de genul doi.

Vom studia mai întîi cazul cînd forma φ este pozitiv definită, deci reductibilă la forma canonică

$$\varphi = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \ldots + (dx^n)^2.$$

În acest caz forma ψ se poate totdeauna reduce prin transformări ortogonale la forma canonică

$$\psi = \rho_1\,(dx^1)^2 + \rho_2\,(dx^2)^2 + \ldots + \rho_n\ (dx^n)^2,$$

unde $\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_n$ sînt rădăcinile (reale) ale ecuației caracteristice

$$|\,\psi - \rho\varphi\,| = 0.$$

Metrica lui $V_{\bullet}$ se scrie :

$$ds^2 = e^{2p}[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2] + e^{2q}[\rho_1 (dx^1)^2 + \ldots + \rho_n (dx^n)^2],$$

unde p, q sînt funcții de variabilele $x^1, \ldots, x^n$, a căror diferență nu este o constantă.

Luînd în loc de e^{2p}, e^{2q} funcțiile $e^{2p} + \rho_1 e^{2q}$ respectiv e^{2q} se poate presupune că ψ are coeficientul lui $(dx^1)^2$ egal cu zero, așa încît metrica se scrie :

$$ds^2 = e^{2p}[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2] + e^{2q}[\lambda_2 (dx^2)^2 + \ldots + \lambda_n (dx^n)^2].$$

Energia cinetică asociată acestei metrici se scrie :

$$T = \frac{1}{2} e^{2p}[(\dot{x}^1)^2 + \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2] + \frac{1}{2} e^{2q}[\lambda_k (\dot{x}^k)^2].$$

Geodezicele sînt date de ecuațiile lui Lagrange care se scriu sub forma :

$$\frac{d}{dt}(e^{2p}\dot{x}^1) = e^{2p}[(\dot{x}^1)^2 + \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2]\, p_{x^1} + e^{2q}[\lambda_k (\dot{x}^k)^2]\, q_{x^1},$$

$$\frac{d}{dt}(e^{2p}\varepsilon_h \dot{x}^h + e^{2q}\lambda_h \dot{x}^h) = e^{2p}[(\dot{x}^1)^2 + \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2]\, p_{x^h} + e^{2q}[\lambda_k (\dot{x}^k)^2]\, q_{x^h},$$

unde $\varepsilon_k = +1$, $k = 2, 3, \ldots, n$ (indice de sumare) iar $h = 2, 3, \ldots, n$ (indice de numerotare). Derivînd în raport cu t, avem

$$e^{2p}\ddot{x}^1 + 2\dot{x}^1 e^{2p} p_{x^\alpha} \dot{x}^\alpha = e^{2p}[(\dot{x}^1)^2 + \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2]\, p_{x} + e^{2q}[\lambda_k (\dot{x}^k)^2]\, q_{x^1},$$

$$e^{2p}\ddot{x}^h + \lambda_h e^{2q}\ddot{x}^h + 2\dot{x}^h e^{2p} p_{x^\alpha}\dot{x}^\alpha + 2\lambda_h \dot{x}^h e^{2q} q_{x^\alpha}\dot{x}^\alpha = e^{2p}[(\dot{x}^1)^2 +$$

$$+ \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2]\, p_{x^h} + e^{2q}[\lambda_k (\dot{x}^k)^2]\, q_{x^h}$$

unde : $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ (indice de sumare).

Aceste ecuații se mai scriu :

$$\ddot{x}^1 = -2\dot{x}^1 p_{x^\alpha}\dot{x}^\alpha + [(\dot{x}^1)^2 + \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2]\, p_{x^1} + e^{2(q-p)} q_{x^1} \lambda_k (\dot{x}^k)^2$$

$$\ddot{x}^h + \lambda_h e^{2(q-p)}(\ddot{x}^h + 2\dot{x}^h \dot{x}^\alpha q_{x^\alpha}) = -2\dot{x}^h \dot{x}^\alpha p_{x^\alpha} + [(\dot{x}^1)^2 +$$

$$+ \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2]\, p_{x^h} + e^{2(q-p)} q_{x^h} \lambda_k (\dot{x}^k)^2$$

sau

$$\ddot{x}^1 = -(\dot{x}^1)^2 p_{x^1} - 2\dot{x}^1 \dot{x}^\beta p_{x^\beta} + \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2 p_{x^1} + e^{2(q-p)} q_{x^1} \lambda_k (\dot{x}^k)^2$$

$$\ddot{x}^k + \lambda_h e^{2(q-p)}[\ddot{x}^h + (\dot{x}^h)^2 q_{x^h} + 2\dot{x}^h \dot{x}^\gamma q_{x^\gamma}] = -2\dot{x}^h \dot{x}^\gamma p_{x^\gamma} +$$

$$+ [(\dot{x}^1)^2 + \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2 - (\dot{x}^h)^2]\, p_{x^h} + e^{2(q-p)} q_{x^h} \lambda_\gamma (\dot{x}^\gamma)^2,$$

unde $\beta = 2, 3, \ldots, n$ (indice de sumare); $\gamma = 2, 3, \ldots, h-1, h+$ $+1, \ldots, n$ (indice de sumare).

Pentru ca aceste ecuaţii să fie cu coeficienţi constanţi este necesar să avem

$$p = a_i x^i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ (indice de sumare)},$$

$$e^{2(q-p)} q_{x^1} = b_1,$$

$$q_{x^h} = b_h, \ddot{x}^h + (\dot{x}^h)^2 q_{x^h} = 0 \qquad (h \text{ indice fix}),$$

$$e^{2(q-p)} q_{x^\gamma} = b_\gamma,$$

$$\lambda\gamma = 0, \; (\gamma = 2, 3, \ldots, h-1, \; h+1, \ldots, n).$$

Scriind condiţiile de integrabilitate ale ecuaţiilor cu derivate parţiale de mai sus, obţinem

$$b_1 \, (b_h - a_h) = 0,$$

$$b_\gamma \, (b_h - a_h) = 0,$$

$$b_1 \, a_\gamma - a_1 \, b_\gamma = 0.$$

Se deosebesc două cazuri :

I. $b_h \neq a_h$. Atunci rezultă că $b_1 = 0$, $b_\gamma = 0$. Ultimele condiţii de integrabilitate se verifică identic.

Deducem : $q = b_h \, x^h$ (h indice fix).

Metrica spaţiului se scrie :

$$ds^2 = e^{2a_i x^i} [(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2] + \lambda_h e^{2b_h x^h} (dx^h)^2.$$

Putem lua $h = 2$ şi atunci metrica se scrie :

$$ds^2 = e^{2a_i x^i} [(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2] + \lambda_2 \, e^{2b_2 x^2} (dx^2)^2.$$

II. $b_h = a_h$. Rezultă din condiţiile de integrabilitate că trebuie să luăm :

$$a_1 = 0, \; a_\gamma = 0 \text{ (dacă } b_1 \neq 0, \; b_\gamma \neq 0).$$

Integrînd sistemul

$$e^{2(q-p)} q_{x^1} = b_1, q_{x^h} = b_h, \; e^{2(q-p)} q_{x^\gamma} = b_\gamma$$

obţinem

$$q = b_h \, x^h + \frac{1}{2} \ln \; [2 \, (b_1 \, x^1 + b_\gamma \, x^\gamma)]$$

de unde rezultă

$$e^{2q} = 2 \, e^{2a_h x^h} (b_1 \, x^1 + b_\gamma x^\gamma).$$

Metrica lui V_n se scrie :

$$ds^2 = e^{2a_h x^h} \; [(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2 + 2\lambda_h \, (b_1 \, x^1 + b_\gamma \, x^\gamma) \; (dx^h)^2]$$

sau luînd $h = 2$, obţinem

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2a_2 x^2} [(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2 + 2\lambda_2 (b_1 x^1 + b_\gamma x^\gamma) (\mathrm{d}x^2)^2].$$

Vom presupune acum că forma φ nu este definită şi vom studia aici cazul cînd φ este de tip hiperbolic normal, adică se poate reduce la forma canonică :

$$\varphi = (\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^{n-1})^2 - (\mathrm{d}x^n)^2.$$

În acest caz, acad. prof. Gh. Vrănceanu a arătat [2] că forma ψ se poate reduce totdeauna prin transformări hiperbolice la forma canonică.

$$\psi = \rho_1 (\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + \rho_{n-2} (\mathrm{d}x^{n-2})^2 + \rho_{n-1} (\mathrm{d}x^{n-1})^2 +$$
$$+ 2\lambda \,\mathrm{d}x^{n-1} \,\mathrm{d}x^n + \rho_n (\mathrm{d}x^n)^2.$$

Metrica lui V_n se scrie

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2p} \varepsilon_k (dx^k)^2 + \mathrm{e}^{2q} [\rho_k (\mathrm{d}x^k)^2 + 2\lambda \,\mathrm{d}x^{n-1}\mathrm{d}x^n],$$

unde $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_{n-1} = +1$, $\varepsilon_n = -1$, $k = 1, \ldots, n$ (indice de sumare) şi unde p, q sînt funcţii de variabilele $x^1, \ldots, x^n$ a căror diferenţă nu este o constantă.

Luînd în loc de e^{2p}, e^{2q}, funcţiile $\mathrm{e}^{2p} + \rho_1 \mathrm{e}^{2q}$, respectiv e^{2q}, se poate presupune că ψ are coeficientul lui $(\mathrm{d}x^1)^2$ egal cu zero, aşa încît metrica se scrie :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2p} \varepsilon_k (\mathrm{d}x^k)^2 + [\rho_h (\mathrm{d}x^h)^2 + 2\lambda \,\mathrm{d}x^{n-1} \,\mathrm{d}x^n],$$

unde $h = 2, \ldots, n$ (indice de sumare).

Energia cinetică asociată acestei metrici se scrie :

$$T = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{2p} \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2 + \frac{1}{2} \mathrm{e}^{2q} [\rho_h (\dot{x}^h)^2 + 2\lambda \dot{x}^{n-1} \dot{x}^n].$$

Geodezicele sînt date de ecuaţiile lui Lagrange care se scriu sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathrm{e}^{2p} \dot{x}^1) = \mathrm{e}^{2p} \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2 p_{x^1} + \mathrm{e}^{2q} [\rho_h (\dot{x}^h)^2 + 2\lambda \dot{x}^{n-1} \dot{x}^n] q_{x^1},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathrm{e}^{2p} \dot{x}^r + \rho_r \mathrm{e}^{2q} \dot{x}^r) = \mathrm{e}^{2p} \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2 p_{xr} + \mathrm{e}^{2q} [\rho_h (\dot{x}^h)^2 + 2\lambda \dot{x}^{n-1} \dot{x}^n] q_{xr}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathrm{e}^{2p} \dot{x}^{n-1} + \rho_{n-1} \mathrm{e}^{2q} \dot{x}^{n-1} + \lambda \mathrm{e}^{2q} \dot{x}^n) = \mathrm{e}^{2p} \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2 p_{xn-1} +$$
$$+ \mathrm{e}^{2q} [\rho_h (\dot{x}^h)^2 + 2\lambda \dot{x}^{n-1} \dot{x}^n] q_{xn-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (-\mathrm{e}^{2p} \dot{x}^n + \rho_n \mathrm{e}^{2q} \dot{x}^n + \lambda \mathrm{e}^{2q} \dot{x}^{n-1}) = \mathrm{e}^{2p} \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2 p_{xn} +$$
$$+ \mathrm{e}^{2q} (\rho_h (\dot{x}^h)^2 + 2\lambda \dot{x}^{n-1} \dot{x}^n) q_{xn},$$

unde $r = 2, 3, \ldots, n - 2$ (indice de numerotare).

Derivînd în raport cu t, obținem în definitiv :

$$\ddot{x}^1 = -(\dot{x}^1)^2 p_{x^1} - 2\,\dot{x}^1 p_{x^\beta} \dot{x}^\beta + \varepsilon_h (\dot{x}^h)^2 p_{x^1} +$$

$$+ e^{2(q-p)} q_{x^1} [\rho_h (\dot{x}^h)^2 + 2\lambda \dot{x}^{n-1} \dot{x}^n],$$

$$\ddot{x}^r + \rho_r e^{2(q-p)} [\ddot{x}^r + 2\,\dot{x}^r \dot{x}^\alpha q_{x^\alpha}] = \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2 p_{x^r} -$$

$$- 2\,\dot{x}^r \dot{x}^\alpha p_{x^\alpha} + e^{2(q-p)} q x^r [\rho_h (\dot{x}^h)^2 + 2\,\lambda \dot{x}^{n-1} \dot{x}^n],$$

$$\ddot{x}^{n-1} + \rho_{n-1} e^{2(q-p)} [\ddot{x}^{n-1} + 2\,\dot{x}^{n-1} \dot{x}^\alpha q x^\alpha] + \lambda e^{2(q-p)} (\ddot{x}^n + 2\,x^n x^\alpha q x^\alpha =$$

$$= \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2 p_{x^{n-1}} - 2\,\dot{x}^{n-1} \dot{x}^\alpha p_{x^\alpha} + e^{2(q-p)} q_{x^{n-1}} [\rho_h (\dot{x}^h)^2 + 2\,\lambda \dot{x}^{n-1} \dot{x}^n] -$$

$$- \ddot{x}^n + \rho_n e^{2(q-p)} [\ddot{x}^n + 2\,\dot{x}^n \dot{x}^\alpha q_{x^\alpha}] + \lambda e^{2(q-p)} [\ddot{x}^{n-1} + 2\,\dot{x}^{n-1} \dot{x}^\alpha\, q_{x^\alpha}] =$$

$$= \varepsilon_k (\dot{x}^k)^2 p_{x^n} - 2\,\dot{x}^n \dot{x}^\alpha p_{x^\alpha} + e^{2(q-p)} q_{x^n} [\rho_h (\dot{x}^h)^2 + 2\,\lambda \dot{x}^{n-1} \dot{x}^n],$$

unde $\beta = 2, \ldots, n$ (indice de sumare).

Pentru ca aceste ecuații să aibă coeficienții constanți, este necesar să avem :

$$p = a_i\, x^i \ (i = 1, \ldots, n) \text{ (indice de sumare)}$$

$$e^{2(q-p)} q_{x^1} = b_1,\ q_{x^2} = b_2,\ \ddot{x}^2 + (\dot{x}^2)^2 q_{x^2} = 0$$

$$e^{2(q-p)} q_{x^\gamma} = b_\gamma,\ \rho_\gamma = 0,\ \lambda = 0$$

pentru $\gamma = 3, 4, \ldots, n$.

Scriind condițiile de integrabilitate, se obține

$$b_1\,(b_2 - a_2) = 0,$$

$$b_\gamma\,(b_2 - a_2) = 0,$$

$$b_1\, a_\gamma - a_1\, b_\gamma = 0.$$

Se disting două cazuri :

I. $b_2 \neq a_2$. Rezultă $b_1 = 0$, $b_\gamma = 0$. Ultimele condiții de integrabilitate se verifică identic.

Deducem $q = b_2\, x^2$ și metrica spațiului se scrie :

$$ds^2 = e^{2a_i x^i} [(dx^1)^2 + \ldots + (dx^{n-1})^2 - (dx^n)^2] + \rho_2 e^{2b_2 x^2} (dx^2)^2.$$

II. $b_2 = a_2$. În acest caz, dacă $b_1 \neq 0$, $b_\gamma \neq 0$, rezultă că trebuie să avem $a_1 = 0$, $a_\gamma = 0$.

Integrînd sistemul

$$e^{2(q-p)} q_{x^1} = b_1,\ q_{x^2} = b_2,\ e^{2(q-p)} q_{x^\gamma} = b_\gamma,$$

obținem

$$q = b_2\, x^2 + \frac{1}{2} \ln [2\,(b_1\, x^1 + b_3\, x^3 + \ldots + b_n\, x^n)]$$

de unde

$$e^{2q} = 2\,e^{2a_2x^2}\,(b_1\,x^1 + b_3\,x^3 + \ldots + b_n\,x^n).$$

Metrica lui V_n se scrie :

$$ds^2 = e^{2a_2x^2}\,[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^{n-1})^2 - (dx^n)^2 +$$
$$+ 2\,\rho_2\,(b_1\,x^1 + b_3\,x^3 + \ldots + b_n\,x^n)\,(dx^2)^2].$$

Primită la redacţie la 2 august 1963

BIBLIOGRAFIE

1. GHEORGHE VRĂNCEANU, *Asupra spaţiilor lui Riemann cu conexiune constantă*. Studii şi cercetări matematice, **XIII**, *2* (1962).
2. — *Reducerea la forma canonică a unei forme pătratice prin transformări hiperbolice*. Analele Universităţii „C. I. Parhon", *25* (1960).
3. — *Reducerea la formă canonică a două forme pătratice*. Studii şi cercetări matematice, **XII**, *1* (1961).
4. V. G. GORCIU, *Asupra spaţiilor V_3 cu conexiune constantă de gen doi*. Studii şi cercetări matematice, **XIII**, *3* (1962).

REPREZENTAREA CÎMPURILOR VECTORIALE CU AJUTORUL FUNCŢIILOR GENERALIZATE

DE

KECS WILHELM

Fie

$$
\begin{aligned}
x &= f(t) \\
y &= g(t) \qquad\qquad (1) \\
z &= h(t)
\end{aligned}
$$

ecuaţiile parametrice ale unei curbe, unde funcţiile f, g şi h se presupun indefinit derivabile şi

$$\lim_{t \to \pm\infty} (f^2 + g^2 + h^2) = +\infty.$$

Considerăm un cîmp vectorial $\vec{\tau}(t)$ definit astfel:

$$\vec{\tau}(t) = \begin{cases} \vec{V}(t) \text{ pentru } t \in [a, b], \\ 0 \text{ pentru } t \,\overline{\in}\, [a, b]. \end{cases} \qquad (2)$$

Împărţim intervalul $[a, b]$ în n intervale parţiale prin punctele

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{i-1} < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b$$

şi notăm cu A, B şi M_i punctele de pe curba (1) care corespund valorilor a, b şi t_i ale parametrului t.

Notăm cu Δs_i lungimea arcului de curbă $\overset{\frown}{M_{i-1} M_i}$ şi cu $\bar{t}_i$ un punct oarecare interior intervalului $[t_{i-1}, t_i]$.

Să asociem fiecărei porţiuni de arc de curbă $\widehat{M_{i-1}M_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sarcina concentrată $\vec{F}_i$ avînd expresia :

$$\vec{F}_i(x, y, z) = \Delta s_i\, \vec{V}(\bar{t}_i)\, \delta(x - f(\bar{t}_i), y - g(\bar{t}_i), z - h(\bar{t}_i)) \tag{3}$$

unde $\delta(x, y, z)$ reprezintă funcţia generalizată a lui Dirac.

Din corespondenţa astfel definită rezultă că arcului de curbă $\widehat{AB}$ îi corespunde sarcina

$$\vec{Q}_n(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i\, \vec{V}(\bar{t}_i)\, \delta(x - f(\bar{t}_i), y - g(\bar{t}_i), z - h(\bar{t}_i)). \tag{4}$$

Sarcina $\vec{Q}_n$ astfel construită constituie o aproximare a cîmpului de vectori $\vec{\tau}(t)$ definit prin relaţia (2).

Vom obţine reprezentarea acestui cîmp de vectori considerînd limita :

$$\vec{Q}(x, y, z) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta s_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i\, \vec{V}(\bar{t}_i)\, \delta(x - f(\bar{t}_i), y - g(\bar{t}_i), z - h(\bar{t}_i)), \tag{5}$$

în sensul teoriei funcţiilor generalizate.

Să observăm că în baza relaţiei (1) dacă $\varphi(x, y, z)$ reprezintă o funcţie fundamentală, atunci şi funcţia

$$\psi(t) = \varphi(f(t), g(t), h(t))$$

este fundamentală. Pentru a arăta că relaţia (5) există, vom evalua expresia :

$$(\vec{Q}_n(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = \sum_{i=1}^{n} (\Delta s_i\, \vec{V}(\bar{t}_i)\, \delta(x - f(\bar{t}_i), y - g(\bar{t}_i), z - h(\bar{t}_i)), \varphi(x, y, z)), \tag{6}$$

care poate fi scrisă şi sub forma :

$$(\vec{Q}_n(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i\, \vec{V}(\bar{t}_i)\, \varphi(f(\bar{t}_i), g(\bar{t}_i), h(\bar{t}_i)). \tag{6'}$$

Din expresia (6′) rezultă că relaţia (5) există şi avem

$$\lim_{n \to \infty} (\vec{Q}_n, \varphi) = (\vec{Q}, \varphi) = \int_a^b \vec{V}(t) \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\, \varphi(f(t), g(t), h(t))\, dt. \tag{7}$$

Cu ajutorul funcţiei

$$\theta_1(t) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } t \in [a, b], \\ 0 \text{ pentru } t \mathrel{\overline{\in}} [a, b], \end{cases}$$

relaţia (7) devine

$$(\vec{Q}, \varphi) = (\theta_1(t)\, \vec{V}(t) \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)},\ \varphi(f(t), g(t), h(t))). \tag{7'}$$

În scopul explicitării expresiei funcţiei generalizate $\vec{Q}$ din relaţia (7'), vom introduce funcţia auxiliară $\vec{\alpha}_t$ avînd expresia

$$\vec{\alpha}_t(x, y, z) = \theta_1(t)\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\ \theta(x - f(t)) \times \\ \times\ \theta(y - g(t)) \times \theta(z - h(t)) \tag{8}$$

în care simbolul „×" reprezintă produsul direct, iar $\theta(u)$ funcţia lui Heviside, anume :

$$\theta(u) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } u \geqslant 0, \\ 0 \text{ pentru } u < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Avînd în vedere că produsul direct coincide cu produsul în sens obişnuit în cazul cînd funcţionalele sînt regulate, avem :

$$\vec{\alpha}_t(x, y, z) = \bar{\theta}_t(x, y, z)\ \vec{V}(t) \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)} \tag{8'}$$

unde

$$\bar{\theta}_t(x, y, z) = \theta_1(t)\ \theta(x - f(t))\ \theta(y - g(t))\ \theta(z - h(t)) = \\ = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \geqslant f(t),\ y \geqslant g(t),\ z \geqslant h(t),\ t \in [a, b], \\ 0 \text{ pentru } x < f(t) \text{ sau } y < g(t) \text{ sau } z < h(t) \text{ sau } t \in [a, b]. \end{cases} \tag{10}$$

Derivînd în sensul teoriei funcţiilor generalizate expresiile (8) şi (8') obţinem

$$\frac{\partial^3 \vec{\alpha}_t(x, y, z)}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y\, \partial z}\left(\bar{\theta}_t(x, y, z)\, \vec{V}(t)\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\right) = \\ = \theta_1(t)\ \vec{V}(t)\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\ \delta(x - f(t), y - g(t), z - h(t)). \tag{11}$$

Deoarece funcţia $\vec{\alpha}_t(x, y, z)$ este sumabilă cînd x, y, z parcurg o mulţime mărginită şi parametrul t o mulţime mărginită sau nemărginită, conform teoremelor privind integrarea funcţiilor generalizate depinzînd de un parametru (L. Schwartz [3], p. 33, 34) avem :

$$(\vec{Q}(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_1(t)\ \vec{V}(t)\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\ \varphi(f(t), g(t), h(t))\, dt = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_1(t)\ \vec{V}(t)\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\ \delta(x - f(t), y - g(t), z - h(t)), \\ \varphi(x, y, z))\, dt =$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^3 \vec{\alpha}_t(x,y,z)}{\partial x\,\partial y\,\partial z},\ \varphi(x,y,z)\right)\mathrm{d}t=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^3 \vec{\alpha}_t(x,y,z)}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\,\mathrm{d}t,\ \varphi(x,y,z)\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{\alpha}_t(x,y,z)\,\mathrm{d}t,\ \varphi(x,y,z)\right)\cdot$$

Ținînd seamă de definiția egalității a două funcții generalizate avem

$$\vec{Q}(x,y,z)=\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{\alpha}_t(x,y,z)\,\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\theta}_t(x,y,z)\,\vec{V}(t)\,\sqrt{f'^2+g'^2+h'^2}\,\mathrm{d}t. \tag{12}$$

Dacă notăm cu $V_x(t), V_y(t)$ și $V_z(t)$ proiecțiile cîmpului vectorial $\vec{V}(t)$ definit prin relația (2), atunci proiecțiile $Q_x(x,y,z)$, $Q_y(x,y,z)$, $Q_z(x,y,z)$ ale sarcinii $\vec{Q}(x,y,z)$ echivalentă cu cîmpul vectorial considerat vor fi date de expresiile :

$$\begin{aligned}
Q_x(x,y,z)&=\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\theta}_t\,V_x(t)\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)+h'^2(t)}\,\mathrm{d}t,\\
Q_y(x,y,z)&=\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\theta}_t\,V_y(t)\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)+h'^2(t)}\,\mathrm{d}t,\\
Q_z(x,y,z)&=\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\theta}_t\,V_z(t)\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)+h'^2(t)}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{13}$$

În particular, pentru o curbă plană definită prin ecuațiile $x=f(t)$, $y=g(t)$ și respectînd condiția $\lim\limits_{t\to\pm\infty}(f^2+g^2)=+\infty$ expresiile sarcinii echivalente cu cîmpul vectorial considerat dat de relația (13) se simplifică devenind :

$$\begin{aligned}
Q_x(x,y)&=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\theta}'_t\,V_x(t)\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,\mathrm{d}t\\
Q_y(x,y)&=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\theta}'_t\,V_y(t)\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,\mathrm{d}t\\
Q_z(x,y)&=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\theta}'_t\,V_z(t)\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{14}$$

unde

$$\bar{\theta}'_t=\theta_1(t)\,\theta(x-f(t))\,\theta(y-g(t))=\begin{cases}1 \text{ pentru } x\geqslant f(t),\ y\geqslant g(t),\ t\in[a,b],\\ 0 \text{ pentru } x<f(t) \text{ sau } y<g(t) \text{ sau } t\ \overline{\in}\ [a,b].\end{cases}$$

În cazul cînd curba plană este definită prin ecuațiile $x = t$, $y = g(t)$, condiția $\lim\limits_{t \to \pm\infty} (t^2 + g^2(t)) = +\infty$ este verificată și deci proiecțiile sarcinii echivalente în cîmpul vectorial vor fi :

$$\begin{aligned} Q_x(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\theta}_t'' \, V_x(t) \sqrt{1 + g'^2(t)}\, \mathrm{d}t, \\ Q_y(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\theta}_t'' \, V_y(t) \sqrt{1 + g'^2(t)}\, \mathrm{d}t, \\ Q_z(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\theta}_t'' \, V_z(t) \sqrt{1 + g'^2(t)}\, \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{15}$$

unde θ_t'' are expresia

$$\bar{\theta}_t'' = \theta_1(t)\, \theta(x - t)\, \theta(y - g(t)) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \geqslant t,\ y \geqslant g(t),\ t \in [a, b] \\ 0 \text{ pentru } x < t \text{ sau } y < g(t) \text{ sau } t \mathrel{\overline{\in}} [a, b] \end{cases}$$

Exemplul I. Să presupunem că curba plană este definită de ecuațiile $x = t$, $y = y_0 = \text{constant}$.

Considerăm cîmpul de vectori $\vec{V}(t)$ avînd proiecțiile :

$$V_x(t) = \frac{P}{2c},\ V_y(t) \frac{Q}{2c},\ V_z(t) = \frac{R}{2c}, \text{ unde } t \in [-c, c]$$

P, Q și R fiind mărimi constante.

În acest caz expresiile (15) se simplifică devenind

$$\begin{aligned} Q_x(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \int_{-c}^{c} \frac{P}{2c}\, \theta(x - t)\, \theta(y - y_0)\, \mathrm{d}t, \\ Q_y(x,y) &\quad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \int_{-c}^{c} \frac{\theta}{2c}\, \theta(x - t)\, \theta(y - y_0)\, \mathrm{d}t, \\ Q_z(x,y) &\quad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \int_{-c}^{c} \frac{R}{2c}\, \theta(x - t)\, \theta(y - y_0)\, \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{16}$$

Pentru a explicita expresiile $Q_x(x, y)$, $Q_y(x, y)$, $Q_z(x, y)$ ale proiecțiilor sarcinii echivalentă cu cîmpul considerat, este suficient să evaluăm integrala :

$$\int_{-c}^{c} \theta(x - t)\, \mathrm{d}t = \psi(x, c) \tag{17}$$

deoarece

$$\theta(x - t) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \geqslant t \\ 0 \text{ pentru } x < t \end{cases}$$

avem

$$\int_{-c}^{c} \theta(x-t)\,dt = \psi(x,c) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < -c, \\ x+c & \text{pentru } -c \leqslant x \leqslant c, \\ 2c & \text{pentru } x > c. \end{cases} \tag{17'}$$

Considerînd limitele expresiilor (16) în sensul teoriei funcțiilor generalizate pentru $c \to 0$, obținem :

$$\begin{aligned} \lim_{c\to 0} Q_x(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left\{ P\,\theta(y-y_0) \times \lim_{c\to 0} \frac{\psi(x,c)}{2c} \right\}, \\ \lim_{c\to 0} Q_y(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left\{ Q\,\theta(y-y_0) \times \lim_{c\to 0} \frac{\psi(x,c)}{2c} \right\}, \\ \lim_{c\to 0} Q_z(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left\{ R\,\theta(y-y_0) \times \lim_{c\to 0} \frac{\psi(x,c)}{2c} \right\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Ținînd seamă de relația (17′) avem

$$\lim_{c\to 0} \frac{\psi(x,c)}{2c} = \lim_{c\to 0} \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} \theta(x-t)\,dt = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ pentru } x < 0 \end{cases} = \theta(x) \tag{19}$$

astfel relația (18) devine

$$\begin{aligned} \lim_{c\to 0} Q_x(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,[P\,\theta(y-y_0) \times \theta(x)] = P\,\delta(x, y-y_0) \\ \lim_{c\to 0} Q_y(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,[Q\,\theta(y-y_0) \times \theta(x)] = Q\,\delta(x, y-y_0), \\ \lim_{c\to 0} Q_z(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,[R\,\theta(y-y_0) \times \theta(x)] = R\,\delta(x, y-y_0) \end{aligned} \tag{20}$$

care constituie expresiile sarcinii concentrate $\vec{F}(P, Q, R)$ aplicate în punctul $A(0, y_0)$.

Exemplul II. Considerăm un pătrat $ABCD$ cu latura $2a$, avînd centrul în origine și laturile paralele cu axele de coordonate.

De-a lungul laturilor AB și CD avem definit un cîmp vectorial astfel încît pe latura AB avem :

$$V_x(t) = \begin{cases} \dfrac{P}{4a^2} \text{ pentru } t \in [-a, a], \\ 0 \quad \text{pentru } t \bar{\in} [-a, a]. \end{cases}$$

$$V_y = V_z = 0$$

Pe latura CD avem $V'_x = -V_x(t)$; $V'_y = V'_z = 0$, cum se arată în figura 1.

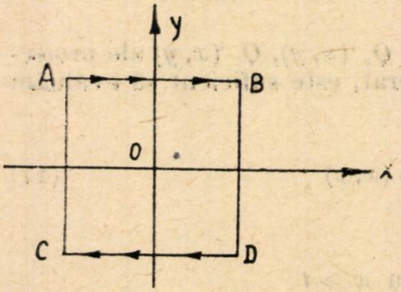


Fig. 1

Cîmpul vectorial definit pe laturile AB și CD sînt echivalente cu sarcina $Q_x\,(x, y, a)$, unde

$$Q_x\,(x, y, a) = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left\{\frac{P}{4\,a^2}\,[\theta\,(y - a) - \theta\,(y + a)]\int_{-a}^{a}\theta\,(x - t)\,\mathrm{d}t\right\}\cdot \qquad (21)$$

Relația (21) poate fi scrisă sub forma

$$Q_x\,(x, y, a) = \frac{P}{2\,a}\,[\delta\,(y - a) - \delta\,(y + a)] \times \int_{-a}^{a}\frac{\delta\,(x-t)}{2\,a}\,\mathrm{d}t. \qquad (21')$$

În scopul simplificării relației (21′) evaluăm expresia

$$(Q_x\,(x, y, a),\ \varphi\,(x, y)) =$$

$$= \left(\frac{P}{2\,a}\,[\delta\,(y - a) - \delta\,(y + a)],\ \left(\int_{-a}^{a}\frac{\delta\,(x-t)}{2\,a}\,\mathrm{d}t,\ \varphi\,(x, y)\right)\right) =$$

$$= P\left(\frac{\delta\,(y - a) - \delta\,(y + a)}{2\,a},\ \int_{-a}^{a}\left(\frac{\delta\,(x-t)}{2\,a},\ \varphi\,(x, y)\right)\mathrm{d}t\right) =$$

$$= P\left(\frac{\delta\,(y - a) - \delta\,(y + a)}{2\,a},\ \int_{-a}^{a}\frac{1}{2\,a}\,\varphi\,(t, y)\,\mathrm{d}t\right)\cdot \qquad (22)$$

În urma aplicării formulei medii avem

$$\int_{-a}^{a}\frac{1}{2\,a}\,\varphi\,(t, y)\,\mathrm{d}t = \varphi\,(\xi, y) \text{ unde } -a < \xi < a \qquad (23)$$

cu aceasta relația (22) se simplifică devenind

$$(Q_x\,(y, x, a),\ \varphi\,(x, y)) = P\left(\frac{\delta\,(y - a) - \delta\,(y + a)}{2\,a},\ \varphi\,(\xi, y)\right) =$$

$$= \frac{P}{2\,a}\,[(\delta\,(y - a),\ \varphi\,(\xi, y)) - (\delta\,(y + a),\ \varphi\,(\xi, y))] =$$

$$= \frac{P}{2\,a}\,[\varphi\,(\xi, a) - \varphi\,(\xi, -a)]. \qquad (22')$$

Pe de altă parte, în baza formulei creșterilor finite putem scrie

$$\varphi\,(\xi, a) - \varphi\,(\xi, -a) = \varphi_y'\,(\xi, \eta)\,2\,a \text{ unde } -a < \eta < a,$$

astfel relația (22′) devine

$$(Q_x\,(x, y, a),\ \varphi\,(x, y)) = P\,\varphi_y'\,(\xi, \eta). \qquad (22'')$$

Considerînd limita relației (22″) în sensul teoriei funcțiilor generalizate pentru $a \to 0$ avem

$$\lim_{a\to 0}\,(Q_x\,(x, y, a),\ \varphi\,(x, y)) = (\lim_{a\to 0} Q_x\,(x, y, a),\ \varphi\,(x, y)) = P\,\varphi_y'\,(0{,}0) \qquad (24)$$

cum

$$P\,\varphi'_y(0,0) = -\,(P\,\delta'_y(x,y),\ \varphi(x,y))$$

relația (23) se poate scrie sub forma

$$(\lim_{a\to 0} Q_x(x,y,a),\ \varphi(x,y)) = (\,-\,P\,\delta'_y(x,y),\ \varphi(x,y)) \qquad (24')$$

de unde și rezultă că

$$\lim_{a\to 0} Q_x(x,y,a) = -\,P\,\delta'_y(x,y). \qquad (25)$$

Deci limita cîmpului vectorial definit pe laturile AB și CD cînd $a \to 0$ este echivalent cu sarcina dată de relația (25). În cazul cînd pe laturile BD și AC sînt definite respectiv cîmpurile vectoriale :

$$(BD)\quad V_x = 0,\quad V_y = \begin{cases} -\dfrac{P}{4a^2} & \text{pentru } t \in [-a, a] \\ 0 & \text{pentru } t \bar{\in} [-a, a] \end{cases}$$

$$V'_x = 0 \quad V'_y = \begin{cases} \dfrac{P}{4a^2} & \text{pentru } t \in [-a, a] \\ 0 & \text{pentru } t \bar{\in} [-a, a] \end{cases}$$

pentru $a \to 0$ cîmpul de vectori definit pe laturile BD și AC este echivalent cu sarcini :

$$\lim_{a\to 0} Q_y(x,y,a) = P\,\delta'_x(x,y).$$

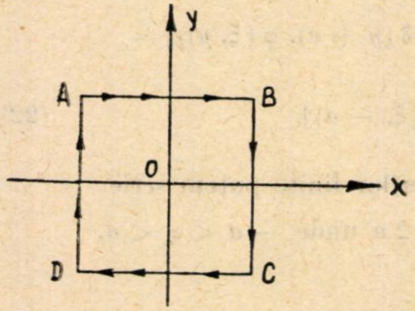


Fig. 2

Deci dacă de-a lungul laturilor unui pătrat avem definit un cîmp vectorial orientat în sensul orar (fig. 2), limita acestui cîmp pentru $a \to 0$ este echivalent cu sarcinile :

$$Q_x(x,y) = -\,P\,\delta'_y(x,y)$$
$$Q_y(x,y) = P\,\delta'_x(x,y)$$

Fie

$$x = f(u,v)$$
$$y = g(u,v)$$
$$z = h(u,v)$$

ecuațiile parametrice ale unei suprafețe, unde funcțiile f, g și h sînt indefinit derivabile și

$$\lim_{u^2+v^2\to+\infty} (f^2 + g^2 + h^2) = +\infty,$$

iar $\vec{\tau}(u,v)$ un cîmp vectorial definit.

Astfel :

$$\vec{\tau}(u, v) = \begin{cases} \vec{V}(u, v) & \text{pentru } (u, v) \in D, \\ 0 & \text{pentru } (u, v) \bar{\in} D, \end{cases}$$

D fiind domeniul de definiție al parametrilor u și v.

Procedînd cu totul similar ca și pentru cîmpurile vectoriale definite pe o curbă strîmbă, găsim că, cîmpul vectorial $\vec{\tau}(u, v)$ este echivalent cu sarcina :

$$Q(x, y, z) = \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y\, \partial z} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{\theta}_{u,v}(x, y, z)\, \vec{V}(u, v) \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v,$$

unde

$$\bar{\theta}_{u,v}(x, y, z) = \theta_1(u, v)\, \theta(x - f(u, v))\, \theta(y - g(u, v))\, \theta(z - h(u, v))$$

$$\theta_1(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } (u, v) \in D \\ 0 & \text{pentru } (u, v) \bar{\in} D \end{cases}$$

iar

$$\theta(w) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } w \geqslant 0 \\ 0 & \text{pentru } w < 0 \end{cases}$$

$$E = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2.$$

Primită la redacție la 6 noiembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. И. М. ГЕЛЬФАНД и ШИЛОВ Г. Е., *Обобщенные функции и действия над ними*. I, Москва, 1958.
2. SCHWARTZ L., *Theorie des distributions*, vol. I, II, Paris, 1954.
3. SCHWARTZ L., *Theorie elementaire de distributions*, vol. II, Paris, 1962.

ASUPRA PLANURILOR OPTIME DE ESTIMAȚIE

DE

ANCA CREANGĂ-SÎMBOAN

În această notă vom extinde noțiunea de plan de estimație optimal la cazul în care $M(\xi_x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x)$. Vom arăta că problema determinării unui plan optimal pentru estimarea unui singur parametru se reduce, ca în [1], la o problemă de maximin și vom da condițiile suficiente de existență a unui plan optimal.

Fie $\mathcal{X}$ un spațiu compact și $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$ un vector, ale cărui componente f_i $(i = 1, 2, \ldots)$ sînt funcții reale definite pe $\mathcal{X}$, continue și liniar independente.

Presupunem că fiecărui punct $x \in \mathcal{X}$ îi corespunde o variabilă aleatoare de observație ξ_x, pentru care

$$M(\xi_x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x) = (a \cdot f(x)), \tag{1}$$

$$\mathcal{D}^2(\xi_x) = \sigma^2, \tag{2}$$

unde vectorul coeficienților constanți $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ și dispersia σ^2 sînt necunoscute și seria din membrul al doilea al relației (1) este uniform convergentă pe $\mathcal{X}$.

Să considerăm produsul cartezian $\mathcal{X}^{n''} = \mathcal{X} \times \ldots \times \mathcal{X}$ și punctul $X = (x_1, \ldots, x_n)$ din $\mathcal{X}^n$. Fiecare punct X determină pe spațiul $\mathcal{X}$ o măsură discretă ν_x care repartizează în fiecare punct $x \in \mathcal{X}$ o masă egală cu numărul punctelor $x_i \in X$ egale cu x.

DEFINIȚIE. Numim plan de experiență orice măsură discretă ν_x pe $\mathcal{X}$.

În cele ce urmează ne propunem să definim noțiunea de plan optim ν^* pentru estimarea coeficientului a_1. Vom presupune că pentru parametrul a_1 există un estimator liniar de dispersie minimă.

Fie $X = (x_1, \ldots, x_n)$; se pune problema să se determine vectorul $(h_1, \ldots, h_n, \ldots)$ astfel încît

$$\Phi(h) = \sum_{r=1}^{n} \left[f_1(x_r) - \sum_{i=2}^{\infty} h_i f_i(x_r) \right]^2 \tag{3}$$

să fie minimă.

Dacă scriem pe $\Phi(h)$ sub forma

$$\Phi(h) = \sum_{r=1}^{n} (h \cdot f(x_r))^2;$$

atunci sistemul normal este

$$\sum_{r=1}^{n} (h \cdot f(x_r))^2 \cdot pr_j f(x_r) = 0 \quad (2 \leqq j < +\infty)$$

sau

$$\sum_{r=1}^{n} f_1(x_r) f_j(x_r) - \sum_{i=2}^{\infty} h_i \sum_{r=1}^{n} f_i(x_r) f_j(x_r) = 0 \quad (2 \leqq j < +\infty)$$

Dacă notăm cu

$$\beta_j = \sum_{r=1}^{n} f_1(x_r) f_j(x_r) \text{ şi } \alpha_{ij} = \sum_{r=1}^{n} f_i(x_r) \cdot f_j(x_r), \; (i, j = 2, 3, \ldots),$$

atunci sistemul normal se scrie

$$\sum_{i=2}^{\infty} h_i \alpha_{ij} - \beta_j = 0 \qquad (j = 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

LEMĂ. *Condiţiile ca sistemul (4) să aibă soluţie sînt ca*

1) *vectorul* $(\alpha_{22}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{2n}, \ldots)$ *să conţină o infinitate de componente nenule şi*

2)
$$\lim_{j \to \infty} \frac{\sum_{t=2}^{i-1} \int_{\mathcal{X}} |f_t(x) f_j(x)| \nu_X(\mathrm{d}x)}{\left| \int_{\mathcal{X}} f_i(x) f_j(x) \nu_X(\mathrm{d}x) \right|} = 0 \qquad (i = 3, 4, \ldots).$$

Lema se obţine aplicînd o teoremă a lui Pólya [2] relativă la soluţiile sistemelor liniare infinite.

Presupunînd condiţiile lemei îndeplinite, pentru punctul $X \in \mathcal{X}^n$ există vectorul $(h_2^0, h_3^0, \ldots, h_n^0, \ldots)$ astfel încît

$$\Phi(h) = \sum_{r=1}^{n} \left[f_1(x_r) - \sum_{i=2}^{\infty} h_i f_i(x_r) \right]^2$$

să fie minimă. Soluţia nu este unică.

Notînd cu

$$f_1^*(x) = f_1(x) - \sum_{i=2}^{\infty} h_i f_i(x)$$

relaţia (3) se scrie

$$\Phi(h) = \sum_{r=1}^{n} [f_1^*(x_r)]^2.$$

Fie $a^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*, \ldots)$ vectorul pentru care relaţia (1) devine

$$M(\xi_x) = a_1^* f_1^*(x) + \sum_{i=2}^{\infty} a_i^* f_i(x). \tag{5}$$

Observăm că a^* astfel ales ne dă $a_1^* = a_1$.

Înmulţind ambii membri ai relaţiei (5) cu $f_1^*(x_r)$ şi sumînd după r, obţinem

$$\sum_{r=1}^{n} f_1^*(x_r)\, M(\xi x_r) = a_1^* \sum_{r=1}^{n} [f_1^*(x_r)]^2 + \sum_{r=1}^{n} \sum_{i=2}^{\infty} a_i^* f_i(x_r) f_1^*(x_r).$$

Ţinînd seama de condiţiile (4) această egalitate se reduce la

$$\sum_{r=1}^{n} f_1^*(x_r)\, M(\xi_{x_r}) = a_1^* \sum_{r=1}^{n} [f_1^*(x_r)]^2.$$

De aici ţinînd seama de relaţia (2) rezultă

$$\mathcal{D}^2(a_1^*) = \frac{\sigma^2}{n \sum_{r=1}^{n} [f_1^*(x_r)]^2}$$

şi deci $\min_x \mathcal{D}^2(a_1^*)$ se realizează în acelaşi timp cu $\max_x \sum_{r=1}^{n} [f_1^*(x_r)]^2$.

Putem defini, ca în [1], că o măsură $\nu^* \in \Xi$, unde Ξ este spaţiul măsurilor discrete pe $\mathcal{X}$, este plan de experienţă optim pentru estimaţia lui a_1 dacă

$$\min_h \int_{\mathcal{X}} [(h \cdot f(x))]^2 \nu^*(\mathrm{d}x) = \max_{\nu \in \Xi} \min_h \int_{\mathcal{X}} [(h \cdot f(x))]^2 \nu(\mathrm{d}x).$$

Să notăm cu $B(h^*) = \{x \in \mathcal{X};\, |f_1^*(x)| = \max_x |f_1^*(x)|\}$ şi să presupunem că

$$\min_h \max_x |(h \cdot f(x))| = \max_x |(h^* \cdot f(x))|. \tag{6}$$

Atunci are loc următoarea teoremă:

ŢEOREMĂ. *Dacă vectorul h^* are proprietatea (6) şi*

$$\nu(B(h^*)) = 1$$

şi

$$\int_{\mathcal{X}} (h^* \cdot f(x)) \cdot \mathrm{pr}_j f(x)\, \nu(\mathrm{d}x) = 0 \qquad (2 \leqq j < +\infty),$$

atunci ν *este plan de experienţă optim pentru estimaţia lui* a_1.

Demonstraţia teoremei este asemănătoare cu aceea a teoremei 1 din [1].

Primită la redacţie la 2 decembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. J. KIEFER, J. WOLFOWITZ, *Optimum Designs in Regression Problems.* The Annals of Mathematical Statistics, 30, 2, Juin (1959).
2. R. COOKE, *Infinite Matrices and Sequence Spaces.* London, 1950, § 2.5.

RECENZII

G. CIUCU, G. SÎMBOAN, *Teoria probabilităţilor şi statistica matematică, Culegere de probleme.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1962.

Este binecunoscut faptul că printre disciplinele matematice, teoria probabilităţilor şi statistica matematică joacă un rol deosebit de important în ceea ce priveşte numeroasele lor aplicaţii. Aşa se explică faptul că în ultimul timp a crescut considerabil numărul cărţilor şi tratatelor dedicate acestor domenii, scrise la nivele diferite în funcţie de cititorii cărora le erau adresate. Există însă puţine culegeri de probleme axate pe această tematică.

Este meritul autorilor de a fi întrunit, în prezentul volum, prima culegere de probleme în limba romînă consacrată teoriei probabilităţilor şi statisticii matematice, răspunzînd prin aceasta unei cerinţe acute de mult simţită de procesul de învăţămînt. Incontestabil, prin înalta ei ţinută ştiinţifică şi prin conţinutul ei judicios ales, ea poate rivaliza cu culegerile de probleme existente în literatură.

Structurată într-un mod interesant, culegerea cuprinde 367 de exerciţii şi probleme, împărţite în şapte capitole şi anume şase de teoria probabilităţilor şi unul de statistică matematică. Exerciţiile şi problemele de teoria probabilităţilor, în număr de 303, se referă la evenimente şi probabilităţi, probabilităţi geometrice, funcţii de repartiţie, valori caracteristice, convergenţa şirurilor de variabile aleatoare şi lanţuri Markov. Ultimul capitol mai cuprinde, pe lîngă lanţurile Markov, şi unele exemple şi rezultate din teoria spectrală a proceselor aleatoare.

Capitolul de statistică matematică cuprinde 64 de probleme şi exerciţii, privind teoria selecţiei, teoria estimaţiei, regiuni de încredere, teoria corelaţiei. Acest capitol se încheie cu cîteva probleme din teoria asigurărilor. Multe dintre exerciţiile de statistică au la bază date concrete luate din anuarele de statistică publicate de către Direcţia Centrală de Statistică. Procedeele de calcul folosite în practica statistică sînt dezvoltate în amănunt pentru a putea fi uşor urmărite şi de cei cu o pregătire matematică mai puţin completă. Sînt analizate tabele de corelaţie şi probleme referitoare la diferite statistici.

Fiecare capitol este precedat de o scurtă prezentare a principalelor noţiuni teoretice folosite. Pentru o bună înţelegere a problemelor şi exerciţiilor, ele sînt date gradat; ele au fost culese din diferite lucrări menţionate în bibliografie.

Apărută în colecţia Societăţii de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R., prezenta culegere se adresează atît studenţilor de la facultăţile de matematică, fizică, economie şi planificare, cît şi studenţilor de la institutele politehnice precum şi acelora care prin specificul ocupaţiilor lor fac apel la teoria probabilităţilor şi statistica matematică.

R. Theodorescu

A. LICHNEROWICZ, *Elements of Tensor Calculus* (*Elemente de calcul tensorial*), Methnen-London, John Wiley, New York, 1962, 164 pag.

Această carte este traducerea în limba engleză după a patra ediţie a limbii franceze a cărţii, publicată în 1958, prima ediţie fiind publicată în 1950 cu titlul Elements de calcul tensoriel, de către librăria Armand Colin, Paris. Autorul este profesor la Collège de France şi este cunoscut atît ca matematician cît şi ca specialist în domeniul teoriei relativităţii şi are pînă acum publicate cîteva cărţi atît în domeniul geometriei diferenţiale globale, cît şi în acela al teoriei relativităţii.

În cartea de faţă se urmăreşte a se da acele elemente ale calculului diferenţial absolut, care sînt utile fizicienilor pentru aplicaţii atît în mecanică cît şi în teoria relativităţii sau alte teorii fizice.

Cartea conţine opt capitole, o bibliografie şi un index de noţiunile utilizate.

Primele cinci capitole constituie partea I a cărţii, de natură pur geometrică, iar ultimele trei partea a II-a, de aplicaţii la mecanică şi fizică.

Primul capitol, ce conţine 23 de pagini, se ocupă de spaţiile vectoriale. Se defineşte spaţiul vectorial n dimensional E_n, noţiunea de dependenţă a vectorilor şi noţiunea de bază, deci de sistem de n vectori independenţi. Dacă $e_1, \ldots, e_n$ sînt aceşti vectori, se arată că orice vector x se scrie într-un singur fel sub forma

$$x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n$$

Rezultă deci că $x^1, \ldots x^n$ sînt componentele vectorului x faţă de baza $e_1, \ldots, e_n$.

Se introduc apoi subspaţii ale spaţiului E_n şi noţiunea de subspaţiu complimentar, arătîndu-se că dacă se dau $r < n$ vectori independenţi, există alţi $n - r$ vectori independenţi care, împreună cu primii, să formeze o bază. Se arată apoi care sînt formulele care intervin, dacă se face schimbarea bazei şi se introduce principiul dualităţii.

Se introduce spaţiul vectorial euclidian real prin introducerea produsului scalar $x \cdot y$ a doi vectori x şi y, produs ce se cere a fi real şi a avea următoarele proprietăţi :

a) $x . y = y \cdot x$,

b) $(\alpha x) \cdot y = x \cdot \alpha y = \alpha (x \cdot y)$,

c) $x(y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,

unde α este un număr real precum şi proprietatea că

d) $x \cdot y = 0$ pentru orice x, numai dacă $y = 0$.

Dacă avem doi vectori

$$x = x^i e_i, \quad y = y^i e_i,$$

atunci produsul lor scalar se scrie

$$x \cdot y = g_{ij} x^i y^j, \quad g_{ij} = e_i \cdot e_j$$

şi rezultă din proprietăţile *a*), *b*), *c*), *d*) că determinantul $|g_{ij}|$ este diferit de zero.

Produsul scalar al vectorului cu el însuşi, deci

$$x \cdot x = g_{ij} x^i x^j,$$

este pătratul normei vectorului $|x|$ şi dacă acest pătrat este o formă pătratică definită pozitivă, atunci spaţiul este propriu euclidian. Într-un asemenea spaţiu are loc inegalitatea lui Schwartz

$$|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|,$$

ceea ce ne permite a defini unghiul φ a doi vectori x, y prin relaţia

$$\cos \varphi = \frac{x \cdot y}{|x|\,|y|} = \frac{g_{ij} x^i y^j}{\sqrt{g_{ij} x^i x^j}\,\sqrt{g_{ij} y^i y^j}}.$$

Restul capitolului se ocupă de ortogonalitate și de introducerea unei baze ortogonale în spațiul propriu euclidian E_n sau în subspațiile acestui spațiu.

Capitolul II, ce conține 6 pagini, se ocupă de spațiul euclidian afin și de modul cum în acest spațiu, presupus un spațiu propriu euclidian, se poate introduce un sistem de coordonate așa fel că, față de o bază ortogonală, distanța ds între două puncte infinit vecine

$$P(x^i),\ Q(x^i + \mathrm{d}x^i)$$

este dată de formula lui Pitagora

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + \dots + (\mathrm{d}x^n)^2.$$

Se obține deci formula distanței în geometria analitică față de un sistem de coordonate ortogonale.

În capitolul III, intitulat *Algebra tensorială*, ce conține 24 de pagini, se definesc tensorii cu ajutorul produselor de spații vectoriale utilizînd pentru produs semnul $\otimes$.

Se ajunge la criteriul că n^q cantități $t_{i_1 \dots i_q}$ sînt componentele unui tensor covariant de ordinul q dacă produsele

$$t_{i_1 \dots i_q} x_1^{i_1} \dots x_q^{i_q},$$

unde $x_1^{i_1}, \dots, x_q^{i_q}$ sînt componentele unor vectori oarecare, rămîn invariante la orice schimbare de bază în spațiul E_n. Considerații analoge se obțin pentru tensori contravarianți sau micști. Se definesc apoi produsele tensoriale și noțiunea de contracție. Se consideră de asemenea tensori în spațiile euclidiene, deci spațiile în care există un tensor fundamental g_{ij}. Se expun apoi proprietățile produselor exterioare sau ale tensorilor strîmb simetrici de ordinul al doilea sau de ordin superior.

În capitolul IV intitulat *Coordonate curbilinii în spațiul euclidian*, capitol ce conține 20 de pagini, se introduc noțiunile de vector derivat, de coordonate curbilinii, de reper mobil asociat, de element ds al distanței între două puncte vecine și de cîmpuri de vectori sau tensori.

Se consideră apoi simbolii lui Christoffel asociați elementului ds și noțiunea de derivare covariantă.

Capitolul se termină cu expresiile pe care le capătă în coordonate curbilinii, gradientul, parametrii diferențiali, divergența unui vector, etc.

Capitolul V, ce încheie partea I a cărții, este intitulat *Spații riemanniene*. Capitolul conține 25 de pagini și expune succint proprietățile spațiilor lui Riemann.

Următoarele trei capitole, ce formează partea a II-a a cărții, sînt intitulate respectiv, *Calculul tensorial și Dinamica clasică. Relativitatea restrînsă și ecuațiile lui Maxwell, Elemente de teoria relativității generale.*

Această parte conține 60 de pagini, deci ceva mai mult ca o treime din carte, și constituie partea aplicativă a cărții. Autorul expune aici teoria ecuațiilor lui Lagrange pentru sisteme mecanice olonome cu legături independente sau nu de timp, principiile relativității restrînse și ecuațiile gravitaționale ale lui Einstein din relativitatea generală. Rezultatele clasice sînt expuse cu o claritate excepțională, ce mărește interesul pe care cartea îl prezintă atît pentru matematicieni cît și pentru fizicieni și în general pentru acei ce vor să-și însușească aceste domenii în care geometria mecanică și fizică se întîlnesc, am putea spune, în părți egale.

Vom menționa de asemenea că în cadrul unei bibliografii de 2 pagini autorul trimite la 6 cărți de calcul tensorial și în special la cunoscuta carte de calcul diferențial absolut a lui Levi-Civita, fondator, împreună cu G. Ricci, al calculului diferențial absolut și unul din matematicienii care au contribuit în mare măsură la studiul teoriei relativității.

De asemenea autorul trimite la 4 cărţi de aplicaţii şi la 12 cărţi de teoria relativităţii, dînd pentru toată bibliografia scurte indicaţii asupra a ceea ce socoteşte că aceste cărţi au specific în ele.

G. Vrănceanu

JOSÉ MORGADO, *Introdução à teoria dos reticulados*, (*Introducere în teoria laticilor*) Textos de Matematica, Instituto de física e matemática. Universidade do Recife, 1962, 2 vol. 342 pag.

Acest tratat reprezintă prelucrarea unor expuneri ţinute de autor la Institutul de matematică al Universităţii din Ceará (Brazilia), în cadrul unui seminar de algebră şi logică condus de prof. Dov Tamari.

Lucrarea, împărţită în trei capitole mari, cuprinde pe larg întregul material care se expune de obicei ca introducere la teoria laticilor. În acelaşi timp însă, cartea conţine şi anumite subiecte care nu se găsesc în alte tratate ; cîteva rezultate sînt originale.

Capitolul I, intitulat *Sisteme parţial ordonate*, este alcătuit din următoarele paragrafe : relaţii binare, ordine parţiale, izomorfism, operaţii cu sisteme parţial ordonate, echivalenţe, imagini izotone ale sistemelor parţial ordonate şi cvasiordonate. Este de remarcat faptul că relaţiile binare sînt tratate în mod consecvent ca părţi ale unui produs cartezian, ceea ce permite, printre altele, să se obţină o caracterizare intrinsecă a relaţiilor de ordine parţială (anume, $\alpha \cap \alpha^{-1} = \varepsilon$ şi $\alpha^2 = \alpha$, ε fiind identitatea logică), o caracterizare a relaţiilor de echivalenţă ($\varepsilon \subseteq \alpha = \alpha^{-1} = \alpha^2$) etc.

În § 6 se extinde noţiunea de aplicaţie izotonă la mulţimi înzestrate cu o relaţie binară oarecare : dacă α şi β sînt relaţii binare definite pe mulţimea P, respectiv Q, o aplicaţie $\Lambda : P \to Q$ se zice izotonă dacă $x\alpha y$ implică $\lambda(x)\beta\lambda(y)$. Dacă, în plus, Λ este biunivocă şi $\lambda(x)\beta\lambda(y)$ implică $x \alpha y$, se spune că λ este un izomorfism. Se stabilesc cîteva rezultate, printre care o caracterizare, abstracţie făcînd de un izomorfism, a imaginilor izotone ale unei mulţimi parţial ordonate.

Capitolul II, intitulat *Latici*, conţine următoarele paragrafe : definiţii şi exemple, reticuloizi (un analog al noţiunii de latice în cazul mulţimilor cvazi-ordonate), latici complete, latici distributive, latici modulare, latici semi-modulare (în sensul lui G. Birkhoff, adică satisfăcînd proprietatea $x \cap y < x, y \Rightarrow x, y < x \cup y$, sau proprietatea duală)

În capitolul al III-lea se studiază homomorfismele, congruenţele şi idealele laticilor. Un paragraf este consacrat congruenţelor complete ale laticilor complete, domeniu în care autorul a adus contribuţii importante. Se demonstrează sau se citează o serie de rezultate ale lui A. Monteiro, privind teoria filtrelor şi idealelor. În încheiere, autorul caracterizează idealele care sînt nuclee ale unei anumite congruenţe, precum şi congruenţele care admit un ideal dat drept nucleu.

Cartea este scrisă cu o excepţională claritate. De altfel numeroase exemple, exerciţii şi trimiteri bibliografice ajută pe cititor să-şi fixeze cunoştinţele şi să aprofundeze materialul studiat. Prin calităţile sale didactice şi de originalitate, tratatul prof. J. Morgado se dovedeşte o carte excelentă atît pentru cititorul doritor să înveţe teoria laticilor, cît şi pentru matematicianul care lucrează deja în acest domeniu.

S. Rudeanu

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 783
29

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoremele de descompunere ale algebrei)**, 619 p., 25,50 lei.
D. BARBILIAN, **Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)**, 380 p., 15,35 lei.
JANCO BÉLA, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare**, 223 p., 8,85 lei.
N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU şi A. CORNEA, **Seminar S. Stoilov 1959–1960, Teoria potenţialului pe suprafeţe riemanniene**, 160 p., 5 lei.
G. CIUCU şi R. THEODORESCU, **Proces cu legături complete**, 232 p., 9,85 lei.
C. CONSTANTINESCU, **Seminar M. Neculcea, Teoria mulţimilor**, 108 p., 3,25 lei.
C. CORDUNEANU, **Funcţii aproape-periodice**, 191 p., 8,30 lei.
ROMULUS CRISTESCU, **Spaţii liniare ordonate**, 332 p., 11,10 lei.
I. CUCULESCU, **Seminar O. Onicescu, Algebre Lie**, 148 p., 5,15 lei.
C. FOIAŞ, **Seminar M. Nicolescu 1959–1960, Teoria spectrală în algebre Banach (necomutative) axată pe noţiunea de rezolventă**, 82 p., 2,85 lei.
ALEXANDRU FRODA, **Algebră superioară (fundamente : mulţimi şi operaţii, divizibilitate, spaţii liniare, forme patratice)**, 455 p., 24,50 lei.
G GALBURĂ, **Corpuri de funcţii algebrice şi varietăţi algebrice**, 180 p., 7,85 lei.
M. GHERMĂNESCU, **Ecuaţii funcţionale**, 523 p., 25,60 lei.
A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 484 p., 21,50 lei.
CAIUS IACOB, **Introduction mathématique à la mécanique des fluides**, 1288 p., 66,50 lei.
TRAIAN LALESCU, **Introducere în teoria ecuaţiilor integrale**, 135 p., 5,90 lei.
LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 52 p., 18,50 lei.
* * * **Lucrările celui de-al III-lea Congres al matematicienilor romîni**, 228 p., 8,55 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie şi topologie, Iaşi 2–5 iunie 1958**, 264 p., 9,75 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie diferenţială din 9–12 iunie 1955, organizată de Secţia de ştiinţe matematice şi fizice a Academiei R.P.R.**, 368 p., 9,50 lei.
G. MARINESCU, **Spaţii vectoriale normate**, (295) p., 6 lei.
G. MARINESCU, **Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice**, 219 p., 8,80 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie neeuclidiană**, 144 p., 4,30 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă**, 495 p., 25,90 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă, Teoria corespondenţei**, 144 p., 4,30 lei.
G. MIHOC şi V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 732 p., 34,70 lei.
GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 142 p., 8,55 lei, vol. II, 155 p., 8,25 lei.
GR. C. MOISIL, **Funcţionarea în mai mulţi timpi a schemelor cu relee ideale**, 279 p., 12 lei.
GR. C. MOISIL, **Introducere în algebră, I. Inele şi ideale**, vol. I, 256 p., 9,10 lei.
GR. C. MOISIL, **Matricele asociate sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale. Introducere în studiul cercetărilor lui L. N. Lopatinschi**, 64 p., 1,20 lei.
GR. C. MOISIL, **Scheme cu comandă directă cu contacte şi relee**, 205 p., 9,65 lei.
ALEXANDRU MYLLER, **Scrieri matematice**, 595 p. + 1 pl., 30,40 lei.
VERA MYLLER-LEBEDEV, **Lecţii de algebră**, 396 p., 8,75 lei.
MIRON NICOLESCU, **Analiza matematică**, vol. II, 420 p., 11,90 lei.
OCTAV ONICESCU, **Numere şi sisteme aleatoare**, 260 p., 11,20 lei.
OCTAV ONICESCU, **Strategia jocurilor, cu aplicaţii la programarea liniară**, 228 p., 8,45 lei.
OCTAV ONICESCU şi colab., **Calculul probabilităţilor şi aplicaţii**, 788 p., 15 lei.
O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 123 p., 4,23 lei.
* * * **Opera matematică a lui Alexandru Pantazi**, 496 p., 24,20 lei.
DIMITRIE POMPEI, **Opera matematică**, 535 p. + 1 pl., 30,20 lei.
N. RANCU şi L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicaţii în producţie**, 898 p. + 20 pl., 45 lei.
SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 159 p., 5,75 lei.
S. STOILOV, **Teoria funcţiilor de o variabilă complexă**, vol. I, 308 p., 10 lei, vol. II în colaborare cu **Cabiria Andreianu-Cazacu**, 379 p., 25,70 lei.
P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. I, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.
GHEORGHE ŢIŢEICA, **Geometria diferenţială proiectivă a reţelelor**, 287 p., 8 lei.
DRAGOŞ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 76 p., 3,15 lei.
SERGIU VASILACHE, **Elemente de teoria mulţimilor şi structurilor algebrice**, 235 p., 5 lei.
GH. VRĂNCEANU, **Leçons de géometrie différencielle**, vol. I, 407 p., 26,50 lei ; vol. II, 428 p., 27,50 lei.
GH. VRĂNCEANU, **Lecţii de geometrie diferenţială**, vol. III, 455 p., 15 lei.

KÖNYVTÁRA
1963

Revista apare de 10 ori pe an.

Preţul unui abonament este de 12 lei.

În ţară abonamentele se fac la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii şi difuzorii voluntari din întreprinderi şi instituţii.

Orice comandă din străinătate (numere izolate sau abonamente) se face prin:

CARTIMEX
Căsuţa poştală 134 — 135
Bucureşti, R. P. Romînă

sau prin reprezentanţii săi din străinătate.

ST. CERC. MAT., TOM. 15, Nr. 2, P. 147—282, BUCUREŞTI, 1964

I. P. „Informaţia“ — c. 151

43831

Lei 12.

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

3

TOMUL 15
1964

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU – redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL – redactor responsabil adjunct;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. AL. GHIKA;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
ACAD. GH. MIHOC;
CIPRIAN FOIAȘ – secretar de redacție.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție pe adresa: str. Mihail Eminescu, nr 47, București.

TOM. 15 Nr. 3
1964

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

SZAKI KÖNYVTÁR
CIÓS KÖZPONT
1883

SUMAR

Pag.

G. VRĂNCEANU şi A. POPOVICI, Fundamentele teoriei generale a relativităţii. I 285
O. ONICESCU şi I. SĂCUIU, Extinderea noţiunii de moment şi de coeficient de corelaţie la variabile oarecare 325
ROMULUS CRISTESCU, Funcţiile sumă ale lui Onicescu ca elemente ale unui spaţiu ordonat 331
DAN PASCALI, Reprezentarea soluţiilor unui sistem cu derivate areolare de ordinul întîi, în plan 343
ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, Asupra mişcării fluidelor într-un mediu poros nelimitat cu o cavitate sferică 349
P. P. TEODORESCU, Consideraţii în legătură cu formularea matematică a problemei plane a teoriei elasticităţii 355
HERWART WIESLER, Despre convexitatea unor coordonate baricentrice generalizate 369
P. P. TEODORESCU, O sută de ani de cercetări în problema plană a teoriei elasticităţii 375
TUDOR I. ZAMFIRESCU, Construcţii geometrice cu rigla, compasul şi trisectorul 405
ŞTEFAN BERŢI, O extindere a noţiunii de şir de distribuţie uniformă 413
ELENA MURGULESCU, Asupra devierii unui jet de lărgime finită printr-un obstacol diedric 417

NOTĂ ISTORICĂ 429

SZAKI KÖNYVTÁR
TÁCIÓS KÖZPONT
83

FUNDAMENTELE TEORIEI GENERALE A RELATIVITĂȚII. I.

DE

G. VRĂNCEANU și A. POPOVICI

Prima parte a prezentului memoriu conține o schiță a dezvoltării istorice a teoriilor gravitației (v. și [45]) și o nouă fundare axiomatică a teoriei generale a relativității, în două variante, ambele constituind de fapt cazuri particulare ale axiomatizării teoriei cuantice conforme neolonome a cîmpului dată de unul dintre autori [1], [2]. Părțile II, III, IV se ocupă de interpretarea principială a bazelor teoriei generale a relativității; ele constituie dezvoltarea lucrării *Problemele de bază ale teoriei relativității* [52] a celor doi autori, prezentată la ,,Consfătuirea romîno-sovietică'' din 1959. Majoritatea părților sînt redactate de A. Popovici, care a lărgit considerabil cadrul inițial al lucrării. Problema cosmologică a fost atinsă doar în treacăt.

I. PROBLEME DE BAZĂ

A. DEZVOLTAREA ISTORICĂ A TEORIEI GRAVITAȚIEI

Teoria gravitației parcurge cinci etape: 1. teoria clasică newtoniană; 2. relativist-restrînsă; 3. relativist-generală; 4. cuantică relativist-restrînsă; 5. conformă neolonomă cuantică relativist-generală (aceasta din urmă aflată încă în construcție).

a. *Teoria newtoniană a gravitației*. 1. Fie k constanta gravifică newtoniană, Φ potențialul gravific newtonian static (= independent de timp), m' și m_0 masa de repaus (,,proprie'') inertă și grea (= sarcina gravifică), μ' densitatea masei grele de repaus, $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial x^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$); fie Δ laplacianul în spațiul 3-dimensional real euclidian E_3. Fie $\bar{r}$ vectorul de poziție al particulei cvasipunctuale (= de dimensiuni mici față de distanțele dintre particule), de componente x^α, $\bar{a} \equiv \ddot{\bar{r}}$ accelerația ei (de componente a^α). Cîmpul gravific static $\bar{C}$ de componente C_α e prin definiție gradientul static $C_\alpha \equiv -\partial_\alpha \Phi$ al potenţialului Φ; $\overline{F}$ (de componente F^α) fiind rezultanta forţelor exterioare acţionînd asupra particulei cvasipunctuale, forţa gravifică exercitată de cîmpul gravific exterior oarecare $\overline{C}$ (variabil în spaţiu şi timp) asupra particulei cvasipunctuale de masă grea m_0 e prin definiţie $\overline{F} = m_0\overline{C}$, de componente $F^\alpha \equiv m_0 C^\alpha$. Reciproc, cîmpul gravific $\overline{C}$ determinat de masa grea m_0 se poate defini ca fiind forţa de interacţiune dintre masa m_0 şi masa M_0($\overline{F}$ pe unitatea de masă). În realitate, cîmpul gravific e o stare (formă de mişcare) a cîmpului material, primar faţă de forţă; obiectul este primar faţă de relaţie, deşi obiectul se dezvăluie doar prin intermediul relaţiilor.

De asemenea, pe baza teoriei clasice a gravitaţiei se evidenţiază doi vectori $\overline{K}$, $\overline{L}$ (polar şi axial) analogi cîmpului electric $\overline{E}$ şi magnetic $\overline{B}$ ai teoriei maxwelliene (F. Hund [4]). În realitate, după cum teoria clasică (liniară) a gravitaţiei constituie o aproximaţie a teoriei relativist-generale (neliniare), tot astfel teoria electromagnetică liniară maxwelliană este aproximaţia unei electrodinamici neliniare; ambele aproximaţii sînt valabile pentru densităţi reduse ale materiei.

2. Legea newtoniană a mişcării particulei cvasipunctuale (axioma fundamentală a dinamicii newtoniene) este

$$\overline{a} \equiv \overline{F}/m' \quad \text{sau} \quad m'\ddot{\overline{r}} \equiv \overline{F}. \tag{I.1}$$

Teoria clasică (newtoniană) a gravitaţiei culminează în trei axiome independente:

$$m' = m_0, \tag{I.2}$$

$$\Delta\Phi = 4k\mu', \tag{I.3}$$

$$\text{(a)}\, a_\alpha = C_\alpha \text{ sau (b)}\, a_\alpha \equiv -\partial_\alpha \Phi\, (\overline{a} = -\text{grad}\,\Phi) \text{ sau (c)}\, m' a_\alpha = m_0 C_\alpha \tag{I.4}$$

(I.2) exprimă egalitatea dintre masa inertă şi grea, postulată încă de Newton pe baza experienţei, valabilă în domenii spaţio-temporale oarecari; (I.3) e ecuaţia potenţialului gravific static (ecuaţia lui Poisson); (I.4) legea de mişcare a particulei cvasipunctuale neutre în cîmp gravific pur oarecare.

În particular, în cazul particulei cvasipunctuale sau sferice cu centrul maselor în O, de masă grea m_0, (I.3) admite ca soluţie, la distanţa $r = OP$, potenţialul gravific newtonian $\Phi \equiv km_0/r$; cîmpul gravific corespunzător este km_0/r^2. Legea forţei newtoniene $F = km_0M_0/r^2$ corespunzătoare interacţiunii celor două mase grele m_0, M_0, ca şi legile potenţialului şi cîmpului au forma (fenomenologică) a unor legi ale acţiunii la distanţă.

(I.4) e forma particulară a ecuaţiei (I.1) valabilă în cîmpul gravific. În virtutea lui (I.2), ecuaţiile (I.4a), (I.4b), (I.4c) sînt echivalente; invers, în virtutea lui (I.4a), sau (I.4b) şi (I.4c) rezultă (I.1). Acceleraţia şi cîmpul gravific au aceeaşi dimensiune; mai mult, (I.4a) exprimă echivalenţa locală şi momentană a cîmpului de acceleraţie şi a cîmpului gravific.

În particular, conform principiului newtonian al echivalenţei dintre acceleraţia *uniformă* şi cîmpul gravific *omogen* (= constant în spaţiu şi timp), un sistem inerţial A aflat într-un cîmp gravific omogen este din punct de vedere *mecanic* echivalent unui sistem neinerţial A' în absenţa cîmpului gravific şi supus unei acceleraţii constante în spaţiu şi timp, de sens contrar acceleraţiei lui A determinate de cîmpul gravific din primul caz (abstracţie făcînd de cîmpul gravific propriu al lui A).

3. Ca ecuaţie cu derivate parţiale în cele trei coordonate spaţiale x^α, ecuaţia (I.3) reflectă propagarea din aproape în aproape în *spaţiu* a interacţiunii gravifice. În fizica clasică fiind însă posibilă propagarea interacţiunii cu viteze oricît de mari, chiar infinite, ecuaţia (I.3) nu reflectă interacţiunea din aproape în aproape în *timp* (cu viteze finite). În al doilea rînd, ecuaţiile (I.2), (I.3), (I.4) îşi păstrează forma (sînt „covariante") faţă de transformările galileene ale fizicii clasice în E_3, bazate pe timpul absolut. În al treilea rînd, conform fizicii clasice, masele sînt aditive: masa unui sistem e suma maselor componentelor. Ecuaţia (I.3) fiind liniară în derivatele $\partial^2_\alpha \Phi$, în regiuni fără masă ($\mu' = 0$) se adună de asemenea potenţialele Φ (ca şi cîmpurile $\bar{C}$ sau forţele $\bar{F}$); într-un punct şi moment dat, potenţialul, cîmpul, forţa gravifică generate de către masele unui sistem constituie sumele potenţialelor, cîmpurilor, forţelor gravifice generate de masele particulelor constitutive ale sistemului: pentru $\mu' = 0$ suma unor soluţii ale ecuaţiei (I.3) constituie de asemenea o soluţie. Legea de mişcare (I.4) a particulei este independentă de ecuaţia gravifică (I.3) a lui Poisson, dat fiind caracterul liniar al acesteia, şi trebuie postulată separat. Rezultă caracterul dualist al teoriei clasice liniare a gravitaţiei (ca şi al teoriei liniare maxwelliene), corespunzător unui dualism a stărilor contrarii ale materiei: cîmp şi particulă. În teoria neliniară relativist generală a cîmpului, acest dualism este depăşit.

b. *Teoria relativist-restrînsă a gravitaţiei* constituie o etapă de tranziţie. Legea newtoniană a gravitaţiei este incompatibilă cu teoria restrînsă a relativităţii. Conform acesteia, viteza de propagare a oricărei interacţiuni este cel mult egală cu viteza luminii în regiunile cîmpului; presupunînd această viteză ca fiind independentă de starea de mişcare inerţială (= rectilinie şi uniformă) a maselor generatoare ale cîmpului gravific, viteza de propagare a gravitaţiei rezultă a fi identică chiar cu viteza luminii c în cîmp faţă de sisteme inerţiale [45]. Legea relativist-restrînsă a gravitaţiei trebuie să fie de asemenea covariantă faţă de transformările Lorentz. Teoriile relativist-restrînse ale gravitaţiei s-au dezvoltat în două etape: teoriile relativist-restrînse ale forţei gravifice şi ale cîmpului gravific.

1. Teorii relativist-restrînse pornind de la modificarea legii forţei newtoniene au fost construite de Poincaré (1908), Minkowski (1908), Lorentz (1910) şi Sommerfeld (1910). În cadrul acestor teorii, în analogie cu teoria maxwelliană, forţa gravifică de interacţiune a două mase cvasipunctuale situate la distanţa r nu depinde de poziţiile lor simultane, ci de poziţiile lor la momente diferite t_1, t_2 ($t_1 - t_2 \equiv r/c$) şi de viteza lor relativă v (eventual şi de acceleraţia lor). Abaterile de la legea newtoniană sînt de ordinul doi în $\beta = v/c$, deci foarte mici pentru viteze mici în raport cu viteza luminii în cîmp, în concordanţă cu experienţa.

2. În realitate, teoria gravitaţiei nu trebuie să modifice doar legea newtoniană a forţei; ea trebuie să pornească de la înlocuirea ecuaţiei cu derivate parţiale (I.3) a lui Poisson a cîmpului gravific şi a legii de mişcare (I.4) a particulei în cîmp gravific, prin ecuaţii covariante faţă de transformările Lorentz, deci simetrice în coordonatele spaţiu-timp. Ambele probleme au fost rezolvate de G. Nordström (1912) şi G. Mie (1913); alte teorii relativist-restrînse ale gravitaţiei au fost construite recent. Teoria lui Nordström verifică de asemenea legile de conservare ale energiei-impulsului şi egalitatea (I.2) dintre masa inertă şi masa grea (valabilă în teoria lui Mie doar în primă aproximaţie). Teoria lui Nordström duce de asemenea la deplasarea spre roşu a liniilor spectrale în cîmp gravific, în analogie cu teoria relativist generală. Totuşi, în opoziţie cu aceasta din urmă, teoria lui Nordström — fiind bazată pe postulatul relativist-restrîns al constanţei vitezei luminii în cîmp faţă de sisteme de coordonate (S.C). inerţiale — nu explică curbura razelor luminoase în cîmp gravific şi duce la o deplasare a periheliului planetei Mercur de semn opus celui dat de experienţă.

Încă înaintea desăvîrşirii teoriilor relativist restrînse ale gravitaţiei însă, dezvoltarea teoriei ia o direcţie cu totul nouă.

c. *Teoria relativist-generală a gravitaţiei* se dezvoltă, la rîndul ei, în două etape: teoria cîmpului gravific omogen (= constant în timp şi spaţiu) şi teoria cîmpului gravific oarecare, neomogen (= variabil în timp şi spaţiu).

1. Încă în 1907, Einstein extinde principiul relativităţii de la corpuri în mişcare inerţială la corpuri *uniform accelerate*, deci la cîmpuri gravifice *omogene*. Conform extinderii einsteiniene la toate fenomenele fizice a principiului newtonian al echivalenţei *mecanice* dintre cîmpul gravific omogen şi acceleraţia uniformă, aceleaşi legi fizice sînt valabile pentru toate mişcările uniform accelerate. Pe această bază, Einstein deduce încetinirea fenomenelor fizice, proporţională cu intensitatea cîmpului gravific, în particular deplasarea spre roşu a liniilor spectrale în cîmp gravific. Pe baza egalităţii (I.2) dintre masa inertă şi grea, relaţia de interdependenţă dintre masa inertă şi energie e valabilă şi pentru masa grea şi energie. Rezultă de asemenea variaţia vitezei luminii în cîmp gravific, deci curbura razelor luminoase în vecinătatea maselor, în particular deplasarea imaginii stelelor vecine marginii discului solar în timpul eclipselor solare, în concordanţă cu experienţa; conform calculelor lui Einstein (din 1911), această deplasare într-un cîmp gravific omogen ar fi 0,83″. Această teorie a cîmpului gravific omogen înseamnă depăşirea teoriei restrînse a relativităţii: dată fiind dependenţa vitezei luminii şi a duratei fenomenelor fizice de cîmpul gravific, transformarea Lorentz îşi pierde sensul clasic.

2. În a doua etapă, teoria se extinde la cîmpul gravific *neomogen*. În 1912, Einstein şi Abraham identifică viteza locală şi momentană a luminii cu potenţialul gravific *static* (variabil în spaţiu şi constant în timp).

Cu toate dificultăţile uriaşe întîlnite, Einstein persistă pe calea creării unei teorii fizice a cîmpului gravific oarecare (în general nestatic), bazată pe valabilitatea aceloraşi legi fizice pentru mişcări oarecare (accelerate şi curbilinii) — teoria generală a relativităţii — realizînd în 1914, într-o lucrare redactată împreună cu M. Grossmann, un progres esenţial. În geometria riemanniană, distanţa în spaţiul-timp curb este descrisă de zece componente tensoriale g_{ik} (tensor metric fundamental sau metrica), identificate de către Einstein cu potenţialele gravifice, în locul unicului potenţial gravific newtonian Φ (identificat acum, în anumite cazuri pînă la un termen aditiv, cu pătratul g_{44} al vitezei variabile a luminii). Pe această bază riemanniană, Einstein aduce legile de conservare-transformare ale energiei-impulsului, legile maxwelliene şi legile de mişcare ale particulei (toate postulate ca atare) la o formă generalizată valabilă pentru mişcări accelerate şi curbilinii oarecare, deci pentru S.C. oarecare (formă „general covariantă", anticipată în parte de F. Kottler în 1912). În această etapă însă, ecuaţiile cîmpului postulate de Einstein pentru potenţialele gravifice g_{ik} ca atare nu aveau forma generală covariantă. Cele zece potenţiale gravifice nefiind complet determinate într-o teorie general covariantă a ecuaţiilor gravifice, în 1914 Einstein o negase chiar — în opoziţie cu Hilbert (1915) — pe aceasta din urmă.

În 1915 însă, Einstein revine la covarianţa generală şi stabileşte ecuaţiile general covariante ale cîmpului gravific care-i poartă numele, valabile în spaţiul-timp riemannian V_4 pentru mişcări accelerate şi curbilinii oarecare. Covarianţa generală a legilor fizice se arată a fi indisolubil legată de existenţa celor patru legi de conservare-transformare ale energiei-impulsului. Independent de Einstein, aceleaşi ecuaţii general covariante ale cîmpului gravific au fost stabilite în 1915 de D. Hilbert, prin metoda lagrangiană (legea minimei acţiuni), anume pe baza unei teorii de cîmp neliniare electromagnetice a materiei (teoria lui Mie). Într-o altă lucrare, apărută de asemenea în 1915, Einstein deduce din teoria generală a gravitaţiei deplasarea periheliului planetei Mercur — în concordanţă oarecare cu experienţa — şi curbura în cîmpul gravific neomogen a razelor luminoase, totalizînd dublul curburii calculate anterior în cazul cîmpului gravific omogen. În lucrarea *Bazele teoriei generale a relativităţii* (1916), Einstein sintetizează rezultatele obţinute, fondînd teoria pe trei axiome :

a° identitatea dintre masa inertă şi masa grea (sau echivalenţa dintre cîmp gravific şi cîmp de acceleraţie);

b° ecuaţiile einsteiniene ale cîmpului gravific;

c° covarianţa generală a legilor fizice.

3. În cadrul dezvoltării ulterioare a teoriei generale clasice a relativităţii, realizarea cea mai importantă este deducerea din ecuaţiile riguroase neliniare ale cîmpului gravific a ecuaţiilor mişcării particulei neutre — iniţiată de A. Einstein, J. Grommer şi de G. Darmois (1927), generalizată de A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffman, I. Schild ş.a. şi sub altă formă de V. Fok şi colab. (N. Petrova, I. Fichtengoltz ş.a.) — şi a ecuaţiilor mişcării particulei electrizate (A. Papapetrou ş.a., v. mai departe). Dintre alte rezultate remarcabile cităm : rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuaţiile gravifice einsteiniene (A. Lichnerowicz, Y. Fourès — Bruhat), clasificarea generală a spaţiilor gravifice în V_4 (A. Petrov ş.a.), teoria general covariantă a centrului maselor (M. F. Şirokov) etc.

d. *Teoria cuantică relativist restrînsă a gravitației.* În fizica cuantică, spinul unei particule constituie, între altele, momentul ei cinetic propriu (momentul rotației ei interne). h fiind cuantumul acțiunii al lui Planck, spinul unei particule este $(\pm n/2)h/2\pi$ (n întreg); deci în unități cuantice $h/2\pi$, spinul e $\pm n/2$. Particula de spin maxim total $\pm n/2$ poate exista pentru n par în stările de spin întreg $0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots \pm n/2$; pentru n impar în stările de spin semiîntreg $\pm 1, \pm 3/2 \ldots\ldots \pm n/2$.

În teoria cuantică, ecuațiile particulei de spin 2 (stare a particulei de spin maxim 2), stabilite pe cale directă de W. Pauli și M. Fierz [5] sub formă relativist-restrînsă, sînt identice cu ecuații stabilite de M. A. Tonnelat [6] pe baza teoriei fuziunii relativist-restrînse a particulelor elementare a lui L. de Broglie [5] (particula de spin maxim $n/2$ ca rezultat al fuziunii a n particule de spin 1/2 verificînd ecuații spinoriale de tip Dirac). Particula de spin 2 rezultă atunci din fuziunea a doi fotoni (sau fuziunea a patru particule neutrino verificînd ecuații de tip Dirac, v. și [9]). Pe de altă parte, ecuațiile lui Pauli-Fierz și M. A. Tonnelat, coincid întocmai cu ecuațiile liniarizate ale gravitației, obținute de Einstein prin neglijarea termenilor neliniari ai ecuațiilor gravifice einsteiniene riguroase, pentru densități extrem de reduse ale materiei și deci pentru cîmpuri gravifice infinit slabe. Particula de spin 2 coincide deci cu gravitonul (particula ipotetică a gravitației postulată de W. Pauli). Ulterior, G. Petiau a pus ecuațiile relativist-restrînse (și deci liniare) ale particulei de spin maxim 2 sub o formă 6-dimensională valabilă într-un spațiu timp pseudoeuclidian E_6 (fără indicarea signaturii).

e) *Teoria relativist-generală cuantică conformă neolonomă.* 1. Începînd din 1919 se dezvoltă ,,teoriile unitare'' ale structurii materiei. Clasificarea logică și ontologică a teoriilor unitare se bazează pe unitatea contradictorie a cuplurilor de forme $AA'BB'$ și stări $aa'bb'$ ale materiei [1], [2], [3], în cadrul structurii acesteia :

Forme : (A) variabilele spațiu-timp,(A') variabilele cosmice-proprii, (B) variabilele dinamice = fizice (impuls-energie) — cinematice = geometrice (coordonate-durată); (B') variabilele ,,electrice'' — ,,magnetice''.

Stări : (a) stări de concentrare : stări leptonice-barionice (în particular : cîmp = continuu și particulă = discontinuu) ; (a') stări de mișcare = = stări corespunzătoare sarcinii izofermionice ; (b) stări de spin ; (b') stări de izospin.

Legea relativității reflectă covarianța legilor fizice față de cuplul (A) (mai general față de cuplurile (A) și (A')) ; legea reciprocității reflectă covarianța legilor fizice față de cuplul (B) [6] (mai general față de cuplurile (B) și (B')) și sub formă generalizată, față de toate formele și stările materiei [1], [2], [3].

Clasificarea teoriilor unitare se bazează deci pe legea generalizată a reciprocității și pe principiul de corespondență dintre teoria relativității și teoria reciprocității [1], [2], [3].

Din punct de vedere istoric, ca structură fizică, teoriile unitare s-au dezvoltat : (α) de la teoriile relativiste uzuale spre teoria reciprocității ; (β) de la teorii pur continue (teorii de cîmp pure) sau pur discontinue (teorii pur cuantice = pur corpusculare) spre teorii unitare ale cîmpului material și particulei elementare (teorii unitare ale continuului-discontinuului), mai general teorii ale cîmpurilor de sarcină leptonică și izofermionică oarecare; (γ) de la teoria cîmpurilor tensoriale (= de spin întreg) la cele ale cîmpurilor spinoriale (= de spin semiîntreg) și ale cîmpurilor tensoriale-spinoriale oarecare (de spin și izospin oarecare); (δ) de la teoria particulelor de masă proprie nulă (în particular teoriile electrogravifice — v. punctul 2 de mai jos, — neutrinice — J. Wheeler [9]) la teorii ale particulelor de masă proprie nenulă (cîmpuri mezonice, hiperonice, nucleonice etc.) sau oarecare.

Ca structură matematică, teoriile unitare s-au dezvoltat: *a*) de la teoriile relativist restrînse la cele relativist generale (riemanniene sau neriemanniene); *b*) de la teorii 4-dimensionale la cele polidimensionale; *c*) de la cele pur geometrice (sau topologice) la cele algebrice și geometrico-algebrice; *d*) de la teoriile locale (punctuale) la cele nelocale (nepunctuale) — v. punctul 2 de mai jos.

2. Realizările cele mai remarcabile *relativist-restrînse* tinzînd spre o teorie unitară a structurii materiei sînt: 1° Legea reciprocității restrînse (simetria legilor fizice în coordonate-durată și impulsuri-energie, M. Born 1939; H. Yukawa, R. Ingraham, J. Raisky [6]); 2° teorii neliniare clasice (M. Born și L. Infeld 1934, ș.a. [7]) și cuantice (ecuațiile spinoriale neliniare: D. Ivanenko, 1938; W. Heisenberg, 1957 și 1959: ,,ecuația universală'' a particulelor elementare și cîmpurilor [8]); 3° teoria fuziunii particulelor elementare (L. de Broglie, 1943, G. Petiau, M. A. Tonnelat ș.a. [9]) echivalentă teoriei de cîmp cu derivate superioare (F. Bopp, 1946) [10]; 4° Teoria dublei soluții (liniară), apoi neliniară: L. de Broglie 1927; D. Bohm 1951, J. P. Vigier 1956, P. Febvrier 1955 [11]; 5° geometria discontinuă (D. Ivanenko și V. Ambarțumian 1930; A. A. Markov 1932; W. Heisenberg, A. March, ș.a. [12]); 6° relațiile de impreciziune (W. Heisenberg și N. Bohr, 1927); 7° geometria operatorială (H. Flint 1940, H. Snyder 1947 [12]) și teoria nelocală (nepunctuală) a cîmpului (M. A. Markov 1940, N. N. Bogoliubov și colab., 1950, H. Yukawa, F. Bopp ș.a. [14]). O serie de lucrări în teoria dublei soluții (J. P. Vigier 1955 [11] ș. a.) și geometria matricială și spinorială (H. Tetrode 1928, V. Ambarțumian 1929, H. Flint 1940, V. A. Fok și D. Ivanenko 1929, Școala din Hiroshima — Y. Mimura și colab. 1942, E. Schmutzer 1960 [12]) se încadrează *teoriei generale a relativității*. P. Bergmann și colab. [24] a obținut succese remarcabile pe drumul ducînd spre cuantificarea cîmpului gravific neliniar.

O serie de teorii unitare relativist generale clasice continue, electrogravifice se bazează pe spațiile geometriei infinitezimale pure a lui H. Weyl (1919) și A. Eddington (1929), spații Finsler (Synge 1925, J. Horváth și A. Moor 1950—51), spațiu cu tensor fundamental sau conexiuni nesimetrice (A. Einstein 1945, E. Schrödinger, V. Hlavaty 1952, M. A. Tonnelat 1950 ș. a.).

Dintre teoriile cvadridimensionale riemanniene, ,,geometro-dinamica'' lui J. Wheeler se bazează pe teoreme de topologie; teoria unitară electrogravifică tensorială a lui Rainich (punctul de plecare al geometrodinamicii lui Wheeler) e în fond echivalentă unei teorii a cîmpurilor de spin maxim 2, bazată pe fuziunea cîmpurilor spinoriale. Conform teoremelor lui Rainich, ecuațiile Maxwell constituie consecințe ale ecuațiilor gravifice einsteiniene cu tensor energie-impuls electromagnetic.

Teoriile unitare riemanniene polidimensionale constituie fie teoria scufundării spațiului-timp riemannian V_4 de 4 dimensiuni independente în E_N pseudoeuclidian (H. Mandel 1926 ; I. B. Rumer 1929 [25], [26]), fie teorii ale unui spațiu-timp relativist polidimensional riemannian V_n de n dimensiuni independente (în general 5 sau 6 dimensiuni). Teoriile 5-dimensionale sînt fie continue (T. Kaluza, T. Vescan, A. Einstein și V. Bergmann ș. a), fie cuantice (O. Klein, H. Flint, A. Pais, V. A. Fok, D. Ivanenko, V. Rodicev ; „pentaoptica'' lui I. B. Rumer bazată pe a 5-a dimensiune a spațiu-timpului [25]). Teoriile riemanniene 5- și 6-dimensionale au pregătit nemijlocit dezvoltarea unor teorii unitare neriemanniene : pe de o parte, teoria neolonomă, iar pe de altă parte teoriile proiective și conforme, geometria proiectivă respectiv conformă a lui V_n fiind echivalentă geometriei riemanniene a unui anumit V_{n+1} respectiv V_{n+2}. Teoriile unitare riemanniene 5-dimensionale au dus astfel la o teorie proiectivă a cîmpului (O. Veblen, B. Hoffmann, W. Pauli, G. Ludwig, P. Jordan ș. a. [25]). Teoriile 6-dimensionale riemanniene s-au dezvoltat de la început pe bază conformă, înglobînd geometria spațiului-timp proiectiv ca un subspațiu. N. Kalitzin (1951) a creat o teorie relativistă unitară a unui spațiu-timp cu o infinitate numerabilă de dimensiuni [16].

3. Plecînd de la interpretarea geometrică a sistemelor mecanice neolonome, G. Vrănceanu a introdus, în 1926, spațiile *neolonome* [17]. Pe această bază, G. Vrănceanu a construit în anii 1935—1936 o teorie unitară neolonomă a cîmpului gravific și electromagnetic în V_5^4 (corespunzătoare deci particulelor de spin 1 și 2, de masă de repaus nulă [17] — v. pag. 304. Ea dezvoltă teoriile clasice 5-dimensionale, evitînd însă o serie de dificultăți inerente acestora, fiind pe de altă parte într-un anumit sens echivalentă teoriei paralelismului la distanță a lui Einstein-Mayer. Teoria neolonomă a cîmpului a fost dezvoltată încă din 1937 încoace de către K. Yano și extinsă la cazul varietății neolonome V_6^4 (scufundată în V_6 de signatură $+++-+-$) [17], v. pag. 304. Împreună cu M. Ohgane, K. Yano generalizează teoria unitară neolonomă în sens conform [17]. Alte teorii neolonome sînt datorite lui J. Podolanski [17].

Pe de altă parte, covarianța *conformă* generală a legilor fizice (independența lor de unitățile de măsură, deci covarianța lor față de înmulțirea distanței spațio-temporale conforme riemanniene ds^2 cu un factor ρ arbitrar, funcție de coordonate) e tot atît de fundamentală ca și covarianța generală de coordonate (independența legilor fizice de S.C.). Covarianța conformă a legilor fizice a fost evidențiată pentru cîmpurile electromagnetice (H. Bateman, E. Cunningham [18]), mezonice (J. Schouten, J. Haantjes, J. Lubanski și L. Rosenfeld, B. Hoffmann [19]) și spinoriale (J. Schouten, K. Nikolski, P. Dirac, F. Gürsey, F. Bopp, F. Bauer, Y. Murai, W. Heisenberg și colab., Mc. Lenan, S. Bludman, H. Buchdahl, H. Mandel ș. a. [20]). Teoria conformă a gravitației a fost dezvoltată de A. Einstein, R. Ingraham, G. Stephenson, P. Higgs, R. Bach, J. Schouten, H. Buchdahl, E. Reichenbächer, H. Steudel ș. a.

[21]. Transformările conforme relativist-restrînse leagă corpurile uniform accelerate. Transformările Lorentz (legînd S.C. inerțiale = de accelerație nulă) constituie un subgrup (L. Hill [22]). Teoria cîmpului gravific omogen este deci echivalentă geometriei spațiului-timp conform-euclidian H_4 sau pseudoeuclidian E_6 [21], [22].

A. Popovici și colab. au dezvoltat o teorie generală conformă n-(în particular 6 sau 8) dimensională [1], [2], [3] într-o varietate conformă C_n (în particular C_6 sau C_8) a cîmpurilor tensoriale și spinoriale, de spin și izospin oarecare. Existența unei metrici riemanniene în V_n de tip Vrănceanu, invariantă față de transformările conforme din C_n și a unei varietăți neolonome V_6^4 pentru particule de masă de repaus *oarecare*, rezultă atunci automat din ecuațiile conforme ale cîmpului. În aceleași lucrări ale lui A. Popovici, se deduc de asemenea din lagrangianul conform invariant o lege riemanniană generalizată a reciprocității — covarianța legilor fizice față de formele $AA'BB'$ și față de stările $aa'bb'$ ale materiei (v. pag. 294), un principiu de corespondență între teoria relativității și teoria reciprocității, neliniaritatea de tip Born-Infeld și Heisenberg a tuturor cîmpurilor, o variantă a teoriei nelocale a cîmpului (relații de impreciziune generalizate, valabile în orice punct-moment al cîmpului) și o lege generalizată (neliniară) a fuziunii particulelor : fuziunea stărilor de spin clasic (fuziunea de tipul L. de Broglie) și fuziunea stărilor de izospin — în particular ecuațiile neliniare ale particulei de spin 2 (graviton). Spațiul Σ_8 al spinorilor atașat lui C_6 fiind de opt dimensiuni, rezultă automat izospinul — deci transformarea reciprocă a protonului și neutronului — și ecuațiile spinoriale neliniare conform covariante și riemanniene ale particulelor (A. Popovici [1], [3]) pe baza derivatei covariante a spinorilor introdusă de V. A. Fok și a matricelor lui V. A. Fok corespunzătoare. În aproximația relativist-restrînsă, A. Popovici obține automat [1], [3] ecuația izobarică postulată de W. Heisenberg ca ecuație universală a cîmpurilor și anticipată de D. Ivanenko în 1938.

Teoria conformă neolonomă constituie, în consecință, cea mai cuprinzătoare teorie general-covariantă cuantică a cîmpurilor tensoriale și spinoriale și a particulelor elementare dezvoltată pînă acum. Pe lîngă numeroase rezultate fizice noi, ea regăsește automat ca teoreme demonstrabile, pe un plan mult mai general, rezultatele postulate de celelalte teorii.

În virtutea transformării reciproce a diverselor cîmpuri și particule, demonstrată de experiență și dedusă din teoria cuantică a cîmpului, ele nu constituie decît stări și forme de mișcare ale cîmpului material unic, iar o teorie unică a cîmpului e indispensabilă.

B. AXIOMELE DE BAZĂ ALE TEORIEI GENERALE A RELATIVITĂȚII

În teoria clasică (continuă) a spațiului riemannian V_n sau conform riemannian C_n (în particular spațiul-timp relativist riemannian sau conform riemannian), metrica e o formă pătratică : *a*) a parametrilor de congruențe $l_i^{(i)}$ ortogonale (v. pag. 303) (Ricci, Levi-Civita [44]) ; *b*) a derivatelor parţiale $\partial_i f^a$ ale funcţiilor de scufundare f^a în E_N pseudoeuclidian (G. Vrănceanu):

$$(a)\ g_{ik} \equiv l_i^{(l)} l_k^{(l)},\quad (b)\ g_{ik} \equiv \partial_i f^a \partial_k f^a \qquad (i,k,l=1,\dots n;\ a=1,\dots,N). \tag{I.5}$$

Teoria spaţiilor riemanniene sau conforme (în particular relativiste) se bazează pe o infrastructură algebrică (matricială) şi spinorială: în teoria cuantică relativistă, metrica riemanniană G_{ab} sau conform riemanniană γ_{ab} e o formă pătratică *a*) a matricelor variabile γ_a de tip Dirac (H. Tetrode [13]) şi *b*) a tensorilor mezonici $p^{\pm}_{ab}$ sau a tensorilor Dirac $\varphi^{\pm}_{ab}$ antisimetrici unificaţi în V_6 sau C_6, deci o formă 4-liniară a spinorilor φ_i (A. Popovici [3], v. şi [1]):

$$(a)\ G_{ab} \equiv \frac{1}{2}(\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a);\ (b)\ G_{ab} \equiv \varphi^{\pm}_{ac}\,\varphi^{\pm}_{bc}(\equiv p^{\pm}_{ac}\,p^{\pm}_{bc}). \tag{I.6}$$

Particula de spin maxim 2 (în particular gravitonul) e deci efectiv rezultatul fuziunii a patru particule de spin 1/2 verificînd ecuaţii de tip Dirac (probabil neliniare) [1], [3]. Fuziunea de tip L. de Broglie devine astfel dintr-un postulat (liniar şi relativist restrîns) o teoremă demonstrabilă (neliniară şi general covariantă) [1], [3].

Axiomatizarea *teoriei generale clasice a relativităţii* propusă de noi cuprinde două variante.

a°. *Sistemul I de axiome* cuprinde următoarele axiome de bază:

(a) Obiectele geometrice, anume:

(a_1) Metrica riemanniană nesingulară

$$ds^2 \equiv g_{ik}\,dx^i\,dx^k \quad (g_{ik} \equiv g_{ki}),\ g \equiv \|g_{ik}\| \neq 0, \tag{I.7}$$

deci tensorul fundamental g_{ik} ca obiect geometric de bază (axioma (a_1) a metricii fiind echivalentă la rîndul ei pe baza teoremei Weyl-Cartan [23] cu existenţa anumitor proprietăţi ale grupului infinitezimal de rotaţie).

(a_2) Conexiunea Christoffel simetrică $\Gamma^i_{kl} \equiv \Gamma^i_{lk}$ şi curburile corespunzătoare

$$R^i_{klm},\qquad R_{ik} \equiv R^l_{ilk},\qquad R \equiv R^i_i. \tag{I.8}$$

(a_3) Constantele relativiste universale (constante de integrare): c (viteza relativist restrînsă a luminii în cîmp în S.C. inerţiale, la limita pseudoeuclidiană a lui V_4 riemannian); $\varkappa$ (constanta gravifică einsteiniană) (sau $\delta \equiv \sqrt{\varkappa}/c$) — ca dimensiuni, valori numerice şi semn. (Timpul t, masa m, energia $W \equiv mc^2$, sarcina electrică, impulsul şi curenţii se metrizează atunci — reprezentîndu-se prin lungimile (razele de gravitaţie)

$$x_4 = ict;\ m = \varkappa m_0 = \delta^2 W,\ e \equiv e_0\delta.) \tag{I.9}$$

(a′) Covarianţa generală: independenţa formei matematice a legilor (geometrice) de transformările generale ale S.C. în V_4 riemannian (etalonul lui ds^2 fiind presupus constant şi egal cu unitatea).

(b) Numărul dimensiunilor $n = 4$ (pentru metrica nesingulară);

(b′) Signatura metricii $+++-$ (pentru metrica nesingulară), condiţie echivalentă cu inegalităţile:

$$g_{11} > 0, \left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix} \right\| > 0, \|g_{\alpha\beta}\| > 0\,; g_{44} < 0\ (i,k,l,m = 1,2,3,4\,;\ \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3), \quad \text{(I.10)}$$

determinînd S.C. locale ,,admisibile''.

(c) Relaţia de succesiune pentru diferenţiala temporală dt — deci şi pentru intervalele de gen temporal d$s^2 < 0$ — (relaţia trecut-viitor, determinată de relaţia cauză-efect [52], [53], deci conform axiomelor ($a_{1.2}$) de structura materiei). Varietatea riemanniană V_4 este atunci ,,varietatea cosmică'' ,,coordonate-durată''.

(c′) Anumite condiţii analitice:

(c_1') Varietatea riemanniană V_4 diferenţiabilă: la intersecţia domeniilor a două S.C. admisibile C, C', coordonatele locale x^i ale unui punct în C sînt funcţii de cel puţin patru ori derivabile (de iacobian nenul) ale coordonatelor sale x'^i în C', derivatele de ordinul întîi şi doi fiind continue, iar derivatele de ordinul trei şi patru continue pe regiuni (A. Lichnerowicz [24] [48]). Aceleaşi condiţii se presupun pentru g_{ik}.

(c_2') Condiţia de scufundare (locală şi momentană) a lui V_4 în E_N pseudoeuclidian (V_4 de clasa $\nu = N - 4$): în vecinătatea lui V_4 avem pentru coordonatele carteziene y^a ale unui punct-moment în E_N, transformarea de scufundare a lui G. Vrănceanu [44]

$$y^a \equiv f^a + x^\lambda \xi^a_\lambda (\,\xi^a_\lambda \partial_i f^a \equiv 0,\ \xi^a_\lambda \xi^b_\mu \equiv \delta_{\lambda\mu})\,(a,b,c,d = 1,\ldots,N\,;\ \lambda,\mu,\nu = 4,\ldots,N). \quad \text{(I.11)}$$

($d_{1.2}$) (Axiome de identificare): Funcţiile ,,intrinseci'' $f^a \equiv f^a(x^i)$ şi ,,rigide'' $\xi^a_\lambda \equiv \xi^a_\lambda(x^i)$ corespund unor proprietăţi fizice ale materiei. Axiomele (d_1), (d_2) sînt echivalente cu următoarele:

(d_1') Tensorul metric $g_{ik} \equiv \partial_i f^a . \partial_k f^a$ e identic cu potenţialul gravific;

(d_2') Tensorul fundamental de a doua categorie

$$\underset{\lambda}{b_{ik}} \equiv \underset{\lambda}{b_{ki}} \equiv -\,\partial_i f^a . \partial_k \xi^a_\lambda \quad \text{(I.12)}$$

e identic cu ,,deformările'' (rezultă tensorul energie-impuls $\overline{G}_{ik} \equiv \delta T_{ik}$ ca forma pătratică în $\underset{\lambda}{b_{ik}}$ — v. mai departe).

(d_3') Torsiunile

$$\underset{\lambda\mu}{t_i} \equiv -\underset{\mu\lambda}{t_i} \equiv \xi^a_\lambda\, \partial_i\, \xi^a_\mu$$

se identifică cu potenţialele de tip mezonic vectorial (în particular electromagnetic).

Observaţii. 1) Pe baza axiomelor ($d_{1.2}$) sau ($d_{1.2.3}'$), axioma (a′) ia forma următoare:

($\bar{a}$) Axioma (postulatul) ,,relativităţii generale'': valabilitatea aceloraşi legi fizice pentru toate *procesele (mişcările) fizice.*

2) Axiomele (a) — (c_2') sînt de natură matematică (suficiente pentru formalizarea logică). Axiomele ($d_{1,2}$) sau ($d'_{1,2,3}$) sînt de natură fizică (axiome de „interpretare'' ale axiomelor matematice sau „axiome de identificare'').

Sistemul I de axiome (bazat pe interpretarea ecuațiilor gravifice pe baza teoriei scufundării lui V_4 riemannian în E_N pseudoeuclidian) a fost anticipat de H. Mandel [25] și I.B. Rumer [25] — v. și [26].

Axiomele (a) — (c_2') de mai sus se pot unifica într-o *axiomă de bază unică*: spațiul-timp riemannian V_4 e o formă de existență a materiei (realitatea obiectivă atotcuprinzătoare) — vezi și A. D. Alexandrov. (Existența materiei implică și existența unor modele de rigle și ceasornice — W. Pauli, [24].)

b°. *Sistemul II de axiome.* Înlocuim în primul sistem de axiome condiția de scufundare (c_2') prin axioma:

(γ) Metrica g_{ik} a varietății spațiu-timpului riemannian e determinată:

(γ_1) printr-un sistem de ecuații cu derivate parțiale;

(γ_2) de ordinul doi diferențial;

(γ_3) de ordinul întîi algebric (deci liniare) în derivatele de ordinul doi $\partial^2_{lm}\, g_{ik}$ ale tensorului fundamental g_{ik}, dar în general neliniare în g_{ik} și în derivatele de ordinul întîi $\partial_l\, g_{ik}$ (deci ecuații „cvasiliniare'' în g_{ik}).

Se obține astfel sistemul II de axiome format din (a) — (c_1').

Sistemul II de axiome dă teoremele lui H. Lewinson și E. Zeisler [27] — în total opt sisteme posibile ale ecuațiilor de cîmp ale „gravitației pure'' în V_4 (tensorul energie-impuls $\overline{G}_{ik} \equiv 0$) (v. mai departe), dintre care unul coincide cu ecuațiile einsteiniene ale gravitației pure.

c° *Sistemul II' de axiome.* Mai general, fie următorul sistem de axiome în V_n:

($\bar{a}$) Obiectele geometrice: metrica riemanniană G_{ab}, ca obiect geometric fundamental conexiunea Christoffel simetrică $G^a_{bc} \equiv G^a_{cb}$ și curburile corespunzătoare

$$M^a_{bcd},\ M_{ab} \equiv M^c_{acb},\ M \equiv M^a_a \quad (a,b,c,d=1,\ldots,n\,;\ i,k=1,\ldots,4\,;\ \lambda,\mu=5,\ldots,n).$$

($\bar{a}_1$) Constantele universale relativiste.

($\bar{a}'$) Covarianța matematică față de transformările S.C. supuse condițiilor

$$(\bar{a}_1')\ \ \partial x^a/\partial \bar{x}^\lambda \equiv \delta^a_\lambda,\quad (\bar{a}_2')\ \ \partial x^\lambda/\partial \bar{x}^i \equiv -\,\partial \rho^{(\lambda)}/\partial \bar{x}^i$$

($\rho^{(\lambda)}$ = scalari în V_n).

($\bar{b}$) Numărul dimensiunilor = n (în particular $n = 6$).

($\bar{b}'$) Signatura metricii lui V_6: $+++-+-$.

($\bar{c}$) Metrica G_{ab} a varietății spațiu-timp riemannian e determinată:

($\bar{c}_1$) printr-un sistem de ecuații cu derivate parțiale;

($\bar{c}_2$) de ordinul doi diferențial;

($\bar{c}_2$) de ordinul întîi algebric (deci liniare) în derivatele de ordinul doi $\partial^2_{cd}\, G_{ab}$ ale tensorului fundamental G_{ab}, dar în general neliniare în G_{ab} și în derivatele de ordinul întîi $\partial_c\, G_{ab}$ (deci „cvasiliniare'' în G_{ab});

($\bar{c}'$) $l^{(i)}_\lambda \equiv 0$.

(d) $l_a^{(\lambda)}$ sînt $n - 4$ potenţiale mezonice vectoriale în V_n (în V_4 potenţiale mezonice vectoriale $l_i^{(\lambda)}$ şi potenţiale mezonice scalare şi pseudoscalare).

Observaţii. 1. Pe baza lui ($\bar{\text{a}}'$), tensorii de tip $T^{ik\cdot\cdot\cdot}_{\ldots\lambda\mu\ldots}$ din V_n sînt şi tensori în V_4.

2. Pe baza lui ($\bar{\text{c}}'$), V_4 e un subspaţiu riemannian de metrică $g_{ik} \equiv l_i^{(l)} l_k^{(l)}$ al lui V_n riemannian.

Pe baza sistemului de axiome II′ se obţin sistemele de ecuaţii posibile în V_n (în V_6, de ordin tensorial 0, 1, 2, 4, 8, 10) pentru cîmpurile de spin maxim 2 unificate (sau despicate în V_4 spaţiu-timp relativist general, inclusiv tensorul energie-impuls) — generalizarea teoremelor lui H. Lewinson şi E. Zeisler.

Sistemul II′ de axiome (în particular sistemul de axiome II) în V_n sau mai general C_n (în particular C_6) se află la baza unor numeroase lucrări publicate de unul dintre autori [1], [2], [3].

II. SPAŢIU ŞI TIMP

A. VARIETATEA RIEMANNIANĂ V_4 SPAŢIU-TIMP

a. *Potenţiale şi cîmpuri gravifice. Curbura.* În orice spaţiu geometric, sistemul de coordonate (reperul poziţiei şi mişcării spaţio-temporale) (S.C) şi (unitatea de măsură) etalonul (E) (reperul mărimii spaţio-temporale) constituie în total un sistem de referinţă matematic (S.R.). Aceluiaşi corp de referinţă material (C.R.) i se pot ataşa o infinitate de S.R.

1. În spaţiul riemannian n-dimensional V_n, într-un S.C. oarecare, intervalul $\mathrm{d}s^2$ (pătratul distanţei dintre două puncte) — în particular în V_4 spaţiu-timp riemannian al teoriei generale a relativităţii, distanţa spaţiotemporală cvadridimensională dintre două evenimente infinit apropiate — e o formă pătratică a diferenţialelor de coordonate $\mathrm{d}x^i$, coeficienţii fiind cele $n(n+1)/2$ componente g_{ik} ale tensorului metric fundamental (10 componente în V_4) :

$$\mathrm{d}s^2 \equiv g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k, \qquad (i=1,2,3,\ldots,n) \tag{II.1}$$

g_{ik} e un tensor simetric ($g_{ik} \equiv g_{ki}$). În spaţiul-timp riemannian V_4 al teoriei generale a relativităţii, x^α sînt coordonatele spaţiale, iar $x^4 = ict$ coordonata a patra ataşată duratei ($i^2 = -1$; c viteza relativist restrînsă a luminii în cîmp faţă de S.C. inerţiale). În orice spaţiu riemannian (în particular în V_4) etalonul e fix.

Notînd $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$, conexiunile lui Christoffel în g_{ik} au forma

$$\Gamma_{i,\,kl} \equiv \frac{1}{2}(\partial_l g_{ik} + \partial_k g_{il} - \partial_i g_{kl}), \ \Gamma^i_{kl} \equiv g^{im}\,\Gamma_{m,\,kl}, \tag{II.2}$$

fiind forme liniare ale derivatelor $\partial_l g_{ik}$ ale componentelor g_{ik} ale tensorului metric.

Simbolurile lui Christoffel sînt simetrice în ultimii doi indici :

$$\Gamma^i_{kl} \equiv \Gamma^i_{lk}. \qquad \text{(II.2')}$$

În spațiul conform riemannian C_n (generalizare a celui riemannian), metrica $d\sigma^2$ (deci și tensorul fundamental γ_{ik}) mai poate fi înmulțită cu un factor de etalon ρ (funcție de coordonate).

2. În orice spațiu riemannian V_n (în particular în V_4 spațiu-timp al teoriei generale a relativității), în orice punct dat, ,,curbura'' măsoară abaterea locală în toate direcțiile de la direcția plană și deci ,,abaterea'' geometriei locale de la cea euclidiană (sau pseudoeuclidiană) de curbură nulă. Curbura se exprimă prin tensorul de curbură de ordinul patru

$$R^i_{klm} \equiv \partial_m \Gamma^i_{kl} - \partial_l \Gamma^i_{km} + \Gamma^i_{mr} \Gamma^r_{kl} - \Gamma^r_{km} \Gamma^i_{lr} \quad (R_{iklm} \equiv g_{ij} R^j_{klm}), \qquad \text{(II.3)}$$

funcție neliniară a conexiunilor Γ^i_{kl} și funcție liniară a derivatelor lor — în total o funcție diferențială ,,cvasiliniară'' de ordinul doi a tensorului metric g_{ik} (liniară în derivatele de ordinul doi $\partial^2_{lm} g_{ik}$, neliniară în g_{ik} și $\partial_l g_{ik}$). Tensorul de curbură verifică proprietățile de simetrie

$$R_{iklm} \equiv - R_{kilm} \equiv - R_{ikml} \equiv R_{lmik}, \; R_{i\,|klm|} \equiv 0 \qquad \text{(II.4)}$$

($|\,|$ simbolizînd permutarea ciclică a indicilor). Tensorul de curbură contractat de ordinul doi este simetric, de forma :

$$R_{ik} \equiv R^l_{ilk} \equiv g^{lm} R_{milk} \equiv \partial_l \Gamma^l_{ik} - \partial_k \Gamma^l_{il} + \Gamma^l_{im} \Gamma^m_{kl} - \Gamma^l_{lm} \Gamma^m_{ik}. \qquad \text{(II.4')}$$

Scalarul

$$R \equiv R^i_i \equiv g^{ik} R_{ik} \qquad \text{(II.4'')}$$

este scalarul de curbură riemannian. Dintre spațiile riemanniene V_n, spațiile de curbură gaussiană K ,,constantă'' sînt definite prin identitatea

$$R_{iklm} \equiv K(g_{il} g_{km} - g_{im} g_{kl}) \, [R_{ik} \equiv (n-1) K g_{ik} ; \; R \equiv n(n-1) K = \text{const.}]. \qquad \text{(II.5)}$$

Spațiile riemanniene de curbură constantă sînt spații de mobilitate maximă (spații ,,maximal omogene'') : ele au un grup de mișcări (= transformări în ele însele) de $n(n+1)/2$ parametri. Doar în spațiile de curbură constantă există posibilitatea nelimitată a transportului congruent a figurilor finite la distanțe spațiale oarecare, avînd într-un anumit S.C. (,,conform euclidian = uniform accelerat'', v. pag. 307) metrica

$$ds^2 \equiv \psi^{-1} \Sigma (dx^i)^2 \quad (g_{ik} \equiv \psi^{-1} \delta_{ik}). \qquad \text{(II.6)}$$

Toate spațiile de curbură constantă sînt spații conform euclidiene (teorema reciprocă nefiind valabilă). În spațiile euclidiene sau pseudoeuclidiene E_n (în particular în spațiul-timp E_4 al teoriei restrînse a relativității), de metrică δ_{ik} într-un anumit S. C. (,,cartezian''), curbura este nulă în orice punct $R_{iklm} = 0$ deci $K = 0$. În acest caz, în formula (II.5) nu există nici un etalon privilegiat, g_{ik} putînd fi înmulțit cu un factor de etalon ρ oarecare.

3. În orice teorie a gravitației, cîmpurile gravifice constituie, prin definiție, forme liniare ale derivatelor potențialelor gravifice. În teoria

generală a relativității, cele zece componente ale tensorului fundamental g_{ik} în V_4 spațiu-timp riemannian identificîndu-se cu potențialele gravifice einsteiniene, conexiunile Γ^i_{kl} se identifică atunci cu cîmpurile gravifice și invers. Potențialele gravifice înlocuiesc potențialul gravific newtonian unic. Doar într-un spațiu riemannian de curbură constantă (în particular euclidian sau pseudoeuclidian) se poate face abstracție de procesele care schimbă metrica (deplasarea maselor grele etc.).

b. *Congruențe ortogonale.* Congruențele spațiilor riemanniene au fost introduse de Ricci și Levi-Civita ; calculul tensorial absolut al congruențelor și caracterizarea spațiilor riemanniene prin transformările de congruențe, este datorit lui G. Vrănceanu (1926) [17].

1. În orice sistem de coordonate, metrica riemanniană $\mathrm{d}s^2$ a unui V_n (în particular metrica lui V_4 spațiu-timp) este o sumă de pătrate de congruențe ortogonale :

$$\mathrm{d}s^2 = \Sigma\,(\mathrm{d}s^{(i)})^2. \tag{II.7}$$

Congruențele ortogonale

$$\mathrm{d}s^{(i)} \equiv l^{(i)}_k\,\mathrm{d}x^k \tag{II.8}$$

sînt forme liniare ale diferențialelor de coordonate $\mathrm{d}x^i$ („forme Pfaff”) în general neintegrabile, parametrii de congruențe $l^{(i)}_k \equiv g^{(i)}_k$ și momentele de congruențe $l^k_{(i)} \equiv g^k_{(i)}$ fiind variabile în spațiu-timp (funcții de coordonate). Primare sînt mărimile $l^{(i)}_k$; tensorul metric (potențialul gravific) g_{ik} constituie o mărime pătratică dedusă din cele dintîi :

$$g_{ik} \equiv \partial_i\, l^{(m)}\,\partial_k\, l^{(m)}. \tag{II.9}$$

Congruențele ortogonale definesc în fiecare punct al lui V_n riemannian (în particular al lui V_4 spațiu-timp) un S.C. „neolonom” (mai precis, în V_4 un reper local Lorentz (= un S.C. inerțial) și în acest sens „preferențial”, parametrii vitezei normate $\beta = v/c$ fiind funcții de punct). Congruențele ortogonale definesc deci în V_n un spațiu euclidian local („neted”) E_n (în cazul unui V_4, un spațiu-timp pseudoeuclidian local relativist restrîns E_4) de metrică $\delta_{(ik)}$. Transformările de congruențe ortogonale (= transformări Lorentz în E_4)

$$\mathrm{d}s^{(i)} \equiv c^{(i)}_{(k)}\,\mathrm{d}s^{(k)} \text{ sau } l^{(i)}_l \equiv c^{(i)}_{(k)}\, l^{(k)}_l \quad (c^{(l)}_{(i)}\, c^{(l)}_{(k)} \equiv \delta_{(ik)}) \tag{II.10}$$

($c^{(i)}_{(k)}$ = funcții de coordonate) păstrează forma (II.7) ca sumă de pătrate. Se stabilește astfel o legătură mai profundă între teoria generală a relativității și cea restrînsă, considerînd metrica riemanniană dată (II.7) nu ca formă pătratică a diferențialelor de coordonate („olonome”), ci ca formă pătratică a congruențelor ortogonale $\mathrm{d}s^{(i)}$ (diferențiale „neolonome”).

Fecunditatea excepțională a metodei congruențelor se evidențiază în special în teoria spinorilor definiți în E_n euclidian sau pseudoeuclidian local atașat varietății riemanniene V_n (V. A. Fok [28], v. și I. B. Rumer [15] precum și [1], [3]).

2. În teoria unitară neolonomă, spațiul-timp fizic este o hipersuprafață neolonomă V_6^4 (în particular V_5^4) definită prin ecuația lui Pfaff neintegrabilă :

$$\mathrm{d}s^{(\lambda)} \equiv l_a^{(\lambda)}\,\mathrm{d}x^a = 0 \;(a,b,c=1,\ldots,6\,; i,k,l=1,\ldots,4\,; \lambda,\mu=5,6) \qquad \text{(II.11)}$$

într-un spațiu riemannian V_6 (sau V_5) de metrică

$$\mathrm{d}s^2 \equiv \Sigma\,(\mathrm{d}s^{(i)})^2 + \Sigma\,(\mathrm{d}s^{(\lambda)})^2 \equiv \mathrm{d}s^2 + \Sigma\,(\mathrm{d}s^{(\lambda)})^2. \qquad \text{(II.12)}$$

Parametrii de congruențe $l_a^{(\lambda)} \equiv \lambda_a^{\pm}$ sînt două potențiale vectoare mezonice în V_6, în particular pentru mase de repaus nule, potențiale vectoare electro- și gravito-magnetice. În V_4 ele se despică în potențialele mezonice vectoriale $\lambda_i^{\pm}$ și scalare (sau pseudoscalare) $\lambda_\mu^{\pm}$. În teoria unitară neolonomă clasică (G. Vrănceanu, K. Yano, J. Podolanski) toate mărimile cîmpului sînt independente de variabilele suplimentare x^λ, deci masele de repaus (canonic conjugate lui x^λ) nule; variabilele x^λ nu sînt definite decît prin diferențialele lor. În teoria neolonomă generalizată conformă (A. Popovici [1], [3]), mărimile de cîmp depind exponențial de x^λ; masele de repaus fiind oarecare; pentru mase de repaus nenule, varietatea neolonomă V_6^4 se reduce la V_5^4 [3].

În orice teorie neolonomă, spațiul-timp fizic local este spațiul-timp riemannian V_4 al teoriei relativității. Totalitatea spațiilor locale cvadridimensionale nu este însă tangentă unui aceluiași spațiu riemannian cvadridimensional, din cauză că paralelogramul construit pe două deplasări infinitezimale interioare nu se închide. În cazul general, congruențele sînt neintegrabile, spațiul V_4 de 4 dimensiuni locale scufundat în V_6^4 e în cazul general neolonom; olonomia constituie un caz particular. Caracterul cvadridimensional al spațiu-timpului relativist este deci local. Teoria neolonomă evită astfel o serie de dificultăți inerente teoriilor polidimensionale clasice.

Gravitația este legată de curbura spațiului V_4, pe cînd cîmpurile mezonice unificate, în particular cel electro- și gravito-magnetic se identifică cu ,,tensorul torsiune''.

$$\lambda_{ab}^{\pm} \equiv -\,\lambda_{ba}^{\pm} \equiv \partial_a\,\lambda_b^{\pm} - \partial_b\,\lambda_a^{\pm}, \qquad \text{(II.13)}$$

care nu este nul dacă ecuația (II.11) nu este complet integrabilă, deci dacă există cîmpuri mezonice vectoriale și pseudoscalare.

c. *Sistemul de coordonate geodezic.* 1. Într-o varietate A_n cu conexiune afină $\Gamma_{kl}^i \equiv \Gamma_{lk}^i$ simetrică (în particular într-un spațiu riemannian V_n cu conexiune Christoffel (II.2), deci și în V_4 spațiu-timp), în orice domeniu D spațio-temporal infinitezimal vecin unui punct (,,punct-moment'' = eveniment) P, există un S.C. olonom local C' (,,S.C. geodezic''), în care conexiunea Γ_{kl}^i (= cîmpul gravific în V_4) — deci derivatele de ordinul întîi ale metricii g_{ik} (= ale potențialelor gravifice în V_4) se anulează. Pînă la derivatele de ordinul doi ale mărimilor g_{ik}, acestea din urmă sînt deci în C' (local) constante (,,staționare''), reducîndu-se la forma diagonală g_{ik}.

În S.C. geodezic local C', intervalul spațio-temporal se reduce (pînă la termenii de-al doilea ordin) la o sumă de pătrate a diferențialelor de coordonate ,,geodezice'' dX^i (coordonate carteziene locale în V_n)

$$ds^2 \equiv \Sigma(dX^i)^2. \tag{II.14}$$

În V_4 relativist ds^2 e de signatură $+++-$. În domeniul infinitezimal D dat, vecin cu P, există deci într-adevăr un spațiu euclidian local E_n (în cazul lui V_4 un spațiu-timp pseudoeuclidian E_4), tangent lui V_n. În E_4 e valabilă teoria restrînsă a relativității.

Conexiunile (cîmpurile gravifice) Γ^i_{kl} nefiind tensori, anularea lor în S.C. geodezic C' nu implică anularea lor într-un alt S.C. : ele sînt ,,tensori afini'' (= tensori doar față de transformările liniare = transformări locale Lorentz în E_4). În domeniul infinitezimal spațio-temporal D vecin lui P (deci în E_4 local și momentan), toate S.C. inerțiale (= în translație uniformă) sînt echivalente; ele derivă din sistemul geodezic dat C' (sau unul din altul) printr-o transformare locală Lorentz. Covarianța relativist-restrînsă a legilor fizice față de transformările Lorentz (= valabilitatea acelorași legi fizice pentru toate mișcările uniforme = pentru toate sistemele inerțiale) și constanța vitezei c a luminii în cîmp față de toate sistemele inerțiale rămîn valabile în E_4.

2. Într-un spațiu A_n cu conexiune afină simetrică (în particular în V_n riemannian) teorema S.C. geodezic local C' se generalizează astfel: De-a lungul unei curbe oarecare $\mathfrak{C}$, într-un anumit S.C. ,,geodezic'' C', conexiunea (cîmpul gravific) Γ^i_{kl} se anulează. Pînă la termenul de-al doilea ordin, metrica în spațiul riemannian e euclidiană (pseudoeuclidiană) în C', de-a lungul curbei $\mathfrak{C}$ (teorema lui Fermi) [44].

Doar în spațiul euclidian E_n (în particular în spațiul-timp pseudoeuclidian E_4 al teoriei restrînse a relativității) există S.C. geodezice ,,universale'', valabile în tot spațiul (respectiv tot spațiul-timp) = ,,sisteme carteziene'', față de care conexiunea (cîmpul gravific) Γ^i_{kl} se anulează riguros peste tot, iar $g_{ik} \equiv \delta_{ik}$.

d. *Proprietățile spațiului și timpului.* 1. În geometrie (și în fizica relativistă), conform teoremei generale Hilbert-Noether [2], [3], [32], [47], oricărei proprietăți a spațiului (respectiv a spațiului-timp relativist) îi corespund anumite mișcări (deplasări) ale acestuia (transformări ale punctelor respectiv ale evenimentelor spațio-temporale în ele însele) — matematic vorbind : un grup de transformări continue ale coordonatelor spațiale x^i (respectiv spațio-temporale).

α. Izotropia spațiului revine la valabilitatea acelorași proprietăți geometrice în toate direcțiile (echivalența direcțiilor). În fizica clasică, izotropia spațiului (euclidian) implică deci posibilitatea nelimitată a rotațiilor spațiale. Teoria restrînsă a relativității păstrează izotropia spațială. Ea limitează însă izotropia spațiului-timp cvadridimensional pseudoeuclidian E_4; dat fiind caracterul indefinit al metricii (suma de trei pătrate pozitive și unul negativ) rezultă neechivalența vectorilor reali (de gen spațial : $ds^2 > 0$), imaginari (de gen temporal : $ds^2 < 0$) și izotropi (corespunzători conului luminos $ds^2 = 0$). Măsura unghiurilor spațio-temporale implică deci în fiecare punct-moment direcții singulare corespunzătoare conului luminos

$$ds^2 = 0.$$

Rezultă îngrădirea rotațiilor spațio-temporale

$$\overline{x}^i = \alpha^i_k x^k \tag{II.15}$$

la domeniile $-\pi/4 < \varphi_\alpha < \pi/4$ (φ_α = unghiul de rotație al axelor OX_α, OX^4) – fapt condiționat de existența vitezei maxime c (viteza luminii în cîmp față de S.C. inerțiale) și deci de variația masei cu viteza. Caracterul indefinit al metricii fiind valabil și în V_4 riemannian spațiu-timp (ds^2 fiind suma de trei pătrate de congruențe pozitive și unul negativ, ortogonale), îngrădirea rotațiilor spațio-temporale și în acest sens anizotropia rămîn valabile și în spațiul-timp riemannian relativist general V_4. Mai general, în teoria scufundării lui V_4 într-un spațiu-timp pseudoeuclidian E_N de N dimensiuni ($N \leqslant 10$) anizotropia e definită de tensorul α_{iklm} care leagă tensorii fundamentali de a doua categorie $\underset{\lambda}{b}_{ik}$ („deformările”) (și urmele lor $\underset{\lambda}{b} \equiv \underset{\lambda}{b}{}^i_i$) de tensorii $\underset{\lambda}{d}_{ik}$ („tensiunile”) [25], [26],

$$\underset{\lambda}{d}_{ik} \equiv \underset{\lambda}{b}_{ik} - \underset{\lambda}{b} g_{ik} \equiv \alpha_{iklm} \underset{\lambda}{b}{}^{lm} \left(\alpha_{iklm} \equiv \frac{1}{2} g_{il} g_{km} + \frac{1}{2} g_{im} g_{kl} - g_{ik} g_{lm} \right). \tag{II.16}$$

Varietatea spațiului-timp V_4 a teoriei einsteiniene a gravitației e deci prin definiție anizotropă.

β. Omogeneitatea spațiu-timpului euclidian (pseudoeuclidian) E_n revine la valabilitatea acelorași proprietăți geometrice în toate punctele și momentele, deci la echivalența acestora; rezultă posibilitatea nelimitată a translațiilor spațio-temporale

$$\overline{x}^i = x^i + a^i. \tag{II.17}$$

Omogeneitatea spațiu-timpului este depășită în spațiul riemannian general V_n (în particular în spațiul-timp riemannian V_4). Datorită curburii R^i_{klm} nenule, spațiul riemannian general e neomogen (eterogen). În V_4 spațiu-timp, conform teoriei generale a relativității, neomogeneitatea geometrică e determinată de neomogeneitatea materiei, de variația densității ei în spațiu-timp.

γ. Continuitatea spațiului euclidian E_n (spațiu-timpului pseudoeuclidian E_4) revine la existența unor lungimi oricît de mici (în spațiu-timp, lungimi și durate oricît de mici); în spațiul riemannian V_n (în particular în V_4 spațiu-timp dat) ea implică variația continuă a coordonatelor spațiului euclidian E_N (respectiv pseudoeuclidian) de scufundare, de-a lungul varietății V_n scufundate (inclusiv variația continuă a coordonatelor suplimentare) în funcție de n parametri. Continuitatea spațiu-timpului implică posibilitatea reetalonării tuturor coordonatelor (în spațiu-timp, a celor spațiale și a duratei) cu un factor λ arbitrar (independent de loc și moment):

$$\overline{x}^i = \lambda x^i. \tag{II.18}$$

(Dilatarea conform constantă = transformare de scară = de etalon).

δ. În spaţiul conform euclidian H_n (în particular în spaţiul-timp conform euclidian H_4) se adaugă ,,cvasiomogeneitatea''. Ea implică în interpretarea uzuală, posibilitatea mişcărilor uniform accelerate (de acceleraţie constantă în spaţiu şi timp) şi revine matematic [21], [22] la reetalonarea coordonatelor x^i cu un factor variabil :

$$\overline{x}^i = \rho^i_k x^k \quad [\rho^i_k \equiv (\delta^i_k - c^i x_k)/(1 - 2\, c_l x^l + c^2 x^2),\ c^2 \equiv c^l c_l,\ x^2 \equiv x^l x_l] \qquad \text{(II.19)}$$

(,,transformări conforme speciale''), compuse din translaţii (de tip (II.17)) şi din inversiuni

$$\overline{x}^i = -\, x^i/x^2. \qquad \text{(II.20)}$$

Corespondenţa dintre continuitate şi dilatări conforme constante, dintre cvasiomogeneitate şi reetalonări cu factor variabil (inclusiv acceleraţii relativiste-uniforme) nu apare în literatura de specialitate de pînă acum.

Problemele de mai sus sînt de asemenea strîns legate de teoria nelocală (nepunctuală) (v. mai departe) şi de relaţiile de impreciziune ale fizicii cuantice.

2. Grupurile de transformări de coordonate de mai sus (rotaţiile, translaţiile, dilatarea conformă variabilă şi dilatarea conformă constantă) constituie subgrupuri :

a) ale grupului G^0_{15} al transformărilor conforme relativist-restrînse în H_4 = transformări hexasferice de 15 parametri = rotaţiile spaţiu-timpului pseudoeuclidian E_6 de signatură $+ + + - + -$;

b) ale grupului $\overline{G}$ al transformărilor conforme generale ale spaţiului-timp conform riemannian C_4 = ale transformărilor generale de coordonate în V_6 riemannian de signatură $+ + + - + -$. În cazul particular al transformărilor infinitezimale, parametrii rotaţiilor, translaţiilor, dilatărilor conforme variabile şi dilatării conforme constante constituie respectiv componentele ω_{ik}, ω_{6i}, ω_{5i}, ω_{56} ale tensorului antisimetric $\omega_{ab} \equiv - \omega_{ba}$ caracterizînd rotaţiile infinitezimale ale lui E_6, [1] ,[3], [21], [22]. Proprietăţile locale Π ale spaţiu-timpului riemannian V_4 constituie deci aspecte parţiale ale izotropiei (locale) a spaţiului-timp riemannian V_6 (mai general, ale spaţiului-timp conform riemannian C_6) şi ale izotropiei globale a spaţiului-timp pseudoeuclidian E_6 respectiv conform euclidian H_6 (local tangente lui V_6 respectiv C_6).

3. Contradicţia dintre proprietăţile Π (izotropie, omogeneitate, cvasiomogeneitate, continuitate) şi Π' (anizotropie, eterogenitate, cvasieterogenitate, discontinuitate) — baza unităţii lor dialectice se rezolvă prin distincţia

a) dintre proprietăţi locale şi globale,

b) dintre proprietăţi relative şi absolute.

În fizica modernă, proprietăţile Π (izotropie, omogeneitate, cvasiomogeneitate şi continuitate) ale materiei şi ale formei sale de existenţă (spaţiul-timp riemannian) nu sînt deci absolute, ci relative, legate indisolubil de proprietăţile contrarii Π' (anizotropia, eterogenitatea, cvasieterogenitate şi discontinuitate). Mai precis, conform teoriei generale a relativităţii, spaţiul-timp riemannian V_4 fiind curb, izotropia, omogeneitatea, cvasiomogeneitatea, parţial şi continuitatea, sînt valabile doar în primă aproximaţie (relativist-restrînsă), în domenii infinitezimale spaţio-temporale, avînd deci un caracter pur local. Determinismul materiei şi al spaţiu-timpului e unitatea dialectică a proprietăţilor Π relative (locale) şi a proprietăţilor Π' într-un anumit grad absolute (globale = valabile în regiuni finite sau infinite).

Proprietăţile Π' şi Π (în particular neomogeneitatea şi omogeneitatea) ale spaţiului riemannian V_n (în particular ale spaţiu-timpului V_4) variază cu treapta diferenţială şi cu gradul de aproximaţie considerat.

Pe prima treaptă diferenţială (a tensorului metric = a potenţialelor gravifice g_{ik} de dimensiunea $L^2\ T^{-2}$ a pătratului vitezei) şi pe cea de-a doua treaptă diferenţială (a conexiunilor = a cîmpurilor gravifice Γ^i_{kl} de dimensiunea LT^{-2} a acceleraţiei), V_n este relativ omogen. Metrica fiind o formă pătratică (II.1) a diferenţialelor de coordonate, în orice punct există un S.C. olonom (geodezic) C' (reperul Lorentz local), în care (pînă la derivatele de ordinul doi ale mărimilor g_{ik}), acestea sînt constante, metrica ds^2 luînd forma (II.14), iar derivatele lor (cîmpurile Γ^i_{kl}) nule; în *coordonate*, V_n are deci local proprietăţile Π (în particular omogeneitatea) în *aproximaţia* de mai sus. Pe de altă parte, metrica ds^2 fiind o formă pătratică (II.7) a congruenţelor ortogonale, într-un punct fix, există o infinitate de S.C. neolonome (repere Lorentz locale); în *congruenţe ortogonale*, V_n are deci local proprietăţile Π (în particular omogeneitatea) în mod *riguros*.

Dimpotrivă, pe cea de-a treia treaptă diferenţială a curburii riemanniene R^i_{klm} (de dimensiunea L^{-2}), conţinînd derivatele mărimilor Γ^i_{kl} şi deci derivatele de ordinul doi şi întîi ale mărimilor g_{ik}, V_n are proprietăţile Π' pe scară absolută (în particular eterogeneitatea absolută): în V_4, o dată cu densitatea şi mişcarea materiei, curbura variază în general în spaţiu-timp.

4. Proprietăţi Π absolute (=pe toate treptele diferenţiale) şi globale (= pe regiuni finite, nenule sau infinite) există doar în cazul spaţiilor de curbură constantă (neeuclidiene, sau euclidiene respectiv pseudoeuclidiene), corespunzătoare cîmpului gravific constant (omogen) şi deci densităţii constante (uniforme) a materiei, în particular în varietăţile Einstein şi de Sitter (a modelului relativist al metagalaxiei) şi în varietatea pseudoeuclidiană E_4 a teoriei restrînse a relativităţii (corespunzătoare absenţei cîmpului gravific şi deci densităţii cvasiconstante şi cvasinule a materiei — caz limită) (cu îngrădirea de mai sus valabilă pentru izotropia spaţiului-timpului).

5. În cazul unui sistem material: *a*) finit, *b*) izolat, *c*) scufundat în H_4 conform euclidian (cazul metagalaxiei relativiste a lui Friedmann) sau în E_4 pseudoeuclidian (corespunzători unor distanţe mari faţă de sistem, riguros vorbind unor distanţe infinite — domeniul cîmpului material pur), proprietăţile Π (omogeneitate etc.) sînt valabile ,,global în infinitul spaţial'' (mai general, spaţio-temporal). Pe de altă parte, în teoria mişcării

relativiste a particulei extinse elaborată de Dirac [43], spațiul în interiorul particulei se postulează ca fiind euclidian. Conform legii generalizate a reciprocității — implicînd simetria legilor fizice simultan : *a*) în variabilele coordonată-durată și impuls-energie și *b*) în stările continue și discontinue ale materiei (cîmp și particulă) — deci simetria în raport cu exteriorul și interiorul particulei [1], [2], [3], spațiul-timp conform euclidian H_4' sau pseudoeuclidian E_4' în interiorul particulei, corespunde prin reciprocitate lui H_4 al metagalaxiei sau lui E_4 din exteriorul particulei. Proprietățile Π sînt atunci valabile ,,global în infinitul impuls-energie" corespunzător centrului particulei.

e. *Gravitație, inerție, accelerație.* 1. Date fiind dificultățile definirii precise a accelerației într-o varietate riemanniană, V. Fok înlocuiește termenul de ,,S. C. accelerat" prin cel de S. C. implicînd o transformare de coordonate neliniară în variabila timp [49]. Mișcarea ,,accelerată" include în fond pe cea ,,curbilinie" (accelerația implicînd variația vectorului viteză în mărime, direcție și sens).

Caracterul riemannian al spațiu-timpului V_4 (mai precis covarianța generală a legilor fizice în V_4 = valabilitatea acelorași legi fizice în toate S.C.) implică S.C. neinerțiale (,,accelerate" și ,,curbilinii"), deci totodată echivalența cantitativă locală : *a*) a cîmpului gravific și a cîmpului de accelerație (ca și a potențialelor și forțelor corespunzătoare) ; *b*) a cîmpului gravific și a cîmpului inerțial (în fizica clasică a cîmpului, accelerației centrifuge și Coriolis), ca și a potențialelor și forțelor corespunzătoare. Ambele rezultă sub o formă mai precisă pe altă cale : *a*) din teorema : 1° a mișcării particulei pe geodezică ; *b*) din teorema : 2° a egalității masei inerte și grele, ambele teoreme fiind consecințe ale legilor de conservare-transformare ,,slabe" a energiei-impulsului — deci consecințe ale ecuațiilor gravifice (v. pag. 325). Teoremele *a*) și *b*) de mai sus nu constituie deci postulate, ci — sub o formă generală — consecințe ale covarianței generale a legilor fizice în V_4 — deci consecințe ale caracterului riemannian al metricii — independent de ecuațiile cîmpului — iar sub o formă mai precisă (ca și teoremele 1° și 2°), consecințe ale ecuațiilor cîmpului.

2. În interpretarea einsteiniană a teoriei generale a relativității : (α) se identifică nu numai cantitativ, ci și calitativ, cîmpurile gravifice, inerțiale și de accelerație ; (β) nu există S.C. preferențiale. În consecință, în interpretarea einsteiniană, cîmpurile gravifice efective (= dinamice =fizice) și fictive (=cinematice=geometrice) nu sînt distincte. În realitate, cîmpurile gravifice efective (fizice, dinamice) sînt caracterizate : (a) pe planul legii, de curbura spațio-temporală R^i_{klm} nenulă ; rezultă imposibilitatea anulării cîmpurilor gravifice neomogene (= variabile în spațiu-timp) în vreun S.C. în regiuni finite nenule ; (b) pe planul fenomenelor, de anumite condiții la limită (valabile în anumite S.C. preferențiale). Astfel, într-un anumit S.C., cîmpul gravific al unui sistem finit și izolat, de dimensiuni mici față de cele ale metagalaxiei, tinde spre zero la distanțe mari (riguros vorbind infinite) față de dimensiunile sistemului, iar potențialul gravific g_{ik} spre valorile ,,normale" (carteziene, galileene) δ_{ik}. Pentru sisteme de ordinul metagalactic, într-un anumit S.C., metrica tinde

la distanțe mari (riguros vorbind infinite) spre metrica conform euclidiană (II.6) (ψ = funcție de coordonate — timp) (V. Fok [49]).

Cîmpurile gravifice pur geometrice (cinematice, fictive) echivalente unui S.C. neinerțial (accelerat) — ,,cîmpurile inerțiale efective'' în terminologia lui M. Kohler, v. pag. urm. — nu verifică una sau alta din cele două condiții de mai sus. Chiar în spațiul-timp pseudoeuclidian E_4 introducerea unui S.C. neinerțial implică apariția unor asemenea cîmpuri; în aceste S.C. ele iau la infinit valori nenule (finite sau infinite). Astfel, într-un S.C. în rotație, potențialul forțelor centrifuge crește cu pătratul razei vectoare r, iar potențialul inerțial corespunzător unui S.C. uniform accelerat e o funcție liniară a coordonatelor; în ambele cazuri, la infinit, potențialele respective au valori infinite.

f. *Cîmpul gravific tensorial.* 1. În lucrările lui M. Kohler (1952) [29], pornind de la unele idei ale lui Max von Laue, caracterul netensorial al cîmpului gravific și dificultățile legate de el sînt depășite.

Kohler distinge ,,metrica inerțială'' generală g_{ik} și ,,metrica inerțială efectivă'' $\underset{\circ}{g}_{ik}$. Există un S.C. ,,normal'' (inerțial) C în orice punct-moment, S.C. în care metrica inerțială efectivă $\underset{\circ}{g}_{ik}$ este constantă ($\underset{\circ}{g}_{ik} \equiv \delta_{ik}$).

Diferența

$$\rho_{ik} \equiv g_{ik} - \underset{\circ}{g}_{ik}$$

(,,potențialul gravific efectiv'') constituie o perturbație a potențialului. Potențialul inerțial general $g_{ik} \equiv \underset{\circ}{g}_{ik} + \rho_{ik}$ se compune deci din potențialul inerțial efectiv $\underset{\circ}{g}_{ik}$ și din potențialul gravific efectiv ρ_{ik}; g_{ik}, $\underset{\circ}{g}_{ik}$, ρ_{ik} sînt tensori în V_4. În interpretarea noastră, g_{ik} corespunde unei densități de stări oarecare a materiei, iar $\underset{\circ}{g}_{ik}$ cîmpului material, stării pur continue a materiei, avînd proprietățile Π (omogeneitate etc.), de densitate minimă și deci de nivel de energie minim (corespunzător ,,oscilațiilor de zero'' ale teoriei cuantice a cîmpului) — caz limită al densității oarecare a materiei. Potențialul ρ_{ik} constituie abaterea potențialului local g_{ik} de la potențialul $\underset{\circ}{g}_{ik}$ al cîmpului material; ρ_{ik} corespunde particulelor (starea discontinuă a materiei) ca perturbații locale, sau — în sensul lui J. P. Vigier — ,,deformări'' ale cîmpului, respectiv în sensul lui D. Blohințev — ,,stări excitate'' (=de nivel de energie superior energiei minime) ale cîmpului material.

2. Cîmpurile gravifice (simboluri Christoffel) corespunzătoare potențialelor g_{ik} și $\underset{\circ}{g}_{ik}$ sînt respectiv Γ^i_{kl} și $\underset{\circ}{\Gamma}{}^i_{kl}$; ele definesc două deplasări paralele ale oricărui vector și două derivate covariante. Ca și în teoria einsteiniană, Γ^i_{kl} și $\underset{\circ}{\Gamma}{}^i_{kl}$ sînt tensori doar în S.C. inerțiale (deci pentru transformări liniare de coordonate), deci ,,tensori afini''. Orice variație (finită sau infinitezimală) a conexiunii într-un punct dat fiind un tensor, diferența

$$\Gamma^i_{kl} - \underset{\circ}{\Gamma}{}^i_{kl} \equiv \rho^i_{kl}$$

(simbolul lui Christoffel în ρ_{ik}) constituie un tensor. ,,Cîmpul inerțial total''

$$\Gamma^i_{kl} \equiv \underset{\circ}{\Gamma}{}^i_{kl} + \rho^i_{kl}$$

se compune deci din ,,cîmpul inerțial efectiv'' $\underset{\circ}{\Gamma}{}^i_{kl}$ și ,,cîmpul gravific efectiv'' ρ^i_{kl}. În S.C. ,,normal'' (local) ,,cîmpul inerțial efectiv'' $\underset{\circ}{\Gamma}{}^i_{kl}$ se anulează, iar Γ^i_{kl} se reduce la cîmpul gravific efectiv ρ^i_{kl} tensorial, în general nenul. Dimpotrivă, în S.C. ,,geodezic local'' avem $\Gamma^i_{kl} = 0$: cîmpul inerțial efectiv $\underset{\circ}{\Gamma}{}^i_{kl}\ (= -\rho^i_{kl})$ și cîmpul gravific efectiv ρ^i_{kl} se compensează deci în S.C. geodezic. Teoremele lui M. Kohler reflectă deci în fond, alături de unificarea și echivalența cantitativă a cîmpurilor gravific și inerțial (și a forțelor, potențialelor și în ultimă instanță, a maselor corespunzătoare), deosebirea lor calitativă și opoziția lor (lupta contrariilor) exprimată în semnul lor opus. În interpretarea noastră, teoremele lui M. Kohler reflectă deci unitatea cantitativă și deosebirea calitativă a stărilor contrarii ale materiei : cîmp (continuu) și particulă (discontinuă).

3. Curburile corespunzătoare potențialelor și cîmpurilor inerțiale efective $\underset{\circ}{\Gamma}{}^i_{kl}$ și gravifice efective ρ^i_{kl} sînt respectiv $\underset{\circ}{R}{}^i_{klm}$ (,,curbura inerțială efectivă'') și ρ^i_{klm} (curbura gravifică efectivă). În orice S.C., curbura inerțială efectivă $\underset{\circ}{R}{}^i_{klm}$ este nulă. Curbura inerțială generală $R^i_{klm} \equiv \underset{\circ}{R}{}^i_{klm} + \rho^i_{klm}\ (= \rho^i_{klm})$ se reduce deci, la curbura gravifică efectivă ρ^i_{klm} (funcție diferențială a cîmpului gravific tensorial ρ^i_{kl}).

În lucrarea citată, M. Kohler calculează efectiv potențialele g_{ik} și $\underset{\circ}{g}_{ik}$ corespunzătoare propagării undelor gravifice ale cîmpului gravific slab. Rezultatele de mai sus, departe de a fi formale, au deci o semnificație fizică efectivă.

g. *Proprietăți intrinseci și rigide.* Printre proprietățile unui spațiu riemannian n-dimensional V_n trebuie să distingem proprietăți ,,intrinseci'' și ,,rigide''.

1. Proprietățile intrinseci (de pildă proprietățile intrinseci ale unei suprafețe de două dimensiuni independente, scufundată în spațiul tridimensional euclidian), sînt condiționate numai de distanța ds dintre două puncte infinit apropiate pe suprafață ; ele constituie deci proprietăți diferențiale ,,locale'' și rămîn neschimbate pentru orice deformare ,,izometrică'' (deformare fără extensiuni sau comprimări ale fibrelor = lungimilor pe suprafață). Astfel, distanța dintre două puncte ale unei suprafețe plane rămîne aceeași în cazul deformării ei conice sau cilindrice. Dimpotrivă, proprietățile rigide ale suprafeței depind de forma scufundării ei în spațiul tridimensional, deci de comportarea ei în mare (,,globală'') și variază o dată cu deformarea ei. Astfel, proprietățile rigide ale suprafețelor plane, cilindrice și conice sînt diferite (cilindrul și conul sînt suprafețe curbe). O suprafață plană (sau cilindrică sau conică) nu se poate suprapune (aplica) pe o suprafață sferică fără extensiunea și comprimarea locală a fibrelor (modificarea lungimilor ds pe suprafață) ; planul și sfera se deosebesc deci atît prin proprietățile intrinseci cît și prin cele rigide. Prin deformarea suprafeței, proprietățile rigide variază, iar pentru deformări izometrice, cele intrinseci rămîn invariante. Într-un anumit sens, proprietățile rigide determină, deci, între anumite limite, pe cele intrinseci : forma suprafeței

,,în mare'', scufundarea ei în E_3 euclidian, determină proprietățile ei ,,locale'' (metrica ei riemanniană ds^2 — deci distanțele și unghiurile pe suprafață), nu însă invers.

2. Teoreme analoge sînt valabile pentru spațiul riemannian V_n oarecare scufundat într-un alt spațiu riemannian V_m în particular euclidian sau pseudoeuclidian E_N de mai multe dimensiuni [44]. Metrica unui spațiu riemannian V_n de n dimensiuni independente (reale sau imaginare) are $n(n+1)/2$ componente g_{ik}; V_n dat poate fi deci în general scufundat într-un spațiu euclidian sau pseudoeuclidian E_N de $n\ (n+1)/2$ dimensiuni (în anumite cazuri particulare spațiul de scufundare E_N poate avea mai puține dimensiuni). Astfel, o suprafață V_2 este scufundată într-un E_3; un V_3 în general într-un E_6 etc. Diferența $N - n \equiv \nu$ dintre numărul dimensiunilor spațiului de scufundare și spațiului scufundat se numește clasa spațiului scufundat (în cazul general $\nu \equiv n\ (n-1)/2$). Clasa unui V_n dat poate fi în general diferită în diverse puncte ale lui V_n scufundat și nu constituie deci o proprietate globală, ci una locală. În particular, într-un spațiu riemannian V_n de clasa ν pot exista subspații riemanniene ,,singulare'' în care clasa lui V_n poate fi superioară numărului ν [30].

Proprietățile intrinseci ale lui V_n scufundat sînt în esență descrise de tensorul său metric g_{ik} (,,tensorul metric de categoria întîi'') iar proprietățile rigide de ,,tensorii metrici $\underset{\lambda}{b}_{ik}$ de a doua catgorie'' și de a ,,treia categorie'' $\underset{\lambda\mu}{C}_{ik}$ $(i,\ k = 1,\ldots,n)$ și (pentru $\nu \geqslant 2$) de ,,torsiunile'' $\underset{\lambda\mu}{t^i}$ [44] $(\lambda,\mu = n+1,\ldots,N)$. Condițiile scufundării unui spațiu riemannian V_n într-un spațiu riemannian V_m (în particular euclidian sau pseudoeuclidian E_N) sînt date: (a) de un sistem de ecuații algebrice în $\underset{\lambda}{b}_{ik}$ și cu derivate parțiale în g_{ik} (ecuațiile lui Gauss), (b) de două sisteme de ecuații cu derivate parțiale în $\underset{\lambda}{b}_{ik}$ și algebrice în $\underset{\lambda\mu}{t^i}$ (ecuațiile lui Codazzi și ecuațiile lui Ricci-Kühne) și (c) de un sistem de ecuații algebrice determinînd C_{ik} în funcție de $\frac{b}{\lambda}ik, \frac{t^i}{\lambda_\mu}\cdot$

Ecuațiile de scufundare determină deci în ultimă instanță tensorul fundamental de categoria întîi în funcție de tensorii fundamentali de a doua categorie $\underset{\lambda}{b}_{ik}$ și de torsiunile $\underset{\lambda\mu}{t^i}$ (deci proprietățile intrinseci ale spațiului scufundat V_n în funcție de cele rigide).

3. De altfel, în cazul spațiilor riemanniene V_n de metrică indefinită (sumă de pătrate pozitive și negative) unele teoreme ale teoriei scufundării valabile pentru metrica pozitiv definită (sumă de pătrate pozitive) pot să nu fie valabile. Astfel, o varietate n-dimensională V_n scufundată în V_m riemannian cu metrica indefinită $(n < m)$ nu e în mod necesar un spațiu riemannian cu metrică nedegenerată $(g \neq 0)$ [50].

4. Conform teoremei generale de mai sus, spațiul-timp riemannian V_4 este, în condiții foarte largi, scufundabil într-un spațiu-timp pseudoeuclidian polidimensional E_N (în cazul general, de zece dimensiuni), V_4 fiind deci în general de clasa 6. Diversele cazuri ale scufundării spațiului-

timp V_4 al teoriei generale a relativității într-un spațiu pseudoeuclidian au fost studiate sub forma cea mai complexă de J. Eiesland (1925) [31]. Dintre spațiile relativist-generale clasice V_4 doar spațiul-timp determinat de cîmpul gravific în interiorul unei sfere fluide statice, incompresibile și adiabatice și două modele cosmologice ale metagalaxiei (spațiul-timp „cilindric" al lui Einstein și „hiperbolic" al lui de Sitter) sînt de clasa 1 (deci scufundate în E_5 pseudoeuclidian). Spațiul-timp V_4 determinat de cîmpul gravific static al unei mase în repaus (neutre sau electrizate, punctuale sau sferice) e de clasa 2, cel determinat de cîmpul gravific static cilindric — de clasa 3, cel determinat de cîmpul gravific static cel mai general — de clasa 5 [31].

5. Contradicția aparentă dintre geometria cvadridimensională relativistă clasică în V_4 și cea polidimensională se rezolvă [1], [2] prin distincția : *a*) geometrică dintre dimensiunile dependente și independente; *b*) algebrică — dintre dimensiunile complexe (reale sau imaginare) coordonate-durată și cele hipercomplexe (matriciale) corespunzătoare unor mărimi necomutative reprezentînd mărimi fizice de tipul celor cuantice. Spațiul real obișnuit V_3 rămîne tridimensional, durata t (corespunzătoare lungimii relativiste imaginare $x^4 = ict$) rămîne unidimensională, dar spațiul-timp V_4 riemannian curb este scufundat într-un spațiu - timp polidimensional de un număr finit (în ultimă instanță probabil infinit) de dimensiuni. Recent, N. S. Kalitzin [16] a introdus un spațiu-timp riemannian V_∞ relativist cu o infinitate de dimensiuni. Spațiul-timp polidimensional reflectă inepuizabilitatea materiei. Pentru densități mari ale materiei (interiorul particulei elementare, al nucleului sau al stelelor de masă mare), curbura spațiu-timpului V_4 și deci dimensiunile suplimentare nu mai pot fi neglijate nici măcar în prima aproximație. Interpretarea fizică a dimensiunilor suplimentare e probabil strîns legată de legea generalizată a reciprocității [1], [2], [3] (simetria legilor fizice în coordonate-durată, impulsuri-energie, cosmice și proprii, „electrice" și „magnetice").

h. *Mărimi cosmice și proprii.* 1. Geometria cvadridimensională a unui V_4 spațiu-timp riemannian este caracterizată nu numai de variația în spațiu și timp a potențialelor (și cîmpurilor și curburilor) gravifice g_{ik}, Γ^i_{kl}, R^i_{klm}, ci și de variația corespunzătoare a lungimilor și duratelor (determinate de variația densității și mișcării materiei, prin intermediul celor dintîi). Teoria generală a relativității evidențiază deci trei căi de determinare (prin calcul și măsurare efectivă) a potențialelor gravifice g_{ik} : *a*) mișcarea particulelor substanței (= de masă de repaus nenulă) în cîmp gravific ; *b*) mișcarea particulelor de masă de repaus nulă (în particular mișcarea luminii) în cîmp gravific ; *c*) măsurarea directă. Pe primele două căi cîmpul gravific Γ^i_{kl} (deci și potențialele gravifice g_{ik}) rezultă din ecuațiile liniilor geodezice ale particulelor neutre. Pe ultima cale se măsoară direct dependența distanței cvadridimensionale spațio-temporale absolute (II.1) dintre două evenimente foarte apropiate, de diferențialele de coordonate $\mathrm{d}x^i$ (de fapt diferențele de coordonate Δx^i foarte mici, condiționate de structura și mișcarea materiei cît și de S.C). Atît distanța cvadridimensională absolută $\mathrm{d}s^2$ (în cazul distanțelor de gen spațial $\mathrm{d}s^2 > 0$ sau temporal $\mathrm{d}s^2 < 0$), cît și diferențele de coordonate se determină direct cu ajutorul ,,riglelor'' (mai precis cu ajutorul unor fibre flexibile corespunzătoare geometriei curbilinii) şi ,,ceasornicelor'' (de pildă un ,,ceas'' molecular sau atomic).

Abaterile importante ale mişcării gravifice a planetelor de la mişcarea rectilinie şi uniformă — în comparaţie cu variaţia în cîmpul gravific a riglelor şi ceasornicelor, foarte redusă pentru densităţile obişnuite ale materiei — sînt legate de valoarea redusă a vitezei planetelor în comparaţie cu cea enormă a vitezei luminii : lumina parcurge raza orbitei terestre anuale doar în 8 minute.

2. Fie $f = \sqrt{g_{44}}$ viteza generalizată, variabilă în timp şi spaţiu, a luminii. În cazul general al cîmpului gravific determinat de materia în mişcare, intervalul cvadridimensional absolut spaţiu-timp (II.1) are forma

$$\begin{gathered}\mathrm{d}s^2 \equiv g_{ik}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k \equiv g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta + 2g_{4\alpha}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^t + g_{44}\mathrm{d}t^2 \\ (i,k,l=1,\ldots,4\,;\ \alpha,\beta,\gamma=1,2,3).\end{gathered} \tag{II.21}$$

Alături de termenii ,,spaţiali'' $g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta$ şi termenul ,,temporal'' $g_{44}\,\mathrm{d}t^2$ apar termeni ,,spaţio-temporali'' (,,micşti'') $g_{4\alpha}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}t$. Am notat cu x^α coordonatele spaţiale ,,cosmice'', cu $t = x^4$ durata ,,cosmică''. Pentru congruenţa $l^{(4)}_{\alpha} \equiv 0$, subspaţiul tridimensional relativist real e un spaţiu riemannian V_3, de metrică

$$\mathrm{d}\sigma^2 \equiv \gamma_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta\ (\gamma_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} - g_{4\alpha}g_{4\beta}/g_{44}). \tag{II.22}$$

Notînd

$$f\,\mathrm{d}t \equiv c\,\mathrm{d}\bar{t}, \tag{II.23}$$

$\mathrm{d}\sigma$ e distanţa spaţială ,,proprie'' dintre cele două evenimente infinit apropiate, iar $\mathrm{d}\bar{t}$ diferenţiala timpului ,,propriu'' într-un punct spaţial fix (obţinută punînd în $\mathrm{d}s^2$ diferenţialele spaţiale $\mathrm{d}x^\alpha = 0$). Pentru $g_{4\alpha} \neq 0$, interpătrunderea şi unitatea contrariilor spaţiu-timp (reversibil-ireversibil) [52] se realizează, în comparaţie cu teoria restrînsă a relativităţii, pe o treaptă superioară. În cazul independenţei vitezei relativist-restrînse c a luminii în cîmp faţă de S.C. inerţiale, de sensul parcursului, diferenţa valorilor locale ale timpului corespunzătoare unor evenimente simultane desfăşurate în două puncte P, P' infinit vecine [51] este

$$Dt \equiv g_{4\alpha}\,\mathrm{d}x^\alpha\,/\,g_{44}. \tag{II.24}$$

Potenţialele gravifice g_{ik} depind în general de coordonatele spaţiale cosmice x^α şi de timpul cosmic t. În consecinţă, în teoria generală a relativităţii, nici integralele corespunzătoare distanţei spaţiale finite ,,proprii'' $\bar{l}$ şi timpului ,,propriu'' $\bar{t}$ într-un punct spaţial fix dintre două evenimente oarecare

$$\text{(a) } \bar{l} = \int \mathrm{d}\sigma, \qquad \text{(b) } \bar{t} = \frac{1}{c}\int f\,\mathrm{d}t, \tag{II.25}$$

nici integrala $\int Dt$ a timpului cosmic Dt pe un contur închis sau deschis, nici categoria ,,viteză'' dată de $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$ (de componente $v^\alpha = \mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}t$,

$v_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} v^\beta$) nu au în general o semnificație absolut univocă [51]. Spre deosebire de teoria restrînsă a relativității a lui E_4 pseudoeuclidian, în V_4 al teoriei generale a relativității, chiar într-un S.C. și etalon dat, în diferite puncte și momente situate la distanță finită, lungimile și duratele (în particular coincidența în spațiu sau în timp = simultaneitatea) se prezintă în mod diferit (cu toată existența în V_4 a unor etaloane identice în toate punctele și momentele, în opoziție de pildă cu spațiile geometriei infinitezimale pure ale lui Weyl). De asemenea, pentru $g_{4\alpha} \neq 0$ schimbarea semnului timpului ($t \rightarrow -t$) modifică valoarea (II.21) a lui ds^2; cele două sensuri $\pm t$ ale timpului nu sînt deci echivalente.

3. În cazul cîmpului gravific staționar (corespunzător unei densități și viteze staționare = constante în timp ale materiei în fiecare punct spațial) — cazul cîmpului gravific generat de o masă în rotație uniformă — potențialele gravifice în V_4 sînt independente de timp ($\partial_t g_{ik} \equiv 0$). Distanța spațială proprie $d\sigma$ sau l' dată de (II.23), (II.25a) e atunci independentă de timp, iar durata proprie într-un punct spațial fix dată de (II.23) se scrie sub forma finită $\bar{t} = f\, t/c$. Sincronizarea ceasornicelor de-a lungul unui contur închis e atunci (conform lui (II.24)) posibilă pentru $g_{4\alpha} = \partial_\alpha F$ ($g_{4\alpha}$ gradient) ; integrala $\int Dt$ în V_4 e atunci nulă de-a lungul conturului închis.

4. În cazul cîmpului gravific static, caz particular al celui staționar, corespunzător materiei în repaus spațial de densitate constantă în timp, și oarecare : *a*) potențialele gravifice sînt independente de timp ($\partial_4 g_{ik} \equiv 0$) și *b*) potențialele gravifice „spațio-temporale” se anulează ($g_{4\alpha} \equiv 0$). Intervalul cvadridimensional absolut se descompune atunci riguros în pătratul $d\sigma^2$ al distanței spațiale proprii și pătratul $f^2 dt^2$ al distanței temporale proprii

$$ds^2 \equiv d\sigma^2 - f^2\, dt^2 \equiv d\sigma^2 - c^2\, d\bar{t}^2. \tag{II.26}$$

Tensorul metric al lui V_3 real se reduce conform lui (II.22) la $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$.

Avem atunci în formula (II.24), $Dt \equiv 0$. În cîmpul gravific static sincronizarea ceasornicelor e deci posibilă în toate punctele spațiului, iar ds^2 e independent de sensul timpului, deci invariant față de transformarea $t \rightarrow -t$.

5. Fie, în cazul cîmpului gravific pur, l' coordonata (lungimea) proprie generalizată, considerată în direcția momentană și locală a mișcării particulei, t' durata proprie generalizată (într-un punct spațial în general variabil, spre deosebire de $\bar{t}$ din formula (II.23)). Metrica relativist generală statică (II.26) se scrie :

$$ds^2 \equiv d\sigma^2 - f^2 dt^2 = dl'^2 - c^2 dt'^2. \tag{II.26$'$}$$

Punem

$$x^5 \equiv ct', \quad x^6 \equiv i\, l' \tag{II.27}$$

Dată fiind absența în V_4 a cîmpului mezonic vectorial, în formulele de la pag. 304 avem

$$\lambda_i^\pm \equiv 0, \;\; \lambda_5^+ \equiv \lambda_6^- \equiv 1, \;\; \lambda_5^- \equiv \lambda_6^+ \equiv 0.$$

Congruenţele ortogonale $\mathrm{d}s^{(5)}$, $\mathrm{d}s^{(6)}$ corespunzătoare coordonatelor proprii (II.27) se reduc atunci la diferenţialele de coordonate corespunzătoare:

$$\mathrm{d}s^{(\lambda)} \equiv \mathrm{d}x^{\lambda} \ (\mathrm{d}s^{(5)} \equiv \mathrm{d}x^{5} \equiv c\mathrm{d}t', \ \mathrm{d}s^{(6)} \equiv \mathrm{d}x^{6} \equiv i\mathrm{d}l'). \qquad \text{(II.28)}$$

Metrica pur gravifică statică (II.26) sau (II.26′) ia forma conului izotrop hexadimensional:

$$\mathrm{d}\tau^2 \equiv \Sigma(\mathrm{d}s^{(a)})^2 = 0 \ \ (\mathrm{d}\sigma^2 - f^2\mathrm{d}t^2 + c^2\mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}l'^2 = 0), \quad (a = 1, \ldots, 6) \qquad \text{(II.29)}$$

invariantă faţă de transformări conforme. Teoria relativist-generală cvadridimensională clasică a cîmpului pur gravific static de metrică (II.26) sau (II.26′) e echivalentă unei teorii hexadimensionale conforme de metrica izotropă (II.29) simetrică în coordonatele x^a (spaţiale şi temporale, cosmice şi proprii) [1] [3] [52]. În cazul relativist-restrîns ($g_{ik} \equiv \delta_{ik}$, deci $\mathrm{d}s^{(a)} \equiv \mathrm{d}x^a$) metrica (II.29) ia forma

$$\mathrm{d}\tau^2 \equiv \Sigma(\mathrm{d}x^a)^2 \equiv 0 \ \ (\Sigma(\mathrm{d}x^\alpha)^2 - c^2\mathrm{d}t^2 + c^2\mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}l'^2 = 0). \qquad \text{(II.29′)}$$

Pentru $\mathrm{d}\tau^2 \neq 0$, rezultă o teorie conformă generalizată, ireductibilă la teoria generală a relativităţii în V_4 sau la teoria restrînsă în E_4.

B. COVARIANŢA GENERALĂ ŞI PRINCIPIUL RELATIVITĂŢII

a. *Enunţul covarianţei generale şi a principiului relativităţii.* 1. Covarianţa generală (de obicei formulată ca „principiu al relativităţii generale") se află la baza denumirii uzuale a teoriei înseşi. Sînt necesare următoarele distincţii:

a) Prin definiţie, covarianţa conformă în spaţiul-timp conform riemannian C_n, a legilor fizice revine la independenţa lor de S. R. (sistemul de referinţă), deci independenţa lor de S.C. (indicînd poziţia) — covarianţa de coordonate; şi de etalon (=unitatea de măsură, indicînd mărimea)— covarianţa de etalon. Covarianţa conformă revine deci la independenţa legilor fizice faţă de transformările generale de coordonate şi transformările conforme propriu-zise:

$$\bar{g}_{ik} = \rho g_{ik}, \qquad \text{(II.30)}$$

ρ fiind o funcţie oarecare a coordonatelor. Grupul general $\bar{G}$ de transformări conforme totalizează transformările ale S.C. şi transformările de etalon (II.30); ele constituie subgrupuri G, G' ale lui $\bar{G}$. Prin definiţie, în V_n riemannian, factorul etalon e constant (normat = 1), covarianţa se reduce atunci la cea de coordonate.

b) Covarianţa generală de coordonate (ca şi cea de etalon (II.30)) poate fi formulată sub două forme echivalente:

1° Într-un S.C. (sau etalon) dat, aceeaşi formă matematică generală a legilor fizice e valabilă pentru toate mişcările (în general „accelerate" şi „curbilinii") respectiv pentru toate mărimile (în general variabile) ale corpurilor.

2° Mișcarea (mărimea) unui corp fiind date, forma matematică generală a legilor fizice e independentă de S.C. (sau etalon); toate S.C. (etaloane) sînt atunci echivalente în raport cu legile fizice : legile fizice sînt ,,covariante'' față de transformările arbitrare de coordonate (sau etalon).

c) Din punct de vedere analitic, covarianța (de coordonate sau de etalon) e dublă : covarianța legilor fizice :

(I) față de transformările de coordonate olonome (în V_n riemannian sau mai general în C_n conform riemannian) și

(II) față de transformările de congruențe ortogonale (coordonate neolonome) în varietățile locale E_n pseudoeuclidian sau mai general H_n conform euclidian (grupul lui G. Vrănceanu [44] v. și [1], [3]).

Cele două grupuri de transformări (I) și (II) sînt independente.

d) Covarianța generală a legilor fizice e mai largă decît covarianța ecuațiilor fizicii (covarianța în sens obișnuit). Astfel, în teoria cuantică relativist restrînsă a interacțiunilor tari se renunță adesea la ecuațiile de cîmp, înlocuite de pildă prin reprezentări ireductibile ale grupului Lorentz în spațiul Hilbert al sistemului, supuse covarianței Lorentz.

e) Deosebim covarianță și invarianță (caz particular al celei dintîi, valabil pentru scalari oarecari și pentru tensorii particulari δ_{ik} și 0). Spre deosebire de V_n riemannian cu tensorul fundamental g_{ik} *covariant* (variabil), în E_n euclidian sau pseudoeuclidian, tensorul fundamental δ_{ik} e chiar invariant față de transformările liniare.

Covarianța generală (față de S.C. și etaloane oarecare) reflectă — ca și ,,covarianță restrînsă'' față de S.C. inerțiale ale teoriei restrînse a relativității, dar pe scara superioară — primatul absolutului și nicidecum cel al relativului : covarianța legilor (respectiv a ecuațiilor) fizicii reflectă nu numai caracterul lor obiectiv, ci și într-un anumit grad absolut, limitat de domeniul valabilității lor și de subordonarea lor față de alte legi mai generale (= mai absolute) ; în mod secundar, covarianța generală reflectă deci totodată caracterul într-un anumit grad relativ al fiecărei legi fizice în parte (cu excepția celor mai generale).

2. Legea fizică se exprimă (în condiții foarte largi) prin ecuații. Dar *fenomenul*, subordonat legii (în particular ca soluție a ecuațiilor), este determinat în structura sa concretă nu numai de lege (ecuații), ci și de condițiile la limită (de frontieră) și de condițiile inițiale (L. Mandelstam, V. A. Fok [49]).

Determinarea univocă a soluțiilor ecuațiilor cere deci completarea condițiilor locale prin cele globale [51]. *Fenomenul* (soluția) depinde de condițiile inițiale și de frontieră prin intermediul unor ,,funcții de structură și evoluție'' φ_z [51]; ele reflectă atît starea obiectului cît și relațiile sale — interacțiunea (element dinamic) și mișcarea (element cinematic) — în particular pozițiile (coordonatele) și vitezele (impulsurile) inițiale. Dependența fenomenului de condițiile inițiale și de limită și deci de funcțiile φ_z nu are caracter general covariant, fiind dimpotrivă în general dependentă de S.C. și etalon. Fenomenele fizice subordonate legilor sînt deci în esență într-o anumită măsură relative : relativitatea poziției spațio-temporale (mișcării) — dependență de S.C. — și relativitatea mărimii spațio-temporale — dependență de etalon.

Ca dezvăluire a legii şi ca proces real al materiei, fenomenul conține totodată într-o anumită măsură secundară caractere absolute, independente de S.C. şi de etalon (vezi caracterele absolute şi relative ale mişcării şi ale lungimii şi duratei în teoria generală a relativității — pag. 321). În cazuri întinse, există chiar ,,covarianța soluțiilor'' (fenomenelor) față de *anumite* clase de S.R. (S.C. și etaloane) — dependența ,,parțial-covariantă'' a fenomenului de condițiile inițiale și de limită. Ea revine la independența *formei* matematice a funcțiilor φ_z de S.C. și etaloanele din clasa respectivă (,,S.C. egal îndreptățite'' în sensul lui V. Fok [51]; ,,etaloane egal îndreptățite''). Fenomenele (soluțiile) respective sînt ,,*analoge*'' în diverse S.C. (și etaloane) *de clasa dată*. În aceste cazuri însă, valorile efective (numerice) ale funcțiilor φ_z și deci ale soluțiilor corespunzătoare fenomenului de interconexiune a două corpuri depind de viteza lor relativă și deci de S.C. (chiar în cazul reducerii interconexiunii la mișcarea relativă uniformă — fără interacțiune dinamică = fizică efectivă — și al stării identice a corpurilor respective).

În particular, *identitatea* fenomenelor (soluțiilor) supuse aceleeași legi (ecuații) implică condiții inițiale și de frontieră identice — cazul sistemelor de stare identică și de mișcare (viteză) identică față de un S.C. dat (în particular al sistemelor izolate = închise = fără interacțiune). Chiar în teoria restrînsă a relativității, doar fenomenele de interacțiune sau mișcare relativă dintre sistemele de stare identică și viteze identice față de S.C. dat cît și fenomenele din *interiorul* unor sisteme inerțiale de stare identică sînt identice (în particular independente de viteză).

3. După cum subliniaseră într-un anumit sens Kretschmann (1917), H. Weyl (1918) și W. Pauli (1921) și după cum au arătat în mod general V. A. Fok și A. D. Alexandrov, postulatul covarianței generale ca atare nu reflectă conținutul fizic al legilor naturii, ci anumite proprietăți ale formei lor matematice. Într-adevăr, din punct de vedere *logic*, covarianța matematică — generală pentru legi (ecuații), parțială pentru anumite fenomene (soluții) — e un postulat matematic geometric (cinematic) (postulat logic în sensul lui V. Fok [49]). Dimpotrivă, ,,principiul relativității'', valabilitatea *fizică* a covarianței generale — valabilitatea acelorași legi fizice (ecuații) pentru toate mișcările și mărimile *reale* — ca și cea a covarianței parțiale pentru fenomene (soluții) constituie un postulat fizic (dinamic). Covarianța generală de coordonate capătă un conținut fizic (exprimat sub forma ,,principiului general al relativității'') abia pe baza primelor două axiome einsteiniene ale teoriei generale a relativității: *a*) identificarea metricii g_{ik} cu potențialele gravifice (consecința egalității dintre masa inertă și masa grea); *b*) determinarea potențialelor gravifice g_{ik} nu *apriori*, ci de către structura și mișcarea materiei, prin tensorul energie-impuls T_{ik} din ecuațiile gravifice (în axiomatizarea noastră: axiomele $d_{1,2}$ sau $d'_{1,2,3}$). Invers, după cum a subliniat Einstein, covarianța teoriei fizice față de un anumit grup de transformări de coordonate (postulat matematic) delimitează într-o anumită măsură forma posibilă a ecuațiilor cîmpurilor fizice (numărul funcțiilor necunoscute presupus dat).

Din punct de vedere logic, unitatea dintre ,,principiul relativității generale'' și ,,covarianța generală'' corespunde deci unității dintre conținutul fizic al legilor și forma lor matematică.

Din punct de vedere *gnoseologic*, principiul relativității implică deducții teoretice și verificări experimentale (directe și indirecte). Altfel spus : din punct de vedere pur matematic (geometric, cinematic), toate S.C. în mișcare oarecare (,,accelerată'', în particular ,,curbilinie'') — nu doar cele inerțiale (în translație uniformă) — sînt echivalente; analog toate etaloanele. Echivalența fizică (dinamică) a tuturor S.C. (etaloane) însă nu poate fi justificată *apriori* ci doar prin generalizări succesive și prin verificarea consecințelor sale.

Din punct de vedere *ontologic* denumirea ,,principiu al relativității'' (generale sau restrînse, de coordonate sau conformă) nu reflectă deci esența teoriei : principiul relativității generale și covarianța generală reflectă, dimpotrivă, în mod primar caracterul nerelativ, într-un anumit grad absolut, al legilor dezvăluite prin caracterul într-un anumit grad relativ al fenomenelor. Ea reflectă deci totodată în mod secundar caracterul într-un anumit grad relativ al legilor și caracterul într-un anumit grad absolut al fenomenelor (la unele concluzii analoge ajunge și A. D. Alexandrov [55]). Absolutul și relativul constituie o unitate de contrarii pe baza primatului absolutului, dezvăluit însă doar prin relativ. Deosebirea lor însăși e relativă, ele constituind o infinitate de trepte, fiecare absolut fiind relativ față de un absolut de ordin superior, iar fiecare relativ e absolut față de un relativ de ordin inferior [52]. Considerații analoge sînt valabile pentru esență (sau lege) și fenomen.

4. În toate interpretările clasice, covarianța generală se referă la ecuații (ca formă matematică a legii). În ceea ce privește principiul relativității : în interpretarea einsteiniană, principiul relativității (ca și covarianța generală) se referă la legi (ecuații), în interpretarea lui Fok, la ,,fenomene analoge'' (independența formei funcțiilor de o anumită clasă de S.C.) ; în anumite interpretări uzuale, doar la fenomene *identice* în anumite S.C. (de pildă cele inerțiale), ceea ce constituie în realitate doar un caz particular (v. punctul 2). Dimpotrivă, conform celor de mai sus, covarianța ca și principiul relativității, deși de sens diferit, se aplică la aceeași sferă de obiecte : în caz general, ele se referă la legi — covarianța legilor (ecuațiilor) față de toate S.C. și etaloane; în întinse cazuri particulare ele se referă și la fenomene — covarianța fenomenelor (soluțiilor) față de anumite S.C. și etaloane.

b. *Geometria riemanniană ca bază a covarianței generale.* 1. Conform rezultatelor expuse mai înainte, covarianța generală a legilor (ecuațiilor) și ,,principiul general al relativității'' reflectă proprietățile Π' ale spațiului-timp riemannian V_n sau conform riemannian C_n *oarecare* (în particular V_4 sau C_4) globale și absolute. Covarianța fenomenelor (soluțiilor) față de anumite clase de S.C. (etaloane) și principiul corespunzător al relativității implică dimpotrivă existența unor proprietăți Π locale (în V_4 riemannian), globale (spațiul-timp de curbură constantă, în particular pseudoeuclidian E_4) sau globale în infinitul spațio-temporal sau în infinitul energie-impuls.

Geometria riemanniană constituie deci baza ,,covarianţei generale" şi a ,,relativităţii generale", iar geometria spaţiilor conform euclidiene (în particular de curbură constantă, în speţă cea pseudoeuclidiană) — baza covarianţei parţiale şi a ,,relativităţii parţiale".

Coordonatele sînt numere oarecare aflate în corespondenţă oarecare (doar biunivocă şi continuă) cu evenimentele (punctele) varietăţii riemanniene spaţiu-timp V_4. Aplicarea experimentală a covarianţei generale de coordonate în V_4 spaţiu-timp revine la următorul raţionament einsteinian: toate măsurătorile fizice revin la coincidenţe spaţio-temporale; coincidenţa spaţio-temporală a două evenimente în V_4 este însă absolută: dacă e valabilă într-un S.C., ea este valabilă în orice S.C.

2. Nici covarianţa legilor fizice faţă de S.C. ,,accelerate" (= implicînd transformări neliniare în variabila *temporală*), nici covarianţa lor faţă de S.C. *spaţiale* oarecare, luate separat, nu epuizează covarianţa generală [45].

Într-adevăr, pe de o parte în cazul mişcării ,,accelerate" şi ,,curbilinii" deci în cazul S.C. neinerţiale, nici geometria spaţială euclidiană clasică şi nici cea spaţio-temporală pseudoeuclidiană relativist-restrînsă nu mai sînt valabile. În cazul rotaţiei unui disc circular, elementele de arc (situate în direcţia tangenţială a mişcării locale şi momentane), deci şi circumferinţa ca atare — măsurate cu etaloane fixe — suferă contracţia Lorentz. Dimpotrivă, în aceleaşi etaloane, raza discului, perpendiculară mişcării locale şi momentane, rămîne invariantă. Relaţia euclidiană $p = 2\pi r$ dintre perimetrul p şi raza r — presupusă valabilă pentru discul circular în repaus — nu mai este valabilă în cazul rotaţiei, fapt care reflectă inexistenţa corpurilor rigide (Ehrenfest). Trebuie deci să admitem S.C. absolut oarecare.

Pe de altă parte, chiar dacă în anumite S.C. o transformare de coordonate e pur spaţială (sau temporală), în alte S.C. ea este spaţio-temporală. În consecinţă, în cazul valabilităţii aceloraşi legi fizice în toate S.C. pur *spaţiale* (sau pur *temporale*), spaţiul-timp V_4 ca formă de existenţă a materiei implică valabilitatea aceloraşi legi în toate S.C. *spaţio-temporale*, deci valabilitatea aceloraşi legi pentru mişcări oarecare.

Covarianţa generală a legilor fizice în spaţiu-timp riemannian V_4 revine din punct de vedere matematic la înglobarea în aceste legi a celor zece potenţiale gravifice g_{ik} (identice cu cele zece componente ale tensorului metric fundamental) din expresia intervalului cvadridimensional absolut ds^2. Caracterul într-un anumit grad absolut al legilor fizice rezultă deci din caracterul absolut al distanţei cvadridimensionale ds^2. Mai precis, într-un spaţiu riemannian V_n (în particular V_4 spaţiu-timp), toţi tensorii sînt funcţii algebrice sau diferenţiale ale tensorului metric fundamental g_{ik} sau $g_k^{(i)}$ (presupus de determinant $g \neq 0$); el constituie deci baza unui sistem complet de invarianţi.

Trecerea de la teoria relativist-restrînsă la cea relativist generală implică deci trei etape.

a) Fie un S.C. C' faţă de care într-un domeniu spaţio-temporal *finit* (nenul) D, distanţa absolută ds^2 ia forma sumei a patru pătrate (II.14); în acest S.C., componentele tensorului fundamental iau deci în

D valorile diagonale constante δ_{ik} ; legile fizice iau atunci în D forma relativist-restrînsă. Într-un S.C. oarecare, distanța absolută ds^2 și deci toate legile fizice iau atunci în D o formă general covariantă, cu δ oarecare.

b) În cazul independenței legilor fizice date de derivatele de ordinul doi ale mărimilor g_{ik}, rezultatul se extinde și la cazul mai general al anulării cîmpului gravific doar în domenii infinitezimale ; este valabilă atunci geometria riemanniană spațio-temporală.

c) În sfîrșit, legile fizice dependente și de derivatele de ordinul doi sau de ordin superior ale metricii g_{ik} nu prezintă nici un analogon în teoria relativist restrînsă și trebuie formulate direct sub forma lor riemanniană [45].

Pe baza identității dintre metrica g_{ik} și potențialele gravifice, *forma* nouă (riemanniană) a legilor fizice reflectă și un *conținut* nou : influența cîmpului gravific (deci a densității și a mișcării oarecare a materiei) asupra fenomenelor și legilor fizice.

c. *Elementele absolute și relative ale spațiului-timpului* (*mișcării*). 1. Problema caracterelor absolute și relative ale mișcării și cea a echivalenței sau neechivalenței diverselor S.C. sînt indisolubil legate ; soluția lor rezultă din covarianța generală (și din principiul relativității). În opoziție cu relativismul filozofic, proprietățile relative ale spațiu-timpului (deci ale mișcării) sînt condiționate de cele absolute ; proprietățile absolute ale spațiu-timpului se dezvăluie însă doar prin cele relative și sînt condiționate la rîndul lor de structura și mișcarea materiei, fiind în acest sens relative în raport cu acestea din urmă.

Contradicția dintre echivalența și neechivalența diverselor S.C. (sau etaloane) se rezolvă prin distincția :

a) dintre echivalența esențială corespunzătoare legilor și echivalența sau neechivalența corespunzătoare fenomenelor ;

b) dintre echivalența cinematică (geometrică) și echivalența sau neechivalența dinamică (fizică) (baza distincției analoge relativă la proprietățile Π și Π′ ale spațiu-timpului), corespunzătoare categoriilor formă și conținut — categorii ale esenței ;

c) dintre echivalența S.C. oarecare (atașate corpurilor de referință individuale oarecare) și S.C. preferențiale atașate colectivelor de corpuri (mai precis centrelor de masă ale acestora), distincție bazată pe categoriile individ și colectiv, categorii ale fenomenului. Distingem, de asemenea, în analogie, cu proprietățile Π și Π′, echivalența și neechivalența :

α) absolută și relativă ;

β) globală și locală a diverselor S.C. (sau etaloane).

2. Atît în teoria generală cît și în teoria restrînsă a relativității, în raport cu *fenomenele* concrete de interconexiune (fie mișcare relativă, fie interacțiune efectivă dintre corpuri), în cazul general, diversele S.C. sînt neechivalente din punct de vedere fizic (dinamic) și echivalente doar din punct de vedere geometric (cinematic). Pentru fenomene, echivalența dinamică (fizică) a unor S.C. e valabilă doar în cazurile analizate mai înainte.

Prin intermediul fenomenelor concrete relative se dezvăluie însă echivalența geometrică (cinematică) și totodată fizică (dinamică) a tuturor S.C., pe planul *legilor* (relații esențiale, și ca atare generale și necesare într-un anumit grad). Rezultă astfel existența și unitatea dialectică a elementelor absolute și relative ale spațiu-timpului (ale mișcării) pe baza unității dialectice dintre esență (respectiv lege) și fenomen.

3. Pe planul esenței, deci al legii (unitatea conținutului și a formei), contradicția dintre absolut și relativ de diverse grade corespunde descompunerii succesive a formelor de existență ale materiei în cuplurile: A spațiu-timp; A' mărimi cosmice și proprii; B coordonate-impulsuri; B' mărimi ,,electrice'' și ,,magnetice''.

Lungimile și duratele în V_4 spațiu-timp riemannian au un dublu caracter relativ. Potențialele gravifice g_{ik} și diferențialele de coordonate spațiale și temporale dx^i (coordonate ,,olonome'' din punct de vedere matematic, coordonate cosmice din punct de vedere fizic) sînt determinate de mișcarea și structura locală a materiei, deci într-un anumit grad independente de S.C., dar pe de altă parte dependente de S.C. Lungimile și duratele cosmice depind:

(α) de potențialul gravific g_{ik} local;

(β) de lungimile și duratele proprii (elemente absolute de ordin superior). Lungimile și duratele cosmice depind deci:

a) de S.C. (fapt valabil și în teoria restrînsă a relativității, în E_4 pseudoeuclidian);

b) de punctul și momentul considerat, deci de obiectul dat și de cîmpul gravific — în ultima instanță de structura și mișcarea locală a materiei.

Lungimile și duratele cosmice prezintă în comparație cu celelalte mărimi analizate mai jos, un grad de relativitate maxim și caractere absolute de ordin minim (,,elemente absolute de ordinul întîi'').

Congruențele ortogonale $ds^{(i)}$ (coordonate ,,neolonome'' din punct de vedere matematic, coordonate ,,proprii'' din punct de vedere fizic) constituie ,,elemente absolute de ordin superior'' (de al doilea ordin). În particular, pentru o distribuție statică a materiei și în anumite S.C. preferențiale (,,statice''), metrica ds^2 se descompune în metricele spațială și temporală (formula (II.26)). Timpul propriu

$$d\bar{t} \equiv f dt/c \equiv -i ds^{(4)}/c$$

într-un punct spațial fix și metrica spațială proprie

$$d\sigma^2 \equiv \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha \, dx^\beta \equiv \Sigma(ds^{(\alpha)})^2$$

(ca și congruențele ortogonale corespunzătoare $ds^{(\alpha)}$) sînt independente de cîmpul gravific și de transformările S.C. (În (II.26), $d\sigma$, ds sînt independente și de transformările de congruențe ortogonale $ds^{(\alpha)}$; ele depind (ca și congruențele $ds^{(i)}$) de obiectul material dat). S.C. proprii (neolonome) și cosmice (olonome) — echivalente din punct de vedere pur cantitativ, geometric — sînt deci calitativ (fizic) neechivalente. În cazul cîmpului gravific static determinat de o masă m_0 punctuală sau sferică în repaus, neutră sau încărcată, aria (și volumul) spațio-temporal constituie de asemenea elemente absolute de al doilea ordin.

În sfîrșit, există elemente absolute de al treilea ordin: valoarea absolută a oricărui tensor (cu toată relativitatea componentelor dependente de S.C.). În particular: 1°. Intervalul cvadridimensional riemannian spațiu-timp ds^2. 2°. Coincidența în spațiul-timp V_4 a două evenimente (independenţa de S.C. şi de etalon a relaţiei $x^i = y^i$ sau $x^i - y^i = 0$). În consecinţă, conform lui 2°, şi regiunile (punctele) spaţio-temporale ale traiectoriei unui mobil în V_4 (deci ,,conţinutul'' ei) ca şi lungimea ds^2 a traiectoriei (conform lui 1°) sînt absolute, cu toată relativitatea formei ei (dependentă de S.C.). 3°. Valoarea absolută ic a vitezei cosmice a oricărei particule (de masă de repaus nenulă sau nulă) — pentru $ds^2 < 0$, de componente

$$u^i \equiv dx^i/dt' \quad (u^i u_i \equiv -c^2,\ ds \equiv icdt'). \qquad (II.31)$$

Pe de altă parte, mărimea absolută c (viteza relativist restrînsă a luminii în cîmp faţă de S.C. inerţiale) este o limită a mărimii relative $f = c\bar{f}$, variabile; mărimea relativă variabilă f însă nu există decît pe baza celei absolute c (unitatea dialectică dintre relativ şi absolut), pe baza primatului absolutului. 4°. Valoarea absolută $A \equiv (A^i A_i)^{1/2}$ a acceleraţiei afine A^i.

Pe toate treptele diferenţiale ale mişcării rezultă deci existenţa alături de elementele relative — a unor elemente absolute ale mişcării (= ale spaţiu-timpului) independente de S.C., la nivelul legii (deci generalului, esenţei=unitate a categoriilor conţinut şi formă). Elementele absolute de al treilea ordin nu sînt numai covariante, dar şi invariante faţă de transformările de coordonate oarecare (constituind scalari în V_4). Conform legii generalizate a reciprocităţii [1], [2], [3], elementele absolute de ordin superior (IV, V etc) corespund cuplurilor BB' ale formelor de existenţă ale materiei (pag. 294).

4. Fiecare *fenomen* (obiect, relaţie sau proces) poate fi reprezentat din punct de vedere geometric (cinematic) în orice S.C. sau etalon. Pentru fiecare fenomen concret în parte există însă un S.C. preferenţial (V. Fok [51], M. F. Şirokov [58]); ele reflectă mai adînc proprietăţile intrinseci ale spaţiului-timpului şi deci ale materiei în regiunea considerată. Din punct de vedere cinematic, pentru un sistem material dat A, S.C. preferenţial e S.C. ,,cel mai inerţial posibil''; din punct de vedere dinamic, pentru orice sistem material A originea S.C. preferenţial e legată de centrul maselor sistemului colectiv A' de ordin superior din care face parte A etc.; există deci şiruri infinite de S.C. preferenţiale de ordin crescător (,,S.C. tot mai inerţiale''). În total, din punct de vedere matematic, în V_4 un S.C. preferenţial va fi dat de patru ecuaţii (în general necovariante); în condiţii iniţiale şi de frontieră (condiţii globale) date, aceste ecuaţii—împreună cu legile (ecuaţiile) general covariante independente —determină complet potenţialele gravifice g_{ik}. Sensul concret al altor S.C. poate fi stabilit în raport cu cel preferenţial corespunzător fenomenului dat. În raport cu *legile* însă, toate S.C. sînt echivalente.

Într-adevăr, determinarea univocă a soluţiilor ecuaţiilor gravifice einsteiniene, ca ecuaţii cu derivate parţiale, implică condiţii iniţiale şi de frontieră şi deci existenţa unor S.C.preferenţiale caracterizate de acestea.

5. Pentru un sistem material: *a*) finit, *b*) închis, *c*) scufundat în E_4 pseudoeuclidian, S.C. armonice ale lui V. Fok [51] definite de condiţia lui Donder-Lanczos.

$$\partial_k(g^{ik}\sqrt{g}) = 0 \quad \text{sau} \quad g^{kl}\,\Gamma^i_{kl} = 0 \tag{II.32}$$

şi determinate pînă la o transformare Lorentz, constituie un S.C. preferenţial, generalizare a S.C. inerţiale. Expresia $\Box\,\Psi$ fiind d'alambertianul riemannian aplicat funcţiei Ψ

$$\Box\,\Psi \equiv \partial_k(g^{ik}\sqrt{g}\;\partial_i\Psi)/\sqrt{g}, \tag{II.33}$$

$\Gamma^i \equiv g^{kl}\,\Gamma^i_{kl}$ are forma $\Gamma^i \equiv -\Box\,x^i$. S.C. armonic verifică deci ecuaţiile

$$\Box\,x^i = 0 \tag{II 32'}$$

În S.C. armonic, curburile contractate R^{ik} iau forma

$$R^{ik} \equiv -\frac{1}{2}\Box\,g^{ik} + \Gamma^{ilm}\,\Gamma^k_{lm}\,, \tag{II.34}$$

deci caracteristicile ecuaţiilor gravifice şi ale ecuaţiei lui d'Alambert

$$\Box\,\Psi = 0 \tag{II.35}$$

coincid. Dimpotrivă, pentru modelul cosmologic relativist al lui Friedmann al metagalaxiei în expansiune sau contracţie, scufundat în H_4 conform-euclidian, S.C. preferenţial este cel ,,conform-euclidian'', în care metrica ia forma (II.6). Rototranslaţiile temporale de patru parametri sînt determinate, în acest caz, de rotaţiile spaţiale (de şase parametri).

Din punct de vedere corpuscular, un S.C. inerţial este definit (global sau local) prin mişcarea ,,rectilinie şi uniformă''; într-un asemenea S.C., la distanţe infinite de un sistem material: *a*) finit, *b*) izolat şi *c*) scufundat în E_4, metrica ia forma (II.14); din punct de vedere ondulatoriu, S.C. inerţial e definit prin faptul că pentru un asemenea sistem ecuaţia de propagare a oricărei interacţiuni (ecuaţia frontului de undă (III.24) v. partea a III-a) ia forma particulară (III.24'). Dintre S.C. preferenţiale, tipurile distincte de cel armonic, conform-euclidian şi inerţial, nu au fost studiate în măsură suficientă.

6. După cum au subliniat şi V. Fok şi A. D. Alexandrov, ,,deosebirea fundamentală dintre teoria restrînsă şi generală a relativităţii constă nu în generalitatea S.C. admise, ci în teoria diferită a proprietăţilor varietăţii absolute cvadridimensionale spaţiu-timp'' [55]. Într-adevăr, şi în mecanica analitică clasică (în cazul ecuaţiilor lagrangiene de speţa II) şi în teoria restrînsă a relativităţii, se utilizează S.C. neinerţiale (,,accelerate'' şi ,,curbilinii'' cu g_{ik} variabil) sau oblice (cu g_{ik} const.). Fizica clasică şi relativist restrînsă iau atunci o formă general covariantă (valabilă în S.C. oarecare) sau invariantă faţă de transformări galileene respectiv transformări Lorentz (în S.C. inerţiale).

Există totuşi o serie de deosebiri profunde dintre covarianţa generală a ecuaţiilor fizicii clasice sau relativist restrînse şi relativist generale şi deci dintre S.C. corespunzătoare.

(a) Pe de o parte, după cum a subliniat şi A. D. Alexandrov, covarianţa relativistă în spaţiul-timp fizic efectiv de patru dimensiuni este distinctă de covarianţa ecuaţiilor mecanicii clasice într-un spaţiu-timp

,,funcțional'', pur figurativ [55]. Pe de altă parte, în fizica clasică și în teoria restrînsă a relativității, S.C. neinerțiale nu aduc din punct de vedere fizic nimic nou față de cele inerțiale. Ele au în fizica clasică și relativist restrînsă un caracter pur cinematic (geometric), iar cîmpurile gravifice corespunzătoare se anulează într-un S.C. inerțial în tot spațiul-timp (dată fiind curbura R^i_{klm} nulă); în caz contrar, cîmpurile gravifice corespunzătoare S.C. neinerțiale nu se pot neglija avînd un caracter efectiv; ($R^i_{klm} \neq 0$); S.C. neinerțiale nu pot fi deci folosite în teoria restrînsă a relativității din punct de vedere fizic, decît pentru accelerații mici. S.C. neinerțiale au o semnificație fizică (dinamică) generală abia într-o varietate riemanniană (deci de curbură nenulă), pe baza identificării metricii și a potențialelor gravifice, respectiv a echivalenței locale a cîmpurilor gravifice și de accelerație, deci în fond pe baza egalității dintre masa inertă și masa grea (cîmpurile gravifice corespunzătoare neanulîndu-se în nici un S.C.). Singura teorie valabilă în mod riguros în realitate nu este teoria restrînsă, ci teoria generală a relativității.

(b) În al doilea rînd, după cum au arătat de asemenea V. A. Fok [49] și A. D. Alexandrov [55], echivalența S.C. oarecare (neinerțiale) are un alt sens decît echivalența celor inerțiale: prima reflectă doar covarianța generală a legilor fizice și proprietățile Π' (neomogeneitatea etc.) ale spațiului-timp V_4, cea de-a doua covarianța legilor fizice față de S.C. inerțiale și proprietățile Π ale spațiu-timpului (omogeneitatea etc.) globale în spațiile de curbură constantă, locale sau valabile în infinitul spațial-temporal sau în infinitul energie-impuls, în V_4. ,,Atunci cînd se scrie expresia legilor fizice în coordonate oarecare, se introduc potențiale gravifice care caracterizează sistemele de coordonate respective'', spre deosebire de altele [55]. Dimpotrivă, în ecuațiile (în coordonate) ale teoriei restrînse a relativității sau în ecuațiile (în congruențe ortogonale) într-un punct *fix* al teoriei generale a relativității, toate covariante față de transformările Lorentz, ,,nu apar nici un fel de mărimi care caracterizează un S.C. față de altul'' [55]. O echivalență absolută și globală — în tot spațiul și timpul — a S.C. există doar în spațiul de curbură constantă (în particular în H_4 euclidian-conform sau E_4 pseudoeuclidian relativist-restrîns). În V_4 general (în particular în V_4) echivalența S.C. e relativă și locală.

d. *Teorema Hilbert-Noether*. Într-o teorie relativistă general-covariantă trebuie să deosebim două tipuri de legi de conservare-transformare (divergențe riemanniene legînd mărimile lagrangiene și derivatele lor) : *a*) legi de conservare-transformare ,,tari'', independente de ecuațiile cîmpului (și deci de lagrangian); ele constituie *identități* geometrice corespunzătoare covarianței generale ca atare; *b*) legi de conservare-transformare ,,slabe''; ele constituie *ecuații* rezultate din identitățile de conservare-transformare ,,tari'' și din ecuațiile cîmpului (deci din lagrangianul dat).

Mai precis, conform teoremei generale Hilbert-Noether, [32], covarianța legilor fizice față de fiecare subgrup G_p (de p parametri sau p funcții arbitrare) al grupului general G al transformărilor de coordonate x^a (sau a transformărilor (II.10) de congruențe ortogonale — grupul lui G. Vrănceanu), în varietatea riemanniană V_n sau conform riemanniană

C_n (sau în varietățile tangente local: pseudoeuclidiană E_n respectiv conform euclidiană H_n) îi corespund p identități „tari” de conservare cantitativă și transformare calitativă ale impulsurilor p_a canonic conjugate. Teorema reciprocă este de asemenea valabilă. În acest mod, covarianța generală delimitează din nou forma posibilă a ecuațiilor cîmpului. Conform teoremei Hilbert-Noether, legile de conservare-transformare constituie deci fundamentul *fizic* al covarianței generale *matematice* a legilor (= a independenței formei acestora de S.C.). Invers, covarianța generală reflectă din punct de vedere matematic legile de conservare-transformare (v. și M. A. Markov [32], D. Ivanenko și A. Sokolov [47], A. Popovici [1], [3] etc.)

În particular, în V_4 (C_4; E_4;H_4), grupului G_6 al rotațiilor (spațiale și spațio-temporale) îi corespund șase legi de conservare-transformare (3 ale momentului cinetic spațial și 3 ale mișcării centrului maselor), iar grupului G_4 al translațiilor — 4 legi de conservare-transformare ale impulsului-energiei. Grupului G_4' al dilatărilor conforme cu factor variabil (în interpretare uzuală, accelerații relativiste uniforme) și grupului G_1 al dilatării conforme constante, le corespund de asemenea $4+1$ legi de conservare-transformare fără analogie clasică (pentru interpretarea lor parțială în cazul cîmpului electro-magnetic, v. Bessel-Hagen [32]). În realitate, t', l' fiind durata și lungimea proprie, iar m', m'' masele proprii scalară și pseudoscalară (v. și pag. 315), coordonatele și impulsurile proprii corespunzătoare sînt

$$x^5 \equiv ct', \quad x^6 \equiv il'; \quad p_5 \equiv cm', \quad p_6 = -icm''; \tag{II.36}$$

pînă la anumiți factori (puteri ale lui c), timpul propriu și masa proprie scalară, coordonata proprie și masa proprie pseudoscalară sînt deci, canonic conjugate [1], [3], [20]. De asemenea, dilatările conforme variabile (accelerațiile relativiste uniforme) și pseudovectorul momentului de inerție j_i (pînă la anumiți factori, puteri ale lui c) sînt canonic conjugate [22]. Pseudovectorul j_i se comportă față de tensorul relativist $J^{ik} \equiv \mu' x^i x^k$ al densității momentului de inerție ca și cvadrivectorul relativist energie-impuls față de tensorul energie-impuls T_{ik} (în particular tensorul energie-impuls cinetic $\mu' u^i u^k$ al lui Minkowski).

Tensorul momentului cinetic relativist $K_{ab} \equiv -K_{ba}$ în V_6 (E_6) ($a,b = 1,\ldots,6$) (A. Popovici [22]) unifică deci și următorii tensori ai lui $V_4(E_4)$ ($i, k = 1,\ldots,4$; $\lambda, \mu = 5,6$): momentul cinetic relativist K_{ik}; pseudovectorul momentului relativist de inerție $K_{5i} \equiv j_i$; vectorul impuls-energie $K_{6i} \equiv -ip_i$, și masa proprie pseudoscalară $K_{56} \equiv im''$ (valoarea absolută a tensorului K_{ab} fiind

$$(\Sigma K_{ab}^2)^{1/2} \equiv \gamma m' c l' \quad (\gamma = \text{const.}). \tag{II.37}$$

Pe de altă parte, densitatea momentului cinetic $K_{abc} \equiv -K_{bac}$ în V_6 (E_6) unifică densitățile respective. Legea de conservare-transformare a densității momentului cinetic K_{abc} unifică atunci în $V_6(E_6)$ legile de conservare-transformare relativiste ale momentului cinetic, ale momentului de inerție, al energiei-impulsului și ale masei proprii pseudoscalare din $V_6(E_6)$

(A. Popovici [22]). Se realizează astfel între altele unificarea conformă 6-dimensională a celor două măsuri clasice ale inerției : masele de repaus (respectiv energie-impulsul) și pseudovectorul momentului de inerție (dependent și de distribția spațială a maselor). În total, rotațiilor lui E_6 pseudoeuclidian (sau transformărilor conforme hexasferice în H_4 conform euclidian) — subgrup al transformărilor generale de coordonate în V_4 riemannian sau al transformărilor conforme în C_4 conform riemannian — în cazul transformării infinitezimale, celor 15 componente $\omega_{ab} \equiv - \omega_{ba}$ — le corespund 15 legi de conservare-transformare ale componentelor densității momentului cinetic K_{abc}.

Conform teoremei Hilbert-Noether, în orice teorie relativistă general-covariantă în V_n sau C_n între ecuațiile de cîmp trebuie să existe n relații diferențiale (corespunzătoare translațiilor (II.17)). Într-adevăr, cele n coordonate x^a sînt arbitrare ; între cele q ecuații ale cîmpului trebuie să existe deci n relații ; doar $q - n$ ecuații de cîmp (și deci doar $q - n$ mărimi de cîmp) rămîn independente. După cum subliniază D. Hilbert, contradicția cu principiul cauzalității (mai precis cu determinismul — n.a.) este doar aparentă : infinitatea de soluții a ecuațiilor cîmpului (de ordin q) se deosebesc doar din punct de vedere matematic, fiind însă (pe planul legilor) echivalente din punct de vedere fizic, iar în cazul fenomenului concret ele se determină complet pe baza condițiilor inițiale și de frontieră.

În particular, în spațiul-timp V_4 sau C_4, între ecuațiile de cîmp trebuie să existe patru relații diferențiale (legile de conservare-transformare ale energiei-impulsului). În spațiul-timp V_6 sau C_6 între ecuațiile de cîmp trebuie să existe șase relații diferențiale : legile de conservare-transformare ale energiei, impulsurilor și celor două mase de repaus (sau încă al energiei-impulsului și ale curentului electric și magnetic = spin sau încă ale energiei-impulsului și ale sarcinilor electrică și barionică) [1], [2], [3], [8]. În teoria relativistă cvadridimensională, legea de conservare-transformare a sarcinii electrice corespunde covarianței ecuațiilor cîmpului față de transformările de gradient $\bar{\lambda}_i \equiv \lambda_i + \partial_i \varphi$ ale potențialelor electromagnetice, transformări depinzînd de scalarul arbitrar φ; în teoria hexadimensională, transformările de gradient rezultă automat din caracterul de 6-vectori al potențialului electromagnetic λ_a ($a = 1, \ldots, 6$).

EXTINDEREA NOȚIUNII DE MOMENT ȘI DE COEFICIENT DE CORELAȚIE LA VARIABILE OAREGARE

DE

O. ONICESCU și I. SĂCUIU

În această notă se extind noțiunile clasice de moment și de coeficient de corelație la cazul variabilelor aleatoare neintegrabile.

1. Fie dat un cîmp borelian de probabilitate $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ și o variabilă aleatoare reală ξ definită pe acest cîmp. Se poate întîmpla ca valoarea medie $M(\xi)$ să nu existe, adică ξ să nu fie o variabilă aleatoare integrabilă.

Să introducem atunci părțile

$$A_a = \{\omega / |\xi(\omega)| \leqslant a\}, \ a \in R^+ = [0, \infty)$$

și să observăm că $(A_a)_{a \in R^+}$ este o familie crescătoare, a cărui limită este Ω.

Evident, dacă $a < \infty$, atunci variabila aleatoare ξ este integrabilă pe mulțimea A_a, adică

$$\int_{A_a} \xi(\omega) \, \mathrm{d} P(\omega) < \infty.$$

De fapt, această expresie poate fi scrisă ca o integrală pe toată mulțimea Ω în raport cu măsura P_a, adică

$$\int_{\Omega} \xi(\omega) \, \mathrm{d} P_a(\omega),$$

unde $P_a(A) = P(A \cap A_a)$, $A \in \mathcal{K}$; această măsură ia cea mai mare valoare pe mulțimea A_a, ea fiind egală cu $P(A_a)$.

Să considerăm acum o variabilă aleatoare ξ arbitrară, despre care nu știm dacă are dispersie sau nu și să considerăm expresiile

$$M_{12}^a(\xi) = \frac{\int_{A_a} \xi(\omega) \, \mathrm{d} P(\omega)}{\left(\int_{A_a} |\xi(\omega)|^2 \, \mathrm{d} P(\omega)\right)^{\frac{1}{2}}}, \ a \in R^+. \tag{1}$$

Evident, pentru orice $a \in R^+$, $|M_{12}^a(\xi)| \leqslant 1$; este suficient să ţinem seama de proprietatea de monotonie a momentelor absolute de diverse ordine.

Să introducem notaţiile

$$\underline{M}_{12}(\xi) = \underline{\lim}_{a\to\infty} M_{12}^a(\xi), \quad \overline{M}_{12}(\xi) = \overline{\lim}_{a\to\infty} M_{12}^a(\xi);$$

dacă $\underline{M}_{12}(\xi) = \overline{M}_{12}(\xi) = M_{12}(\xi)$, atunci vom numi expresia $M_{12}(\xi)$ momentul asimptotic de ordinul (1,2) al variabilei aleatoare ξ; expresia $M_{12}(\xi)$ poate să existe chiar dacă nu există $M(\xi)$.

2. Consideraţii analoage se pot face şi pentru coeficientul de corelaţie a două variabile aleatoare ξ şi η. Putem introduce mărimea

$$r_{a,b}(\xi, \eta) = \frac{\displaystyle\int_{A_a \cap B_b} \xi(\omega)\,\eta(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega)}{\left(\displaystyle\int_{A_a} |\xi(\omega)|^2\,\mathrm{d}P(\omega)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\displaystyle\int_{B_b} |\eta(\omega)|^2\,\mathrm{d}P(\omega)\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{2}$$

unde $A_a = \{\omega / |\xi(\omega)| \leqslant a\}$, $B_b = \{\omega / |\eta(\omega)| \leqslant b\}$, $a, b \in R^+$; evident, $|r_{a,b}(\xi, \eta)| \leqslant 1$. Ca şi la punctul 1, putem introduce mărimile

$$\underline{r}(\xi, \eta) = \underline{\lim}_{a,b\to\infty} r_{a,b}(\xi, \eta), \quad \bar{r}(\xi, \eta) = \overline{\lim}_{a,b\to\infty} r_{a,b}(\xi, \eta).$$

Coeficientul asimptotic de corelaţie, dacă există, este egal cu

$$\underline{r}(\xi, \eta) = \bar{r}(\xi, \eta) = r(\xi, \eta);$$

evident, coeficientul asimptotic de corelaţie $r(\xi, \eta)$ poate să existe chiar şi pentru variabile aleatoare ξ şi η care nu admit dispersii finite. Ţinînd seama de aceste consideraţii, desigur că teoria clasică a corelaţiei poate fi refăcută din acest nou punct de vedere.

Noţiunile introduse mai sus se extind fără dificultate la variabile aleatoare complexe.

3. În cele ce urmează vom da cîteva exemple care să ilustreze teoria expusă mai sus.

a) Să considerăm cîmpul de probabilitate $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$, unde $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{K} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ iar P este măsura Lebesgue obişnuită.

Să introducem variabila aleatoare $\xi : [0, 1] \to R$ definită astfel

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 2 & \omega \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \\ 2^2 & \omega \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2^2}\right) \\ 2^3 & \omega \in \left[\dfrac{3}{2^2}, \dfrac{7}{2^3}\right) \\ \cdots\cdots\cdots & \\ 2^n & \omega \in \left[\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, \dfrac{2^n-1}{2^n}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

Atunci

$$M(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n P(\xi(\omega) = 2^n) = \infty,$$

adică nu există valoarea medie a variabilei aleatoare ξ.

Fie $a > 0$ un număr real suficient de mare şi să punem $N = [a]$. Atunci $a \to \infty$ dacă şi numai dacă $N \to \infty$. În cazul acesta, aplicînd relaţia (1), avem pentru momentul asimptotic de ordinul (1,2) al variabilei aleatoare ξ expresia:

$$M_{12}^{a}(\xi) = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} 2^n P(\xi(\omega) = 2^n)}{\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{N} 2^{2n} P(\xi(\omega) = 2^n)}} = \frac{N}{\sqrt{2}\sqrt{2^N - 1}},$$

$$M_{12}(\xi) = \lim_{N \to \infty} \frac{N}{\sqrt{2}\sqrt{2^N - 1}} = 0;$$

deci există $M_{12}(\xi)$ al variabilei aleatoare considerate.

b) Pe acelaşi cîmp de probabilitate introdus mai sus să considerăm două variabile aleatoare ξ şi η astfel încît să existe $M(\xi)$ şi $M(\eta)$ dar $M(\xi^2)$, $M(\eta^2)$ şi $M(\xi \cdot \eta)$ să nu existe.

Să luăm $\xi : [0,1] \to R$; $\eta : [0,1] \to R$ astfel:

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1.2^{\frac{1}{2}} & \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 2.2^{\frac{2}{2}} & \omega \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2^2}\right) \\ 3.2^{\frac{3}{2}} & \omega \in \left[\frac{3}{2^2}, \frac{7}{2^3}\right) \\ \cdots\cdots\cdots & \\ n.2^{\frac{n}{2}} & \omega \in \left[\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, \frac{2^n-1}{2^n}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases} \qquad \eta(\omega) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}} & \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 2^{\frac{2}{2}} & \omega \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2^2}\right) \\ 2^{\frac{3}{2}} & \omega \in \left[\frac{3}{2^2}, \frac{7}{2^3}\right) \\ \cdots\cdots\cdots & \\ 2^{\frac{n}{2}} & \omega \in \left[\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, \frac{2^n-1}{2^n}\right. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

În acest caz se vede imediat că

$$M(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n.2^{\frac{n}{2}} P(\xi(\omega) = n.2^{\frac{n}{2}}) = C^{(1)},$$

$$M(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}} P(\eta(\omega) = 2^{\frac{n}{2}}) = C^{(2)},$$

$$M\,(\xi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, 2^n P(\xi(\omega) = n.2^{\frac{n}{2}}) = \infty,$$

$$M\,(\eta^2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\, P(\eta(\omega) = 2^{\frac{n}{2}}) = \infty,$$

$$M\,(\xi.\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} n.2^n P(\xi(\omega) = n.2^{\frac{n}{2}},\ \eta(\omega) = 2^{\frac{n}{2}}) = \infty.$$

Calculăm $r_{a,b}\,(\xi, \eta)$ după relația (2) în ipoteza $a = b$.

Atunci

$$r_{a,b}(\xi, \eta) = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} n\, 2^{\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{n}{2}}\, P(\xi(\omega) = n.2^{\frac{n}{2}},\ \eta(\omega) = 2^{\frac{n}{2}})}{\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{N} n^2\, 2^n\, P(\xi(\omega) = n.2^{\frac{n}{2}}).\ \sum\limits_{n=1}^{N} 2^n\, P(\eta(\omega) = 2^{\frac{n}{2}})}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}\,\sqrt{N+1}}{2\,\sqrt{2N+1}}.$$

Coeficientul asimptotic de corelație va fi

$$r\,(\xi, \eta) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Deci există coeficientul asimptotic de corelație al variabilelor aleatoare ξ și η în sensul dat de relația (2).

c) Vom lua acum $\xi\,(\omega)$, adică variabila aleatoare definită la punctul *b*), iar η definită astfel:

$$\eta\,(\omega) = \begin{cases} 2^1 & \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 2^2 & \omega \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2^2}\right) \\ 2^3 & \omega \in \left[\frac{3}{2^2}, \frac{7}{2^3}\right) \\ \cdots\cdots\cdots & \\ 2^n & \omega \in \left[\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, \frac{2^n-1}{2^n}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

Se observă că

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{\frac{n}{2}} P\left(\xi(\omega) = n\,2^{\frac{n}{2}}\right) = C^{(1)}, \\ M(\xi^2) &= \infty, \\ M(\eta) &= \infty, \\ M(\eta^2) &= \infty, \\ M(\xi\eta) &= \infty, \end{aligned}$$

adică există valoarea medie a lui ξ dar nu există valoarea medie a variabilelor ξ^2, η, η^2 și $\xi.\eta$.

Conform relației (2) avem

$$r_{a,b}(\xi, \eta) = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} n\,2^{\frac{n}{2}}.2^n P\left(\xi(\omega) = n\,2^{\frac{n}{2}}, \eta(\omega) = 2^n\right)}{\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{N} n^2\,2^n P\left(\xi(\omega) = n\,2^{\frac{n}{2}}\right).\ \sum\limits_{n=1}^{N} 2^{2n} P\left(\eta(\omega) = 2^n\right)}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)^2}\left[N\sqrt{2^{N+1}} - (N+1)\sqrt{2^N} + 1\right]}{\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}(2^{N+1} - 2)}.$$

Prin urmare, $r(\xi, \eta) = 0$, adică, coeficientul asimptotic de corelație există și în cazul acesta.

d) Să luăm acum variabila η introdusă la punctul *c*) iar variabila ξ o definim după cum urmează:

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 5 & \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 5^2 & \omega \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2^2}\right) \\ 5^3 & \omega \in \left[\frac{3}{2^2}, \frac{7}{2^3}\right) \\ \ldots\ldots\ldots & \\ 5^n & \omega \in \left[\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, \frac{2^n-1}{2^n}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

În acest caz $M(\xi) = \infty$, $M(\eta) = \infty$, $M(\xi^2) = \infty$, $M(\eta^2) = \infty$, $M(\xi.\eta) = \infty$, deci nu există nici una din valorile medii amintite mai sus.

Există însă coeficientul asimptotic de corelație, introdus conform relației (2)

$$r_{a,b}(\xi, \eta) = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} 5^n.2^n P(\xi(\omega) = 5^n, \eta(\omega) = 2^n)}{\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{N} 5^{2n} P(\xi(\omega) = 5^n). \ \sum\limits_{n=1}^{N} 2^{2n} P(\eta(\omega) = 2^n)}} =$$

$$= \frac{\frac{5}{4}(5^N - 1}{\sqrt{\frac{25}{23}\left(\left(\frac{5^2}{2}\right)^N - 1\right) 2\,(2^N - 1)}},$$

de unde

$$r(\xi, \eta) = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{32}}.$$

Primită la redacție la 2 decembrie 1963

FUNCȚIILE SUMĂ ALE LUI ONICESCU CA ELEMENTE ALE UNUI SPAȚIU ORDONAT

DE

ROMULUS CRISTESCU

În noua teorie a probabilităților a lui O. Onicescu, cîmpul de evenimente este constituit de o σ-algebră booleană probabilizată de elemente abstracte, iar variabila aleatoare este înlocuită cu ,,funcția sumă'' (a se vedea [3], [5]). În [2] se studiază mulțimea funcțiilor sumă [1]) organizată ca spațiu Banach. Noi vom studia funcțiile sumă din punct de vedere al teoriei spațiilor liniare ordonate, organizînd mulțimea lor ca spațiu liniar complet reticulat, cu unitate (Freudenthal) precum și ca un *KB*-spațiu [2]). De aici vor decurge unele rezultate asupra funcțiilor sumă găsite pe altă cale în [5], precum și alte rezultate.

În ultima parte a lucrării ne vom referi la funcții sumă vectoriale. Noțiunea de funcție sumă a fost generalizată pentru valori într-un spațiu Banach în [4], iar pentru valori într-un spațiu local convex în [6]. Noi vom extinde noțiunea de funcție sumă pentru valori într-un spațiu liniar ordonat.

1. FUNCȚII SUMĂ

Fie $\mathcal{A}$ o σ-algebră booleană, $\mathbf{0}$ cel mai mic element iar $\mathbf{u}$ cel mai mare element.

Complementul unui element $a \in \mathcal{A}$ va fi notat prin a^*. Două elemente $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ se zic disjuncte dacă $a_1 \wedge a_2 = \mathbf{0}$.

---

[1]) În [2] se utilizează termenul de P — funcție sumă.

[2]) Cu terminologia din [1].

Presupunem că pe $\mathcal{A}$ este definită o probabilitate P, adică o funcţie cu valori reale avînd proprietăţile :

(i) $P(a) \geqslant 0$, $(a \in \mathcal{A})$;

(ii) $P(\mathbf{u}) = 1$;

(iii) dacă $a_n \in \mathcal{A}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ şi $a_i \wedge a_j = \mathbf{0}$ pentru $i \neq j$,

atunci

$$P\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(a_n).$$

Din definiţia lui P rezultă :

(1) dacă $a_1 \leqslant a_2$, atunci $P(a_2 \wedge a_1^*) = P(a_2) - P(a_1)$;

(2) dacă $a_1 \leqslant a_2$, atunci $P(a_1) \leqslant P(a_2)$.

(3) $P(\mathbf{0}) = 0$

(4) $0 \leqslant P(a) \leqslant 1$, oricare ar fi a ;

(5) $P(a^*) = 1 - P(a)$

(6) dacă $a_n \xrightarrow{o} a$, atunci $P(a_n) \to P(a)$

O funcţie F definită pe $\mathcal{A}$, cu valori reale, se numeşte *funcţie sumă*, dacă are proprietăţile :

(i) dacă $a_1 \wedge a_2 = \mathbf{0}$, atunci

$$F(a_1 \vee a_2) = F(a_1) + F(a_2) ;$$

(ii) $\lim\limits_{P(a) \to 0} F(a) = 0$.

O funcţie sumă are următoarele proprietăţi :

(1) dacă $P(a) = 0$, atunci $F(a) = 0$;

(2) dacă $a_n \xrightarrow{o} a$, atunci $F(a_n) \to F(a)$;

(3) dacă $a_n \in \mathcal{A}$, $(n = 1, 2 \ldots)$ şi $a_i \wedge a_j = \mathbf{0}$ pentru $i \neq j$,

atunci

$$F\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F(a_n) ;$$

(4) $F(\mathcal{A})$ este mărginită.

Într-adevăr, (1) este evidentă, (3) rezultă din condiţia (i) a funcţiei sumă şi din (2), iar (4) rezultă din (2) şi (3) (a se vedea [2]). Să stabilim (2).

Dacă $a_n \xrightarrow{o} \mathbf{0}$, atunci $P(a_n) \to 0$ şi deci $F(a_n) \to \mathbf{0}$. Fie $a_n \xrightarrow{o} a$. Atunci $a_n \wedge a^* \xrightarrow{o} \mathbf{0}$ şi $a_n^* \wedge a \xrightarrow{o} \mathbf{0}$ deci $F(a_n \wedge a^*) \to 0$ şi $F(a_n^* \wedge a) \to 0$.

Din

$$F(a) = F(a_n \wedge a) + F(a_n^* \wedge a)$$

rezultă atunci

$$F(a_n \wedge a) \to F(a)$$

şi deci

$$F(a_n) = F(a_n \wedge a) + F(a_n \wedge a^*) \to F(a)$$

ceea ce stabileşte (2).

Dacă $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ este un cîmp de probabilitate, atunci o variabilă aleatoare integrabilă pe acest cîmp determină o funcţie sumă – integrala sa nedefinită; reciproc, orice funcţie sumă este integrala nedefinită a unei variabile aleatoare.

2. SPAŢIUL $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ AL FUNCŢIILOR SUMĂ

Notăm prin $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ mulţimea tuturor funcţiilor sumă definite pe algebra $\mathcal{A}$ cu probabilitatea P. Faţă de operaţiile liniare obişnuite, $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ este un spaţiu liniar. Considerăm în acest spaţiu relaţia de ordine naturală, adică : $F \leqslant G$ dacă $F(a) \leqslant G(a)$ oricare ar fi $a \in \mathcal{A}$. Spaţiul $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ este un spaţiu liniar reticulat în care

$$F_+(a) = \sup_{a' \leqslant a} F(a'), \quad F_-(a) = -\inf_{a' \leqslant a} F(a')$$

$$|F|(a) = \sup_{a' \leqslant a} |F(a')|$$

după cum se poate verifica.

Au loc egalităţile

$$(F_1 \vee F_2)(a) = \sup_{a' \leqslant a} [F_1(a') - F_2(a')] + F_2(a), \tag{2.1}$$

$$(F_1 \wedge F_2)(a) = F_1(a) - \sup_{a' \leqslant a} [F_1(a') - F_2(a')]. \tag{2.2}$$

Să observăm că din (2.1) rezultă pentru $F_1 = F$ şi $F_2 = -F$

$$|F|(a) = 2 \sup_{a' \leqslant a} F(a') - F(a)$$

sau

$$|F|(a) = \sup_{a' \leqslant a} [F(a') - F(a \wedge a'^*)]$$

formule prin care în [2] a fost introdusă ,,funcţia sumă absolută''.

Prin metodele obişnuite ale teoriei spaţiilor liniare ordonate se arată că :

Mulţimea $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ a funcţiilor sumă este un spaţiu liniar complet reticulat, în care pentru orice mulţime majorată $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ elementul

$$F = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$$

este dat de formula 3)

$$F(a) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}(a_i) \mid a_i \underset{(i \neq j)}{\wedge} a_j = \mathbf{0} ;\ \bigvee_{i=1}^{n} a_i = a ;\ \lambda_i \in \Lambda ;\ n \in N \right\}. \qquad (2.3)$$

Menționăm că problema valorilor medii condiționate în teoria funcțiilor sumă, rezolvată de I. Cuculescu în [2], ne conduce la subspații liniare reticulate ale lui $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$, subspațiile de funcții măsurabile în raport cu anumite subalgebre ale lui $\mathcal{A}$. Nu vom insista aici asupra acestor subspații.

Vom face însă următoarea :

Observație. Să notăm cu $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ mulțimea tuturor funcțiilor reale definite pe $\mathcal{A}$, care sînt aditive și mărginite, adică mulțimea funcțiilor G avînd proprietățile :

(i) dacă $a_1 \wedge a_2 = \mathbf{0}$, atunci

$$G(a_1 \vee a_2) = G(a_1) + G(a_2);$$

(ii) $G(\mathcal{A})$ este mărginită.

Mulțimea $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ este un spațiu liniar complet reticulat.

Se poate arăta că $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ *este o componentă în spațiul* $\mathcal{G}(\mathcal{A})$.

De aici rezultă că *orice funcție aditivă și mărginită G se descompune în mod unic sub forma*

$$G(a) = F(a) + H(a)$$

unde F este o funcție sumă iar $H \perp \mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$.

3. UNELE PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR SUMĂ

În acest punct vom da cîteva proprietăți ale funcțiilor sumă, ca elemente ale spațiului liniar complet reticulat $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$.

LEMA 3.1. *Dacă $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ este o mulțime de elemente din $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$, dirijată față de relația $\leqslant$, atunci*

$$\left(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda\right)(a) = \sup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda(a). \qquad (3.1)$$

Verificarea se face folosind formula (2.3)

LEMA 3.2. *Dacă $F_n \xrightarrow{o} F$* în $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$, *atunci $F_n(a) \to F(a)$, oricare ar fi $a \in \mathcal{A}$.*

Într-adevăr, este suficient să observăm că în baza lemei precedente, lema de față are loc pentru șiruri monotone.

PROPOZIȚIA 3.1 *Dacă F_1, F_2 sînt funcții sumă pozitive și dacă există $b \in \mathcal{A}$ așa ca $F_1(b) = 0$ și $F_2(b^*) = 0$, atunci $F_1 \perp F_2$.*

Demonstrație. Ținînd seama de formula (2.2), trebuie să arătăm că

$$F_1(a) = \sup_{a' \leqslant a} [F_1(a') - F_2(a')]. \qquad (3.2)$$

---

3) Notăm prin N mulțimea numerelor naturale.

Pentru aceasta să observăm că din condițiile propoziției 3.1 rezultă

$$F_1(a) = F_1(a \wedge b^*)$$

iar

$$\sup_{a' \leqslant a \wedge b^*} [F_1(a') - F_2(a')] = \sup_{a' \leqslant a \wedge b^*} F_1(a') = F_1(a \wedge b^*).$$

Notînd cu $G(a)$ membrul drept al lui (3.2), rezultă deci

$$G(a \wedge b^*) = F_1(a \wedge b^*) = F_1(a).$$

Pe de altă parte

$$G(a \wedge b) = \sup_{a' \leqslant a \wedge b} [F_1(a') - F_2(a')] = -\inf_{a' \leqslant a \wedge b} F_2(a') = 0.$$

Rezultă

$$G(a) = G(a \wedge b^*) = F_1(a)$$

și propoziția este demonstrată.

Observație. Se poate enunța o propoziție mai generală decît propoziția 3.1 și anume:

Dacă F_1, F_2 *sînt două funcții sumă (oarecare) și dacă există* $b \in \mathcal{A}$ *astfel încît* $F_1(a') = 0$ *pentru* $a' \leqslant b$ *și* $F_2(a'') = 0$ *pentru* $a'' \leqslant b^*$, *atunci* $F_1 \perp F_2$.

PROPOZIȚIA 3.2 *Pentru orice funcție sumă* F, *există un element* $c \in \mathcal{A}$ *așa ca*

$$F_+(a) = F(a \wedge c), F_-(a) = -F(a \wedge c^*)$$

oricare ar fi $a \in \mathcal{A}$.

Demonstrație. În baza unei propoziții a lui O. Onicescu ([5], pag. 47) există $c \in \mathcal{A}$ așa ca $F(a') \geqslant 0$ pentru $a' \leqslant c$ și $F(a'') \leqslant 0$ pentru $a'' \leqslant c^*$. Avem

$$F(a) = F(a \wedge c) + F(a \wedge c^*).$$

Notînd

$$F_1(a) = F(a \wedge c), \ F_2(a) = -F(a \wedge c^*)$$

avem $o \leqslant F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ și $F = F_1 - F_2$.

Pe de altă parte, punînd $b = c^*$, avem evident $F_1(b) = F_2(b^*) = 0$.

Cu propoziția 3.1 rezultă $F_1 \perp F_2$, deci

$$F_1 = F_+ \text{ și } F_2 = F_-.$$

4. $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ CA SPAȚIU DE TIP KB

Spațiul $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ devine un spațiu Banach dacă se introduce următoarea normă [4]

$$||F|| = |F|(\mathbf{u}).$$

---

[4] Acest lucru s-a arătat și în [2], iar în cazul funcțiilor vectoriale în [3].

Această normă este compatibilă cu ordinea, adică $|F_1| \leqslant |F_2|$ implică $\|F_1\| \leqslant \|F_2\|$.

Dacă $F_n \downarrow 0$, atunci $\|F_n\| \downarrow 0$ după cum se verifică imediat.

În sfîrşit, fie $O \leqslant F_n \uparrow$ iar $\|F_n\| \leqslant \alpha$. Rezultă $F_n(a) \leqslant \alpha$ pentru orice $n \in N$ şi $a \in \mathcal{A}$. Există deci

$$F(a) = \lim_{n} F_n(a) = \sup_{n} F_n(a), \quad (a \in \mathcal{A})$$

iar F este o funcţie sumă, după cum se poate verifica. În plus $F = \bigvee_{n \in N} F_n$.

Rezultă că $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ este un KB - spaţiu.

Se poate observa de asemenea că este un spaţiu cu normă aditivă, adică $F_1, F_2 \geqslant O$ implică

$$\|F_1 + F_2\| = \|F_1\| + \|F_2\|.$$

De altfel, din faptul că este un spaţiu liniar reticulat şi totodată un spaţiu Banach cu normă aditivă iar $\|F\| = \| \, |F| \, \|$, rezultă, după cum se ştie, că $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ este un KB - spaţiu.

În particular, $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ este un spaţiu ordonat de tip numărabil, σ-regulat şi de tip mărginit.

5. $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ CA SPAŢIU CU UNITATE

Am văzut că $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ este un spaţiu liniar complet reticulat. El este şi un spaţiu cu unitate (în sensul lui Freudenthal). Ca element unitate se poate lua probabilitatea P.

Într-adevăr, în baza unei propoziţii deja citate a lui O. Onicescu, pentru orice funcţie sumă G există un element b aşa ca $G(a) \geqslant 0$ pentru $a \leqslant b$ şi $G(a) \leqslant 0$ pentru $a \leqslant b^*$. Dacă F este o funcţie sumă pozitivă (nenulă), atunci există $c \in \mathcal{A}$ aşa ca $P(c) \neq 0$ şi $F(c) > 0$. Să considerăm funcţia sumă

$$G(a) = F(a) - \alpha P(a),$$

unde $0 < \alpha < 1$, aşa ca $G(c) > 0$. Fie b aşa ca $G(a) \geqslant 0$ pentru $a \leqslant b$ şi $G(a) \leqslant 0$ pentru $a \leqslant b^*$. Să notăm $a_0 = b \wedge c$. Din $a \leqslant a_0$ rezultă atunci $a \leqslant b$ care implică $G(a) \geqslant 0$. Pe de altă parte,

$$G(c) = G(b \wedge c) + G(b^* \wedge c)$$

cu $G(b \wedge c) \geqslant 0$ şi $G(b^* \wedge c) \leqslant 0$. Deci

$$P(a_0) = P(b \wedge c) \neq 0.$$

Am găsit deci un element $a_0 \in \mathcal{A}$ aşa ca $P(a_0) \neq 0$ şi

$$F(a) \geqslant \alpha P(a) \text{ dacă } a \leqslant a_0.$$

Să notăm acum

$$E(a) = \alpha P(a \wedge a_0)$$

Atunci

$$O < E \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, P) \text{ şi } F(a), P(a) \geqslant E(a).$$

Deci pentru orice $F > 0$ avem $F \wedge P > O$. Cu alte cuvinte P este un element total în $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ şi poate fi luat ca element unitate.

Un element mărginit în raport cu unitatea aleasă este o funcţie sumă F pentru care există un număr $\lambda > 0$ aşa ca

$$|F(a)| \leqslant \lambda P(a)$$

după cum se verifică cu uşurinţă. O astfel de funcţie se va numi *funcţie sumă P-mărginită.*

Mulţimea $\mathcal{F}_m(\mathcal{A}, P)$ a funcţiilor sumă P-mărginite este un subspaţiu normal şi total în $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$.

Deoarece în $\mathcal{F}_m(\mathcal{A}, P)$ funcţia P joacă rol de unitate tare, spaţiul $\mathcal{F}_m(\mathcal{A}, P)$ devine un spaţiu reticulat Banach, punînd

$$\|F\|_m = \inf\{\lambda \mid |F(a)| \leqslant \lambda P(a)\}.$$

Avem

$$|F(a)| \leqslant \|F\|_m \cdot P(a)$$

Se verifică cu uşurinţă că

$$\|F\|_m = \sup_{a \in \mathcal{A}} \frac{|F(a)|}{P(a)}.$$

Se regăseşte astfel spaţiul notat cu $L^\infty(\mathcal{A}, P)$ în [5].

6. ELEMENTE PRINCIPALE ALE UNEI FUNCŢII SUMĂ

Fie F o funcţie sumă pozitivă. Există atunci un element $c \in \mathcal{A}$ aşa ca

(i) $F(c^*) = 0$;

(ii) dacă $a \leqslant c$ şi $P(a) > 0$, atunci $F(a) > 0$.

Elementul c va fi numit *element principal* pentru F. El nu este unic, dar un alt element c_1 este principal, dacă şi numai dacă

$$P(c \wedge c_1^*) = P(c_1 \wedge c^*) = 0\,.$$

În particular, două elemente principale c_1, c_2 au aceeaşi probabilitate, egală cu $P(c_1 \wedge c_2)$.

Existenţa elementelor principale rezultă şi dintr-o propoziţie ceva mai generală stabilită în [2].

Pentru a construi un element principal, se notează

$$\mathcal{A}_0 = \{a \mid P(a) > 0,\ F(a) = 0\}.$$

Dacă $\mathcal{A}_0 = \emptyset$ se ia $c = \mathbf{u}$. În caz contrar fie

$$\alpha = \sup P(a)$$

şi $\{a_n\}_{n \in N}$ un şir de elemente din $\mathcal{A}_0$ aşa ca

$$\alpha = \lim P(a_n).$$

Elementul

$$c = \bigwedge_{n=1}^{\infty} a_n^*$$

este un element principal pentru F.

Se poate observa că şirul $\{a_n\}_{n \in N}$ poate fi considerat monoton crescător, căci în caz contrar înlocuim a_n prin

$$a_n' = \bigvee_{i=1}^{n} a_i$$

obţinînd acelaşi element principal c.

Dacă c este principal pentru F, atunci F este nulă dacă şi numai dacă $P(c) = 0$.

PROPOZIŢIA 6.1 *Dacă c_1, c_2 sînt elemente principale respectiv pentru F_1, F_2, atunci $c = c_1 \wedge c_2$ este element principal pentru*

$$F = F_1 \wedge F_2.$$

Demonstraţie. Din $c^* = c_1^* \vee c_2^*$ rezultă

$$0 \leqslant F(c^*) = F(c_1^* \vee c_2^*) \leqslant F(c_1^*) + F(c_2^*) \leqslant F_1(c_1^*) + F_2(c_2^*) = 0$$

deci

$$F(c^*) = 0.$$

Să arătăm acum că dacă $a \leqslant c$ şi $P(a) > 0$, atunci $F(a) > 0$. Să presupunem că pentru un element $a_0 \leqslant c$ cu $P(a_0) > 0$ ar rezulta $F(a_0) = 0$. Cum

$$F(a_0) = \inf_{\substack{a' \vee a'' = a \\ a' \wedge a'' = \mathbf{0}}} [F_1(a') + F_2(a'')],$$

rezultă că există şirurile $\{a_n'\}_{n \in N}$ şi $\{a_n''\}_{n \in N}$ aşa ca $a_n' \vee a_n'' = a$, $a_n' \wedge a_n'' = \mathbf{0}$ şi

$$\lim_{n \to \infty} [F_1(a_n') + F_2(a_n'')] = 0.$$

Funcţiile sumă F_1, F_2 fiind pozitive, rezultă

$$\lim_n F_1(a_n') = \lim_n F_2(a_n'') = 0.$$

Pentru orice număr natural n există atunci un număr natural k_n aşa ca

$$F_1(a'_{k_n}) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Punînd

$$b = \overline{\lim}\, a'_{k_n}$$

rezultă $F_1(b) = 0$. Deci $P(b) = 0$, deoarece $b \leqslant c_1$, astfel că

$$\lim_n P(a'_{k_n}) = 0.$$

La fel se arată că din orice subşir $\{a'_{h_n}\}_{n\in N}$ se poate extrage un subşir $\{a'_{l_{h_n}}\}_{n\in N}$ aşa că

$$\lim_n P(a'_{l_{h_n}}) = 0.$$

Rezultă

$$\lim_n P(a'_n) = 0.$$

În mod analog se arată că

$$\lim_n P(a''_n) = 0.$$

Dar atunci $P(a_0) = 0$, contrar ipotezei.

COROLARUL 6.1. *Dacă* $0 \leqslant F_1 \leqslant F_2$, *atunci există pentru* F_1, F_2 *respectiv elementele principale* c_1, c_2 *aşa ca* $c_1 \leqslant c_2$.

Observaţii. 1) *Dacă* c_1, c_2 *sînt elemente principale respectiv pentru* F_1, F_2, *atunci* $F_1 \perp F_2$ *dacă şi numai dacă* $P(c_1 \wedge c_2) = 0$.

2) *Dacă* $F_1 \perp F_2$, *atunci există* b_1, b_2 *disjuncte aşa ca* b_1, b_2 *să fie elemente principale respectiv pentru* F_1, F_2.

Într-adevăr, dacă c_1, c_2 sînt principale respectiv pentru F_1, F_2, atunci este suficient să punem $b_1 = c_1$ şi $b_2 = c_2 \wedge c_1^*$.

7. FUNCŢII SUMĂ UNITARE ŞI FUNCŢII SUMĂ SIMPLE

Vom numi *funcţie sumă unitară* orice funcţie sumă E de forma

$$E(a) = P(a \wedge c), \tag{7.1}$$

unde c este un anumit element al lui $\mathcal{A}$.

Vom arăta că în spaţiul $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$, în care P este considerat ca element unitate, elementele unitare coincid cu funcţiile sumă unitare, de unde şi denumirea pe care am adoptat-o pentru funcţiile sumă de forma (7.1).

PROPOZIŢIA 7.1. *Un element* $E \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ *este un element unitar, dacă şi numai dacă* E *este o funcţie de forma* (*7.1*).

Demonstraţie. O funcţie sumă de forma (7.1) este un element unitar.

Într-adevăr,

$$(P - E)(a) = P(a \wedge c^*)$$

şi deci (cu propoziţia 3.1)

$$E \wedge (P - E) = O.$$

Reciproc, să arătăm că dacă

$$F \wedge (P - F) = O,$$

atunci F este o funcţie sumă de forma (7.1).

Fie c un element principal pentru F. Să considerăm funcţia sumă

$$E(a) = P(a \wedge c)$$

şi să notăm

$$F_0 = F - F \wedge E.$$

Cum F şi E sînt elemente unitare, F_0 va fi de asemenea unitar. Fie c' un element principal pentru F_0.

Cum $F_0 \leqslant F$, elementul c' va fi ales (cu corolarul 6.1) aşa încît $c' \leqslant c$. Deoarece c este element principal atît pentru F cît şi pentru E, rezultă (cu propoziţia 6.1) că c este principal şi pentru $F \wedge E$. Tot cu propoziţia 6.1 rezultă că c' este principal pentru $F_0 \wedge (F \wedge E)$. Dar $F_0 \wedge (F \wedge E) = O$, deci $P(c') = 0$. Rezultă $F_0(c') = 0$ şi cum $F_0(c'^*) = 0$ rezultă $F_0 = 0$. Deci $F = F \wedge E$.

În acelaşi mod se arată că $E = F \wedge E$ de unde rezultă $F = E$.

Observaţie. Din propoziţia 7.1 şi din observaţia 2) de la sfîrşitul punctului precedent, rezultă că *dacă* E_1, E_2 *sînt două funcţii unitare iar* $E_1 \perp E_2$, *atunci ele se pot reprezenta sub forma*

$$E_1(a) = P(a \wedge b_1), \quad E_2(a) = P(a \wedge b_2)$$

cu $b_1 \wedge b_2 = 0$.

Din propoziţia 7.1 rezultă că *un element simplu al spaţiului* $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ *este o funcţie sumă simplă, adică de forma*

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(a \wedge c_i).$$

Dacă $\Gamma = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ formează o partiţie a lui $\mathbf{u}$, spunem că S este o *valorificare* a lui Γ. În particular valorificarea obţinută cu $\alpha_i = - \lg P(c_i)$ este, după O. Onicescu, *entropia* lui Γ (a se vedea [5]). Se poate totdeauna presupune că o funcţie sumă simplă este valorificarea unei anumite partiţii a lui $\mathbf{u}$.

Fie acum F o funcţie sumă pozitivă oarecare şi să notăm cu $\mathcal{S}_F$ mulţimea tuturor funcţiilor sumă simple S aşa ca $O \leqslant S \leqslant F$. În baza unei cunoscute teoreme din teoria spaţiilor liniare ordonate, rezultă $F = \sup \mathcal{S}_F$. Deoarece $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P)$ este un spaţiu ordonat de tip numărabil iar $\mathcal{S}_F$ este dirijată, există un șir monoton crescător $\{S_n\}_{n\in N}$ de elemente din $\mathcal{S}_F$ așa ca $F = (o)\text{-}\lim S_n$, de unde rezultă (cu lema 3.2)

$$F(a) = \lim_n S_n(a).$$

Se regăsește astfel un rezultat stabilit pe altă cale în [5].

Dacă S_n este o valorificare a unei partiții Γ_n iar H_n este entropia lui Γ_n, atunci șirul $\{H_n\}_{n\in N}$ este considerat de O. Onicescu ca entropie a funcției sumă F.

8. FUNCȚII SUMĂ VECTORIALE

Fie A și P ca în punctele precedente, iar $\mathcal{X}$ un spațiu liniar complet reticulat.

O funcție F definită pe $\mathcal{A}$, cu valori în $\mathcal{X}$, va fi numită o funcție sumă, dacă are următoarele proprietăți:

(i) dacă $a_1 \wedge a_2 = \mathbf{0}$, atunci

$$F(a_1 \vee a_2) = F(a_1) + F(a_2);$$

(ii) mulțimea $F(\mathcal{A})$ este (o)-mărginită în $\mathcal{X}$;

(iii) $(o)\text{-}\lim\limits_{\eta\to 0} \{\sup\limits_{P(a)<\eta} |F(a)|\} = \mathbf{0}$.

Pentru funcțiile sumă cu valori în spațiul $\mathcal{X}$, se păstrează multe din proprietățile funcțiilor sumă reale. Astfel:

O funcție sumă cu valori în $\mathcal{X}$ este (o)-continuă, adică dacă $a_n \xrightarrow{o} a$, atunci $F(a_n) \xrightarrow{o} F(a)$.

Dacă $P(a) = 0$, atunci $F(a) = \mathbf{0}$.

Dacă $\{a_n\}_{n\in N}$ este un șir de elemente disjuncte două cîte două, atunci

$$F\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n\right) = (o)-\sum_{n=1}^{\infty} F(a_n).$$

Mulțimea $\mathcal{F}(\mathcal{A}, P; \mathcal{X})$ a funcțiilor sumă cu valori în $\mathcal{X}$, formează un spațiu liniar complet reticulat, față de operațiile liniare și ordinea naturală.

Marginea superioară a unei mulțimi majorate în acest spațiu se găsește tot cu ajutorul formulei (2.3), în care $F_\lambda \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, P; \mathcal{X})$. Pentru F_+, F_-, $|F|$ se obțin formule asemănătoare cazului funcțiilor sumă reale.

Se mențin de asemenea și alte rezultate, însă pentru unele este nevoie a impune spațiului $\mathcal{X}$ condiții suplimentare.

Fie $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un cîmp de probabilitate, iar $\mathcal{X}$ un spațiu liniar complet reticulat, care este σ-regulat. Atunci integrala nedefinită

$$F(a) = \int_a x(\omega)\, \mathrm{d}\, P(\omega), \quad (a \in \mathcal{A})$$

(unde $x(\omega)$ are valori în $\mathcal{X}$) este o funcție sumă. Reciproca nu este adevărată decît dacă se impun spațiului $\mathcal{X}$ și alte condiții.

Primită la redacție la 25 martie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. Romulus Cristescu, *Spații liniare ordonate.* Ed. Acad., R.P.R., București, 1959.
2. I. Cuculescu, *On the Chapmon — Kolmogorov relation for P — sum processes.* Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. R.P.R., **4** (**52**), 23—38 (1960).
3. O. Onicescu, *Fonctions sommes sur une b-algèbre*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. R.P.R., **3** (**51**), 77—91 (1959).
4. O. Onicescu, *Quelques théorèmes sur les vecteurs somme.* Rev. de math. pures et appl. **6**, 621—629 (1961).
5. O. Onicescu, I. Cuculescu, G. Sîmboan, G. Marinescu, R. Theodorescu, *Funcții sumă.* Ed. Acad. R.P.R., 1963.
6. Gabriel Sîmboan, *Funcții sumă.* Analele Universității din București, Seria Mat. Fiz., 1962.

REPREZENTAREA SOLUȚIILOR UNUI SISTEM CU DERIVATE AREOLARE DE ORDINUL ÎNTÎI, ÎN PLAN

DE

DAN PASCALI

Să considerăm sistemul eliptic liniar omogen, de ordinul întîi, cu $2n$ funcţii reale necunoscute

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial x} - \frac{\partial v_j}{\partial y} &= \sum_{k=1}^{n} [a_{jk}(x, y)\, u_k - b_{jk}(x, y)\, v_k], \\ \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{n} [b_{jk}(x, y)\, u_k + a_{jk}(x, y)\, v_k]. \end{aligned} \tag{1}$$

Presupunem coeficienţii a_{jk}, b_{jk} măsurabili şi mărginiţi într-un domeniu bidimensional D mărginit. Relativ la frontiera C a domeniului D vom face următoarele presupuneri :

1) Este formată dintr-un număr finit de curbe simple, rectificabile, închise $C_0, C_1, \ldots, C_m$, fără puncte comune, C_0 conţinînd în interiorul său toate celelalte curbe.

2) Tangenta la curba C_j $(j = 0,1, \ldots, m)$ în punctul $t \in C_j$ formează cu axa Ox unghiul $\theta(t)$, care satisface condiţia Hölder pe C_j.

Notînd

$$f_j(z) = u_j(x, y) + i\, v_j(x, y)$$

şi

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_j}{\partial x} + i\,\frac{\partial f_j}{\partial y}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} - \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right)\right],$$

sistemul (1) se poate scrie sub forma complexă

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} f_k, \tag{2}$$

unde

$$A_{jk} = \frac{1}{2}(a_{jk} + ib_{jk}).$$

Introducînd notația matricială

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix}, \quad A = (A_{jk})\,(j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

sistemul (2) devine

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = Af. \tag{3}$$

În cazul $n = 1$, N. Teodorescu a dat în [1] următoarea reprezentare a soluției generale a ecuației (3):

$$f(z) = \varphi(z)\, e^{-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(t)}{t-z}\, d\omega_t} \tag{4}$$

unde $\varphi(z)$ este o funcție olomorfă arbitrară în $\bar{D}$.

Mai jos vom extinde această reprezentare pentru $n > 1$.

Vom numi *matrice integrală* a sistemului (3) o matrice pătratică $F(z) = (f_{jk}(z))$ ale cărei coloane sînt n soluții liniar independente ale acestui sistem. Deoarece fiecare coloană a matricei $F(z)$ satisface sistemul (3), atunci matricea integrală satisface ecuația

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = AF. \tag{5}$$

La baza reprezentării de mai jos stă următoarea:

LEMĂ. *Dacă F și E sînt două soluții ale ecuației (5), atunci*

$$F = E \cdot \Phi, \tag{6}$$

unde Φ este o matrice (nesingulară) oarecare de funcții olomorfe.

Demonstrație. Din ecuația

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{z}} = AE,$$

în conformitate cu regula de derivare a matricei inverse, avem

$$\frac{\partial E^{-1}}{\partial \bar{z}} = -E^{-1}\frac{\partial E}{\partial \bar{z}}E^{-1} = -E^{-1}A.$$

Să formăm derivata produsului

$$\frac{\partial (E^{-1} F)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial E^{-1}}{\partial \bar{z}} F + E^{-1} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = - E^{-1} AF + E^{-1} AF = 0$$

astfel produsul $E^{-1} F$ este o matrice ale cărei elemente sînt funcţii olomorfe, de unde rezultă imediat formula (6).

Fie G discul $|z| \leqslant R$, unde R este suficient de mare, astfel ca $\bar{D} \subset G$. Prelungim funcţiile $a_{jk}(x, y)$ şi $b_{jk}(x, y)$ pînă la nişte funcţii măsurabile şi mărginite pe discul G. Să considerăm operatorul integral (complet continuu) al lui Pompeiu

$$T_G(f) = - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(t)}{t - z} \, \mathrm{d}\omega_t.$$

Proprietăţile acestui operator sînt studiate amănunţit de N. Teodorescu [1] şi I. N. Vekua [2]. Dacă $f(z)$ este măsurabilă şi mărginită, atunci funcţia $T_G(f)$ este continuă în tot planul, olomorfă în exteriorul lui G şi nulă la infinit. Pentru simplificare vom scrie

$$Pf = T_G(Af).$$

În cele ce urmează, vom folosi pentru matricile $A = (A_{jk})$ următoarea normă

$$||A|| = \max_{j,k} ||A_{jk}(z)||,$$

unde

$$||A_{jk}(z)|| = \sup_{z \in G} |A_{jk}(z)|.$$

Cu ajutorul aproximaţiilor succesive construim o soluţie $E(z)$ a ecuaţiei (5) în discul G, continuă în tot planul şi egală la infinit cu matricea unitate I, în felul următor:

$$E_0(z) = I$$
$$E_1(z) = I + P(I)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E_n(z) = I + P(E_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n} P^n(I) \qquad (P^0(I) = I)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Din calculele lui I. N. Vekua [2] (Cap. I, § 4.4) rezultă că

$$- \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\bar{t}^n}{t - z} \, \mathrm{d}\omega_t = \frac{\bar{z}^{n+1}}{n+1}$$

dacă $z \in G$. Ţinînd seama de acest fapt,

$$||P^n(I)|| \leqslant ||A||^n |T_G^n(1)| = \frac{(||A|| \, |\bar{z}|)^n}{n!} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

şi

$$||E_n|| \leqslant \mathrm{e}^{||A|| \, |\bar{z}|} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Prin urmare aproximaţiile succesive converg uniform în G către

$$E(z) = \lim_{n\to\infty} E_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P^k(I).$$

Se verifică uşor că $E(z)$ este o soluţie a ecuaţiei (5) în G, deci cu atît mai mult $\bar{D}$.

În particular, dacă coeficienţii a_{jk} şi b_{jk} respectiv A_{jk} sînt constanţi, atunci

$$E(z) = e^{A\bar{z}}.$$

Reprezentarea (6) cu matricea $E(z)$ astfel construită este analogă reprezentării (4). De aici rezultă pentru soluţiile sistemului (1) o serie de proprietăţi comune cu funcţiile analitice. Rezultate analoge se obţin pentru ecuaţii şi sisteme de ecuaţii liniare cu derivate areolare de ordin superior, care se pot reduce la ecuaţii de tipul (3).

Să considerăm acum pentru sistemul (1) problema la limită Hilbert: Să se găsească o soluţie a sistemului (1) continuă în $\bar{D}$, care pe C să satisfacă condiţia la limită:

$$\sum_{k=1}^{n} (\mu_{jk} u_k + \nu_{jk} v_k) = \gamma_j \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \tag{7}$$

unde μ_{jk}, ν_{jk}, γ_j sînt funcţii reale continue date pe C.

În cazul coeficienţilor a_{jk} şi b_{jk} constanţi, această problemă a fost considerată de N. K. Usmanov [3].

În scriere matricială, această problemă revine la găsirea unei soluţii $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ a ecuaţiei (3), care verifică pe C condiţia la limită

$$\mathrm{Re}\,[(M - iN)f] = Mu + Nv = \gamma,$$

unde

$$M = (\mu_{jk}), \quad N = (\nu_{jk}), \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Ţinînd seama de reprezentarea (6),

$$f(z) = E(z)\varphi(z) \quad \text{cu} \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n \end{pmatrix},$$

condiţia (7) se scrie

$$(M - iN)\,E\varphi + (M + iN)\,\bar{E}\,\bar{\varphi} = 2\gamma.$$

Notînd

$$(M - iN)\,E = p + iq$$

problema de mai sus se reduce la următoarea problemă Hilbert pentru sistemul de funcţii olomorfe $\varphi(z)$ pe C:

$$\mathrm{Re}\,[(p + iq)\,\varphi] = \gamma$$

care este studiată în monografia lui Musheli̧svili [4].

Primită la redacţie la 27 septembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. N. THEODORESCO, *La dérivée aréolaire*. Bucarest, 1936
2. И. Н. ВЕКУА, *Обобщенные аналитические функци*, Москва, 1959.
3. Н. К. УСМАНОВ, *К граничным задачам функции, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка эллиптического типа*. Труды ин-та физ. и матем. АН Латв. ССР, вып. II (1950), p. 59—100.
4. М. И. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Сингулярные интервальные уравнения*. Москва, 1962.

ASUPRA MIŞCĂRII FLUIDELOR ÎNTR-UN MEDIU POROS NELIMITAT CU O CAVITATE SFERICĂ1)

DE

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ

1. *Introducere.* Mişcarea staţionară într-un mediu poros nelimitat în care există cavităţi poate prezenta interes în practică, şi unele probleme simple s-au tratat relativ recent [1]. În [2] s-a enunţat problema generală şi cîteva variante simplificate ale ei relative la caracterul mişcării în cavitate. Aici se fac unele aplicaţii la mişcarea staţionară a unui fluid incompresibil într-un mediu poros omogen în care există o cavitate sferică de rază R.

Vom presupune că în mediul poros e valabilă legea lui Darcy, că în cavitate nu avem singularităţi ale mişcării, că forţele masice sînt neglijabile, şi că la mari distanţe avem un curent uniform de viteză $\vec{V}_0$, paralelă cu axa Ox, deci

$$\lim_{r\to\infty} \vec{v} = V_0\vec{i}, \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2). \tag{1}$$

Să notăm cu indicele 1 mărimile relative la mediul poros şi cu indicele 2 mărimile relative la cavitate; coeficientul de filtraţie a mediulu poros se va nota, cum se obişnuieşte în marea majoritate a lucrărilor, cu k. Conform celor spuse, în mediul poros va exista un potenţial al vitezelor, φ_1, care va fi o funcţie armonică, iar (1) se va putea transcrie

$$\lim_{r\to\infty} \operatorname{grad} \varphi_1 = V_0\vec{i}. \tag{1'}$$

2. *Problema redusă.* Rezultatul problemei reduse în sensul adoptat în [2] se poate obţine imediat din expresiile potenţialelor vitezelor în exte-

---

1) Lucrare prezentată la al doilea Colocviu de mecanica fluidelor (Bucureşti, 19—21. X. 1963).

riorul sferei $r > R$ şi în interiorul ei, cînd coeficienţii de filtraţie ai domeniilor $r > R$ şi $r < R$ sînt diferiţi. Pentru aceasta e suficient să facem $k_2 \to \infty$ în formulele (36) şi (37) din [3], şi astfel potenţialele vitezelor în D_1 şi D_2 se scriu în general

$$\varphi_1 = \varphi_0 (r) - R r^{-1} \varphi_0 (R^2 r^{-1}), \qquad r > R, \tag{2}$$

$$\varphi_2 = 2\, \varphi_0 (r) + \int_0^1 \varphi_0 (sr)\, s^{-1}\, \mathrm{d}s, \qquad r < R. \tag{3}$$

Aici $\varphi_0\ (r)$ reprezintă potenţialul mişcării în tot spaţiul, exprimat în coordonate sferice cu originea în centrul sferei, considerîndu-se că singularităţile mişcării se găsesc în D_1. În cazul nostru

$$\varphi_0\ (r) = V_0\, r \cos\ \theta, \tag{4}$$

θ fiind unghiul dintre raza vectoare şi axa Ox, şi atunci (2) şi (3) conduc la expresiile

$$\varphi_1 (r) = V_0 (r - R^3 r^{-2}) \cos\ \theta, \tag{5}$$

$$\varphi_2 (r) = 3 V_0\, r \cos\ \theta. \tag{6}$$

Să observăm că (5) şi (6) îndeplinesc condiţiile de racordare care se impun pe suprafaţa sferei. Întrucît mişcarea se face fără rezistenţă în D_2, pe sferă φ_1 este nul, iar în sferă avem un curent uniform paralel tot cu Ox, cu viteza de trei ori viteza la mari distanţe. Componentele vitezei vor fi, în coordonate polare, într-un plan meridian oarecare, pentru $M \in D_1$:

$$v_{1r} = V_0\ (1 + 2\, R^3 r^{-3}) \cos\ \theta,\ v_{1\theta} = -\ V_0\ (1 - R^2 r^{-2}) \sin\ \theta. \tag{7}$$

Relaţiile (6) şi (7) dau atunci pe sferă

$$\left.\begin{aligned} v_{1r}\ (R,\theta) &= v_{2r}\ (R,\theta) = 3 V_0 \cos\ \theta, \\ v_{1\theta}\ (R,\theta) &= 0,\ v_{2\theta}\ (R,\theta) = -\ 3 V_0 \sin \theta. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Din cele spuse mai sus decurge următorul rezultat remarcabil : într-un mediu poros nelimitat în care există o neomogeneitate sferică şi un curent uniform la mari distanţe cu viteza V_0, mărimea vitezei nu poate depăşi nicăieri valoarea $3 V_0$.

3. *A doua problemă restrînsă.* În problema restrînsă se admit ecuaţiile lui Stokes în cavitate, deci

$$\mathrm{grad}\ p_2 = \mu\, \Delta\, \vec{v}_2, \tag{9}$$

şi în plus componentele vitezei satisfac ecuaţia

$$\mathrm{div}\ \vec{v}_2 = 0. \tag{10}$$

Condiţiile de racordare ale celor două mişcări vor fi cele obişnuite folosite în teoria mişcărilor în mediile poroase. Cum aici mişcările sînt axial simetrice, acestea se vor scrie:

$$\left.\begin{aligned} p_1(R,\theta) &= p_2(R,\theta),\\ v_{1r}(R,\theta) &= v_{2r}(R,\theta); \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

de asemenea, pe suprafaţa cavităţii mai avem condiţia

$$v_{2\theta}(R,\theta) = 0. \tag{12}$$

Pentru mişcarea în D_1 vom căuta potenţialul vitezelor sub forma

$$\varphi_1(r,\theta) = V_0 r\cos\theta + \varphi_1^*(r,\theta), \tag{13}$$

unde $\varphi_1^*(r,\theta)$ reprezintă potenţialul perturbator care trebuie adăugat la potenţialul mişcării neperturbate $V_0 r\cos\theta$ pentru a obţine potenţialul mişcării în prezenţa cavităţii. Funcţia $\varphi_1^*(r,\theta)$ este o funcţie armonică, regulată peste tot în mediul poros, inclusiv punctul de la infinit, deci expresia sa generală va fi

$$\varphi_1^*(r,\theta) = \sum_0^\infty A_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta). \tag{14}$$

Din (9) şi (10) rezultă că presiunea p_2 este o funcţie armonică regulată în domeniul D_2, şi în consecinţă ea se poate scrie

$$p_2(r,\theta) = \sum_0^\infty B_n r^n P_n(\cos\theta). \tag{15}$$

Pentru a explicita condiţiile (11) şi (12) avem nevoie de expresiile componentelor vitezei în D_2. Acestea satisfac ecuaţiile

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\frac{\partial p_2}{\partial r} &= \frac{\partial^2 v_{2r}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{2r}}{\partial\theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_{2r}}{\partial r} + \frac{\operatorname{cotg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_{2r}}{\partial\theta} -\\
&\quad - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_{2\theta}}{\partial\theta} - \frac{2v_{2r}}{r^2} - \frac{2\operatorname{cotg}\theta}{r^2}v_{2\theta},\\
\frac{1}{\mu r}\frac{\partial p_2}{\partial\theta} &= \frac{\partial^2 v_{2\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{2\theta}}{\partial\theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_{2\theta}}{\partial r} + \frac{\operatorname{cotg}\theta}{r^3}\frac{\partial v_{2\theta}}{\partial\theta} +\\
&\quad + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_{2r}}{\partial\theta} - \frac{v_{2\theta}}{r^2\sin^2\theta},\\
\frac{\partial v_{2r}}{\partial r} &+ \left(\frac{\partial v_{2\theta}}{\partial\theta} + 2v_{2r} + v_{2\theta}\operatorname{cotg}\theta\right)r^{-1} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

(de exemplu [4]). Din ecuaţiile (13)—(16) se deduce că în seriile (14) şi (15) toţi coeficienţii cu indicele $n \geqslant 2$ sînt nuli. Scriind coeficientul B_1 sub forma μB şi căutînd pe v_{2r} şi $v_{2\theta}$ sub forma

$$v_{2r} = f(r)\cos\theta, \quad v_{2\theta} = g(r)\cos\theta, \tag{17}$$

din (16) se găsesc următoarele ecuaţii pentru funcţiile f şi g :

$$f'' + 2r^{-1}f' - 4r^{-2}(f+g) = B = -g'' - 2r^{-1}g' + 2r^{-2}(f+g),$$
$$f' + 2r^{-1}(f+g) = 0.$$

Rezolvîndu-le, găsim

$$f = a + Br^2/10,\ g = -a - Br^2/5,$$

unde a este o constantă. Notînd $B/10 = b$, vom avea

$$\left.\begin{aligned} v_{2r} = (a + br^2)\cos\theta,\ v_{2\theta} = -(a + 2br^2)\sin\theta,\\ p_2 = 10\,\mu\, br\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Explicitînd condiţiile (11) şi (12), vom obţine un sistem de trei ecuaţii liniare pentru A_1, a şi b. Notînd

$$K = \frac{k\mu}{\gamma R^2}, \tag{19}$$

parametru adimensional care intervine şi în problemele relative la mişcarea fluidelor vîscoase în prezenţa corpurilor poroase (de exemplu [5]), expresiile constantelor căutate vor fi

$$A_1 = \frac{10\,K - 1}{20\,K + 1} V_0 R^3,\quad a = -2\,b R^2 = \frac{6V_0}{20\,K+1}. \tag{20}$$

Potenţialul vitezelor în D_1 este deci

$$\varphi_1 = \left(1 + \frac{R^3}{r^3}\,\frac{10\,K - 1}{20\,K + 1}\right) V_0 r\cos\theta, \tag{21}$$

şi se observă că dacă fluidul este foarte vîscos, cînd facem ca $\mu \to \infty$, regăsim expresia cunoscută a potenţialului vitezelor în prezenţa unei sfere impermeabile, adică

$$\varphi_1 = V_0\left(r + \frac{R^2}{2r^2}\right)\cos\theta,$$

iar dacă $\mu \to 0$, regăsim expresia (5).

Presiunea în cavitate se scrie

$$p_2 = -\frac{30\,\mu\, V_0 r}{R^2(20\,K+1)}\cos\theta, \tag{22}$$

şi deci în cavitate presiunea se anulează pentru $\mu = 0$, ceea ce era de aşteptat, iar pentru $\mu \to \infty$:

$$p_2 = 3\,\gamma\, V_0 r\cos\theta/(2\,k).$$

Componentele vitezei în cavitate sînt în definitiv

$$v_{2r} = \frac{3V_0}{20\,K+1}\left(2 - \frac{r^2}{R^2}\right)\cos\theta,\ v_{2\theta} = -\frac{6V_0}{20\,K+1}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\sin\theta. \tag{23}$$

Cînd $K \to \infty$, v_{2r} şi $v_{2\theta} \to 0$, cu alte cuvinte mişcarea în cavitate încetează.

Dacă însă $K \to 0$, găsim

$$v_{2r} = 3\,V_0\,(2 - r^2 R^{-2}) \cos\theta,\; v_{2\theta} = -\,6\,V_0\,(1 - r^2 R^{-2}) \sin\theta, \qquad (23')$$

şi comparînd aceste expresii cu rezultatele problemei reduse, urmează că :

a) Viteza normală pe suprafaţa cavităţii este aceeaşi în ambele cazuri.

b) Componenta vitezei tangenţială la suprafaţa cavităţii este nulă în cazul problemei a doua restrînse, pe cînd în cazul problemei reduse ea nu este nulă decît pentru $\theta = 0$ sau π, adică acolo unde dreapta ce trece prin centrul cavităţii şi este paralelă cu direcţia vitezei la mari distanţe întîlneşte suprafaţa cavităţii.

c) În problema redusă direcţia vitezei în cavitate este paralelă cu direcţia vitezei la mari distanţe, pe cînd în cazul al doilea viteza face, în planul ce conţine axa Ox, un unghi θ^* egal cu :

$$\theta^* = \theta - \operatorname{arctg}\left(2\,\frac{R^2 - r^2}{2R^2 - r^2}\,\operatorname{tg}\theta\right)\cdot \qquad (24)$$

d) Viteza în cavitate este constantă şi egală cu $3V_0$ în cazul problemei reduse, pe cînd în cazul al doilea

$$V = 3V_0\,[4 - 4r^2R^{-2}\,(1 + \sin^2\theta) + r^4R^{-4}\,(1 + 3\,\sin^2\theta)]^{1/2}, \qquad (25)$$

şi deci V poate fi mai mare decît $3V_0$. În particular, în centrul cavităţii viteza va fi de şase ori mai mare decît viteza la mari distanţe în mediul poros. Rezultatul este uşor de explicat din punct de vedere fizic.

Să observăm că concluzia de la sfîrşitul paragrafului precedent este valabilă, în realitate, doar pentru mediul poros.

4. *Asupra primei probleme restrînse.* Pentru prima problemă restrînsă va trebui să rezolvăm în D_2 un sistem neliniar de ecuaţii cu derivate parţiale. În cazul mişcării staţionare, primul membru al ecuaţiei ce conţine în membrul drept pe $\partial p/\partial r$ este

$$v_r\,\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r}\cdot$$

Cum din (23) se vede că v_{2r} este comparabil cu $v_{2\theta}$, pentru a evalua ordinul de mărime a membrului scris este suficient să ne limităm la compararea lui $|v_r\,\partial v_r/\partial r|$ cu $|\partial p/\partial r|$. Folosind expresiile (22) şi (23), se găseşte uşor că raportul $|\partial p/\partial r|/|v_r\,\partial v_r/\partial r|$ este

$$\frac{3V_0 r}{5\nu}\left(2 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{\cos\theta}{20\,K + 1}\cdot$$

Cînd $r = R$, $V_0\,r\nu^{-1}$ are valoarea maximă, şi reprezintă tocmai numărul Reynolds al problemei ; or, cum mişcarea în mediul poros este foarte lentă, acelaşi caracter îl va avea şi mişcarea în cavitate, deci $V_0R\nu^{-1} = \mathcal{R}e \ll 1$. Factorul din paranteză are maximul 2, iar ultimul factor,

$|\cos\theta|\ (20\,K+1)^{-1}$, este totdeauna subunitar, afară de cazul cînd înlocuim pe μ cu zero şi cînd deci ultimul factor poate atinge şi valoarea unu. De altfel max $3\ V_0 r\ (2-r^2\ R^{-2})\ (5\,\nu)^{-1}$ este egal cu 0,653 $\mathcal{R}e$, astfel încît, pentru orice r şi θ, raportul dintre termenii neglijaţi şi termenii păstraţi este totdeauna $\ll 1$.

Studiul primei probleme restrînse în acest caz nu pare justificat, şi ne putem limita pentru fluidele newtoniene la studiul celei de-a doua probleme restrînse.

Primită la redacţie la 31 decembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. В. Н. Пилатовски, *Фильтрация жидкостей в несовершенном пласте.* Изв. Акад. Наук СССР, Отд. тех. наук. *4*, 121 (1954).
2. Şт. I. Gheorghiţă, *Asupra mişcării în medii poroase cu caverne.* Com. Acad. R. P. R. **XIII**, *9*, 9 (1963).
3. Şт. I. Gheorghiţă, *Cîteva mişcări în medii poroase neomogene.* Bul. Şt. Secţ. de ştiinţ. mat. şi fiz, **VI**, *4*, 823 (1954).
4. Н. Е. Кочин, И. А. Кибел, Н. В. Розе, *Теоретическая гидромеханика.* Том II, ед. III-е, Москва, 1948, стр. 389.
5. Şт. I. Gheorghiţă, *Asupra mişcării fluidelor incompresibile în prezenţa corpurilor poroase.* Com. Acad. R. P. R., **V**, *4*, 661 (1955)

CONSIDERAȚII ÎN LEGĂTURĂ CU FORMULAREA MATEMATICĂ A PROBLEMEI PLANE A TEORIEI ELASTICITĂȚII[1]

DE

P. P. TEODORESCU

§ 1. INTRODUCERE

1.1. Una din încercările de simplificare a problemei generale tridimensionale a teoriei elasticității este aceea de a elimina din calcul una din variabile, ajungînd la o problemă bidimensională. În felul acesta se ajunge, din punct de vedere mecanic, la o problemă plană, putînd avea două cazuri distincte : cazul unei stări de tensiune plană și cazul unei stări de deformație plană ; din punct de vedere matematic, formularea este identică. Remarcăm însă că nu este încă precis stabilită eroarea pe care o facem cînd eliminăm, în mod destul de arbitrar, una din variabile din calcul.

Studii în această direcție au întreprins A. Clebsch [5] și A. E. H. Love [7], reprezentările lor fiind reluate sub diferite forme de M. Bricas [4], L. Föppl [6] și S. P. Timoshenko și J. N. Goodier [11] ; unele rezultate în această direcție se găsesc și în [10]. D. Morgenstern [8] a arătat cum se obține riguros cazul unei stări de tensiune plană pentru o placă plană a cărei grosime tinde către zero.

În cele ce urmează vom întreprinde un studiu sistematic al stării de tensiune plană și al stării de deformație plană, admițînd că funcțiile care intervin depind de toate cele trei variabile spațiale. Ne vom situa în cazul static, pentru un corp omogen, izotrop, liniar elastic, în lipsa forțelor masice. Cazul în care forțele masice sînt diferite de zero se poate studia analog, folosind rezultatele date în [9].

---

[1] Publicată, cu același titlu, în l. franceză, în „Revue Roum. Math. pures et appl." IX, 4 (1964).

1.2. Este util să amintim ecuaţiile generale ale teoriei elasticităţii, de care vom avea nevoie în cele ce urmează.

Ecuaţiile de echilibru se scriu sub forma [2])

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=0, \tag{1}$$

unde σ_x, σ_y, σ_z, sînt tensiunile normale iar τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy} sînt tensiunile tangenţiale. Lungirile specifice ε_x, ε_y, ε_z şi lunecările specifice γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} sînt legate de componentele vectorului deplasare u,v,w prin ecuaţiile lui Cauchy

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{2'}$$

Folosim legea liniară a lui Hooke sub forma

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu\,(\sigma_y+\sigma_z)], \tag{3}$$

$$\gamma_{yz}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz}, \tag{3'}$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinală iar μ este coeficientul lui Poisson, sau sub forma

$$\sigma_x=\lambda\varepsilon_v+2G\varepsilon_x, \tag{4}$$

$$\tau_{yz}=G\gamma_{yz}, \tag{4'}$$

unde

$$\lambda=\frac{\mu E}{(1-2\mu)(1+\mu)},\quad G=\frac{E}{2(1+\mu)} \tag{5}$$

sînt constantele elastice ale lui Lamé (G este modulul de elasticitate transversală).

Într-o rezolvare în deplasări a problemei generale a teoriei elasticităţii eliminăm tensiunile şi deformaţiile specifice şi obţinem ecuaţiile lui Lamé [3])

$$\Delta u+\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x}=0. \tag{6}$$

Într-o rezolvare în tensiuni a acestei probleme eliminăm deplasările şi deformaţiile specifice şi căpătăm ecuaţiile lui Beltrami [3])

---

[2]) În acest paragraf se scrie numai prima ecuaţie, celelalte ecuaţii obţinîndu-se prin permutări circulare.

[3]) Operatorul lui Laplace se referă la variabilele spaţiale x,y,z.

$$\Delta \sigma_x + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0, \tag{7}$$

$$\Delta \tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0. \tag{7'}$$

Am introdus deformația specifică volumică

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{8}$$

și suma tensiunilor normale

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \tag{9}$$

între care există relația

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\mu}{E}\Theta. \tag{10}$$

§ 2. CAZUL UNEI STĂRI DE TENSIUNE PLANĂ

2.1. Vom numi stare de tensiune plană acea stare de tensiune pentru care avem

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \qquad (11$$

celelalte componente ale tensorului tensiune ca și componentele vectorului deplasare putînd fi funcții de variabile x,y,z.

Ținînd seama de legea lui Hooke (3), (3'), vom putea scrie

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \tag{12'}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}, \tag{12''}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \tag{12'''}$$

Din (12) rezultă că deformația specifică plană va fi dată de expresia

$$\varepsilon_p = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{1-\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{13}$$

iar relaţia (12′) ne permite să scriem

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\mu}{1-\mu}\,\varepsilon_p. \tag{14}$$

Ţinînd seama de (2′), condiţiile (12‴) ne conduc la

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{15}$$

iar ecuaţiile (6) ale lui Lamé devin

$$\begin{aligned} &\Delta u + \frac{1+\mu}{1-\mu}\,\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial x} = 0,\\ &\Delta v + \frac{1+\mu}{1-\mu}\,\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial y} = 0,\\ &\Delta w + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial z} = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

operatorul lui Laplace fiind considerat numai pentru variabilele x şi y.

Observînd că ε_p este dat de (13) şi folosind condiţiile (15) ajungem la un sistem simultan de trei ecuaţii cu derivate parţiale, fiecare avînd o singură funcţie necunoscută (valabil numai cînd u, v, w depind şi de variabila z, operatorul lui Laplace fiind tot în trei variabile)

$$\begin{aligned} &\mu\,\Delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,\\ &\mu\,\Delta v + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,\\ &\mu\,\Delta w - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Eliminînd pe u, v şi γ_{xy} între (2′), (12″) şi (15), găsim

$$w = \frac{1}{2G}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z} + F_3, \tag{18}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \tag{18′}$$

unde $\varphi = \varphi\,(x,y,z)$ şi $F_3 = F_3\,(z)$. Revenind la condiţiile (15), găsim şi

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2G}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + F_1,\\ v &= -\frac{1}{2G}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + F_2, \end{aligned} \tag{18″}$$

funcţiile $F_1 = F_1\,(x,y)$ şi $F_2 = F_2\,(x,y)$ verificînd relaţia

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0, \tag{19}$$

condiţionată de (2′) şi (12″).

Folosind ecuaţiile de echilibru (1) şi reprezentarea (18′), putem scrie

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + f_1\,(y,z), \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + f_2\,(z,x). \end{aligned} \tag{20}$$

Ecuaţiile (12) ale lui Hooke ne conduc la

$$2G\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) = f_1 - f_2, \tag{21}$$

de unde rezultă că

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + g(z), \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + g(z). \end{aligned} \tag{20′}$$

Dar în acest caz

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0, \tag{22}$$

funcţiile $F_1\,(x,y)$ şi $F_2\,(x,y)$ fiind armonic conjugate.

Ţinînd seama de (12) rezultă

$$\Delta\varphi = E\,\frac{\partial F_1}{\partial x} - (1-\mu)\,g\,(z) = E\,\frac{\partial F_2}{\partial y} - (1-\mu)\,g(z), \tag{23}$$

operatorul lui Laplace aici şi în cele ce urmează referindu-se numai la variabilele x şi y. Din (12′), prin integrare în raport cu z, se obţine

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,z) = &-\frac{E}{1+\mu}\int F_3(z)\mathrm{d}z - \frac{\mu E}{2\,(1+\mu)}\,\frac{\partial F_1}{\partial x}\,z^2 - \mu\int \mathrm{d}z\int g(z)\,\mathrm{d}z\, + \\ &+ \varphi_1\,(x,y)z + \varphi_0\,(x,y), \end{aligned} \tag{24}$$

unde, fără a pierde cu nimic generalitatea exprimării, putem lua

$$F_3\,(z) = 0. \tag{25}$$

Aplicînd operatorul $\Delta\,(x,y)$ relaţiei (24) căpătăm

$$\Delta\varphi\,(x,y,z) = \Delta\,\varphi_1(x,y)\,z + \Delta\varphi_0\,(x,y) \tag{23'}$$

şi, prin comparaţie cu (23), putem lua

$$g(z) = \frac{k}{1+\mu}\,z, \tag{26}$$

de unde

$$\Delta\varphi_1 = -\,\frac{1-\mu}{1+\mu}\,k. \tag{27}$$

Deformaţia specifică plană rezultă sub forma

$$\varepsilon_p\,(x,y,z) = -\,\frac{1+\mu}{E}\,\Delta\varphi + \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{1-\mu}{E}\,kz + \varepsilon_p'(x,y) \tag{28}$$

iar suma tensiunilor normale va deveni

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y = \frac{E}{1-\mu}\,\varepsilon_p = kz + \frac{E}{1-\mu}\,\varepsilon_p'(x,y) = kz + \Theta'(x,y), \tag{29}$$

găsind astfel semnificaţia fizică a constantei k introduse.

Din (23) şi (23′) rezultă că

$$\Delta\varphi_0 = E\,\frac{\partial F_1}{\partial x} = E\,\frac{\partial F_2}{\partial y} \tag{30}$$

iar (22) şi (28) ne conduc la

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\varepsilon_p'}{1-\mu}. \tag{31}$$

De aici se vede că ε_p şi ε'_p sînt funcţii armonice în x şi y iar $\varphi\,(x,y,z)$ şi $\varphi_0\,(x,y)$ sînt biarmonice faţă de aceleaşi variabile.

Introducem funcţia

$$F(x,y,z) = -\,\frac{\mu E}{2(1+\mu)}\,\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x}\,z^2 + \frac{k}{2(1+\mu)}\,(x^2+y^2)z + \\ + \varphi_1(x,y)z + \varphi_0(x,y) \tag{32}$$

şi, ţinînd seama de (18), (18′), (18″), (20′) şi (24), găsim starea de tensiune

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,,\quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tag{33}$$

$$\tau_{xy} = -\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}, \tag{33'}$$

dată de formule de tip Airy [1], [2], și starea de deformație

$$u = -\frac{1}{2G}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{k}{E}xz + F_1(x,y), \qquad v = -\frac{1}{2G}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{k}{E}yz + F_2(x,y), \tag{34}$$

$$w = \frac{1}{2G}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{k}{2E}(x^2 + y^2 + \mu z^2). \tag{34'}$$

Funcțiile F_1 și F_2 sînt armonic conjugate, iar funcția F este biarmonică în raport cu variabilele x și y.

Aceste rezultate au fost date de A.E.H. Love [7] pe altă cale și într-o formă diferită, nereieșind în evidență structura funcțiilor de tensiune.

2.2. Într-o rezolvare în tensiuni a problemei se poate pleca de la ecuațiile (7), (7′) ale lui Beltrami. Astfel, a treia ecuație (7) și primele două ecuații (7′) ne arată că suma tensiunilor normale este de forma (29).

După cum am arătat în [10], folosind o reprezentare de forma (33), (33′), rezultă o funcție de tensiune

$$F(x,y,z) = -\frac{\mu}{2(1+\mu)} z^2 \Delta F_0(x,y) + zF_1(x,y) + F_0(x,y), \tag{35}$$

unde F_0 este o funcție biarmonică iar F_1 este dată de ecuația

$$\Delta F_1 = k. \tag{36}$$

Funcția (35) poate fi comparată cu funcția (32) găsită anterior. Se observă că funcția de tensiune în caz tridimensional se construiește cu ajutorul unei funcții biarmonice și a unei funcții armonice în două variabile.

În cazul particular în care distribuția tensiunilor trebuie să fie simetrică în raport cu planul $z = 0$ putem lua $k = 0$ și $F_1 = 0$.

2.3. Putem reprezenta starea de deformație și sub forma dată de A. Clebsch [5], care realizează o separare între starea de deformație ce depinde de variabila z și starea de deformație corespunzătoare cazului clasic (pentru care funcțiile ce intervin sînt independente de z). Găsim astfel componentele vectorului deplasare

$$u = u' - \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{1-\mu}{2E}kx\right)z + \frac{\mu}{2(1-\mu)}\frac{\partial \varepsilon_p'}{\partial x}z^2, \qquad v = v' - \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{1-\mu}{2E}ky\right)z + \frac{\mu}{2(1-\mu)}\frac{\partial \varepsilon_p'}{\partial y}z^2, \tag{37}$$

$$w = \chi - \frac{1-\mu}{4E}k(x^2 + y^2) - \frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_p' z - \frac{\mu k}{2E}z^2, \tag{37'}$$

unde $\chi = \chi(x, y)$ este o funcție armonică. Observăm că partea depinzînd de z a funcțiilor de mai sus verifică primele două ecuații (16), deci funcțiile $u' = u'(x,y)$, $v' = v'(x,y)$ reprezintă integralele generale ale acestui sistem de două ecuații cu derivate parțiale în două variabile.

Starea de tensiune va rezulta sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x' + \left(\frac{E}{1+\mu}\,\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} + \frac{k}{2}\right) z - \frac{\mu E}{2(1-\mu^2)}\,\frac{\partial^2 \varepsilon_p'}{\partial y^2} z^2, \\ \sigma_y &= \sigma_y' + \left(\frac{E}{1+\mu}\,\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{k}{2}\right) z - \frac{\mu E}{2(1-\mu^2)}\,\frac{\partial^2 \varepsilon_p'}{\partial x^2} z^2, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}' - \frac{E}{1+\mu}\,\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y} z + \frac{\mu E}{2(1-\mu)}\,\frac{\partial^2 \varepsilon_p'}{\partial x\,\partial y} z^2, \tag{38'}$$

unde am notat cu ,,prim'' componentele tensorului tensiune, corespunzătoare cazului clasic (independente de z).

2.4. În cazul clasic [4]), componentele vectorului deplasare se pot exprima sub forma

$$\begin{aligned} u' &= \frac{3-\mu}{4(1-\mu)}\,\Phi' - \frac{1+\mu}{4(1-\mu)}\left(x\frac{\partial\Phi'}{\partial x} - y\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \frac{\partial f'}{\partial x}, \\ v' &= \frac{3-\mu}{4(1-\mu)}\,\Psi' + \frac{1+\mu}{4(1-\mu)}\left(x\frac{\partial\Psi'}{\partial x} - y\frac{\partial\Psi'}{\partial y}\right) + \frac{\partial f'}{\partial y}, \end{aligned} \tag{39}$$

funcțiile $\Phi' = \Phi'(x,y)$ și $\Psi' = \Psi'(x,y)$ verificînd ecuațiile Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi'}{\partial x} &= \frac{\partial\Psi'}{\partial y} = \varepsilon_p', \\ \frac{\partial\Phi'}{\partial y} &= -\frac{\partial\Psi'}{\partial x} = -\omega', \end{aligned} \tag{40}$$

unde ω' este dat de

$$\omega' = \frac{1-\mu}{2}\,\omega, \tag{41}$$

ω fiind rotirea :

$$\omega = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\cdot \tag{42}$$

---

[4]) Vezi, de exemplu, [6].

Deci funcțiile Φ', Ψ' și f' sînt armonice. Starea de tensiune se va putea deci exprima prin relațiile

$$\begin{aligned} \frac{1}{E}\sigma_x' &= \frac{1}{2(1-\mu)}\left[\varepsilon_p' - \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial \varepsilon_p'}{\partial x} - y\frac{\partial \varepsilon_p'}{\partial y}\right)\right] + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 f'}{\partial x^2}, \\ \frac{1}{E}\sigma_y' &= \frac{1}{2(1-\mu)}\left[\varepsilon_p' + \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial \varepsilon_p'}{\partial x} - y\frac{\partial \varepsilon_p'}{\partial y}\right)\right] + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 f'}{\partial y^2}, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\frac{1}{E}\tau_{xy}' = -\frac{1}{4(1-\mu)}\left(x\frac{\partial \varepsilon_p'}{\partial y} + y\frac{\partial \varepsilon_p'}{\partial x}\right) + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 f'}{\partial x\,\partial y}. \tag{43'}$$

Introducînd funcția de tensiune

$$\frac{1}{E}F_0(x,y) = \frac{1}{4(1-\mu)}(x\Phi' + y\Psi') - \frac{1}{1+\mu}f', \tag{44}$$

regăsim reprezentarea de tip Airy (33), (33′). Condițiile de armonicitate pentru funcțiile Φ' și Ψ' ne conduc la o condiție de biarmonicitate pentru funcția $F_0(x,y)$. În felul acesta am regăsit structura funcției de tensiune a lui Airy pentru cazul clasic, corespunzătoare unei reprezentări de tip Almansi [3].

2.5. Admițînd că funcțiile de mai sus pot depinde și de variabila z, din (37) rezultă că rotirea nu depinde și de z; ținînd seama și de (28) rezultă

$$\begin{aligned} \Phi(x,y,z) &= \Phi'(x,y) + \frac{1-\mu}{E}kxz, \\ \Psi(x,y,z) &= \Psi'(x,y) + \frac{1-\mu}{E}kyz, \end{aligned} \tag{45}$$

funcții depinzînd numai de z neputînd să apară deoarece nu ar fi verificate relațiile de condiție (15).

Starea de tensiune și starea de deformație vor fi date tot de formulele (39), (43), (43′), unde am suprimat semnul „prim''. Funcțiile Φ și Ψ sînt date de (45) iar funcția f este dată de

$$f(x,y,z) = f'(x,y) - z\chi(x,y) + \frac{\mu}{2(1-\mu)}\varepsilon_p' z^2. \tag{46}$$

Ca și la punctul precedent, putem găsi o funcție de tensiune

$$\frac{1}{E}F(x,y,z) = \frac{1}{4(1-\mu)}[x\Phi(x,y,z) + y\Psi(x,y,z)] - \frac{1}{1+\mu}f(x,y,z), \tag{47}$$

care poate fi comparată cu funcția de tensiune (32).

În cazul unei stări de tensiune cvasiplane (neglijarea variabilei z) sau în cazul unei stări de tensiune plane generalizate (stare de tensiune plană în medie), regăsim rezultatele de la punctul precedent, corespunzătoare cazului clasic.

§ 3. CAZUL UNEI STĂRI DE DEFORMAŢIE PLANĂ

3.1. Vom numi stare de deformaţie plană acea stare de deformaţie pentru care avem

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0, \tag{48}$$

celelalte componente ale tensorului deformaţie specifică ca şi componentele vectorului deplasare putînd fi funcţii de x, y şi z; aceste condiţii ne conduc la

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u'(x,y) - \frac{\partial w'}{\partial x} z, \\ v(x,y,z) &= v'(x,y) - \frac{\partial w'}{\partial y} z, \end{aligned} \tag{49}$$

$$w(x,y,z) = w'(x,y), \tag{49'}$$

starea de deformaţie fiind deci liniară în raport cu variabila z.

De aici rezultă că

$$\varepsilon_v = \varepsilon_p' - z\Delta w'. \tag{50}$$

Ecuaţiile (6) ale lui Lamé ne conduc la reprezentarea

$$\begin{aligned} u &= u' - \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\mu}{2\lambda} kx\right) z, \\ v &= v' - \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\mu}{2\lambda} ky\right) z, \end{aligned} \tag{51}$$

$$w = \chi - \frac{\mu}{4\lambda} k(x^2 + y^2), \tag{51'}$$

unde $\chi = \chi\ (x,y)$ este o funcţie armonică, λ este constanta elastică (5) a lui Lamé iar constanta k este aleasă astfel încît să avem

$$\varepsilon_v = \frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{E} kz + \varepsilon_p' = \frac{1-\mu_0}{E_0} kz + \varepsilon_p', \tag{52}$$

ca şi în cazul stării de tensiune plană, E_0 şi μ_0 fiind constantele elastice generalizate date de

$$E_0 = \frac{E}{1-\mu^2},\ \mu_0 = \frac{\mu}{1-\mu}. \tag{53}$$

Funcțiile $u'(x,y)$ și $v'(x,y)$ verifică ecuațiile lui Lamé în două variabile, corespunzătoare unei stări de deformație plană

$$\begin{aligned} \Delta u' + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \varepsilon'_p}{\partial x} = 0, \\ \Delta v' + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \varepsilon'_p}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Observăm că reprezentarea (51), (51′) corespunde la primii termeni din reprezentarea (37), (37′), dacă ținem seama de înlocuirea constantelor elastice generalizate.

Starea de tensiune se va scrie sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma'_x + \left(2G\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{k}{2}\right)z, \\ \sigma_y = \sigma'_y + \left(2G\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{k}{2}\right)z, \end{aligned} \tag{55}$$

$$\sigma_z = \sigma'_z + \mu k z, \tag{55'}$$

$$\tau_{xy} = \tau'_{xy} - 2G\frac{\partial^2 \chi}{\partial x\,\partial y}, \tag{55''}$$

celelalte tensiuni tangențiale fiind nule.

Deoarece starea de solicitare notată cu „prim" corespunde cazului clasic de deformație plană și verifică toate ecuațiile teoriei elasticității, rezultă că starea de solicitare în care apare variabila z este de asemenea posibilă independent. Această ultimă stare de solicitare corespunde cazului unui corp cu deformație specifică volumică (sau plană) constantă în planul unei secțiuni transversale și variind liniar de-a lungul generatoarei; în cazul în care $k = 0$, va rezulta o stare de solicitare incompresibilă. În planul unei secțiuni transversale sîntem deci în cazul clasic al unei reprezentări de tip Airy, funcția de tensiune fiind însă armonică.

3.2. În cazul clasic [5]), componentele vectorului deplasare se pot reprezenta sub forma

$$\begin{aligned} u' = \frac{3-4\mu}{4(1-2\mu)}\Phi' - \frac{1}{4(1-2\mu)}\left(x\frac{\partial \Phi'}{\partial x} - y\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \frac{\partial f'}{\partial x}, \\ v' = \frac{3-4\mu}{4(1-2\mu)}\Psi' + \frac{1}{4(1-2\mu)}\left(x\frac{\partial \Psi'}{\partial x} - y\frac{\partial \Psi'}{\partial y}\right) + \frac{\partial f'}{\partial y}, \end{aligned} \tag{56}$$

---

[5]) **Vezi, de exemplu, [6].**

funcțiile $\Phi' = \Phi'(x,y)$, $\Psi' = \Psi'(x,y)$ fiind armonic conjugate iar funcția $f' = f'(x,y)$ fiind armonică. Va rezulta starea de tensiune

$$\begin{aligned} \frac{1}{G}\sigma_x &= \frac{1}{1-2\mu}\left[\varepsilon'_p - \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial\varepsilon'_p}{\partial x} - y\frac{\partial\varepsilon'_p}{\partial y}\right)\right] + 2\frac{\partial^2 f'}{\partial x^2}, \\ \frac{1}{G}\sigma_y &= \frac{1}{1-2\mu}\left[\varepsilon'_p + \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial\varepsilon'_p}{\partial x} - y\frac{\partial\varepsilon'_p}{\partial y}\right)\right] + 2\frac{\partial^2 f'}{\partial y^2}, \end{aligned} \tag{57}$$

$$\frac{1}{G}\tau_{xy} = -\frac{1}{2(1-2\mu)}\left(x\frac{\partial\varepsilon'_p}{\partial y} + y\frac{\partial\varepsilon'_p}{\partial x}\right) + 2\frac{\partial^2 f'}{\partial x\,\partial y}. \tag{57'}$$

Observăm că putem introduce funcția de tensiune

$$\frac{1}{G}F_0(x,y) = \frac{1}{2(1-2\mu)}(x\Phi' + y\Psi') - 2f', \tag{58}$$

găsind și pentru starea de deformație plană o reprezentare de tip Airy, funcția F_0 fiind de asemenea biarmonică.

3.3. Dacă funcțiile de mai sus depind și de variabila z, putem proceda ca la punctul 2.5. Introducînd constantele elastice generalizate E_0 și μ_0, date de (53), vom folosi funcțiile

$$\begin{aligned} \Phi(x,y,z) &= \Phi'(x,y) + \frac{\mu}{\lambda}kxz, \\ \Psi(x,y,z) &= \Psi'(x,y) + \frac{\mu}{\lambda}kyz, \end{aligned} \tag{59}$$

$$f(x,y,z) = f'(x,y) - z\chi(x,y). \tag{59'}$$

Rezultă funcția de tensiune

$$\frac{1}{G}F(x,y,z) = \frac{1}{2(1-2\mu)}[x\Phi(x,y,z) + y\Psi(x,y,z)] - 2f(x,y,z), \tag{60}$$

care ne conduce la o reprezentare de tip Airy.

În cazul în care $k = 0$ se observă că w este o funcție armonică. Dacă în plus admitem că starea de tensiune și starea de deformație nu depind de variabila z, rezultă o stare de deformație plană generalizată [6]).

§ 4. CONCLUZII

4.1. Cazul unei stări de tensiune plană pe care l-am studiat corespunde unei plăci plane, neîncărcată pe fețele paralele și acționată pe contur de sarcini paralele cu planul median și variind parabolic pe grosimea plăcii.

---

[6]) Vezi, de exemplu, [10].

În cazul în care distribuţia de sarcini exterioare este diferită pe grosimea plăcii, va trebui aplicat principiul lui B. de St. Venant pe o fîşie de-a lungul conturului, ajungînd la cazul unei stări de tensiune plană generalizată.

4.2. Studiul făcut în cazul unei stări de deformaţie plană corespunde, din punct de vedere fizic, la un corp cilindric infinit, acţionat pe suprafaţa laterală de o sarcină cu variaţie liniară de-a lungul generatoarei, fără componente după direcţia acesteia.

În cazul unui corp cilindric de lungime finită (bară dreaptă) va trebui ca pe feţele de capăt să acţioneze o sarcină normală, dată de (55'); această încărcare axială este aceeaşi pe cele două feţe, abstracţie făcînd de cîte o sarcină uniform distribuită pe fiecare faţă. Din condiţii de echilibru global, rezultă în acest caz $k = 0$.

4.3. Mai observăm că se poate trece de la rezultatele corespunzătoare unei stări de tensiune plană la rezultatele corespunzătoare unei stări de deformaţie plană prin introducerea constantelor elastice generalizate şi anularea termenilor de gradul al doilea în z.

Primită la redacţie la 3 ianuarie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. G.-B. Airy, *On the strains in the interior of beams.* British. Assoc. Adv., Sci. Rept. (1862).
2. — *On the strains in the interior of beams.* Phil. Trans., **153**, 49 (1863).
3. E. Almansi, *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$. Ann. di Matem., seria III, **II**, 1 (1898).
4. M. Bricas, *La théorie de l'élasticité bidimensionnelle.* Athènes, 1937.
5. A. Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, Paris, 1883.
6. L. Föppl, *Drang und Zwang*, vol. III, München, 1947.
7. A.E.H. Love, *A treatrise on the mathematical theory of elasticity.* Cambridge Univ. Press, London, 1892.
8. D. Morgenstern, *Mathematische Begründung der Scheibentheorie* (*zweidimensionale Elastizitätstheorie*). Arch. Rat. Mech. Anal., **3**, *3*, 91 (1959).
9. P. P. Teodorescu, *Sur l'approximation de calcul bidimensionnel dans le cas d'un état de tension plane.* Mathematica, **1** (24), *2*, 345 (1959).

10 — *Probleme plane în teoria elasticităţii.* vol. I, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1961.

11. S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of elasticity.* IInd ed., New York — Toronto — London, 1951.

DESPRE CONVEXITATEA UNOR COORDONATE BARICENTRICE GENERALIZATE

DE

HERWART WIESLER

În această lucrare[1]) răspundem la o întrebare pusă într-un articol publicat de J. A. Kalman [2].

Fie $s_0, \ldots, s_n$ puncte independente ale spațiului euclidian real n- dimensional R^n; fiecare punct x al înfășurătoarei convexe S a punctelor $s_0, \ldots, s_n$ are o reprezentare unică $x = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i(x) s_i$ cu $\lambda_i(x) \geqslant 0$ $(i = 0, \ldots, n)$ și $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i(x) = 1$ și coordonatele baricentrice $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ sînt funcții continue convexe în S. În lucrarea citată mai sus se consideră o mulțime finită, oarecare, $s_0, \ldots, s_m$ de puncte în R^n, se notează cu S înfășurătoarea convexă a punctelor $s_0, \ldots, s_m$ și se construiesc $(m+1)$ funcții $\lambda_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, definite pe S cu valori reale care verifică următoarele proprietăți :

1) $\lambda_i(x) \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$;

2) $\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i(x) = 1$;

3) $x = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i(x) s_i$;

4) $\lambda_i(x)$ este continuă în S, $i = 0, 1, \ldots, m$;

5) $\lambda_0(x)$ este o funcție convexă în S.

Autorul pune întrebarea dacă este posibil ca toate funcțiile $\lambda_i(x)$ să fie convexe, adică să avem condițiile 1) — 4) și :

5') $\lambda_i(x)$ este funcție convexă în S, $i = 0, \ldots, m$.

---

[1]) Mulțumesc și pe această cale conf. F. Radó pentru că mi-a atras atenția asupra acestui articol și pentru ajutorul acordat.

Vom arăta în această lucrare că dacă $s_0, s_1 \ldots, s_m$ sînt vîrfurile unui politop convex şi $m > n$, nu există un sistem de funcţii $\lambda_i(x)$ $(i = 0, \ldots, m)$ care verifică deodată condiţiile 1), 2), 3), 5').

Dacă $A = \{s_1, \ldots, s_p\}$, vom nota cu $H(A) = H(s_1, \ldots, s_p)$ înfăşurătoarea convexă a lui A, adică mulţimea de puncte

$$X = \sum_{i=1}^{p} \mu_i s_i, \ \mu_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 1.$$

LEMA 1. *Fie* $s_0, s_1, \ldots, s_m$ *puncte oarecare din* R^n *şi* $\lambda_i(x), i = 0, 1, \ldots, m$ *funcţii definite în* $H(s_0, \ldots, s_m)$ *care verifică condiţiile* 1) — 3) *şi* 5'); *atunci*

$$\lambda_i[\alpha x + (1-\alpha) y] = \alpha \lambda_i(x) + (1-\alpha) \lambda_i(y),$$

unde $\alpha \in [0,1]$; $x, y \in H(s_0, \ldots, s_m)$; $i = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Vom demonstra lema prin reducere la absurd. Să presupunem că pentru un anumit i_0, α şi o anumită pereche x_0, y_0 are loc

$$\lambda_{i_0}[\alpha x_0 + (1-\alpha) y_0] < \alpha \lambda_{i_0}(x_0) + (1-\alpha) \lambda_{i_0}(y_0).$$

Ţinînd seama de condiţia 5'), avem, pentru $i = 0, 1, \ldots, m$,

$$\lambda_i[\alpha x_0 + (1-\alpha) y_0] \leqslant \alpha \lambda_i(x_0) + (1-\alpha) \lambda_i(y_0),$$

deci

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i[\alpha x_0 + (1-\alpha) y_0] < \alpha \sum_{i=0}^{m} \lambda_i(x_0) + (1-\alpha) \sum_{i=0}^{m} \lambda_i(y_0).$$

Aplicînd condiţia 2), obţinem

$$1 < \alpha \cdot 1 + (1-\alpha) 1.$$

Contradicţia demonstrează lema.

LEMA 2. *Fie în ipotezele lemei 1*

$$x_i \in H(s_0, \ldots, s_m), \qquad i = 0, 1, \ldots, p;$$

$$x = \sum_{i=0}^{p} \mu_i x_i; \ \mu_i \geqslant 0, \ \sum_{i=0}^{p} \mu_i = 1;$$

atunci

$$\lambda_j(x) = \sum_{i=0}^{p} \mu_i \lambda_j(x_i) \qquad j = 0, 1, \ldots, m.$$

Pentru $p = 1$, lema 2 e adevărată conform lemei 1. Să presupunem că e adevărată pentru p şi să arătăm că e adevărată pentru $p + 1$:

$$x = \mu_0 x_0 + \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = \mu_0 x_0 + (1 - \mu_0) \cdot \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{1-\mu_0} x_i.$$

Potrivit lemei 1 avem, pentru $j = 0, \ldots, m$,

$$\lambda_j(x) = \mu_0 \lambda_j(x_0) + (1 - \mu_0) \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{1 - \mu_0} x_i \right).$$

Dar, conform ipotezei de inducţie,

$$\lambda_j \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{1 - \mu_0} x_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{1 - \mu_0} \lambda_j(x_i).$$

Deci

$$\lambda_j(x) = \mu_0 \lambda_j(x_0) + \mu_1 \lambda_j(x_1) + \ldots + \mu_p \lambda_j(x_p).$$

LEMA 3. *Dacă* $s_0, \ldots, s_m$ *sînt vîrfurile unui politop convex n-dimensional şi funcţiile* $\lambda_i(x)$, $x \in H(s_0, \ldots, s_m)$ *verifică condiţiile* 1), 2), 3) şi 5'), *atunci*:

$$\lambda_j(s_i) = \delta_i^j; \qquad i, j = 0, \ldots, m.$$

Cum $s_0, \ldots, s_m$ sînt vîrfurile unui politop convex n- dimensional, $s_0 \notin H(s_1, s_2, \ldots, s_m)$. Ajunge să demonstrăm că

$$\lambda_0(s_0) = 1; \ \lambda_i(s_0) = 0; \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Punînd în condiţia 3) $x = s_0$, avem:

$$s_0 = \lambda_0(s_0) s_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(s_0) s_i; \ \lambda_i(s_0) \geqslant 0, \ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i(s_0) = 1, \ (i = 0, \ldots, m). \quad (1)$$

Să presupunem că

$$p = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(s_0) \neq 0.$$

Putem scrie

$$s_0 = \lambda_0(s_0) s_0 + p \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i(s_0)}{p} s_i.$$

Notăm

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i(s_0)}{p} s_i = u,$$

$u \in H(s_1, \ldots, s_m)$ deoarece

$$\frac{\lambda_i(s_0)}{p} \geqslant 0; \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i(s_0)}{p} = 1.$$

Din (1) avem

$$\lambda_0(s_0) = 1 - p,$$

deci

$$s_0 = (1 - p) s_0 + pu$$
$$ps_0 = pu; p \neq 0$$
$$s_0 = u \in H(s_1, \ldots, s_m).$$

Contradicția obținută demonstrează lema.

LEMA 4. *Fie în ipotezele lemei* 3, $s_{k_0}, s_{k_1}, \ldots, s_{k_p}, p \leqslant n$ *puncte independente dintre* $s_0, \ldots, s_m$. *Atunci funcțiile* $\lambda_{k_i}(x)$ *coincid în simplexul* $H(s_{k_0}, \ldots, s_{k_p})$ *cu coordonatele baricentrice respective în raport cu acest simplex, iar celelalte funcții* $\lambda_i(x)$ *sînt egale cu zero în acest simplex.*

Fie $x \in H(s_{k_0}, \ldots, s_{k_p})$ și $\mu_i(x)$ coordonatele baricentrice unic determinate ale lui x pe simplexul $H(s_{k_0}, \ldots, s_{k_p})$:

$$x = \sum_{i=0}^{p} \mu_i(x) s_{k_i}; \ \mu_i \geqslant 0; \ \sum_{i=0}^{p} \mu_i = 1.$$

În baza lemei 2 putem scrie

$$\lambda_j(x) = \sum_{i=0}^{p} \mu_i(x) \lambda_j(s_{k_i}).$$

Folosind lema 3 rezultă

$$\lambda_j(x) = \mu_j(x); \ j = k_0; j = k_1, \ldots, j = k_p$$

și

$$\lambda_j(x) = 0 \text{ pentru ceilalți indici } j.$$

LEMA 5. *Fie* $s_0, s_1, \ldots, s_m$ *vîrfurile politopului convex* $H(s_0, \ldots, s_m) \subset \subset R^n$ *și* $m > n$. *Pentru oricare* $x_0 \in H(s_0, \ldots, s_m)$ *putem găsi cel puțin două simplexe* S_1 *și* S_2 *ale căror vîrfuri fac parte din* $\{s_0, \ldots, s_m\}$ *astfel ca* $x_0 \in S_1$ *și* $x_0 \in S_2$.

Într-adevăr, avem

$$x_0 = \sum_{i=0}^{m} \mu_i s_i, \quad \mu_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=0}^{m} \mu_i = 1.$$

Punctele $s_0, \ldots, s_m$ fiind dependente, există o relație de forma

$$\sum_{i=0}^{m} \nu_i s_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{m} \nu_i = 0,$$

unde nu toți ν_i sînt egali cu zero. Pentru orice scalar ρ are loc relația

$$x_0 = \sum_{i=0}^{m} (\mu_i - \rho \nu_i) s_i. \tag{2}$$

Dacă alegem aici pe ρ egal cu cel mai mic dintre fracțiile $\frac{\mu_i}{\nu_i}$ cu numitor ν_i pozitiv

$$\rho = \min_{\nu_i > 0} \frac{\mu_i}{\nu_i}, \tag{3}$$

atunci toți coeficienții în (2) sînt nenegativi și suma lor este 1. Cel puțin unul din coeficienții lui (2) fiind egal cu zero, $x_0 \in H_1$ unde H_1 este înfășurătoarea convexă a unei submulţimi proprii a lui $\{s_0, \ldots, s_m\}$. Alegînd pe ρ egal cu

$$\max_{\nu_i<0} \frac{\mu_i}{\nu_i} \tag{4}$$

obţinem că $x_0 \in H_2$, unde H_2 este înfăşurătoare convexă a unei alte submulţimi proprii a lui $\{s_0, \ldots, s_m\}$. Cele două submulţimi sînt distincte, căci prima se obţine din H eliminînd vîrfurile s_i pentru care minimul din (3) este atins, iar a doua prin eliminarea vîrfurilor pentru care maximul din (4) este atins.

Dacă H_1 nu este un simplex, acest procedeu poate fi repetat pentru vîrfurile lui H_1 în loc de $s_0, \ldots, s_m$, la fel pentru H_2. Prin aplicarea repetată a acestui procedeu ajungem la un număr de simplexe ($\geqslant 2$) care îl conţin pe x_0.

TEOREMĂ. *Dacă* $s_0, s_1, \ldots, s_m$ *sînt vîrfurile unui politop convex n-dimensional, condiţiile* 1), 2), 3) *şi* 5') *nu pot fi simultan verificate.*

Fie, pentru demonstraţie, x_0 un punct din $H(s_0, \ldots, s_m)$ care nu se găseşte pe nici unul din hiperplanele determinate de n puncte s_i. Potrivit lemei 5 există două simplexe S_1 şi S_2, avînd ca vîrfuri puncte s_i, astfel ca $x_0 \in S_1 \cap S_2$. Punctul x_0 este un punct interior atît pentru S_1 cît şi pentru S_2.

Simplexele S_1 şi S_2 fiind distincte, există s_r astfel ca $s_r \in S_1$ şi $s_r \notin S_2$. Lema 4 aplicată la S_1 ne dă

$$\lambda_r(x_0) = \mu_r(x_0),$$

unde μ_r este coordonata baricentrică în raport cu simplexul S_1, care corespunde la vîrful s_r. Ţinînd seamă că x_0 nu se află pe nici o faţă $n-1$ dimensională a simplexului S_1,

$$\lambda_r(x_0) = \mu_r(x_0) \neq 0.$$

Aplicînd lema 4 la S_2, obţinem

$$\lambda_r(x_0) = 0.$$

Contradicţia la care am ajuns demonstrează teorema.

Primită la redacţie la 2 decembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. P. S. ALEXANDROFF, H. HOPF, *Topologie I*, Anhang II, Berlin, 1935.

2. J. A. KALMAN, *Continuity and convexity of projections and barycentric coordonates in convex polyhedra.* Pacific Journal of Mathematics, **11**, 1017—1022 (1961).

O SUTĂ DE ANI DE CERCETĂRI ÎN PROBLEMA PLANĂ A TEORIEI ELASTICITĂȚII

DE

P. P. TEODORESCU

§ 1. INTRODUCERE

1.1. Bazele teoriei matematice a elasticității s-au pus la începutul secolului al XIX-lea prin lucrările lui L.M.H. Navier, M. V. Ostrogradskii, A. L. Cauchy, S. D. Poisson, B. P. E. Clapeyron și alții. Lui G. Lamé i se datorește o formulare generală a problemelor teoriei elasticității în deplasări iar E. Beltrami a dat pentru prima dată o asemenea formulare în tensiuni.

Cel care a introdus însă prima funcție potențial și prima formulare de acest gen a unei probleme de teoria elasticității a fost astronomul englez George Biddell Airy (1801—1892) în două articole succesive [96],[97], publicate în 1862 și 1863 și dedicate studiului unei grinzi drepte. Deoarece „cazul plan'' aduce mari simplificări de calcul față de problema generală tridimensională și deoarece problemele plane prezintă un deosebit interes din punctul de vedere practic și tehnic, rezultatele inițiale obținute de Airy au fost urmate de extrem de numeroase lucrări în ultima sută de ani, lucrări în care au fost folosite metode matematice de calcul din cele mai variate. Aceste lucrări fiind foarte numeroase este imposibil, din punct de vedere practic, de a prezenta o trecere în revistă și o bibliografie completă a lor; de aceea ne vom mărgini la menționarea unor lucrări pe care le considerăm mai importante (formulări de probleme, lucrări fundamentale, urmate de cercetări ulterioare etc.), încercînd să punem în evidență diferite etape de dezvoltare ale problemei, precum și perspectivele de viitor. O bibliografie mai detaliată poate fi găsită în monografiile dedicate acestei probleme și menționate la sfîrșitul acestui articol, ca și în unele lucrări cu caracter mai general [3], [5], [6], [24], [26], [31], [42], [47], [84], [85], [90], [91].

1.2. Din punctul de vedere mecanic, distingem două probleme plane pe care le vom considera clasice :

— Cazul unei stări de tensiune plană, corespunzînd unei plăci plane, de grosime constantă, neîncărcată pe feţele paralele şi acţionată pe contur de sarcini paralele cu planul median şi uniform distribuite pe grosimea plăcii ;

— Cazul unei stări de deformaţie plană, corespunzînd unui corp cilindric de lungime mare (teoretic infinită), acţionat pe suprafaţa laterală de o sarcină uniform distribuită de-a lungul generatoarei şi fără componentă tangenţială după direcţia acesteia.

Cazul unei stări de tensiune cvasiplane (neglijarea variabilei z) sau cazul unei stări de tensiune plane generalizate (stare de tensiune plană în medie) se reduc la cazul clasic al unei stări de tensiune plană ; un rezultat analog se obţine în cazul unei stări de deformaţie plană generalizată (pentru care deplasarea în lungul axei cilindrului este o funcţie armonică).

1.3. Plăcile plane supuse la o stare de tensiune plană sînt cunoscute şi sub numele de grinzi pereţi. Un mare număr de elemente de construcţie intră în această categorie, de exemplu : grinzile pereţi pentru silozuri, buncăre mono şi pluricelulare etc. ; grinzile pereţi cu un contur oarecare (timpane pentru bolţi de poduri, grinzi cu vute etc.) ; frontoane pentru scene de teatru, diafragmele (orizontale şi verticale) de rigidizare la construcţii mijlocii şi înalte în regiuni seismice, console scurte pentru poduri rulante, colţuri de cadru, gusee la construcţii metalice ; diverse piese de organe de maşini (cîrlige, bielă etc.) ; elemente de construcţie pentru vase, elemente de rigidizare pentru aripi de avion etc.

De asemenea, ca exemple de corpuri sau elemente de construcţie supuse la o stare de deformaţie plană, cităm : baraje de greutate, ziduri de sprijin, podeţe tubulare, tunele, coşuri de fabrică, bolţi, plăci lungi, rulouri de aparate de reazem, semispaţiul sub acţiunea unor sarcini distribuite uniform pe o direcţie (probleme geotehnice), tuburi de presiune, diverse piese la organe de maşini etc.

Marea varietate a diferitelor elemente de construcţie menţionate mai sus arată deosebita importanţă a problemei plane, din punct de vedere practic.

§ 2. PROBLEMA PLANĂ A TEORIEI ELASTICITĂŢII

2.1. În cazul clasic al unei stări de tensiune plană se admite că trei componente ale tensorului tensiune sînt nule

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \tag{1}$$

celelalte componente fiind diferite de zero şi independente de variabila z. De asemenea, în cazul clasic al unei stări de deformaţie plană se iau trei componente ale tensorului deformaţie specifică nule

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0, \tag{1'}$$

celelalte trei componente fiind diferite de zero şi independente de z.

Dacă tensiunile şi deformaţiile pot depinde şi de z, rezultă o stare de tensiune variind parabolic pe grosimea plăcii, în cazul stării de tensiune plană, şi liniar de-a lungul generatoarei, în cazul stării de deformaţie plană [10], [49], [214]. D. Morgenstern [170] a arătat cum se obţine riguros cazul unei stări de tensiune plană pentru o placă plană a cărei grosime tinde către zero.

2.2. În cazul clasic, cele două probleme — distincte din punctul de vedere mecanic — conduc la aceeaşi formulare matematică. Se dau ecuaţiile de echilibru

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \\ &\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

(X, Y fiind componentele forţei masice, σ_x, σ_y, tensiunile normale iar τ_{xy} tensiunea tangenţială), relaţiile între deformaţiile specifice liniare ε_x, ε_y, deformaţia specifică unghiulară γ_{xy} şi deplasările u, v

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{3'}$$

şi legea lui Hooke (pentru corpuri liniar elastice, omogene şi izotrope)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \tag{4'}$$

valabilă în cazul unei stări de tensiune plană ; aici E este modulul de elasticitate longitudinală, μ coeficientul de contracţie transversală iar G modulul de elasticitate transversală dat de expresia

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{5}$$

În cazul unei stări de deformaţie plană se folosesc aceleaşi relaţii, în care înlocuim constantele elastice prin constantele elastice generalizate

$$E_0 = \frac{E}{1-\mu^2}, \mu_0 = \frac{\mu}{1-\mu}. \tag{6}$$

2.3. G.-B. Airy [96], [97] a arătat că, în lipsa forțelor masice, ecuațiile (2) pot fi satisfăcute dacă luăm

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \tag{7}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \tag{7'}$$

unde $F = F(x,y)$ este o funcție arbitrară, și a dat cîteva exemple simple de calcul sub formă polinomială. Mai tîrziu J. C. Maxwell [158] a arătat că trebuie să se țină seama și de deformația corpului, introducînd ecuația de continuitate a deformației, scrisă în tensiuni sub forma

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \tag{8}$$

unde Δ este operatorul lui Laplace. Rezultă că funcția F, numită funcția lui Airy, trebuie să fie biarmonică.

$$\Delta\Delta F(x,y) = 0. \tag{9}$$

Funcția de tensiune F a căpătat o interesantă interpretare mecanică, în special pe contur. Astfel, derivata tangențială $\partial F/\partial s$ și derivata normală $\partial F/\partial n$ pe contur sînt respectiv forța tăietoare T (cu semn schimbat) și forța axială N într-o grindă fictivă, care urmărește conturul în sens invers acelor unui ceasornic, lăsîndu-l la stînga, pornind de la un punct fix arbitrar ales; de asemenea funcția F pe contur este momentul încovoietor M în aceeași grindă fictivă.

În felul acesta, prima problemă plană fundamentală a teoriei elasticității (cazul în care se dau sarcinile exterioare ce acționează pe contur), pentru un domeniu simplu conex, în lipsa forțelor masice, se reduce — din punct de vedere matematic — la determinarea unei funcții biarmonice $F = F(x, y)$ pentru care cunoaștem pe contur:

— Valoarea funcției și a derivatei normale (M și N) sau

— Valoarea derivatei normale și a derivatei tangențiale (N și T).

Prima din aceste formulări este cea mai obișnuită; cea de-a doua este cunoscută și sub numele de problema biarmonică fundamentală și a fost studiată, din punct de vedere matematic, în special din 1907, de cînd a făcut obiectul unui premiu al Academiei de științe din Paris; au fost premiate lucrările prezentate de J. Hadamard [134], G. Lauricella [147] și A. Korn [143], pentru un domeniu finit simplu conex, care satisface anumite condiții cu caracter general. Un studiu mai general a fost întreprins ulterior de S. L. Sobolev [192].

Din punct de vedere fizic, unicitatea soluției este asigurată de teorema de unicitate a lui G. R. Kirchhoff. De asemenea, abstracție făcînd de un polinom de gradul întîi (trei constante arbitrare), funcția de tensiune și derivatele ei parțiale sînt univoc determinate în interiorul domeniului dacă sarcinile exterioare se echilibrează pe contur. J. H. Michell [160] a arătat că acest rezultat rămîne valabil chiar dacă sarcinile exterioare se reduc la un cuplu.

În cazul unui domeniu multiplu conex trebuie introduse distorsiunile şi folosită teoria generală dată de V. Volterra [89], [223]. Starea de tensiune într-un asemenea corp depinde, în general, de constantele elastice ale materialului şi devine independentă de aceste constante numai dacă sarcinile exterioare se echilibrează pe fiecare contur în parte [160]. L. N. G. Filon [113] a arătat însă că — din punct de vedere practic — influenţa constantelor elastice asupra tensiunii maxime, este, în general, foarte mică şi se poate neglija. În general, se poate folosi o funcţie de tensiune de tip Airy, care corespunde la anumite condiţii puse în evidenţă de G. Grioli [29], [132]. De studiul domeniilor dublu conexe s-au ocupat, în special, W. Prager [182] şi D. I. Şerman [191].

2.4. O formulare în deplasări a problemei cu ajutorul unei funcţii de deplasare biarmonice $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x,y)$ se datoreşte lui K. Marguerre [153] şi este de forma

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial y}, \\ v &= \frac{2}{1-\mu}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2} \end{aligned} \qquad (10)$$

sau de o formă analoagă, obţinută schimbînd rolul variabilelor x şi y. Această formulare este utilă în cazul celei de-a doua probleme fundamentale (condiţii în deplasări pe contur) sau în cazul problemei mixte (condiţii în tensiuni pe o parte a conturului şi condiţii în deplasări pe cealaltă parte). În acest caz funcţia $\mathcal{F}$ pierde semnificaţia mecanică dată anterior.

§ 3. METODE DE CALCUL

3.1. Metodele de calcul în cazul problemei plane sînt foarte variate, ele dezvoltîndu-se în cursul timpului şi indicînd, prin aceasta, evoluţia problemei din punct de vedere matematic.

Prima metodă care s-a prezentat am văzut că a fost utilizarea de potenţiali reali (funcţii de tensiune sau de deplasare) şi, în consecinţă, studiul ecuaţiei biarmonice. Un rol important, în acest caz, îl joacă reprezentarea dată de E. Almansi [98]:

$$F = \Phi + [a + bx + cy + d(x^2 + y^2)]\,\Psi, \qquad (11)$$

unde Φ şi Ψ sînt funcţii armonice iar a, b, c, d constante arbitrare (b, c, d nu pot fi simultan nule pentru a nu avea numai o funcţie armonică). Un studiu dezvoltat al funcţiilor biarmonice şi al funcţiilor poliarmonice se găseşte în [64].

Această reprezentare permite studiul structurii unei funcţii biarmonice, ca şi construcţia unei asemenea funcţii cu ajutorul a două funcţii armonice. De altfel s-au făcut variate cercetări în această direcţie şi s-au propus şi alte reprezentări prin potenţiali reali, de exemplu cea dată de L. Payne [179] pentru cazul semiplanului elastic şi benzii plane elastice.

3.2. Căutînd funcții de tensiune de diferite forme, s-au pus la punct metode de calcul utile pentru unele domenii particulare.

Metoda indirectă de calcul constă în a admite o anumită stare de tensiune în interiorul corpului, care să îndeplinească condițiile la limită, și a verifica dacă toate ecuațiile teoriei elasticității sînt satisfăcute; în caz contrar va trebui aleasă altă funcție de tensiune și repetat calculul. Eventual se pot adăuga, la rezultatele date de unele metode aproximative de calcul (de exemplu rezultatele date de rezistența materialelor) sau la starea de tensiune admisă de noi inițial, unele funcții de corecție, care trebuie determinate; aceasta este o metodă semiindirectă de calcul.

Metoda directă de calcul constă în alegerea unei funcții potențial (care să îndeplinească eventual anumite condiții de paritate sau imparitate în raport cu cele două variabile sau alte condiții pe care le putem impune inițial, funcție de condițiile particulare ale problemei), care să cuprindă anumiți parametri arbitrari; acești parametri trebuie determinați cu ajutorul condițiilor pe contur. Dacă putem determina acești parametri, îndeplinind toate condițiile la limită, problema este rezolvată. În caz contrar trebuie să alegem altă funcție potențial cu ajutorul căreia să efectuăm calculul (sau să adăugăm o corecție la funcția aleasă inițial).

Un alt aspect al metodelor directe de calcul constă în aceea că se poate ataca problema printr-o metodă generală (de exemplu metoda diferențelor finite, metoda funcțiilor de variabilă complexă etc.), care poate conduce la un calcul sistematic. Evident că fiecare din aceste metode de calcul este adecvată pentru diferite cazuri particulare.

Din punct de vedere matematic se poate face un calcul exact sau un calcul aproximativ. Sînt foarte rare cazurile în care un calcul exact ne poate conduce la rezultate, deoarece fenomenele fizice sînt — în general — complexe și nu pot fi cuprinse decît aproximativ în diferite forme matematice; de aceea cele mai multe metode de calcul care se folosesc sînt metode aproximative.

Aproximațiile pot proveni din alegerea funcției de tensiune sau a funcției de deplasare sub o formă care aproximează forma ei reală cît de bine vrem (de exemplu o serie trigonometrică) și care îndeplinește în întregime condiția de biarmonicitate și condițiile la limită sau din căutarea unei funcții potențial care să îndeplinească aproximativ unele din aceste condiții (metoda diferențelor finite, unele metode variaționale, metoda condițiilor în puncte pe contur etc.); de asemenea — și acest lucru se întîmplă destul de des — se folosesc ambele feluri de aproximații.

3.3. Prin metode elementare de calcul se înțeleg — de obicei — acele metode care se bazează pe integrale particulare ale ecuației biarmonice și — în special — pe polinoame biarmonice. Ele au fost aplicate pentru prima oară, în mod sistematic, de A. Mesnager [159] și reluate apoi în diferite studii privind grinda dreaptă [83]. Pentru forma generală a acestor polinoame se poate vedea [25], [94], [201]. Considerăm că metodele elementare de calcul au constituit o primă etapă în dezvoltarea acestor probleme plane.

3.4. Metodele variaționale de calcul, bazate pe extremarea unor anumite funcționale, au diferite aspecte. Se alege o anumită expresie analitică, care depinde de un număr (teoretic infinit, practic finit) de parametri arbitrari pentru funcția lui Airy, de exemplu, și se pune condiția ca aceasta să aproximeze cît mai bine valoarea ei reală ; se ia astfel o funcție de forma

$$F = f_0 + f = f_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i f_i, \tag{12}$$

unde f_0 și f_i sînt funcții date iar a_i parametri de determinat. Din punctul de vedere al determinării acestor funcții se disting mai multe metode de calcul :

a) Funcțiile f_0 și f_i nu satisfac ecuația biarmonică dar satisfac — fiecare în parte — unele din condițiile la limită. Parametrii a_i se determină din condiția ca expresia (12) să aproximeze cît mai bine funcția F atît în interiorul domeniului cît și pe frontiera sa.

b) Funcțiile f_0 și f_i nu verifică ecuația biarmonică dar — fiecare în parte — verifică toate condițiile pe contur. Parametrii a_i se obțin din condiția ca expresia aleasă pentru funcția F să o aproximeze cît mai bine în interiorul domeniului.

c) Funcțiile f_0 și f_i sînt funcții biarmonice dar nu satisfac condițiile la limită ; parametrii a_i se determină din condiția ca expresia (12) să aproximeze cît mai bine funcția F pe frontieră.

Prima din aceste metode este cea mai simplă din punct de vedere al construcției expresiei aproximative a funcției F, dar se întîmpină dificultăți mai multe la determinarea parametrilor a_i. Celelalte metode (atunci cînd se pot alege cu ușurință funcțiile f_0 și f_i) conduc la rezultat printr-un calcul mai rapid.

Dacă acest lucru este posibil, e bine să se aleagă funcția f_0 astfel ca să corespundă — cu oarecare aproximație — soluției problemei, eventual chiar de altă natură decît celelalte funcții ; în acest caz funcția f este o funcție de corecție. Această idee a fost folosită, de exemplu, de I. I. Goldenblat [25].

Pentru determinarea funcției de corecție f se alege o măsură a erorii pe care o facem înlocuind valoarea reală a funcției prin valoarea ei aproximativă. Putem folosi astfel metoda aproximării uniforme (Cebîșev), metoda celor mai mici pătrate (Gauss), principiul minimului energiei potențiale sau principiul minimului energiei complementare (ecuațiile Lagrange-Ritz și Castigliano-Ritz), metodele Bubnov-Galerkin, Trefftz etc. Se pot consulta pentru teorie și aplicațiile corespunzătoare [48], [57], [72], [79].

3.5. Alte metode aproximative de calcul, care au început să fie mult folosite în ultimul timp, sînt metodele operaționale. Prin aceste metode, funcțiile care intervin în ecuațiile cu derivate parțiale ale problemei, numite primitive, se transformă în alte funcții, numite imagini ale primelor funcții. Proprietatea aceasta este reciprocă, deoarece imaginea imaginii unei funcții primitive este tot funcția primitivă. În felul acesta ecuațiile cu derivate parțiale ale problemei se transformă în ecuații algebrice, care se pot rezolva prin metodele obișnuite de calcul ; după aceea se revine la funcțiile primitive, care corespund soluției problemei puse.

În cadrul metodelor operaţionale de calcul se pot folosi diferite tipuri de transformate : Fourier, Laplace (în coordonate carteziene), Mellin (în coordonate polare) etc.

Pentru problemele generale legate de aceste transformate şi pentru aplicaţii la problema plană a teoriei elasticităţii se pot consulta, de exemplu, [77], [86].

În cadrul acestor metode de calcul este adesea util să folosim funcţii generalizate (în sensul teoriei distribuţiilor), pentru a putea cuprinde şi cazul sarcinilor concentrate.

În cazul unui domeniu finit se pot folosi asemenea transformate finite, care ne conduc la dezvoltări în serie.

3.6. Adesea este convenabil să se aleagă funcţia potenţial sub forma unei serii Fourier sau sub forma unei integrale Fourier, cu un şir de coeficienţi nedeterminaţi sau cu o funcţie necunoscută, care se precizează cu ajutorul condiţiilor la limită ; aceasta nu este, de fapt, decît o aplicare directă a transformatei Fourier, fără a mai trece prin toate fazele de calcul. Această idee a fost folosită pentru prima dată de M. Ribière [74], [185], L.N.G. Filon [112] şi A. Timpe [219] pentru grinda dreaptă şi banda elastică şi de J. H. Michell [161] pentru domeniul circular, constituind o a doua etapă importantă în dezvoltarea metodelor de calcul ale problemei plane.

Aceste idei au fost dezvoltate în ultimul timp pentru un număr mare de domenii interesante din punctul de vedere practic, conducînd fie la rezolvarea unui sistem infinit de ecuaţii algebrice liniare cu o infinitate de necunoscute (pentru care se pun probleme de regularitate, completă regularitate etc.), fie la rezolvarea unei ecuaţii sau a unui sistem de ecuaţii integrale de tip Fredholm, de speţa a doua, pe un interval infinit (pentru care se pun probleme de existenţă şi unicitate, de exemplu în cadrul funcţiilor generalizate) ; eventual se poate întîmpla ca nucleul ecuaţiilor integrale să fie degenerat, ajungînd tot la rezolvarea unui sistem de ecuaţii algebrice liniare [83]. Metodele operaţionale, menţionate mai sus, constituie de fapt un aspect nou şi mult mai general al primelor cercetări efectuate la începutul acestui secol.

Este important să menţionăm că seriile şi integralele Fourier care se folosesc se pot construi plecînd de la integralele particulare ale ecuaţiei armonice, de forma (metoda separării variabilelor)

$$e^{\alpha x+\beta y} \quad (\alpha^2+\beta^2=0), \tag{13}$$

utilizînd reprezentarea (11) a lui Almansi şi principiul suprapunerii efectelor.

3.7. A treia etapă importantă în dezvoltarea metodelor de calcul ale problemei plane o constituie introducerea funcţiilor de variabilă complexă.

Pornind de la reprezentarea dată de A.E.H. Love [49] pentru componentele vectorului de plasare, G. V. Kolosov [41], [141], [142] reprezintă deplasarea complexă sub forma (în absenţa forţelor masice)

$$2G(u+iv)=\frac{3-\mu}{1+\mu}\,\varphi(z)-z\,\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}, \tag{14}$$

unde $\varphi(z)$ şi $\psi(z)$ sînt funcţii olomorfe de $z = x + iy$, semnul „prim" indică derivarea iar supralinierea funcţia complexă conjugată.

De asemenea, starea de tensiune va fi dată de

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\,\mathcal{Re}\,\{\Phi(z)\}, \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \end{aligned} \tag{15}$$

unde am notat

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z). \tag{16}$$

Această reprezentare prin potenţiali complecşi este strîns legată de cea prin potenţiali reali, dacă ţinem seama de formula lui Goursat [125] pentru funcţiile biarmonice

$$F(x,y) = \mathcal{Re}\,\{\bar{z}\chi(z) + \varkappa(z)\}, \tag{17}$$

unde $\chi(z)$ şi $\varkappa(z)$ sînt funcţii olomorfe.

Funcţiile Φ, Ψ, φ, ψ sînt univoc determinate pentru o anumită stare de tensiune şi o anumită stare de deformaţie, abstracţie făcînd de Ci, unde C este o constantă reală—pentru funcţia $\Phi(z)$ — de $(Ciz + \gamma)$, unde $\gamma = \alpha + i\beta$ este o constantă complexă arbitrară — pentru funcţia $\varphi(z)$ — şi de constanta complexă $\gamma' = \alpha' + i\beta'$ — pentru funcţia $\psi(z)$. Influenţa acestor constante asupra stării de deformaţie constă în introducerea unor deplasări şi a unei rotiri corespunzătoare mişcării de corp rigid.

Punînd condiţiile la limită, putem reduce cele trei probleme fundamentale ale teoriei elasticităţii la probleme ale teoriei funcţiilor de variabilă complexă. Pentru a formula aceste condiţii, vom nota cu $\chi(t)$ limita către care tinde funcţia $\chi(z)$ cînd punctul z din interiorul domeniului tinde către punctul t de pe contur.

Pentru prima problemă fundamentală se pot pune condiţiile pe contur sub forma

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi}(t) = i\int_{t_0}^{t} (p_{nx} + ip_{ny})\, \mathrm{d}s, \tag{18}$$

unde (p_{nx}, p_{ny}) sînt componentele sarcinii exterioare, acţionînd pe elementul de contur de normală exterioară $\vec{n}$. De asemenea, în cazul celei de-a doua probleme fundamentale, vom avea

$$\frac{3-\mu}{1+\mu}\,\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2G(u_n + iv_n)\,, \tag{19}$$

unde (u_n, v_n) sînt deplasările corespunzătoare elementului de contur considerat mai sus.

Condiţiile (18) şi (19) fiind asemănătoare, rezultă că metodele de calcul ce se pot aplica în cazul celor două probleme fundamentale sînt analoage. În rezolvarea efectivă a problemelor este practic să impunem ca funcţiile $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ şi $\psi(z)$ să poată fi prelungite continuu, fiecare în parte, în toate punctele de pe frontieră. Soluţia corespunzătoare a problemei se va numi soluţie regulată.

Cu ajutorul metodei funcţiilor de variabilă complexă, schiţată mai sus, s-au rezolvat unele probleme interesante de grinzi pereţi cu diferite contururi. N. I. Mushelişvili [172], [173], [174], [175] a întreprins studii deosebit de importante în această direcţie, creînd, împreună cu elevii lui, o adevărată şcoală în U.R.S.S. În afară de tratatul lui Mushelişvili [61], aceste cercetări sînt prezentate sistematic în diferite cărţi cu caracter general dedicate teoriei elasticităţii, de exemplu [28], [66], [79], [95]. Menţionăm, în special, cartea lui I. Babuška, K. Rektorys şi F. Vyčichlo [1].

Menţionăm că o primă formulare a problemei plane a teoriei elasticităţii cu ajutorul metodei funcţiilor de variabilă complexă se datorează lui S. A. Ciaplîghin ; lucrarea respectivă a apărut de-abia după moartea autorului, în operele sale [13].

Unele forme incipiente ale acestei metode au fost date de L. Föppl [17]. Metoda de calcul Kolosov-Mushelişvili a fost regăsită ulterior de A. C. Stevenson [195], [196]. L. M. Milne-Thomson [60] publică, într-o prezentare proprie şi o sistematizare proprie a calculului, o interesantă monografie a acestei probleme, în care rezolvă multe probleme concrete la limită. S. M. Belonosov [4] a publicat, de asemenea, o monografie asupra acestor probleme, referindu-se la domenii simplu şi dublu conexe.

Menţionăm că problema se poate formula şi prin utilizarea noţiunii de derivată areolară, introdusă de D. Pompeiu [180], după cum a făcut N. Teodorescu [82]. Alte moduri de prezentare a problemei şi de sistematizare a calculului se datoresc lui R. Legendre [148] şi Cl. Mathurin [52], [156]. S-au dat şi formulări bazate pe utilizarea funcţiilor de variabilă hipercomplexă, cum este cea propusă de L. Sobrero [78].

Un instrument matematic puternic în cadrul acestei metode de calcul îl constituie transformarea conformă a domeniului considerat de noi pe un alt domeniu. Efectuînd transformarea şi pentru sarcinile exterioare, putem ajunge la rezolvarea unei alte probleme plane, eventual mai simplă decît cea de la care am plecat. După rezolvarea acestei probleme se face transformarea conformă inversă, care ne readuce la problema iniţială.

Pentru efectuarea acestor transformări se folosesc adesea serii de puteri sau serii Fourier în formă complexă, ca şi reprezentarea pe interiorul (domeniu finit) sau exteriorul (domeniu infinit) unui cerc sau reprezentarea pe o coroană circulară (pentru domenii dublu conexe). Unele rezultate interesante se dau în [111], [137]. Funcţiile de transformare au fost folosite, pentru prima oară, sub formă de polinoame, de E. Almansi [99]; rezultate interesante în această direcţie, privind acţiunea forţelor concentrate, a dat L. Martini [51].

Lui N. I. Mushelişvili i se datoreşte şi aplicarea proprietăţilor integralelor de tip Cauchy la rezolvarea problemelor la limită plane. Menţionăm astfel cazul domeniilor care se reprezintă pe cerc cu ajutorul funcţiilor raţionale ; aceste rezultate conduc şi la o rezolvare aproximativă pentru domenii oarecare. O altă metodă de calcul constă în reducerea problemei la problema conjugării liniare a valorilor la limită (cunoscută şi sub numele de problema lui Riemann sau problema lui Hilbert) ; în acest caz se pot da soluții interesante pentru domenii cu tăieturi ca și pentru problema mixtă a teoriei elasticității (eventual pentru probleme de contact).

3.8. Cu ajutorul metodei integralelor de tip Cauchy se poate reduce problema plană la ecuații integrale, care se pot pune sub forma unor ecuații integrale de tip Fredholm de speța a doua, necesitînd reprezentarea conformă a domeniului considerat pe un cerc; metoda este utilă pentru domenii simplu conexe. S. G. Mihlin [163], [164] a modificat această metodă de calcul, folosind funcții ale lui Green complexe, cu o singularitate logaritmică, astfel încît poate fi aplicată și pentru domenii multiplu conexe. Multe rezultate în această direcție se găsesc în tratatul său [55], [56].

Ecuațiile integrale propuse de N. I. Mushelișvili [62] [171] pentru rezolvarea problemei pot fi aplicate la domenii limitate de contururi de un tip mai general, dacă integralele din aceste ecuații sînt considerate drept integrale Stieltjes sau integrale Radon-Carleman, după cum a făcut L. G. Magnaradze [150], [151] pentru domenii mărginite de contururi cu puncte anguloase. Aceste tipuri de ecuații pot servi cu succes pentru rezolvarea numerică a numeroase probleme la limită plane.

O altă formulare importantă, sub formă de ecuații integrale de funcții complexe, se datorește lui D. I. Șerman [188], [189], formulare analoagă cu cea obținută de G. Lauricella [146] în real. Ecuațiile Lauricella-Șerman sînt utile pentru primele două probleme fundamentale și au permis numeroase aplicații. În cazul problemei mixte, Șerman [190] a ajuns la unele ecuații integrale singulare, care au fost studiate ulterior de G. F. Mandjavidze [152].

Ch. Massonet [154] și L. Beskin [103] stabilesc de asemenea unele ecuații integrale ale problemei.

Din cele expuse mai sus rezultă că reprezentarea soluției problemei plane a teoriei elasticității cu ajutorul unor potențiali reali sau complecși permite construirea unei teorii deplin închegate a acestei probleme, mai simplu și mai complet decît prin orice alte metode de calcul.

3.9. O altă metodă utilă de calcul practic este cea a diferențelor finite; se pot folosi rețele dreptunghiulare, triunghiulare, exagonale etc. De obicei se utilizează arce de parabolă pentru aproximarea laturilor curbilinii ale rețelei; pentru rezultate mai exacte se pot folosi arce de parabolă de grad superior.

P. Dubas [15] a găsit pentru arce de parabolă de gradul al patrulea o ingenioasă metodă de separare a problemei în două trepte de rezolvare, folosind de fiecare dată cîte o parabolă de gradul al doilea; aceasta rezultă dintr-o analogie cu poligoanele funiculare, dîndu-se astfel o interesantă interpretare statică acestei probleme (sugerată de F. Stüssi [197], [198]).

Problema se reduce la rezolvarea unui sistem finit de ecuații algebrice liniare; pentru un anumit domeniu și o anumită rețea, încărcarea nu afectează decît termenii liberi ai sistemului. Se pot obține astfel „coeficienți de influență”, independenți de încărcare, tabulați pentru diferite domenii mai importante și diferite tipuri de rețele. Rezultate interesante în această direcție au dat H. Bay [2] și P. M. Varvak [87].

Unul din aspectele cele mai moderne ale metodelor iterative de calcul, folosite pentru rezolvarea sistemului de ecuații liniare menționat mai sus, este metoda relaxării a lui R. V. Southwell [80], aplicată de L. Fox [114], [115] pentru problema plană. Un alt aspect este aplicarea ,,metodei colocației''.

Legată de metoda rețelelor este ideea aproximării grinzii perete cu o rețea de grinzi și înlocuirea calculului ei prin calculul eforturilor în această rețea [131], [136], [169].

3.10. Metoda aproximării condițiilor pe contur în puncte, inițiată în [48], [135] și dezvoltată în [201], [207] constă în alegerea unei funcții potențial de o formă cît mai simplă (de obicei polinoame biarmonice) ai cărei parametri arbitrari se determină prin verificarea condițiilor pe contur într-un număr finit de puncte; această funcție ne dă starea de tensiune și starea de deformație pentru orice punct din interiorul corpului, permițînd de asemenea să se aprecieze eroarea maximă. Din punct de vedere matematic se ajunge la rezolvarea unui sistem finit de ecuații algebrice liniare, motoda putînd fi aplicată cu multă ușurință.

3. 11. B. Sen [187] rezolvă unele probleme printr-un procedeu de suprapunere a efectelor. G. A. Grinberg, N. N. Lebedev și I. S. Ufliand [128] au căutat să dea o formă generală pentru funcția potențial; I. Babuška [100], [101] a continuat aceste studii pentru unele domenii particulare.

În general, metodele aproximative de calcul care s-au imaginat sînt foarte variate. De exemplu, W. Valentin [221] a prezentat o metodă de calcul a unei grinzi perete pe fîșii.

De asemenea, metodele prezentate pot avea — în general — interesante interpretări grafice; de exemplu, metoda lui P. Dubas [15] admite un asemenea calcul grafic, deoarece poligoanele funiculare se pot construi cu ușurință. Reamintim interpretarea mecanică a funcției de tensiune, eforturile într-o secțiune normală a unei bare putîndu-se obține pe cale grafică.

Metoda grafo-mecanică a lui Ch. Massonet [155] se situează oarecum la jumătatea drumului între metodele analitice și cele experimentale, pornind de la anumite stări de tensiune cunoscute și folosind un sumator adecvat acestei operații. De asemenea, H. Poncin [181] a studiat cazul în care sînt cunoscute anumite deformații pe conturul corpului (deformații impuse sau măsurate pe o anumită grindă perete sau pe un model), arătînd cum se pot calcula aceste mărimi și în interior, printr-un anumit procedeu de prelungire funcțională.

3.12. Trebuie să amintim de asemenea posibilitatea utilizării mașinilor electronice de calcul. Acestea pot folosi fie ca auxiliar pentru efectuarea a diferite calcule intermediare (de exemplu rezolvarea sistemelor de ecuații algebrice liniare care intervin în metoda rețelelor, în metoda punerii condițiilor pe contur în puncte etc.), fie pentru executarea unui program după un anumit algoritm de calcul. Menționăm că, în afară de mașinile electronice digitale, se pot folosi și mașinile analogice, efectuînd — de exemplu — o integrare cu diferențe finite pe o direcție și o integrare continuă pe cealaltă direcție, cu ajutorul analizatorului diferențial.

3.13. K. Wieghardt [224] a observat în 1908 analogia dintre ecuaţia biarmonică pe care o verifică funcţia lui Airy şi ecuaţia plăcilor plane, supuse la încovoiere, în lipsa unei sarcini normale la planul median. Funcţia F de tensiune se poate obţine astfel pe cale experimentală, pe un model, ca suprafaţa medie deformată a unei plăci plane subţiri, neîncărcată, dar supusă la anumite deformaţii pe contur (corespunzătoare condiţiilor la limită din problema plană). Tensiunile normale vor fi proporţionale cu curburile acestei suprafeţe iar tensiunea tangenţială va fi proporţională cu torsiunea geodezică.

Această analogie a fost extinsă de R. D. Mindlin [166] pentru domenii multiplu conexe şi pentru acţiunea forţelor masice şi a variaţiilor de temperatură. Interesante experienţe în această direcţie a întreprins P. Dantu [109], [110] printr-un procedeu original. A. S. Kalmanok [37], [38], [140] a folosit această analogie pentru un calcul analitic al unei grinzi perete cu contur dreptunghiular.

De asemenea, o interesantă analogie a problemei plane a teoriei elasticităţii cu problema mişcării lente plane a unui fluid vîscos a fost dată de J. N. Goodier [122], [123], [124] în anul 1934.

3.14. După cum am arătat mai sus, P. Dantu a pus la punct o metodă optică (experimentală) a reţelelor, care se bazează pe un efect de moarare. O altă metodă experimentală care a început să fie mult folosită în ultimul timp este metoda lacurilor casante (care, acoperind feţele unei grinzi perete, crapă de-a lungul liniilor izostatice). De asemenea, se pot folosi pentru determinarea stării de deformaţie tensometre mecanice sau electronice [144], punîndu-se apoi problema determinării componentelor tensorului tensiune.

Cea mai cunoscută metodă experimentală este însă metoda fotoelastică, bazată pe încercările pe modele executate dintr-un material special optic sensibil, transparent şi izotrop care, sub acţiunea sarcinilor exterioare, devine optic anizotrop şi capătă proprietatea de a polariza lumina. Posibilitatea de a efectua un asemenea studiu se bazează pe faptul că, în cazul domeniilor simplu conexe, starea de tensiune nu depinde de constantele elastice ale materialului iar în cazul domeniilor multiplu conexe această dependenţă se poate neglija pentru tensiunile maxime (deci nu se pun probleme de similitudine mecanică).

Această metodă experimentală a luat o dezvoltare foarte mare, studiindu-se multe probleme concrete la limită, pentru care trimitem la cele mai cunoscute monografii [8], [10], [12], [14], [16], [18], [19], [20], [30], [32], [33], [34], [35], [39], [43], [44], [54], [58], [59], [71], [73], [88], [92], [93], [95]; menţionăm că s-au elaborat diferite metode de calcul pentru determinarea stării de tensiune, atunci cînd se cunosc liniile izocline (locul geometric al punctelor care au aceleaşi direcţii principale) şi liniile izocrome (locul geometric al punctelor în care diferenţa tensiunilor normale principale este constantă). Credem că apariţia şi aplicarea metodelor fotoelasticităţii constituie o a patra etapă importantă în dezvoltarea problemelor plane ale teoriei elasticităţii. (Trebuie să menţionăm că bazele teoretice şi practice s-au pus încă din secolul trecut, de exemplu lucrările lui J. C. Maxwell [157], cercetări temeinice făcîndu-se însă din prima jumătate a acestui secol).

Dacă în loc de liniile izocline se pot determina liniile izopahe (în lungul cărora suma tensiunilor normale principale este constantă), starea de tensiune se obține imediat. Pentru determinarea liniilor izopahe se poate folosi și metoda franjelor de interferență [117], analogia de membrană a lui L. Prandtl [183], dezvoltată în [126], [127], analogia cu cîmpul electric plan staționar, analogia cu mișcarea plană potențială a unui fluid ideal incompresibil [32] etc.

§ 4. PROBLEME LA LIMITĂ

4.1. Ne vom referi, în cele ce urmează, la cele trei probleme fundamentale pentru corpuri simplu conexe, liniar elastice, omogene și izotrope, în cazul micilor deformații, supuse la acțiunea unor sarcini pe contur și a unor forțe masice. Domeniile considerate pot fi, în general, clasificate după sistemul de coordonate folosit.

Astfel, un număr mare de studii s-au făcut în coordonate carteziene ortogonale, în special pentru un domeniu dreptunghiular sau pentru domenii infinite obținute din acesta prin aruncarea la infinit a uneia, două, trei sau a tuturor celor patru laturi ale sale (vom neglija, la început, acțiunea forțelor masice). Pentru date bibliografice se poate consulta [83], metodele de calcul folosite fiind — în special — cele elementare sau seriile și integralele Fourier.

Un mare număr de studii au fost dedicate problemei grinzii drepte (de secțiune dreptunghiulară), care poate fi considerată supusă la o stare de tensiune plană. Rezultatele obținute pot fi comparate cu rezultatele date de metodele rezistenței materialelor, stabilind astfel limitele de aplicabilitate ale acestora din urmă. De obicei, într-un asemenea caz se pun condiții globale (pentru eforturile pe secțiune) pe două din laturile dreptunghiului. Punerea corectă a condițiilor la limită pentru un dreptunghi elastic conduce la rezolvarea unui sistem infinit de ecuații algebrice liniare cu o infinitate de necunoscute. Prezintă, în special, interes prima problemă fundamentală și problema mixtă (unele laturi încastrate sau cu deplasări impuse — încastrări elastice).

Domeniile infinite menționate mai sus se pot studia analog, folosind funcții de tensiune din aceeași familie [205]. În cazul semibenzii elastice [206] se ajunge la un sistem infinit de ecuații algebrice liniare iar în cazul sfertului de plan elastic [208] la un sistem de ecuații integrale de tip Fredholm de speța a doua. Pentru semiplanul elastic și banda elastică se pot scrie rezultate finale sub formă explicită.

Este important de menționat faptul că, pentru fiecare din aceste probleme, se pot folosi și s-au folosit variate metode de calcul, dintre cele expuse în paragraful precedent, în afară de metoda potențialilor reali (considerată în expunerea noastră) și metoda potențialilor complecși.

4.2. O trecere în coordonate carteziene oblice permite transformarea cu ușurință a rezultatelor menționate mai sus pentru un paralelogram elastic sau pentru domeniile plane infinite obținute din acesta prin aruncarea la infinit a uneia sau a mai multor laturi ale sale [204], [209]. În special, prin analogia cu sfertul de plan elastic se obțin rezultate pentru pana elastică.

4.3. Pentru domeniile mărginite de arce de cerc și raze polare sînt foarte utile coordonatele polare. Unele studii importante în această direcție se datoresc lui J. H. Michell [161], [162], care a pus și bazele utilizării transformării prin inversiune; el studiază cazul discului circular ca și cazul unei pene elastice sub acțiunea unor sarcini concentrate în vîrf. Menționăm cercetările lui A. W. Gadolin și H. S. Golovin privind deformația plană a cilindrilor groși.

Într-un asemenea sistem de coordonate, B. G. Galerkin [21] dă rezultate interesante pentru trapezul elastic infinit. Se studiază sectorul de cerc și sectorul de inel circular, pana elastică și, în particular, semiplanul elastic. Este foarte dificil de a indica o bibliografie în această direcție, în afară de monografiile menționate anterior (numai pentru pana elastică în diferite cazuri de rezemare și încărcare s-au scris peste o sută de articole). Menționăm numai paradoxul observat relativ recent în ce privește problema lui S. D. Carothers [107], [108] (pana elastică acționată de un moment concentrat în vîrf) de către E. Sternberg și W. T. Koiter [194], paradox conform căruia rezultatele clasice depind de unghiul de la vîrf al penei. Un studiu foarte detaliat în această direcție a publicat H. Neuber [176], specialist în problema stărilor de tensiune locală.

Pornind de la cazul penei elastice și semiplanului elastic sub acțiunea unor sarcini concentrate pe linia de frontieră se pot întreprinde unele studii aproximative, în coordonate polare, pentru domenii oarecare acționate de sarcini concentrate pe frontieră.

4.4. Studiul planului elastic (infinit) supus acțiunii unor sarcini concentrate (forță concentrată, moment concentrat, pereche de două forțe concentrate egale, de sens contrar, avînd același suport și punctele de aplicație infinit vecine sau nucleu de deformație elastică) se poate face pe diferite căi; este interesantă, în acest caz, utilizarea teoriei distribuțiilor, care permite o reprezentare corectă a unor asemenea sarcini prin funcții generalizate. Menționăm problema trecerii de la o forță concentrată, aplicată într-un punct, la aceeași forță aplicată într-un punct foarte apropiat. Apare noțiunea de moment dirijat (cuplu de două forțe, care depinde de direcția forțelor) și de sistem de două forțe opuse, egale în mărime și aplicate în puncte foarte apropiate; dacă asemenea forțe acționează pe conturul unui cerc de rază mică, obținem un nucleu de deformație elastică.

În cazul unui domeniu oarecare (finit sau infinit) se pot folosi rezultatele obținute în cazul planului elastic și principiul suprapunerii efectelor, problema reducîndu-se la studiul domeniului respectiv acționat de anumite sarcini convenționale pe contur.

4.5. O altă metodă de calcul la acțiunea sarcinilor concentrate interioare constă în aproximarea acestor sarcini cu forțe masice concentrate. Este astfel utilă sistematizarea problemei plane în cazul unor forțe masice oarecare, obținută atît în cazul potențialilor reali [202] cît și în cazul potențialilor complecși [218], [222] prin introducerea unor integrale particulare, pentru domenii simplu şi multiplu conexe, şi prin studiul domeniului respectiv pentru o sarcină convenţională pe contur.

De exemplu, în cazul dreptunghiului elastic sau al domeniilor infinite provenite din acesta se pot reprezenta forţele masice cu ajutorul seriilor duble Fourier, integralelor duble Fourier sau a seriilor Fourier pe o direcţie şi a integralelor Fourier pe cealaltă direcţie [186], [210]; se obţine astfel o problemă cunoscută (domeniul respectiv acţionat pe contur de sarcini reprezentate prin serii sau integrale Fourier).

4.6. Problemele studiate şi menţionate mai sus au toate aceeaşi caracteristică : domeniile respective sînt mărginite de linii de coordonate în sistemul de coordonate folosit, astfel încît pe contur una din coordonate devine constantă (ceea ce simplifică punerea condiţiilor la limită şi rezolvarea problemei). Aceasta sugerează folosirea unui sistem de coordonate curbilinii, funcţie de domeniul dat, astfel, încît conturul acestuia să fie format din linii de coordonate. S-a efectuat astfel un studiu şi s-a dat o formulare a problemei în coordonate curbilinii oarecare [211], [212]; drept cazuri particulare se pot folosi coordonatele izogonale, ortogonale, izoterme, rectilinii oarecare, de translaţie etc. Menţionăm că, pînă în prezent, s-au folosit cel mai mult coordonatele izoterme.

§ 5. PROBLEME PLANE SPECIALE

5.1. Metodele de calcul folosite în cazul problemei plane clasice a teoriei elasticităţii pot fi extinse la un mare număr de asemenea probleme plane, în care intervin şi alte tipuri de sarcini exterioare sau pentru care legea constitutivă a materialului este diferită de cea corespunzătoare cazului elastic, liniar, omogen şi izotrop.

În primul rînd vom menţiona cazul domeniilor multiplu conexe; structura funcţiilor potenţial într-un asemenea caz suferă oarecare schimbări, prin apariţia unor termeni corespunzători numărului de goluri interioare. În cazul potenţialilor reali, problema a fost cercetată de G. Grioli [132] iar în cazul potenţialilor complecşi de N. I. Mushelişvili [61]; o interesantă sinteză a fost făcută de Cr. Teodosiu [217].

Această problemă prezintă interes pentru cercetarea concentrărilor de tensiune în corpurile cu goluri interioare. S-a studiat astfel cazul planului şi semiplanului elastic cu unul sau două goluri interioare, de diferite forme (circulare, eliptice etc.). De asemenea s-a considerat cazul unui şir infinit de asemenea goluri (problema, redusă la o ecuaţie integrală, a fost studiată de S. G. Mihlin [56]) ca şi cazul — dificil — al unui număr finit de goluri [129], [130]. Aceste domenii s-au considerat, în general, acţionate la infinit de o tensiune uniformă sau supuse greutăţii proprii (problemă importantă în geotehnică). Problema este mai dificilă în cazul domeniilor finite cu goluri interioare. Metoda funcţiilor de variabilă complexă a fost aplicată cu succes în cazul multor probleme de G. N. Savin [75].

Diferite probleme de concentrări de eforturi se găsesc în [63].

Un alt caz important este cel în care golurile se reduc la o linie (dreaptă sau curbă) şi apar fisuri. Problema se atacă fie prin tinderea la limită a unui gol interior, fie prin metode speciale adecvate acestui caz. Rezultate interesante în această direcţie a dat G. I. Barenblat [102].

5.2. În ultimul timp sînt din ce în ce mai mult luate în considerare problemele cvasiplane, atît pentru a obţine o soluţie cu o exactitate mai mare, după cum s-a menţionat la punctul 2.1, cît şi pentru a aproxima starea de solicitare în elemente de construcţie mai complexe, cum sînt grinzile pereţi de grosime variabilă.

5.3. O problemă specială, care prezintă o deosebită importanţă în practică, este problema de contact. Din punct de vedere matematic, problema se reduce la integrarea unor ecuaţii integrale sau a unor ecuaţii integro-diferenţiale. S-a studiat, în special, problema contactului a două corpuri cilindrice, mărginite de suprafeţe laterale oarecare, de-a lungul unei generatoare comune, considerînd că ambele corpuri sînt deformabile sau că unul din acestea joacă rolul unei ştanţe rigide.

Menţionăm, mai ales, cazul acţiunii unei ştanţe rigide asupra semiplanului elastic (ştanţa poate fi dreptunghiulară sau poate fi un poanson de diferite forme : unghiular, circular, parabolic etc.). În legătură cu aceste probleme se pot consulta monografiile lui I. A. Galin [22] şi I. I. Ştaerman [81].

O problemă interesantă, pusă şi studiată de A. Signorini [76], este cea a unui corp elastic ce se reazemă continuu pe un semiplan rigid ; sub acţiunea sarcinilor exterioare, corpul elastic se deformează, unele puncte de pe conturul său desprinzîndu-se de linia de separaţie a semiplanului elastic iar alte puncte rămînînd în contact cu semiplanul. Deoarece nu se ştie *apriori* care puncte fac parte din prima categorie şi care din cea de-a doua, aceasta este o problemă la limită „ambiguă'', care a suscitat numeroase studii, între care pe cele datorite lui G. Fichera (sub tipar în publicaţii italiene).

5.4. Un element nou care poate fi introdus îl formează forţele de inerţie, ecuaţiile de echilibru (2) devenind ecuaţii de mişcare. Problema dinamică plană a teoriei elasticităţii a fost formulată folosind potenţiali reali, atît în deplasări [104], [193], cît şi în tensiuni (cu ajutorul a trei funcţii de tensiune [168] sau cu ajutorul unei singure asemenea funcţii [199]) ; o formulare în potenţiali complecşi [184] a condus la utilizarea metodei funcţiilor de variabilă complexă, ca şi în cazul static.

Un caz important în practică este cazul cvasistatic, pentru care metodele generale utilizate în cazul static pot fi extinse cu succes [213]. Menţionăm că, în cazul dinamic, este deosebit de utilă metoda transformărilor integrale [36], [68].

În cazul vibraţiilor amortizate se pot introduce forţe de amortizare proporţionale cu vitezele, ce intervin în probleme de seismologie, după B. Galiţîn [119], dîndu-se o formulare matematică analogă [200].

5.5. Problemele plane capătă o formulare interesantă în cazul limită al corpurilor incompresibile (coeficientul lui Poisson $\mu = 1/2$). Este interesant de menţionat că acest caz poate constitui şi o primă aproximare de calcul pentru problema generală (corpul compresibil), care poate fi redusă la rezolvarea unei succesiuni de probleme incompresibile. Interesante cercetări în această direcție a întreprins J. Golecki [120], [121].

5.6. Cazul corpurilor liniar elastice, omogene și anizotrope suscită un interes din ce în ce mai mare în ultimul timp, datorită faptului că corpurile reale și materialele de construcție folosite se bucură de asemenea proprietăți. După ce, în secolul trecut, disputa constantelor elastice a luat sfîrșit prin admiterea unanimă a faptului că există 21 de constante elastice distincte și prin acceptarea considerațiilor energetice făcute de G. Green, a trecut mult timp pînă să se treacă la rezolvarea de probleme concrete la limită. S-a studiat, în special, cazul corpurilor cu izotropie transversă și cazul corpurilor ortotrope (în practică, cazul unor grinzi pereți cu rigidizări a putut fi adesea aproximat cu cazul unor grinzi pereți ortotrope de grosime constantă). Evident, toate problemele menționate la punctele precedente din acest paragraf s-au pus și în cazul corpurilor anizotrope. Rezultate cu caracter general, formulări ale problemei (prin analogie cu formulările în potențiali reali și complecși pentru corpuri izotrope) și rezolvări de probleme concrete la limită se dau în [28], [60], [116], [138], [167], [203]; menționăm, mai ales, monografiile [11], [45], [46].

În unele cazuri mai simple problemele se pot reduce, formal, la probleme corespunzătoare corpurilor izotrope. De cele mai multe ori însă se obțin rezultate calitativ diferite. Din punct de vedere matematic, aceasta se explică și prin faptul că ecuația cu derivate parțiale de ordinul al patrulea care guvernează fenomenul nu mai este biarmonică (putînd fi redusă la o ecuație biarmonică numai în cazuri particulare). În acest caz, formula de reprezentare (11) nu mai este valabilă, putînd — eventual — încerca o reprezentare a soluției cu ajutorul teoremei lui Boggio [105], după cum s-a arătat în [203]; remarcăm că o asemenea reprezentare nu mai rămîne valabilă cînd, la limită, trecem la corpul izotrop.

5.7. Din punct de vedere al neomogenității, distingem între neomogenitate continuă și discontinuă (corpuri stratificate).

Problema plană pentru corpuri izotrope cu neomogeneitate continuă (caracterizate prin constante elastice funcții de punct) a fost formulată prin potențiali reali [215], [216] și prin potențiali complecși [165], conducînd — în general — la ecuații liniare cu coeficienți variabili; este de remarcat că aceste ecuații se pot integra printr-o metodă de aproximații succesive, rezolvînd un șir de probleme plane clasice cu condiții convenționale la limită, pentru același domeniu. Astfel, problema penei elastice a fost studiată printr-o metodă inversă de S.G. Lehnițchi [149]. W. Olszak și J. Rychlewski [178] și-au pus problema determinării neomogenității care corespunde la stări de tensiune elementare date. Menționăm că ecuațiile problemei devin cu coeficienți constanți numai dacă coeficienții elastici au o variație exponențială de la punct la punct.

În ceea ce privește corpurile stratificate, s-a studiat cazul planului infinit, format din două semiplane cu proprietăți elastice diferite, cazul domeniului format de o bandă elastică și semiplanul elastic (care corespunde, din punct de vedere tehnic, și unei grinzi pereți pe o grindă elastică [83]), cazul domeniului format din două benzi elastice etc.

Din punct de vedere seismic, se pun probleme importante de propagare şi reflectare a undelor elastice în asemenea medii, de exemplu undele de tip Love [49].

De asemenea, s-a considerat şi cazul general al corpurilor anizotrope şi neomogene. Trebuie să menţionăm însă că, pînă în prezent, nu este suficient de bine definită noţiunea de neomogenitate ; într-adevăr, printr-o transformare în coordonate curbilinii oarecare, pornind de la un corp anizotrop şi omogen, se poate obţine o formă a legii lui Hooke corespunzătoare unui corp neomogen cu anizotropie curbilinie. S-a încercat să se definească noţiunea, admiţînd că un corp rămîne omogen în orice sistem de coordonate folosit ; problema rămîne însă deschisă.

5.8. Probleme speciale se pun în cazul mediilor pulverulente, caz în care se pot introduce cu succes şi variabile aleatoare.

Probleme importante se pun şi în cazul unor solide deformabile caracterizate prin legi constitutive mai complicate. Menţionăm astfel cazul corpurilor neliniar elastice din punct de vedere fizic, cazul corpurilor hipoelastice şi cazul corpurilor hiperelastice etc., pentru care este încă foarte puţin făcut din punctul de vedere al problemei plane.

De asemenea, multe din rezultatele obţinute în cazul clasic ca şi din metodele de calcul menţionate mai sus pot fi extinse la corpurile liniar reologice (corpuri vîscoelastice). De altfel, pentru anumite tipuri de corpuri vîscoelastice, rezultatele din cazul clasic pot fi adaptate imediat.

În cazul corpurilor elastoplastice problema se pune în mod puţin diferit, după teoria de plasticitate care se adoptă. Menţionăm însă că, în cadrul teoriei dislocaţiilor (care tinde să reducă problemele teoriei plasticităţii la probleme ale teoriei elasticităţii prin introducerea — în special — a noţiunii de densitate a dislocaţiilor, caracterizînd proprietăţile plastice ale corpului), se pot extinde metodele de calcul din cazul clasic ; de altfel, pînă în prezent s-au făcut puţine studii în această direcţie (pentru date bibliografice trimitem la [145]).

5.9. Recent a apărut un studiu [118] privind aspectul relativistic al problemelor teoriei elasticităţii. Credem că ar fi interesantă considerarea cazului plan corespunzător.

5.10. Problema generală a deformaţiilor elastice finite capătă simplificări importante în cazul plan. Totuşi pînă în prezent s-au făcut puţine studii în această direcţie. Pentru bibliografie generală şi rezultate în această direcţie se pot consulta [27], [28], [65], [66], [220].

Menţionăm că problema neliniară se pune atît din punct de vedere al geometriei deformaţiilor cît şi din punct de vedere al ecuaţiilor de echilibru sau de mişcare. De altfel, actualmente, stabilitatea elastică a plăcilor plane supuse la o stare de tensiune plană se studiază cu ajutorul ecuaţiei lui Th. von Karmán (deci folosind metode de calcul ale rezistenţei materialelor : ipoteze suplimentare simplificatoare, în speţă ipoteza lui G. R. Kirchhoff, şi scriind ecuaţiile de echilibru pe forma deformată a corpului) (se poate consulta, de exemplu [7], [40]). Ţinînd însă seama de ambele feluri de neliniarităţi menţionate mai sus, se poate formula şi problema generală plană a stabilităţii elastice (o direcţie de cercetare în care de asemenea nu s-a întreprins nimic pînă în prezent).

5.11. În ultimul timp se cercetează mult probleme complexe, în care fenomenele mecanice sînt legate de alte fenomene de ordin fizic, în special. Astfel, termoelasticitatea asociază la ecuaţiile teoriei elasticităţii ecuaţia de propagare a căldurii. Cele mai multe studii s-au întreprins pentru cazul în care, cunoscînd variaţia de temperatură în tot domeniul considerat, se trece la rezolvarea problemei de elasticitate, formal problema fiind analogă cu cea în care apar forţe masice oarecare; cazul dinamic prezintă dificultăţi de calcul mai mari.

Un interes teoretic deosebit îl prezintă cazul ecuaţiilor cuplate (în ecuaţia de propagare a căldurii intervine şi influenţa compresibilităţii solidului elastic), ecuaţiile ne mai putînd fi studiate separat şi trebuind să găsim o reprezentare prin potenţiali reali mai complicată [139]; de remarcat însă că, din punct de vedere practic, de cele mai multe ori această tratare mai exactă a problemei are o influenţă foarte mică faţă de cazul aproximativ (ecuaţiile necuplate).

Probleme termoelastice se pun atît pentru corpuri liniar elastice, izotrope şi omogene cît, recent, şi pentru corpuri anizotrope sau neomogene [106], [203]. Pentru date bibliografice şi rezultate în această direcţie trimitem la monografiile publicate pînă în prezent [9], [23], [50], [53], [67], [69], [70].

5.12. O altă disciplină, care s-a dezvoltat în ultimii cinci ani, mai ales în R. P. Polonă, este magnetoelasticitatea (ecuaţiile teoriei elasticităţii sînt asociate cu ecuaţiile cîmpului electromagnetic ale lui Maxwell). În mod obişnuit, problema se liniarizează; astfel au fost realizate un număr destul de mare de studii privind propagarea undelor magnetoelastice [225].

În cazul apariţiei momentelor masice (datorite unui cîmp electromagnetic), tensorul tensiune devine asimetric, avînd de-a face cu un studiu de elasticitate asimetrică. Rezultate în această direcţie ca şi pentru cazul în care apare o asimetrie locală datorită unor momente concentrate pe suprafaţa exterioară a corpului, au fost date de G. Grioli [29], [133].

5.13. În afară de disciplinele menţionate mai sus, care au luat naştere mai mult sau mai puţin recent, se fac studii în domenii mai complexe, de exemplu: termoelasticitate, magnetoelasticitate etc. De asemenea, s-a formulat problema plană a magnetotermoelasticităţii [177]. Toate aceste fapte arată încercarea oamenilor de ştiinţă de a studia problemele legate de fenomenele naturii în ansamblul lor, observînd interdependenţa ce există între ele.

§ 6. CONCLUZII

6.1. Studiul problemelor plane clasice prezintă în sine un interes incontestabil. S-a obţinut pînă în prezent un mare număr de rezultate utile în practică şi interesante din punct de vedere teoretic. Evident, mai sînt domenii care prezintă interes şi care nu sînt suficient de bine studiate.

Importanța acestor studii constă însă și în ideile și liniile de cercetare pe care le imprimă pentru problemele plane neclasice, după cum s-a văzut în paragraful precedent. Majoritatea cercetărilor întreprinse în această direcție au generalizat rezultate obținute anterior, arătînd de asemenea și eventualele corecții aduse la aceste rezultate.

6.2. Ținînd seama de faptul că, în cazul plan, apar simplificări importante de calcul, este practic ca diferite probleme să se studieze mai întîi într-un asemenea caz. Aceasta dă indicații și pentru posibilitățile de rezolvare a problemelor spațiale (tridimensionale). De exemplu, problema paralelipipedului elastic ca și a domeniilor infinite obținute din acesta prin aruncarea la infinit a uneia, două sau mai multe fețe ale sale se poate studia analog cu problema dreptunghiului elastic și a domeniilor infinite obținute, din acesta prin aruncarea la infinit a uneia sau mai multe laturi ale sale.

De asemenea, studiile fotoelastice clasice au condus la fotoelasticitatea tridimensională.

Cele menționate mai sus arată că problemele plane, atît cele clasice cît și cele neclasice, sînt actuale, fiind încă multe cercetări de întreprins în această direcție.

Primită la redacție la 24 decembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

A. CĂRȚI

1. I. Babuška, K. Rektorys, F. Vyčiochlo, *Matematická theorie rovinné pružnosti.* Nakladat. Česk. Akad. Věd, Praha, 1955; *Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme.* Akad. Verlag, Berlin, 1960.
2. H. Bay, *Über den Spannungszustand in hohen Trägern und die Bewehrung von Eisenbetontragwänden* (Dissertation), Stuttgart, 1931.
3. O. Belluzzi, *Scienza delle costruzioni.* vol. 3, *Elementi di Teoria dell'elasticità con applicazioni. Le lastre piane.* N. Zanichelli Ed., Bologna, 1955.
4. С. М. Белоносов, *Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей.* Изд. сибирск. отд. АН СССР, Новосибирск, 1962.
5. K. Beyer, *Die Statik im Eisenbetonbau. Ein Lehr und Handbuch der Baustatik.* ed. II, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956.
6. C. B. Biezeno, R. Grammel, *Technische Dynamik.* vol. I, ed. II, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1953.
7. Fr. Bleich, *Buckling strength of metal structures.* McGraw Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1952.
8. H. Le Boiteux, R. Boussart, *Elasticité et Photoélasticimétrie.* Ed. Hermann, Paris, 1940.
9. B. Boley, J. Weiner, *Theory of thermal stresses.* J. Wiley & Sons. Inc. Publ., New York-London, 1960.
10. M. Bricas, *La théorie de l'élasticité bidimensionnelle.* Athènes, 1937.
11. J. Brilla, *Anizotropické steny.* Vidavat. Slovenskej Akad. Vied, Bratislava, 1958.
12. E. Butty, *Tratado de elasticidad teorico-tecnica* (*Elastotecnia*). vol. I, Centro Estud. de Ing., Buenos Aires, 1957.
13. С. А. Чаплыгин, *Собрание сочинений.* том. III, Академкнига. Москва, 1950.
14. E. G. Coker, L. N. G. Filon, *A treatrise on photoelasticity.* ed. II (revăzută de H. T. Jessop), University Press, Cambridge, 1957.

15. P. Dubas, *Calcul numérique des plaques et des parois minces*. Publ. de l'Inst. de statique appliquée, nr. 27, Ed. Leeman, Zürich, 1954.
16. L. N. G. Filon, *Manuel de photoélasticité*. Paris, 1942.
17. L. Föppl, *Drang und Zwang, Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure*. vol. III. *Der ebene Spannungszustand*. Leibniz Verlag, München, 1947.
18. L. Föppl, E. Mönch, *Praktische Spannungsoptik*. ed. II, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959.
19. L. Föppl, H. Neuber, *Festigkeitslehre mittels Spannungsoptik*. Ed. Oldenburg, München-Berlin, 1935.
20. M. M. Frocht, *Photoelasticity*. vol. I, II, ed. II, J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.
21. Б. Г. Галеркин, *Собрание сочинений*. том I, Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1952.
22. Л. А. Галин, *Контактные задачи теории упругости*. Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1953.
23. B. E. Gatewood, *Thermal stresses, with applications to airplanes, missiles, turbines and nuclear reactors*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1957.
24. K. Girkmann, *Flächentragwerke*. ed. V, Springer-Verlag, Wien, 1959.
25. И. И. Гольденблат, *Расчет и конструирование железобетонных балок-стенок*. Стройиздат Наркомстроя, Москва, 1940.
26. J. N. Goodier, P. J. Hodge jr., *Elasticity and plasticity*. J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1958.
27. A. E. Green, J. E. Adkins, *Large elastic deformations and nonlinear continuum mechanics*. Clarendon Press, Oxford, 1960.
28. A. E. Green, W. Zerna, *Theoretical elasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1954.
29. G. Grioli, *Mathematical theory of elastic equilibrium (recent results)*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1962.
30. A. W. Hendry, *An introduction to photoelastic stress analysis*, Blackie & Son,, Glasgow, 1948.
31. R. L'hermite, *Résistance des matériaux, théorique et expérimentale*. vol. I, Dunod, Paris, 1954.
32. M. Hetenyi, *Handbook on experimental stress analysis*. J. Wiley & Sons, New York, 1950.
33. R. B. Heywood, *Designing by photoelasticity*. Chapman & Hall, London, 1952.
34. N. Iosipescu, *Introducere în fotoelasticitate*. vol. I, II, Ed. tehnică, Bucureşti, 1958, 1960.
35. H. T. Jessop, F. C. Harris, *Photoelasticity*. Principles and methods, Cleaver Hume Ltd, London, 1949.
36. S. Kaliski, *Pewne problemy brzegowe dynamiczenej teorii sprężystósci i ciał niesprężystych*. Warszawa, 1957.
37. А. С. Калманок, *Строительная механика пластинок*. Машстройиздат, Москва, 1950.
38. — *Расчет балок-стенок*. Гостехиздат, Москва, 1956.
39. A. Kammerer, *Recherches sur la Photoélasticimetrie*. Ed. Hermann, Paris, 1944.
40. C. F. Kollbrunner, M. Meister, *Ausbeulen*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.
41. Г. В. Колосов, *Применение комплексной переменной к теории упругости*. Москва-Ленинград, 1935.
42. W. Krzyś, M. Życzkowski, *Sprężystość i plastyczność*. Panst. Wyd. Naukowe, Warszawa, 1962.
43. A. Kuske, *Verfahren der Spannungsoptik*, V. D. I., Düsseldorf, 1951.
44. — *Einführung in die Spannungsoptik*. Stuttgart, 1959.
45. С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*. Гостехиздат, Москва, Ленинград, 1950.
46. — *Анизотропные пластинки*. vol. II, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1958.
47. Л. С. Лейбензон, *Курс теории упругости*. ОГИЗ — Гостехиздат, Москва, 1947.
48. — *Собрание трудов*. vol. I, Изд. Акад. наук СССР, Москва, 1951,
49. A. E. H. Love, *A treatrise on the mathematical theory of elasticity*. ed. II, Univ. Press, Cambridge, 1934.
50. Б. М. Майзель, *Температурная задача теории упругости*. Киев, 1951.
51. L. Martini, *Płaskie zagadnenia teorii sprężystości ciała poddanego działaniu sił skupionych*. Panst. Wyd. Naukowe, Warszawa, 1957.

52. C. Mathurin, *Fonction caractéristique d'un contour algébrique simple. Application à l'équation* $\Delta(\Delta\varphi)=0$ *de l'élastostatique plane.* Publ. sci, techn., Min. de l'Air, Paris, 1962.
53. E. Melan, H. Parkus, *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder.* Springer-Verlag, Wien, 1953.
54. G. Mesmer, *Spannungsoptik.* Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1939.
55. С. Г. Михлин, *Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники.* Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1947.
56. — *Интегральные уравнения.* vol. II, Гос. техн. теор. изд., Москва-Ленинград, 1949.
57. — *Вариационные методы в математической физике.* Гостехиздат, Москва, 1957.
58. M. Milbauer, M. Perla, *Fotoelasticimetrické přistroje a měřici metody.* Nakl. Českoslov. Akad. Věd, Praha, 1959.
59. — *Fotoelasticimetrie a příklady jejího použití.* Nakl. Českoslov. Akad. Věd, 1961.
60. L. M. Milne -Thomson, *Plane elastic systems.* Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
61. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория упругости. Кручение и изгиб.*, ed. IV, Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1954.
62. — *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* ed. II, Физматгиз, Москва, 1962.
63. H. Neuber, *Kerbspannungslehre.* ed. II, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.
64. M. Nicolesco, *Les fonctions polyharmoniques.* Act. scientifiques, Paris, 1936.
65. В. В. Новожилов, *Основы нелинейной теории упругости.* Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1948.
66. — *Теория упругости.* Судпромгиз, Ленинград, 1958.
67. W. Nowacki, *Zagadnenia termosprężystości.* Panst. Wyd. Naukowe, Warszawa, 1960.
68. — *Dynamika budowli.* Arkady, Warszawa, 1961.
69. — *Thermoelasticity.* Pergamon-Press, Oxford-London-New York-Paris; Panst. Wyd. Naukowe, Warszawa, 1962.
70. H. Parkus, *Instationäre Wärmespannungen.* Springer-Verlag, Wien, 1959.
71. A. Pirard, *La photoélasticité.* Paris-Lüttich, 1947.
72. И. А. Пратусевич, *Вариационные методы в строительной механике.* Огиз, Москва, 1948.
73. Н. И. Пригородский, А. К. Прейсс, М. Ф. Бокштейн, *Исследование поляризационно-оптическим методом исследований напряжений в кольцевом образце при релаксации.* (Сборник статей). Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1956.
74. M. Ribière, *Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles.* Thèse, Paris, 1889.
75. Г. Н. Савин, *Концентрация напряжений около отверстий.* Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951.
76. A. Signorini, *Questioni di elasticità.* Conferenze del seminario di matematica dell'Università di Bari, n° 48-49-50, N. Zanichelli ed., Bologna, 1959.
77. I. Sneddon, *Fourier transforms.* McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1951.
78. L. Sobrero, *Theorie der ebenen Elastizität.* Verlag B. G. Teubner, Leipzig, 1934.
79. I. S. Sokolnikoff, *Mathematical theory of elasticity.* ed. II, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1956.
80. R. V. Southwell, *Relaxation methods in engineering science. A treatrise on approximate computation.* Univ. Press, Oxford, 1951.
81. И. Я. Штаерман, *Контакная задача теории упругости.* Гостехиздат, Москва — — Ленинград, 1949.
82. N. Teodorescu, *La dérivée aréolaire.* Ann. Roum. de Math., cahier 3, Bucarest, 1936.
83. P. P. Teodorescu, *Probleme plane în teoria elasticităţii.* vol. I, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1961.

84. O. Theimer, *Hilfstafeln zur Berechnung wandartiger Stahlbetonträger*. Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin, 1958.
85. S. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of elasticity*. ed .II, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1951.
86. Я. С. Уфлянд, *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*. Изд. Акад. Наук СССР, Москва-Ленинград, 1963.
87. П. М. Варвак, *Развитие и приложение метода сеток и расчету пластинок*. vol. II, Изд. Акад. Наук Укр. ССР, Киев, 1952.
88. L. Villena, *Fotoelasticidad*. Madrid, 1943.
89. V. Volterra, E. Volterra, *Sur les distorsions des corps élastiques* (*théorie et applications*). Mém. des sc. math., fasc. CXLVII, Gauthiers-Villars, Paris, 1960.
90. Chi-Teh Wang, *Applied elasticity*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1953.
91. H. M. Westergaard, *Theory of elasticity and plasticity*. New York, 1952.
92. H. Wolf, *Spannungsoptik. Ein Lehr-und Nachschlagebuch für Forschung, Technik und Unterricht*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1961.
93. А. К. Зайцев, *Оптический метод изучения напряжений*. Ленинград, 1927.
94. K. Zweiling, *Biharmonische Polynome*, VEB-Verlag-Technik, Berlin, 1952.
95. *** *Handbuch der Physik*, vol. VI, *Elastizität und Plastizität*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.

B. ARTICOLE

96. G.-B. Airy, *On the strains in the interior of beams*. Rept. of the British Assoc. of Adv. Sci., London, 82 (1862).
97. — *On the strains in the interior of beams*. Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London, **153**, 49 (1863).
98. E. Almansi, *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$. Ann. di Matem., seria III, **II**, 1(1898).
99. — *Sulle ricerche delle funzioni poliarmoniche in un area piana semplicemente connessa per date condizionali al contorno*. Rend. del Circolo matem. di Palermo, **13**, 225 (1899).
100. I. Babuška, *Poznamka k jegmany řešení biharmonického problému*. Čas. pro pěst. mat., **79**, 41 (1954).
101. — *O rovinném biharmonickému problému v oblastech s úhlovými body*. Čas. pro pěst. mat., **80**, 448 (1955).
102. G. I. Barenblat, *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*. Adv. in Appl. Mech., Acad. Press, New York, **7**, 55 (1962).
103. L. Beskin, *General solution of two-dimensional problems of elasticity*. J. of Appl. Phys., 7 (1944).
104. R. E. D. Bishop, *Dynamical problems of plane stress and plane strain*. Q.J.M.A.M., **VI**, partea II, 250 (1953).
105. T. Boggio, *Sull'integrazione di alcuni equazioni lineari alle derivati parziali*. Ann. di matem. pura ed appl., seria III, **VIII**, 181 (1903).
106. C. I. Bors, *Tensiuni termice la corpurile ortotrope în cazul problemelor plane*. St. şi cerc. ştiinţ., Matem. (Iaşi), **XIV**, *1* (1962).
107. S. D. Carothers, *Plane strain in a wedge*. Proc. of the Roy. Soc. of Edinbg, **23**, 292 (1912).,
108. — *Plane strain : the direct determination of stress*. Proc. of the Roy. Soc. of London seria A, **197**, 110, (1920).
109. P. Dantu, *Étude expérimentale des plaques par une méthode optique*. Ann. des Ponts et Chaussées, iunie (1952).
110. — *Application à une méthode nouvelle de détermination des contraintes en élasticité plane*. Ann. des Ponts et Chaussées, august (1952).
111. M. Drăganu, *O metodă de rezolvare a problemei biarmonice fundamentale pentru un cerc cu ajutorul funcţiilor analitice*. Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., seria şt. mat.-fiz., **V**, *1*, 517 (1953).

112. L. N. G. Filon, *On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load.* Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London, seria A, **296**, 63 (1903).

113. — *On stresses in multiply-connected plates.* Rept. of the British Assoc. for the Adv. of Sci., London, 305 (1922).

114. L. Fox, *Mixed boundary conditions in the relaxational treatment of biharmonic problems (plane strain or stress).* Proc. of the Roy. Soc. of London, seria A, **189**, 535 (1947).

115. — *Some improvements in the use of relaxation methods for the solution of ordinary and partial differential equations*, Proc. of the Roy. Soc. of London, (1947).

116. М. М. Фридман, *Математическая теория упругости анизотропных сред.* Прикл. мат. и мех., **XIV**, *3*, 321 (1950).

117. M. M. Frocht, *On the optical determination of isopachic stress patterns.* Proc. of the 5- Intern. Congr. of Appl. Mech., 221 (1939).

118. H. Fukutome, *Elastic ether theory of elementary particles.* I, Proc. of theor. phys., **24**, *4*, 877 (1960).

119. B. Galitzin, *Über die Dispersion und Dämpfung der seismischen Oberflächwellen.* Bull. de l'Acad. Imp. des Sc. de St. Petersbourg, seria 6, 219 (1912).

120. J. Golecki, *The stress function for a two-dimensional incompressible nonhomogeneous body in the case of plane stress.* Bull. de l'Acad. Pol. des Sc., série des Sc. Techn., **VII**, *6*, 371 (1959).

121. — *On the assumption of incompressibility in plane problems of the theory of elasticity.* Arch. Mech. Stos., **XI**, *3*, 297 (1959).

122. J. N. Goodier, *An analogy between the slow motions of a visco fluid in two dimensions and systems of plane stress.* Phil. Mag., seria VII, **17**, 554 (1934).

123. — *Additional note on „An analogy between the slow motions of a visco fluid in two dimensions and systems of plane stres".* Phil. Mag., seria VII, **17**, 800 (1934).

124. — *Slow visco flow and elastic deformation.* Phil Mag., seria VII, **22**, 678 (1936).

125. E. Goursat, *Sur l'équation* $\Delta\Delta u = 0$. Bull. de la Soc. Math. de France, **26**, 236 (1898).

126. A. A. Griffith, G. I. Taylor, Techn. Rept. Nat. Adv. Comm. Aeronautics, 950 (1917-1918).

127. — Techn. Rept. Nat. Adv. Comm. Aeronautics, 1920 (1917-1918).

128. Г. А. Гринберг, Н. Н. Лебедев, Я. С. Уфлянд, *Метод решения общей бигармонической задачи для прямоугольной области при задании на контуре значений функции и ее нормальной производной.* Прикл. мат. и мех., **XVII**, *1*, 73 (1953).

129. I. Grindei. *Distribuția tensiunilor în jurul unui număr oarecare de goluri circulare într-un mediu elastic semiplan.* St. și cerc. șt. Matem. (Iași), **XII**, *1*, 171 (1961).

130. — *Calculul tensiunilor într-un mediu elastic semiplan, omogen și greu, prevăzut cu goluri circulare.* St. și cerc. șt. Matem. (Iași), **XIII**, *1*, 189 (1962).

131. L. E. Grinter, *Numerical methods of analysis in engineering (successive corrections).* Symp. at the Illinois Inst. of Techn., New York (1949).

132 G. Grioli, *Struttura della funzione di Airy nei sistemi molteplicemente connessi.* Giorn. Mat. Battaglini, 119 (1947).

133. — *Elasticità asimmetrica.* Ann. Matem. pura ed appl., seria IV, **50** 389, (1960).

134. J. Hadamard, *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées.* Mém. des savants étrangers, Paris, **33**, *4* (1908).

135. R. L'hermite, *Calcul des parois planes et des poutres-cloisons en béton armé.* Génie civil **102**, 393 (1933).

136. A. Hrennikoff, *Framework method and its technique for solving of plane stress problems.* Publ. Intern. Assoc. for Bridge and Struct., Engeen., (1949).

137. C. Iacob, *Asupra problemei biarmonice fundamentale.* Com. Acad. R.P.R., **XII**, *5*, 509 (1962).

138. M. Iacovache, *Aplicarea funcțiilor monogene în sensul lui Feodorov la teoria elasticității corpurilor cu izotropie transversă.* Rev. Univ. „C. I. Parhon" și a Polit. București, seria șt. nat., **I**, *1*, 58 (1952).

139. V. Ionescu-Cazimir, *Asupra ecuațiilor echilibrului termoelastic plan.* Rev. Univ. „C. I. Parhon" și a Polit. București, **I**, *1*, 55 (1952).

140. А. С. Калманок, *К решению задачи о плоском напряженном состоянии прямоугольной пластинки.* Констр. и матер. в городском строит., *6*, 70 (1950).

141. Г. В. Колосов, *Об одном приложении теории функции комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости.* Юрьев (1909).

142. G. V. Kolosov, *Sur une transformation des équations de l'élasticité.* C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des sc., Paris, **184** (1927).

143. A. Korn, *Sur l'équilibre des plaques élastiques encastrées.* Ann. de l'Ecole norm. sup., 3e série, **25**, 529 (1908).

144. G. Kron, *Equivalent circuits of the elastic field.* J. of Appl. Mech., **11**, *3*, 149 (1944).

145. E. Kröner, *Dislocations and continuum mechanics.* Appl. Mech. Rev., **15**, *8*, 599 (1962).

146. G. Lauricella, *Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi.* Rend. della R. Accad. dei Lincei, seria 5, **XV**, 426 (1906).

147. — *Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées.* Acta Mathem., **32**, 201 (1909).

148. R. Legendre, *Emploi des fonctions biharmoniques complexes à la résolution des problèmes de l'élastostatique.* Bull. de la Soc. Mathém. de France, *8* (1953).

149. С. Г. Лехницкий, *Радиальное распределение напряжений в клине и полуплоскости с переменным модулем упругости.* Прикл. мат. и мех., **XXVI**, *1*, 146 (1962).

150. Л. Г. Магнарадзе, *Основные задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками.* Доклады Акад. Наук СССР, **XVI**, *3*, 157 (1937).

151. — *К решению основных задач плоской теории упругости для контуров с угловыми точками.* Доклады Акад. Наук СССР, **XIX**, *9*, 673 (1938).

152. Г. Ф. Манджавидзе, *Об одном сингулярном интегральном уравнении с разрывными коэффициентами и его применения в теории упругости.* Прикл. мат. и мех., **XV**, *3*, 279 (1951).

153. K. Marguerre, *Ebenes und achsensymmetrisches Problem der Elastizitätstheorie.* ZAMM, **13**, *6*, 437 (1933).

154. Ch. Massonet, *Sur le problème aux limites fondamental relatif aux fonctions biharmoniques.* Bull. Soc. Roy. des Sci. de Liège, 308 (1945).

155. — *Résolution graphomécanique des problèmes généraux de l'élasticité plane.* Bull. du Centre d'Etudes, de Recherches et d'Essais scient. des Constr., du Génie civil et d'Hydr. fluviale, **IV** (1949).

156. Cl. Mathurin, *Application de l'algèbre et de l'analyse linéaires à la statique des plaques élastiques.* Journal de Méc., **I**, *3*, 337 (1962).

157. J. C. Maxwell, *On the equilibrium of elastic solids.* Trans. Roy. Soc. of Edinbg., **20**, 87 (1853).

158. — *On reciprocal figures, diagrams in space and their relation to Airy's function of stress.* Proc. of the London Mathem. Soc., **2**, 58 (1868).

159. A. Mesnager, *Sur l'application de la théorie de l'élasticité aux calcul des pièces rectangulaires fléchies.* C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., Paris, **132**, 1475 (1901).

160. J. H. Michell, *On the direct determination of stress in an elastic solid with applications to the theory of plates.* Proc. of the London Mathem. Soc., **31**, 100 (1900).

161. — *Elementary distributions of plane stress.* Proc. of the London Mathem. Soc., **32**, 35 (1900).

162. — *The inversion of the plane stress.* Proc. of the London Mathem. Soc., **34**, 134 (1901-1902).

163. S. G. Mikhlin, *Le problème fondamental biharmonique à deux dimensions.* C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., Paris. **197**, 608 (1933).

164. — *La solution du problème plan biharmonique et des problèmes de la théorie statique d'élasticité à deux dimensions.* Труды Сейсмологич. Ин-та Акад. Наук СССР, *37* (1934).

165. С. Г. Михлин, *Плоская задача теории упругости для неоднородной среды.* Труды Сейсмологич. ин-та Акад. Наук СССР, *66*, (1935).

166. R. D. Mindlin. *The analogy between multiply connected slices and slabs.* Q. J. M., **4**, *3*, 279 (1946).

167. A. Moisil, *Asupra ecuaţiilor echilibrului elastic plan pentru corpurile cu izotropie transversă.* Lucr. sez. gen. şt. din 2-12 iunie 1950 a Acad. R.P.R., p. 308.

168. Gr. C. Moisil, *Teoria preliminară a sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale lineare cu coeficienţi constanţi.* Bul. şt. Acad. R.P.R., secţia de şt. mat.-fiz., **IV**, *2*, 319 (1952).

169. D. Moraru, *Stabilirea stării de efort în grinzi pereţi prin metoda analogiei cu o reţea.* St. şi cerc. de mec. apl., **VII**, *4*, 937 (1956).

170. D. Morgenstern, *Mathematische Begründung der Scheibentheorie (zweidimensionale Elastizitätstheorie).* Arch. Rat. Mech. Anal. **3**, 91 (1959).
171. N. I. Muskhelishvili, *Nouvelle méthode de réduction du problème biharmonique fondamental à une équation de Fredholm.* C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., Paris, **192**, 77 (1931).
172. — *Théorèmes d'existence relatifs au problème biharmonique et aux problèmes d'élasticité à deux dimensions.* C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., Paris, **192**, 221 (1931).
173. — *Recherches sur les problèmes aux limites relatifs à l'équation biharmonique et aux équations d'élasticité à deux dimensions*, Math. Ann., **107**, 282 (1932).
174. — *Praktische Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen*, ZAMM, **13**, 264 (1933).
175. Н. И. Мусхелишвили, *Новый общий способ решения основных контурных задач плоской теории упругости.* Доклады Акад. Наук СССР, **III**, *1*, 7 (1934).
176. H. Neuber, *Lösung des Carothers Problems mittels Prinzipien der Kraftübertragung (Keil mit Moment in der Spitze)*, ZAMM, **43**, *4/5*, 211 (1963).
177. W. Nowacki, *Two-dimensional (the plane) problem of magneto-thermoelasticity.* I, II, Bull. de l'Acad. Pol. des Sc., série des Sc. Techn., **X**, *12*, 485-[689] (1962); **XI**, *1*, 1—[1] (1963).
178. W. Olszak, J. Rychlewski, *Nichthomogenitäts-Probleme in elastischen und vorplastischen Bereich.* Oesterr. Ing.-Archiv, **XV**, *1-4*, 130 (1961).
179. L. Payne, *On a class of plane and axially symmetric problems in elasticity.* Proc. of the 1st Congr. of Theor. and Appl. Mech., 1955, 1 (1956).
180. D. Pompeiu, *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **33** (1912); **35** (1913).
181. H. Poncin, *Sur l'équilibre d'un système matériel illimité dans une direction donnée et sollicité par des actions normales à cette direction.* C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., Paris, **223**, 1093 (1946).
182. W. Prager, *On the plane elastic strain in doubly-connected domains.* Q. A. M., **III**, *4*, 377 (1946).
183. L. Prandtl, *Zur Torsion von prismatischen Stäben*, Phys. Zeitsch., **4**, 758 (1903).
184. J. R. M. Radok, *On the solution of problems of dynamic plane elasticity.* Q. A. M., **XIV**, *3*, 289 (1956).
185. M. Ribière, *Sur la flexion des pièces épaisses.* C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., Paris, **126**, 402 (1898).
186. N. Șandru, *Asupra acțiunii sarcinilor concentrate în interiorul semiplanului elastic cu frontiera încastrată.* St. şi cerc. mat., **XIV**, *3*, 453 (1963).
187. B. Sen, *Two-dimensional boundary-value problems of elasticity.* Proc. of the Roy. Soc. of London, seria A, 87 (1946).
188. Д. И. Шерман, *К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях.* Доклады Акад. Наук СССР, **XXVII**, *9*, 911 (1940).
189. — *К решению плоской статической задачи теории упругости для заданных внешних силах.* Доклады Акад. Наук СССР, **XXVIII**, *1*, 25 (1940).
190. — *Смешанная задача статистической теории упругости для плоских многосвязных областей.* Доклады Акад. Наук СССР, **XXVIII**. *1*, 29 (1940).
191. D. I. Sherman, *Sur une méthode permettant de résoudre certains problèmes d'élasticité pour les domaines doublement connexes.* C. Rend. de l'Acad. des Sc. de l'URSS, **LV**, *8*, 697 (1947).
192. С. Л. Соболев, *Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений.* Мат. сборник, **2** (**44**), *3*, 465 (1937).
193. L. Sobrero, *Delle funzioni analoghe al potenziale intervenienti nella fisica-matematica.* Rend. della R. Accad. Naz. dei Lincei, seria 6, **XXI**, 448 (1935).
194. E. Sternberg, W. T. Koiter, *The wedge under a concentrated couple. A paradox in the two-dimensional theory of elasticity.* J. of Appl. Mech., **25**, *4*, 575 (1958).

195. A. C. STEVENSON, *Some boundary problems of the two-dimensional elasticity*. Phil. Mag., **34**, 766 (1943).

196. — *Complex potentials in two-dimensional elasticity*. Proc. of the Roy Soc. seria A, **184**, 129 (1945).

197. F. STÜSSI, *Polygone funiculaire et équations différentielles*. Bull. de la Soc. Roy. des Sc. de Liège, **6**, 7 (1949).

198. — *Numerische Lösung von Randwertproblemen mit Hilfe der Seilpolygongleichung*, ZAMP, **I**, 53 (1950).

199. P. P. TEODORESCU, *Asupra unei metode generale de rezolvare a problemei plane a elastodinamicii*, Com. Acad. R.P.R., **VI**, *6*, 795 (1956).

200. — *O metodă de rezolvare în eforturi a problemei plane a micilor mişcări amortizate*. Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., secţia de şt. mat.-fiz., **VIII**, *4*, 723 (1956).

201. — *O metodă de aproximare a condiţiilor pe contur în cazul problemei plane a elasticităţii*. St. şi cerc. de mec. apl., **VII**, *3*, 655 (1956).

202. — *Asupra problemei plane a teoriei elasticităţii în cazul unor forţe masice oarecare*. Bul. şt.inţ. Acad. R.P.R,, secţia de şt. mat.-fiz., **IX**, *2*, 481 (1957).

203. — *Asupra problemei plane a elasticităţii unor corpuri anizotrope*. I-IX, Com. Acad. R.P.R., **VII**, *4*, 395; 401; *5*, 503; 509; *7*, 641; *9*, 753 (1957); **VIII**, *9*, 887; *11*, 1119; *12*, 1243 (1958).

204. — *Asupra problemei plane a elasticităţii în coordonate oblice*. St. şi cerc. de mec. apl., **IX**, *2*, 391 (1958).

205. — *Funcţii de tensiune în problema plană a teoriei elasticităţii*. St. şi cerc. şt. Matem. (Iaşi), **XI**, *2*, 363 (1960).

206. — *Sur le problème de la demibande plane élastique*. Arch. Mech. Stos., **XII**, *3*, 313 (1960).

207. — *Asupra unei metode numerice de aproximare a condiţiilor pe contur în cazul problemelor la limită ale fizicii matematice*. St. şi cerc. de matem. (Cluj), **XII**, *1*, 171 (1961).

208. — *Sur le problème du quart de plan élastique*. Aplikace matematiky, **6**, *5*, 359 (1961).

209. — *Asupra utilizării funcţiilor de tensiune în problema plană a teoriei elasticităţii în coordonate oblice*. An. Univ. Bucureşti, seria şt. nat., mat.-fiz., **XI**, *34* (1962).

210. — *Asupra calculului grinzilor pereţi dreptunghiulare în cazul unor forţe masice oarecare*. St. şi cerc. şt. Matem. (Iaşi), **XIII**, *2*, 369 (1962).

211. — *Sur les équations du problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes quelconques*. C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., Paris, **255**, *7*, 1181 (1962).

212. — *Le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes arbitraires. I-V*. Bull. de l'Acad. Pol. des Sc., série des Sc. Techn., **X**, *7*, 269-[403]; 283-[417]; 291—[425]; *8*, 313-[459]; 321-[467] (1962).

213. — *Asupra unor probleme de elastodinamică plană*. An Univ. Bucureşti, seria şt. nat., mat.-fiz., **XII**, *40*, 19 (1963).

214. — *Considérations concernant la formulation mathématique du problème plan de la théorie de l'élasticité*. Rev. Roum. de math. pures et appl., **IX**, *4* (1964).

215. P. P. TEODORESCU, M. PREDELEANU, *Quelques considérations sur le problème des corps élastiques hétérogènes. Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity*. Proc. of the IUTAM Symp., Warsaw, sept. 2 — 9, 1958, Pergamon-Press, 31 (1959).

216. — *Über das ebene Problem nichthomogener elastischer Körper*. Acta Technica Acad. Sc. Hung., **XXVII**, *3—4*, 349 (1959).

217. CR. TEODOSIU, *Asupra rezolvării problemei plane a teoriei elasticităţii pentru domenii multiplu conexe cu ajutorul funcţiei lui Airy*. St. şi cerc. mat., **XII**, *2*, 543 (1961).

218. — *Rezolvarea problemei plane a teoriei elasticităţii în cazul unor forţe masice oarecare*. St. şi cerc. de mec. apl., **XIII**, *6*, 1409 (1962).

219. A. TIMPE, *Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion*. Dissertation, Zeitsch. für Math. und Phys., **52**, 348 (1905).

220. C. Truesdell, *The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics*. J. Rat. Mech. An., **1**, 125 (1952).

221. W. Valentin, *Berechnung wandartiger Träger nach den Zusammensetzverfahren*. Beton- und Stahlbetonbau, **52**, *8*, 176 (1957).

222. И. Н. Векуа, Н. И. Мусхелишвили, *Методы теории аналитических функций в теории упругости*. Труды всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. 1960, Академкнига, Москва, (1962).

223. V. Volterra, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*. Ann. de l'Ecole Normale Sup., seria 3, **24**, 401 (1907).

224. K. Wieghardt, *Über ein neues Verfahren verwickelte Spannungsverteilungen in elastischen Körpern auf experimentellen Wege zu finden*. Mitteil. über Forsch. an dem Geb. des Ing., **49**, 15 (1908).

225. * * * *Proceedings of vibration problems*. **1**, **2**, **3**, **4**, **5** (1959—1964).

CONSTRUCȚII GEOMETRICE CU RIGLA, COMPASUL ȘI TRISECTORUL

DE

TUDOR I. ZAMFIRESCU

§ 1. CRITERII DE CONSTRUCTIBILITATE

După cum sugerează și numele, trisectorul este un instrument cu care se poate divide un unghi oarecare în trei părți egale.

Să ne amintim că orice extindere algebric generată a corpului Q al numerelor raționale este un spațiu vectorial peste Q și să observăm că orice element al ei este construibil cu rigla și compasul dacă acest lucru este posibil pentru o bază a spațiului. În adevăr, un element arbitrar α se scrie în raport cu baza $\beta_1, \ldots, \beta_n$ ca o combinație liniară $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \beta_i$ cu $\xi_i \in Q$, construibilă cu rigla și compasul. Un corp ale cărui elemente pot fi construite cu rigla, compasul și trisectorul îl vom denumi *construibil.*

TEOREMA 1. *Fie corpul construibil K și ecuația*

$$\alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

cu $\alpha_3 \neq 0$ ireductibilă peste K. Condiția necesară și suficientă ca cel puțin o rădăcină a ei să fie construibilă cu rigla, compasul și trisectorul este ca toate rădăcinile să fie reale și distincte.

Demonstrație. Simplificînd ecuația cu α_3, găsim

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

unde $a = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$, $b = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}$, $c = \frac{\alpha_0}{\alpha_3}\cdot$ Facem translația $x = x' - \frac{a}{3}$ și aflăm

$$x'^3 + px' + q = 0, \tag{2}$$

unde $p = b - \frac{a^2}{3}$ şi $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$. Transformarea $x' = \beta X$ ne dă

$$4X^3 - 3X = \alpha, \qquad (3)$$

unde $\beta = \sqrt{\frac{-4p}{3}}$ şi $\alpha = \frac{3q}{p\beta}\cdot$

Pentru demonstrarea suficienţei condiţiei din enunţ, să presupunem că rădăcinile $x_{1.2.3}$ ale ecuaţiei date sînt reale şi distincte. Rezultă că şi rădăcinile $x'_{1.2.3} = x_{1.2.3} + \frac{a}{3}$ ale ecuaţiei (2) sînt reale şi distincte. Aceasta are loc, după cum ştim, dacă discriminantul ecuaţiei (2) satisface inegalitatea $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ şi numai în acest caz. Deci $p < 0$. De asemenea rezultă că $-1 < \alpha < 1$. Într-adevăr,

$$9q^2 < p^2 \cdot \frac{-4p}{3} \quad \text{sau} \quad |3q| < -p\sqrt{\frac{-4p}{3}} \quad \text{sau} \quad -1 < \frac{3q}{p\beta} < 1.$$

Evident, cu ajutorul mărimilor date $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se pot construi cu rigla şi compasul a, b, c, apoi p, q şi β, α. Găsim cu trisectorul unghiul $\omega = \frac{\operatorname{arc\,cos} \alpha}{3}\cdot$ Aflăm cu rigla şi compasul $X_1 = \cos \omega$, $X_{2.3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} \mp \omega\right)$ care sînt cele trei rădăcini reale ale ecuaţiei (3). Aflăm apoi $x'_{1.2.3} = \beta X_{1.2.3}$ şi $x_{1.2.3} = x'_{1.2.3} - \frac{a}{3}$ cu ajutorul riglei şi compasului. Astfel, dacă condiţia este satisfăcută, putem găsi chiar toate cele trei rădăcini reale ale ecuaţiei date, cu ajutorul riglei, compasului şi trisectorului.

Să dovedim necesitatea condiţiei enunţate. Notăm cu $f(x)$ polinomul din membrul întîi al ecuaţiei date. Să presupunem că $f(x)$ are cel puţin două rădăcini confundate. Discriminantul ecuaţiei (2) este nul : $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$. Rezultă că $\frac{3q}{p\beta} = \pm 1$, adică $\alpha = \pm 1$ şi $\beta = \pm \frac{3q}{p}\cdot$ Ecuaţia (3) admite în acest caz o rădăcină $\pm$ 1. Deci ecuaţia (2) se anulează în $\pm \frac{3q}{p}$, prin urmare este reductibilă peste K, ceea ce atrage reductibilitatea ecuaţiei date peste K, absurd. Deci rădăcinile sînt distincte. Să presupunem că $f(x)$ are două rădăcini nereale şi una reală ρ, pe care reuşim să o construim cu instrumentele date. Avem $[K(\rho) : K] = 3$. După cum se vede îndată, ρ nu poate fi construit numai cu rigla şi compasul. Neapărat s-a folosit deci trisectorul, cu care s-a rezolvat o ecuaţie ireductibilă $P_\alpha(x) = 4x^3 - 3x - \alpha = 0$ cu $\alpha \in K$, determinîndu-se rădăcina r_α. De aici urmează că $[K(r_\alpha) : K] = 3$. Prin urmare $\rho \in K(r_\alpha)$. Ştim că oricare ar fi

$\alpha \in K$ cu $|\alpha| \leqslant 1$, $P_\alpha(x)$ are trei rădăcini reale r_α, r', r''. De asemenea se ştie că avem $K(r_\alpha) = \{\beta$; există polinomul $g(x)$ cu coeficienţi în K astfel ca $\beta = g(r_\alpha)\}$. Polinoamele minimale ale lui r_α şi ρ sînt $P_\alpha(x)$ şi $f(x)$. Fie $g_\rho(x)$ un polinom de gradul al doilea cu proprietatea că $g_\rho(r_\alpha) = \rho$. Avem $f(g_\rho(r_\alpha)) = 0$ şi $P_\alpha(r_\alpha) = 0$. Cum $P_\alpha(x)$ este polinom minimal, el îl divide pe $(f \circ g_\rho)(x)$. Rădăcinile r', r'' ale lui $P_\alpha(x)$ vor anula şi pe $(f \circ g_\rho)(x)$, deci, notînd $\rho' = g_\rho(r')$ şi $\rho'' = g_\rho(r'')$, rezultă $f(\rho') = f(\rho'') = 0$, unde $\rho', \rho'' \in R$, corpul numerelor reale. Rădăcinile r_α, r', r'' sînt distincte căci dacă două dintre ele ar fi egale, discriminantul ecuaţiei $P_\alpha(x) = 0$ ar trebui să fie nul : $\frac{\alpha^2}{4^3} - \frac{1}{4^3} = 0$, deci P_α nu ar fi ireductibil. Cum nu se poate ca polinomul g_ρ, de gradul al doilea, să ia aceeaşi valoare pentru r_α, r', r'' distincte, rezultă că există cel puţin două numere distincte printre ρ, ρ', ρ''. Deci am găsit cel puţin încă o rădăcină reală ρ' sau ρ'' pentru $f(x)$, în afară de ρ, ceea ce contrazice ipoteza făcută. Prin urmare $f(x)$ are neapărat trei rădăcini reale şi distincte.

Exprimată sub o altă formă teorema anterioară devine

TEOREMA 2. *Condiţia necesară şi suficientă ca cel puţin o rădăcină a ecuaţiei* $\alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ *cu* $\alpha_3 \neq 0$, *ireductibilă peste corpul construibil* K, *să fie construibilă cu rigla, compasul şi trisectorul este ca*

$$18\,\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 - 4\,\alpha_0\,\alpha_2^3 - 27\,\alpha_0^2\,\alpha_3^2 + \alpha_1^2\,\alpha_2^2 - 4\,\alpha_1^3\,\alpha_3 > 0.$$

Demonstraţie. Am văzut că, relativ la coeficienţii ecuaţiei (2), am găsit condiţia necesară şi suficientă : $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$. Înlocuind aici p şi q prin expresiile lor folosind coeficienţii ecuaţiei (1) şi apoi înlocuindu-i pe aceştia utilizînd numerele $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, găsim condiţia din enunţ.

Rezultă ca o condiţie necesară, dar nu suficientă, existenţa lanţului de corpuri $\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \ldots \subset \Lambda_n$ astfel ca $\Lambda_n \supset G$ iar $[\Lambda_m : \Lambda_{m-1}] = 2$ sau 3 $(m = 1, \ldots, n)$, unde s-au notat cu Λ_0 cel mai mic corp numeric care include mulţimea F a coordonatelor punctelor esenţiale date şi cu G mulţimea coordonatelor punctelor esenţiale cerute. Pentru a asigura şi suficienţa, adăugăm condiţia ca pentru orice extindere $\Lambda_m \supset \Lambda_{m-1}$ de grad trei, să existe elementul $\lambda_m \in \Lambda_m$ astfel ca polinomul său minimal relativ la Λ_{m-1} să fie de tipul celor din teoremele 1 sau 2.

§ 2. APLICAŢIE LA POLIGOANELE REGULATE

Problema pe care ne-o punem constă în a construi cu rigla, compasul şi trisectorul un poligon regulat cu un număr dat n de laturi, înscris într-un cerc dat.

Să considerăm un sistem xOy de axe rectangulare ale cărui origine şi unitate de măsură coincid cu centrul şi raza cercului dat. Fie $(1, 0)$ un vîrf al poligonului. Atunci întreaga problemă se reduce la construirea punctului $\left(\cos\frac{2\pi}{n}, 0\right)$, întrucît un vîrf alăturat lui (1,0) este o intersecție a perpendicularei în $\left(\cos\frac{2\pi}{n}, 0\right)$ pe Ox cu cercul dat, iar celelalte se obțin imediat.

Fie N mulțimea numerelor naturale iar $Z_+ = N \cup \{0\}$.

În cele ce urmează vom folosi funcția φ a lui Euler, despre care amintim că, dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ este descompunerea lui n în factori primi distincți, atunci

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1) \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r-1}(p_r-1).$$

Fie polinomul $z^n - 1$ peste corpul C al numerelor complexe. Conform scopului urmărit, vom lua $n \geqslant 3$. Știm că acest polinom posedă n rădăcini complexe distincte

$$\varepsilon_j = \cos\frac{2j\pi}{n} + i \sin\frac{2j\pi}{n} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1)$$

dintre care $\varepsilon_0 = 1$, numite rădăcinile de ordin n ale unității și că acestea formează un subgrup al grupului multiplicativ $C - \{0\}$.

Cunoaștem că gradul extinderii $Q(\varepsilon_1) \supset Q$ este $\varphi(n)$. Pentru că $\varepsilon_1 + \varepsilon_1^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{n}$ și $\varepsilon_1 \varepsilon_1^{-1} = 1$, avem $Q(\varepsilon_1) \supset Q\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right)$ iar gradul extinderii este doi. Rezultă că

$$\left[Q\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right) : Q\right] = \frac{\varphi(n)}{2}.$$

TEOREMA 3. *Pentru ca un poligon regulat cu n laturi să poată fi construit cu rigla, compasul și trisectorul este necesar și suficient ca*

$$n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, r \in Z_+$ *iar* $p_3, \ldots, p_r$ *sînt numere prime distincte de forma*

$$p_i = 2^{\beta_i} \cdot 3^{\gamma_i} + 1$$

cu $\beta_i \in N$, $\gamma_i \in Z_+$.

Demonstrație. Vom arăta mai întîi necesitatea condiției. Din cele prezentate în § 1 rezultă că o condiție necesară pentru constructibilitatea lui $\cos\frac{2\pi}{n}$, deci și a poligonului, este ca

$$\left[Q\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right) : Q\right] = 2^m \cdot 3^s,$$

unde $m, s \in Z_+$, ceea ce revine la

$$\varphi(n) = 2^{m+1} \cdot 3^s.$$

Dacă

$$n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$$

este descompunerea despre care am mai vorbit, atunci:

$$1)\ \varphi(n) = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2 - 1} \cdot p_3^{\alpha_3 - 1}(p_3 - 1) \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r - 1}(p_r - 1)$$

pentru $\alpha_1,\ \alpha_2 \neq 0$;

$$2)\ \varphi(n) = 2 \cdot 3^{\alpha_2 - 1} \cdot p_3^{\alpha_3 -}\ (p_3 - 1) \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r - 1}(p_r - 1)$$

pentru $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 \neq 0$;

$$3)\ \varphi(n) = 2^{\alpha_1 - 1} \cdot p_3^{\alpha_3 - 1}(p_3 - 1) \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r - 1}(p_r - 1)$$

pentru $\alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 = 0$ și

$$4)\ \varphi(n) = p_3^{\alpha_3 - 1}(p_r - 1) \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r - 1}(p_r - 1)$$

pentru $\alpha_1,\ \alpha_2 = 0$.

Examinînd aceste cazuri, constatăm că pentru ca

$$\varphi(n) = 2^{m+1} \cdot 3^n$$

cu $m, n \in Z_+$, trebuie ca $2 \mid \varphi(n)$, deci în cazul 3) trebuie exclusă posibilitatea $\alpha_1 = 1$, $r = 0$, ceea ce se presupune de la început admis (poligon nedegenerat), iar în cazul 4), $r \neq 0$, ceea ce este și mai banal. Apoi, trebuie ca $\alpha_3 = \alpha_4 = \ldots = \alpha_r = 1$ iar $p_i = 2^{\beta_i} \cdot 3^{\gamma_i} + 1$ cu $\beta_i \in N$, $\gamma_i \in Z_+$ (nu s-ar putea ca $\beta_i = 0$, căci am avea $2 \mid p_i$, ceea ce e absurd).

Să dovedim acum suficiența condiției din enunț. Vom arăta la început că un poligon regulat cu $p = 2^\beta \cdot 3^\gamma + 1$ laturi ($\beta \in N$, $\gamma \in Z_+$, p prim) poate fi construit cu rigla, compasul și trisectorul. Conform teoremei lui Euler, dacă numerele naturale b și p sînt prime între ele, atunci

$$b^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod{p}$$

Dacă, în plus, p este prim, atunci

$$b^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1$$

deoarece $\varphi'(p) = p - 1$ iar dacă

$$b^{\frac{p-1}{2}} \equiv c\ (0 \leqslant c < p),$$

atunci

$$c^2 \equiv 1$$

sau

$$(c + 1)(c - 1) = \mathfrak{M}\, p,$$

deci

$$c + 1 = \mathfrak{M}\, p$$

sau

$$c - 1 = \mathfrak{M}\, p$$

de unde $c = 1$ sau $c = p - 1$. Se știe că oricare ar fi numărul prim p, există un întreg a astfel încît $a^\circ, a^1, \ldots, a^{p-2}$ să epuizeze modulo p mulțimea $\{1, \ldots, p - 1\}$. Rezultă că $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ căci altfel $a^\circ, \ldots, a^{\frac{p-1}{2}-1}$ ar fi respectiv congruente cu $a^{\frac{p-1}{2}}, \ldots, a^{p-2}$. Prin urmare $a^r = -a^q$ dacă $|r - q| = \frac{n-1}{2}\cdot$

Notînd $\varepsilon = \varepsilon_1$ rădăcinile $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ ale ecuației $z^p - 1 = 0$ devin $\varepsilon^0, \ldots, \varepsilon^{p-1}$. Vom aranja ultimele $p - 1$ rădăcini în următorul mod: (P_0^1): $\varepsilon^{a^0}, \varepsilon^{a^1}, \ldots, \varepsilon^{a^{p-2}}$, unde a are semnificația anterioară. Notăm cu $(P_{n+1}^{3(m-1)+i})$ mulțimea ordonată a rădăcinilor din (P_n^m) luate din trei în trei începînd cu a i-a $(i = 1,2,3)$, cînd n ia pe rînd valorile $0,1,\ldots, \gamma$. În continuare, notăm cu $(P_{n+1}^{2(m-1)+j})$ mulțimea ordonată a rădăcinilor din (P_n^m) luate din două în două începînd cu a j-a $(j = 1,2)$ cînd n ia valorile $\gamma + 1, \ldots, \gamma + \beta - 1$. Sumele λ_n^m ale rădăcinilor din (P_n^m) se numesc perioadele lui Gauss. Este ușor de observat că orice $\lambda_n^m \in R$, întrucît o dată cu un termen ε^{a^r}, perioada conține și unul de forma ε^{a^q} cu $|r - q| = \frac{p-1}{2}$, deci $\varepsilon^{a^r} = \varepsilon^{-a^q}$, adică ε^{a^r} și ε^{a^q} sînt simetrice față de axa reală. Considerăm corpurile $L_n^m = Q(\lambda_n^m)$ și $\Lambda_n = L_n^1$. În particular

$$\Lambda_{\beta+\gamma-1} = L_{\beta+\gamma-1}^1 = Q(\lambda_{\beta+\gamma-1}^1) = Q(\varepsilon^{a^0} + \varepsilon^{a^{2^{\beta-1}\cdot 3^\gamma}}) = Q(\varepsilon + \varepsilon^{-1}) =$$
$$= Q\left(\cos\frac{2\pi}{p}\right)\cdot$$

Se știe că $\lambda_n^m \cdot \lambda_n^{m'}$ este o combinație liniară de perioade cu indice inferior n (vezi [2]). Așadar $L_n^m = L_n^{m'}$. De asemenea, niște ecuații aritmetice cu congruențe care se scriu imediat, arată că pentru $n \leqslant \gamma$ putem scrie $\lambda_n^1 + \lambda_n^2 + \lambda_n^3$, $\lambda_n^1\lambda_n^2 + \lambda_n^2\lambda_n^3 + \lambda_n^3\lambda_n^1$ și $\lambda_n^1\lambda_n^2\lambda_n^3$ ca niște combinații liniare de perioade de indice inferior $n - 1$, iar pentru $n > \gamma$ se pot scrie în același fel $\lambda_n^1 + \lambda_n^2$ și $\lambda_n^1\lambda_n^2$, dar nu pot fi astfel scrise și înseși perioadele de indice inferior n. Rezultă că $[\Lambda_n : \Lambda_{n-1}]$ este 3 pentru $n \geqslant \gamma$ și 2 pentru $n < \gamma$, după gradele polinoamelor minimale ale lui λ_n^1 puse în evidență. Să remarcăm și că aceste polinoame au toate rădăcinile reale, deci se conformează condițiilor puse în §1. Prin urmare am pus în evidență lanțul de extinderi $Q = \Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \ldots \subset \Lambda_{\beta+\gamma-1} = Q\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right)$, satisfăcînd condiția necesară și suficientă ca poligonul să poată fi construit.

Constructibilitatea poligoanelor regulate cu p și p' laturi, unde p și p' sînt prime între ele, atrage după cum se știe constructibilitatea poligonului regulat cu pp' laturi și, avînd în vedere că poligoanele regulate cu 2^{α_1} și 3^{α_2} laturi se pot ușor construi, rezultă că suficiența condiției enunțate este dovedită.

Este interesant de remarcat că dacă se dă cercul în care trebuie înscris poligonul, atunci constructibilitatea lui cu rigla, compasul şi trisectorul atrage constructibilitatea doar cu rigla şi trisectorul, în baza faptului cunoscut că folosirea riglei şi compasului este substituibilă cu folosirea doar a riglei în cazul cînd în planul de construcţie ne este dat un cerc. Dacă însă cercul circumscris nu ne este dat, atunci întrebuinţarea compasului este esenţială, deci rigla şi trisectorul se dovedesc insuficiente, deşi condiţiile de construcţie par la prima vedere a fi mai largi.

Conform teoremei 3, heptagonul regulat, poligonul cu cel mai mic număr de laturi neconstruibil cu instrumentele clasice : rigla şi compasul, poate fi construit utilizînd şi trisectorul ($7 = 2 \cdot 3 + 1$).

Dat fiind un cerc, în afară de poligoanele regulate înscrise cu 3,4,5, 6,8,10,12,15,16,17,20,... laturi, care pot fi construite doar cu rigla, mai sînt construibile, însă folosind şi trisectorul, poligoanele cu 7,9,13,14,18, 19, ... laturi. Primul care nici acum nu va putea fi construit este poligonul regulat cu 11 laturi.

Primită la redacţie la 28 decembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. DICKSON-BODEWIG, *Höhere Algebra.* Berlin, 1929.
2. C. IACOB, *Curs de matematici superioare.* Bucureşti, 1957.
3. LUGOWSKI-WEINERT, *Grundzüge der Algebra.* vol. III, Leipzig, 1960.
4. M. POSTNIKOV, *Teoria lui Galois.* Moscova, 1963.
5. B. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra.* vol. I, Berlin 1937 ; vol. II, Berlin, 1940.

O EXTINDERE A NOȚIUNII DE ȘIR DE DISTRIBUȚIE UNIFORMĂ

DE

ȘTEFAN BERȚI

1. NOȚIUNEA CLASICĂ DE ȘIR DE DISTRIBUȚIE UNIFORMĂ

Se numește șir de distribuție uniformă în hipercubul unitar d-dimensional E : $(0 \leqq \xi_i < 1 \,;\ i = 1, \ldots, d)$ orice șir de puncte din E :

$$\omega : x_1, x_2, x_3, \ldots$$

pentru care

$$\lim_{n \to \infty} \nu_n (\omega, Q) = \mu (Q),$$

oricare ar fi hiperparalelipipedul Q : $(0 \leqq a_i \leqq \xi_i < b_i \leqq 1 \,;\ i = 1, \ldots, d)$.

Prin $\nu_n (\omega, Q)$ s-a notat frecvența de apartenență la Q a secțiunii $x_1, \ldots, x_n$ din ω, iar prin $\mu (Q)$ volumul lui Q.

Există o familie foarte vastă de șiruri de distribuție uniformă, din care vom aminti următoarele :

1) Să considerăm vectorul aleator $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$, fiecare din variabilele aleatoare ξ_i $(i = 1, \ldots, d)$ fiind de distribuție uniformă pe $[0,1]$, adică

$$F (x) = P (\xi < x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x \leqq 0, \\ x \text{ pentru } 0 < x \leqq 1, \\ 1 \text{ pentru } x > 1. \end{cases}$$

În acest caz, cu probabilitatea 1, șirul $\{ \xi \}$ va fi de distribuție uniformă.

2) Dacă variabila aleatoare ξ este de distribuție uniformă pe $[0,1]$ și ia valorile

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$$

în urma unui şir de experienţe (independente), atunci oricare ar fi d (număr natural), şirul de puncte

$$x_1 = (\xi_1, \ldots, \xi_d),\ x_2 = (\xi_2, \ldots, \xi_{d+1}), \ldots, x_k = (\xi_k, \ldots, \xi_{k+d-1}), \ldots$$

va fi cu probabilitatea 1 de distribuţie uniformă în hipercubul unitar din spaţiul d-dimensional.

3) Oricare ar fi o mulţime numărabilă densă de puncte din E, se poate ordona astfel mulţimea într-un şir, încît acesta să fie de distribuţie uniformă.

În ultimul timp, noţiunea de şir de distribuţie s-a extins la spaţii mai generale decît spaţiul euclidian d-dimensional.

În această lucrare vom extinde noţiunea de şir de distribuţie uniformă la un caz mult mai general.

2. ECHIVALENŢA ŞIRURILOR ÎN SISTEMUL $S = (E, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, R)$

În continuare vom folosi următoarele notaţii şi noţiuni: sistemul $S = (E, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, R)$ este sistemul format dintr-o mulţime E, din două familii de submulţimi $\mathcal{E}_1$ şi $\mathcal{E}_2$ din E şi dintr-o relaţie R definită pe $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ [1]). Prin X, Y, ω, Ω vom nota elementele din $\mathcal{E}_1$, din $\mathcal{E}_2$, şirurile de elemente din $\mathcal{E}_1$ precum familii de şiruri ω. Prin $\mathcal{E}_1^\infty$ vom nota mulţimea tuturor şirurilor ω.

Fiind dat un sistem S, prin frecvenţa secţiunii n a şirului ω faţă de S vom înţelege expresia

$$\nu_n(\omega, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R(X_i, Y),$$

unde $X_1, \ldots, X_n$ este secţiunea n a şirului ω.

În cazul unui sistem S oarecare, avem

$$0 \leqq \nu_n(\omega, Y) \leqq 1$$

oricare ar fi n, ω, Y.

Pentru ω, Y fixaţi, mulţimea

$$\nu(\omega, Y)$$

formată din toate punctele de acumulare ale şirului

$$\{\nu_n(\omega, Y)\}_{n=1,2,3,\ldots}$$

este o mulţime închisă de puncte din $[0,1]$, deci există punctele

$$\inf \nu(\omega, Y) \in \nu(\omega, Y) \text{ şi } \sup \nu(\omega, Y) \in \nu(\omega, Y)$$

---

[1]) Se face o descompunere $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ unde $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ şi se defineşte pentru orice $X \in \mathcal{E}_1$, $Y \in \mathcal{E}_2$:

$$R(X, Y) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ dacă } (X, Y) \in \mathcal{A} \ (X \text{ este în relaţie } R \text{ cu } Y) \\ 0 \text{ dacă } (X, Y) \overline{\in} \mathcal{A} \ (X \text{ nu este în relaţie } R \text{ cu } Y) \end{array} \right.$$

bine determinate, astfel încît pentru orice $\alpha \in \nu(\omega, Y)$ avem

$$0 \leqq \inf \nu(\omega, Y) \leqq \alpha \leqq \sup \nu(\omega, Y) \leqq 1.$$

Familia $\mathcal{E}_1^\infty$ se descompune acum în mod natural în niște familii de șiruri echivalente

Vom spune că șirurile ω_1 și ω_2 sînt inferior echivalente, dacă pentru orice Y avem

$$\inf \nu(\omega_1, Y) = \inf \nu(\omega_2, Y).$$

Vom nota

$$\omega_1 \simeq \omega_2$$

Vom spune că șirurile ω_1 și ω_2 sînt superior echivalente, dacă pentru orice Y avem

$$\sup \nu(\omega_1, Y) = \sup \nu(\omega_2, Y).$$

Vom nota

$$\omega_1 \eqsim \omega_2.$$

Relațiile $\simeq$ și $\eqsim$ sînt relații de echivalență în $\mathcal{E}_1^\infty$, prin urmare vom avea descompunerile

$$\mathcal{E}_1^\infty = \bigcup_{\iota \in \underline{I}} \Omega_\iota = \bigcup_{\iota \in \bar{I}} \Omega_\iota$$

ale lui $\mathcal{E}_1^\infty$ în clase de șiruri inferior respectiv superior echivalente.

Prin urmare avem:

pentru orice $\iota, \iota' \in \underline{I}$, $\iota \neq \iota' : \Omega_\iota \cap \Omega_{\iota'} = \emptyset$; $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_\iota \Rightarrow \omega_1 \simeq \omega_2$,
pentru orice $\iota, \iota' \in \bar{I}$, $\iota \neq \iota' : \Omega_\iota \cap \Omega_{\iota'} = \emptyset$; $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_\iota \Rightarrow \omega_1 \eqsim \omega_2$.

Descompunerile $\mathcal{E}_1^\infty = \bigcup_{\iota \in \underline{I}} \Omega_\iota = \bigcup_{\iota \in \bar{I}} \Omega_\iota$ determină două familii de funcții de mulțime definite pe $\mathcal{E}_2$:

$$\{\underline{\mathcal{F}}_\iota\}_{\iota \in \underline{I}} \text{ și } \{\overline{\mathcal{F}}_\iota\}_{\iota \in \bar{I}},$$

unde prin definiție pentru orice $Y \in \mathcal{E}_2$ avem:

pentru $\iota \in \underline{I}$: $\underline{\mathcal{F}}_\iota(Y) = \inf \nu(\omega, Y)$, unde $\omega \in \Omega_\iota$,

pentru $\iota \in \bar{I}$: $\overline{\mathcal{F}}_\iota(Y) = \sup \nu(\omega, Y)$, unde $\omega \in \Omega_\iota$.

Dacă $\underline{I} \cap \bar{I} \neq \emptyset$, atunci pentru orice $Y \in \mathcal{E}_2$ și $\iota \in \underline{I} \cap \bar{I}$ se definesc

$$\underline{\mathcal{F}}_\iota(Y) \text{ și } \overline{\mathcal{F}}_\iota(Y)$$

și avem

$$\underline{\mathcal{F}}_\iota(Y) \leqq \overline{\mathcal{F}}_\iota(Y).$$

Prin I vom nota acea submulţime a lui $\underline{I} \cap \overline{I}$ (dacă există) pentru care din $\iota \in I$ şi $Y \in \mathcal{E}_2$ rezultă

$$\underline{\mathcal{F}}_\iota(Y) = \overline{\mathcal{F}}_\iota(Y) = \mathcal{F}_\iota(Y).$$

Pentru cazul special al sistemului S în care E este mulţimea punctelor din hipercubul d-dimensional unitar, $\mathcal{E}_1$ este familia de submulţimi din E formate din cîte un punct, $\mathcal{E}_2$ este familia hiperparalelipipedelor (paralele cu E) cuprinse în E, iar R relaţia de apartenenţă definită pe $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ în felul următor : oricare ar fi $\{x\} \in \mathcal{E}_1$ şi $Q \in \mathcal{E}_2$ avem

$$R(\{x\}, Q) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \in Q, \\ 0 \text{ dacă } x \,\overline{\in}\, Q. \end{cases}$$

Familia şirurilor de distribuţie uniformă va fi o familie Ω_ι ($\iota \in I$) de şiruri. În acest caz funcţia de mulţime respectivă $\mathcal{F}_\iota$ va fi o măsură pe $\mathcal{E}_2$.

Primită la redacţie la 2 decembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. J. Cigler, G. Helmberg, *Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung*. Jahresbericht der D. M., **64**, 1-50 (1961).
2. А. Г. Постников, *Усиленный закон больших чисел для выборки из равномерно распределенной случайной величины*. Изв. АН СССР, **22**, 433—438 (1958).
3. H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*. Math. Ann., **77**, 313-352 (1916).

ASUPRA DEVIERII UNUI JET DE LĂRGIME FINITĂ PRINTR-UN OBSTACOL DIEDRIC

DE

ELENA MURGULESCU

Studiul devierii unui jet de lărgime finită printr-un obstacol dat constituie o problemă de mare actualitate. Din acest punct de vedere credem că nu ar fi lipsit de interes să reluăm problema considerată de S. A. Ciaplîghin [1] a devierii jetului, în cazul particular al lărgimii infinite şi al obstacolului plan, admiţînd însă de data aceasta că jetul este de lărgime finită dată în prezenţa unui obstacol diedric.

1. Presupunem mişcarea plană permanentă şi irotaţională raportată la un sistem de axe rectangulare xOy, axa Ox fiind axa de simetrie a configuraţiei. Jetul considerat este limitat de liniile libere AE şi $A'E'$ care posedă respectiv asimptotele $y = \frac{L}{2}$ sau $y = -\frac{L}{2}$ pentru ramurile care tind la infinit în amonte ($x \to -\infty$), L fiind lărgimea dată a jetului. Jetul este deviat din cauza prezenţei obstacolului format din segmentele egale OD şi OD' care fac cu axa Ox unghiurile μ şi $-\mu$ $(0<\mu<\pi)$ (fig. 1). Se admite că în faţa obstacolului se formează o regiune de fluid în repaus limitată de curba CBC', punctele de detaşare C şi C' fiind simetrice faţă de axa Ox. Din capetele D şi D' ale segmentelor se detaşează liniile libere DE şi $D'E'$. Se notează prin m şi $-m$ $(0 < m < \mu)$, direcţiile asimptotice ale liniilor libere AE şi DE sau $A'E'$ şi $D'E'$ la infinit aval ($x \to +\infty$).

Fie $f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ potenţialul complex al mişcării fluide. Această funcţie trebuie să fie olomorfă în domeniul Ω limitat de frontierele AE, $A'E'$ şi $E'D'C'BCDE$, avînd singularităţi în punctele de la infinit amonte şi aval. Funcţia de curent trebuie să verifice condiţiile următoare

$$\left.\begin{aligned} &\psi = \frac{h}{2} \text{ pe } AE, \quad \psi = -\frac{h}{2} \text{ pe } A'E' \\ &\psi = 0 \text{ pe } E'D'C'BCDE, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

unde $h > 0$ este o constantă ce urmează a fi determinată. Din motive de simetrie, $\psi = 0$ pe axa Ox. În domeniul Ω trebuie să avem $-h \leqslant \psi \leqslant h$.

Ca urmare a formulei lui D. Bernoulli, viteza este constantă şi egală cu V_0 pe liniile libere AE şi $A'E'$ ca şi pe DE şi $D'E'$. Pe linia liberă $C'BC$ viteza va fi de asemenea constantă şi egală cu V_1 $(0 < V_1 < V_0)$. Vom scrie $V_1 = qV_0$, $(0 < q < 1)$, constanta q nefiind dată *apriori*.

Pentru tratarea acestei probleme se utilizează metoda reprezentării conforme. În cele ce urmează vom da soluţia pe o cale mult mai simplă, utilizînd direct metoda hodografică.

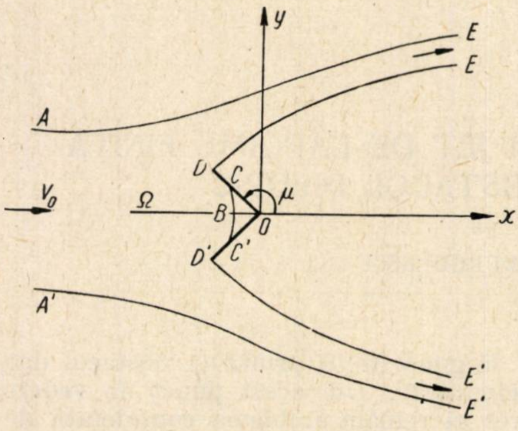


Fig. 1

2. Fie u şi v proiecţiile ortogonale ale vitezei pe axele Ox şi Oy. Avem

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Să notăm prin $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ modulul vitezei şi prin θ unghiul pe care-l face ea cu axa Ox. Dacă trecem la variabilele hodografice u şi v, avem

$$u = V \cos \theta, \qquad v = V \sin \theta. \tag{3}$$

Sistemul (2) devine

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= -\frac{\partial \psi}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \frac{\partial \psi}{\partial u} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

deoarece este cunoscut că viteza complexă

$$u - iv = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \tag{5}$$

este o funcţie monogenă de z şi prin urmare $f = \varphi + i\psi$ este o funcţie monogenă de $u - iv$. În coordonatele polare V şi θ din planul hodografic, sistemul (4) devine

$$\left.\begin{aligned} V \frac{\partial \varphi}{\partial V} &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= V \frac{\partial \psi}{\partial V}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Eliminarea lui φ din (6) ne conduce ușor la ecuația cu derivate parțiale pe care o satisface ψ:

$$V^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2} + V \frac{\partial \psi}{\partial V} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \tag{7}$$

Prin trecerea la planul hodografic imaginea domeniului Ω din planul mișcării va fi un sector de coroană circulară Ω^* cu razele V_0 și V_1, cu deschiderea 2μ, avînd ca axă de simetrie axa Ou (fig. 2).

Corespondenta frontierelor este indicată pe figură, punctele imagini fiind notate prin aceleași litere. Liniile libere AE și DE sînt reprezentate prin arcele de cerc $V = V_0$, $0 < \theta < m$, $m < \theta < \mu$ iar liniile $A'E'$ și $D'E'$ prin arcele simetrice față de axa Ou. Linia liberă $C'BC$ este reprezentată prin arcul de cerc $V = V_1$, $-\mu < \theta < \mu$. În sfîrșit, segmentele CD și $C'D'$ ale obstacolului diedric au ca imagini porțiunile razelor $\theta = \pm \mu$, $V_1 < V < V_0$.

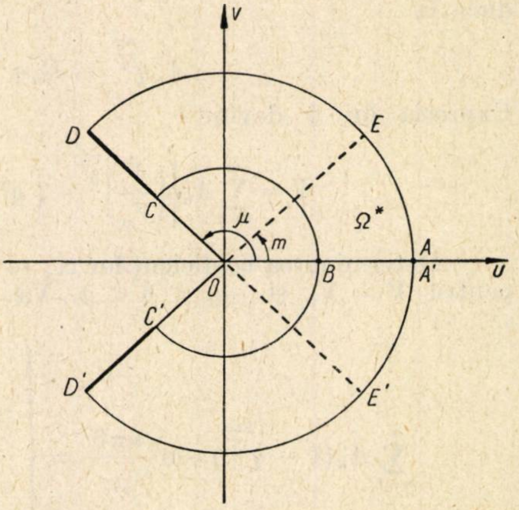


Fig. 2

3. *Rezolvarea problemei la limită.* Prin metoda separării variabilelor se constată ușor că sistemul (6) admite soluțiile

$$\varphi = - V^\lambda \cos \lambda\theta, \quad \psi = V^\lambda \sin \lambda\theta, \tag{8}$$

unde λ este un parametru real.

Condițiile la limită de la punctul 1 se exprimă acum astfel: Să se găsească o soluție $\psi(V, \theta)$ a ecuației (7) în domeniul Ω^* care să fie mărginită, continuă împreună cu derivatele de ordinul întîi și doi care să verifice condițiile la limită

$$\left.\begin{array}{l}
\psi = \dfrac{h}{2} \text{ pentru } V = V_0, \ 0 < \theta < m \\
\psi = 0 \text{ pentru } V = V_0, \ m < \theta < \mu \\
\psi = 0 \text{ pentru } V_1 < V < V_0, \ \theta = \mu \\
\psi = 0 \text{ pentru } V = V_1, \ 0 < \theta < \mu
\end{array}\right\} \tag{9}$$

împreună cu condițiile simetrice față de Ou. De altfel va trebui să avem $\psi = 0$ pentru $V_1 < V < V_0$; $\theta = 0$.

Ţinînd seama de (8) vom încerca pentru $\psi(V,\theta)$ o soluţie de forma

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{n\pi}{\mu}} + B_n\left(\frac{V}{V_0}\right)^{-\frac{n\pi}{\mu}}\right]\sin\frac{n\pi\theta}{\mu}, \tag{10}$$

unde A_n şi B_n sînt constante ce urmează să fie determinate. Prin alegerea lui ψ sub forma (10), condiţiile pentru $\theta = \pm\mu$, $V_1 < V < V_0$ sînt satisfăcute. Condiţia $\psi = 0$ pentru $V = V_1 = qV_0$ şi $-\mu < \theta < \mu$ ne conduce la

$$A_n q^{\frac{n\pi}{\mu}} + B_n q^{-\frac{n\pi}{\mu}} = 0, \qquad n = 1,2,\ldots \tag{11}$$

Expresia lui ψ devine

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{n\pi}{\mu}} - \left(q^2\,\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{n\pi}{\mu}}\right]\sin\frac{n\pi\theta}{\mu}. \tag{10'}$$

Determinarea coeficienţilor A_n se va face ţinînd seama de condiţiile pentru $V = V_0$ şi $-\mu < \theta < \mu$. Va trebui să avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(1 - q^{\frac{2n\pi}{\mu}}\right)\sin\frac{n\pi\theta}{\mu} = \begin{cases} 0 \text{ pentru } -\mu < \theta < -m, \\ -\dfrac{h}{2} \text{ pentru } -m < \theta < 0, \\ \dfrac{h}{2} \text{ pentru } 0 < \theta < m, \\ 0 \text{ pentru } m < \theta < \mu. \end{cases}$$

Punînd $\frac{\pi\theta}{\mu} = \theta'$, avem deci dezvoltarea

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(1 - q^{\frac{2n\pi}{\mu}}\right)\sin n\theta' = g(\theta'),$$

unde $g(\theta')$ este definită prin

$$g(\theta') = \begin{cases} 0 \text{ pentru } -\pi < \theta' < -\dfrac{\pi m}{\mu}, \\ -\dfrac{h}{2} \text{ pentru } -\dfrac{\pi m}{\mu} < \theta' < 0, \\ \dfrac{h}{2} \text{ pentru } 0 < \theta' < \dfrac{\pi m}{\mu}, \\ 0 \text{ pentru } \dfrac{\pi m}{\mu} < \theta' < \pi. \end{cases}$$

Prin urmare

$$A_n(1 - q^{\frac{2n\pi}{\mu}}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta') \sin n\theta' \, d\theta'$$

Un calcul simplu ne dă

$$A_n = \frac{h}{n\pi} \frac{1 - \cos \frac{nm\pi}{\mu}}{1 - q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}. \tag{12}$$

În aceste condiții soluția problemei este dată de

$$\psi(V,\theta) = \frac{h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1 - \cos\frac{nm\pi}{\mu}\right)\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{n\pi}{\mu}} \frac{1 - \left(q^2\frac{V_0^2}{V^2}\right)^{\frac{n\pi}{\mu}}}{1 - q^{\frac{2n\pi}{\mu}}} \sin\frac{n\pi\theta}{\mu}. \tag{13}$$

Ținînd seama de (8) urmează că expresia lui $\varphi(V,\theta)$ este dată de

$$\varphi(V,\theta) = -\frac{h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1 - \cos\frac{nm\pi}{\mu}\right)\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{n\pi}{\mu}} \frac{1 + \left(q^2\frac{V_0^2}{V^2}\right)^{\frac{n\pi}{\mu}}}{1 - q^{\frac{2n\pi}{\mu}}} \cos\frac{n\pi\theta}{\mu}. \tag{14}$$

Este ușor de verificat că $\psi(V,\theta)$ definit prin dezvoltarea în serie uniform convergentă în domeniul Ω^*, satisface toate condițiile problemei.

4. *Trecerea la planul fizic.* Vom pleca de la formula (5) care se mai scrie, în virtutea lui (3),

$$dz = \frac{1}{V} e^{i\theta} df = \frac{1}{V} e^{i\theta} (d\varphi + i d\psi). \tag{5'}$$

De aici rezultă

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{1}{V} (\cos\theta d\varphi - \sin\theta d\psi), \\ dy &= \frac{1}{V} (\sin\theta d\varphi + \cos\theta d\psi). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Ținînd seama de dezvoltările (13) și (14), din (15) se va scoate $x(V,\theta)$ și $y(V,\theta)$.

În cele ce urmează ne vom limita la determinarea lui $y(V,\theta)$.

Din a doua relație (15) avem

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{1}{V}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right). \tag{16}$$

Să punem pentru prescurtare

$$\psi(V,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(V) \sin\frac{n\pi\theta}{\mu}, \tag{13'}$$

$$\varphi(V,\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(V) \cos\frac{n\pi\theta}{\mu}, \tag{14'}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} a_n(V) &= \frac{h}{\pi}\,\frac{1}{n}\left(1-\cos\frac{nm\pi}{\mu}\right)\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{n\pi}{\mu}} \frac{1+\left(q^2\frac{V_0^2}{V^2}\right)^{\frac{n\pi}{\mu}}}{1-q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}, \\ b_n(V) &= \frac{h}{\pi}\,\frac{1}{n}\left(1-\cos\frac{nm\pi}{\mu}\right)\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{n\pi}{\mu}} \frac{1-\left(q^2\frac{V_0^2}{V^2}\right)^{\frac{n\pi}{\mu}}}{1-q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Ţinînd seama de dezvoltările (13′) şi (14′) din (16) rezultă

$$\frac{\partial y}{\partial\theta} = \frac{\pi}{\mu V}\sum_{n=1}^{\infty} n\left[a_n(V)\sin\theta\sin\frac{n\pi\theta}{\mu} + b_n(V)\cos\theta\cos\frac{n\pi\theta}{\mu}\right]$$

de unde prin integrare faţă de θ rezultă

$$y(V,\theta) = \frac{h}{\mu V}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{nm\pi}{\mu}}{1-q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{n\pi}{\mu}}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\mu}-1\right)\theta}{\frac{n\pi}{\mu}-1}$$

$$-\frac{h}{\mu V}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{nm\pi}{\mu}}{1-q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}\,q^{\frac{2n\pi}{\mu}}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{n\pi}{\mu}}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\mu}+1\right)\theta}{\frac{n\pi}{\mu}+1} + h(V).$$

Se observă însă că trebuie să avem $y(V,0)=0$, deci $h(V) = 0$, axa Ox fiind axă de simetrie a configuraţiei, în lungul căreia avem $\theta = 0$. În consecinţă, ordonata $y(V,\theta)$ este dată de

$$y(V,\theta) = \frac{h}{V}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{nm\pi}{\mu}}{1-q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{n\pi}{\mu}}\left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\mu}-1\right)\theta}{n\pi-\mu}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(q^2\frac{V_0^2}{V^2}\right)^{\frac{n\pi}{\mu}}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\mu}+1\right)\theta}{n\pi+\mu}\right]\right\}. \tag{18}$$

Ordonata punctului D (fig. 1) se obține pentru $V = V_0$, $\theta = \mu$. Se găsește

$$y_D = y(V_0,\mu) = \frac{\pi h \sin \mu}{V_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2\pi^2 - \mu^2} \left(1 - \cos \frac{nm\pi}{\mu}\right) \frac{1 + q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}{1 - q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}$$

$$+ \frac{\mu h \sin \mu}{V_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos \frac{nm\pi}{\mu}}{n^2\pi^2 - \mu^2}.$$

Dar avem relația (vezi de exemplu [2]),

$$\frac{1 - \cos m}{\sin \mu} = 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos \frac{nm\pi}{\mu}}{n^2\pi^2 - \mu^2}.$$

În consecință

$$y_D = \frac{h}{2V_0}(1 - \cos m) + \frac{\pi h}{V_0} \sin \mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2\pi^2 - \mu^2} \left(1 - \cos \frac{nm\pi}{\mu}\right) \times$$
$$\times \frac{1 + q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}{1 - q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}. \tag{19}$$

În mod analog se obține ordonata punctului C făcînd în (18) $V = V_1 = qV_0$, $\theta = \mu$. Se va avea

$$y_C = y(V_1, \mu) = \frac{2\pi h \sin \mu}{qV_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2\pi^2 - \mu^2} \left(1 - \cos \frac{nm\pi}{\mu}\right) \frac{q^{\frac{n\pi}{\mu}}}{1 - q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}. \tag{20}$$

Dacă notăm prin l lungimea segmentului OD și prin l' pe aceea a segmentului OC, avem

$$l \sin \mu = y_D, \quad l' \sin \mu = y_C, \tag{21}$$

deci din (19) și (20) se va avea l și l' în funcție de q, m și h.

Condiția ca lărgimea jetului în amonte să fie egală cu L ne permite determinarea lui h. Evaluînd în două moduri distincte fluxul Q printr-o secțiune normală la axa Ox, situată în amonte, se obține

$$Q = \rho L V_0 = \rho h,$$

ρ fiind densitatea. Prin urmare

$$h = LV_0 \tag{22}$$

astfel că din (19) şi (20) se deduce

$$\frac{l}{L} = \frac{1 - \cos m}{2 \sin \mu} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin^2 \frac{nm\pi}{2\mu}}{n^2\pi^2 - \mu^2} \frac{1 + q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}{1 - q^{\frac{2n\pi}{\mu}}} \tag{23}$$

$$\frac{l'}{L} = \frac{4\pi}{q} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin^2 \frac{nm\pi}{2\mu}}{n^2\pi^2 - \mu^2} \frac{q^{\frac{n\pi}{2\mu}}}{1 - q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}. \tag{24}$$

Pentru q dat $(0 < q < 1)$, relaţia (23) defineşte devierea m a jetului.

În cazul particular cînd $\mu = \frac{\pi}{2}$, formula (23) conduce la

$$\frac{l}{L} = \sin^2 \frac{m}{2} + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin^2 nm}{4n^2 - 1} \frac{1 + q^{4n}}{1 - q^{4n}}. \tag{23'}$$

Se obţine astfel o generalizare a formulei date de S. A. Ciaplîghin [1] în cazul fluidului nelimitat, caz care se regăseşte pentru $m \to 0$.

5. *Cazul fluidului nelimitat.* Vom face trecerea la limită pentru a obţine cazul fluidului nelimitat, deci al jetului de lărgime L infinită, făcînd $m \to 0$ în formulele precedente. Ne vom ocupa în special de relaţia (23).

Vom utiliza în acest scop dezvoltarea în serie cunoscută [3]

$$\ln \cos \frac{\alpha}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos n\alpha}{n} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin^2 \frac{n\alpha}{2}}{n}, \quad (-\pi < \alpha < \pi). \tag{25}$$

Vom pleca de la relaţia (23), în care l este considerat dat şi vom scrie

$$\frac{1 + q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}{1 - q^{\frac{2n\pi}{\mu}}} = 1 + \frac{2q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}{1 - q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}.$$

Vom avea deci

$$\frac{l}{L} = \frac{\sin^2 \frac{m}{2}}{\sin \mu} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin^2 \frac{nm\pi}{2\mu}}{n^2\pi^2 - \mu^2}$$

$$+ 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin^2 \frac{nm\pi}{2\mu}}{n^2\pi^2 - \mu^2} \frac{q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}{1 - q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}.$$

Vom scrie

$$\frac{n}{n^2\pi^2 - \mu^2} = \frac{1}{\pi^2 n} + \frac{\mu^2}{\pi^2}\,\frac{1}{n(n^2\pi^2 - \mu^2)}\cdot$$

Vom avea, ținîndu-se seama de (25) și înmulțind în ambii termeni cu $\frac{4}{m^2}$,

$$\frac{4l}{m^2 L} = \frac{4\sin^2\frac{m}{2}}{m^2 \sin\mu} - \frac{4}{\pi m^2}\ln\left(\cos\frac{m\pi}{2\mu}\right) + \frac{8\mu^2}{\pi m^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin^2\frac{nm\pi}{\mu}}{n(n^2\pi^2-\mu^2)}$$

$$+ \frac{16\pi}{m^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2\pi^2-\mu^2}\sin^2\frac{nm\pi}{2\mu}\,\frac{q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}{1-q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}\cdot$$

Dar

$$\lim_{m\to 0}\left[-\frac{4}{\pi m^2}\ln\left(\cos\frac{m\pi}{2\mu}\right)\right] = \frac{\pi}{2\mu^2}\cdot$$

În consecință se găsește

$$\lim_{m\to 0}(Lm^2) = \frac{}{\mu^2 + \frac{\pi}{2}\sin\mu + 2}$$

În cazul particular cînd $\mu = \frac{\pi}{2}$, care a fost considerat de S. A. Ciaplîghin, se găsește

$$\lim_{m\to 0}(Lm^2) = \frac{4l\pi}{\pi + 2 + 8\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{4n^2-1} + 64\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^3}{4n^2-1}\cdot\frac{q^{4n}}{1-q^{4n}}},$$

Dar

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{4n^2-1} = \frac{1}{4}\cdot$$

Deci

$$\lim_{m\to 0}(Lm^2) = \frac{4l\pi}{\pi + 4 + 64\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^3}{4n^2-1}\cdot\frac{q^{4n}}{1-q^{4n}}} \qquad (27)$$

ceea ce este în acord cu un rezultat obținut de L. N. Sretenski [4].

6. *Presiunea asupra obstacolului.* Fie $\vec{R}$ rezultanta presiunilor hidrodinamice asupra obstacolului. Vom aplica teorema impulsului [2] la masa de fluid cuprinsă între o secțiune normală a jetului la o mare distanță în amonte și secțiunile normale jeturilor bifurcate la o mare distanță în aval.

Fie L_1 lărgimea jeturilor bifurcate la infinit în aval și $\vec{u}$ și $-\vec{u}$ versorii direcțiilor lor asimptotice. Teorema impulsului ne dă

$$\vec{R}_1 = -\int_{CD+C'D'} p\vec{n}\,\mathrm{d}s = \oint_{\Gamma} \rho\vec{v}(\vec{v}\vec{n})\mathrm{d}s + \oint_{\Gamma-CD-C'D'} p\vec{n}\,\mathrm{d}s,$$

$\vec{n}$ fiind versorul normalei interioare la conturul Γ care limitează masa fluidă între secțiunile menționate. Se observă ușor că $2L_1 = L$.

Prin trecerea la limită, făcînd ca secțiunile menționate să tindă respectiv la infinit în amonte sau în aval, se găsește, ținînd seama de condițiile de limită,

$$\vec{R}_1 = \rho V_0^2 \vec{i} - \rho V_0^2 L_1(\vec{u} + \vec{u}') - p_0 \int_{DEAA'E'D} \vec{n}\,\mathrm{d}s + p_1 \int_{C'BC} \vec{n}\,\mathrm{d}s,$$

unde p_1 este presiunea constantă în zona $OC'BCO$.

Dar $\vec{u} + \vec{u}' = 2 \cos m\vec{i}$, $\vec{i}$ fiind versorul axei Ox. În plus

$$\int_{C'BCOC'} \vec{n}\,\mathrm{d}s = 0, \quad \int_{DEAA'E'D'} \vec{n}\,\mathrm{d}s + \int_{D'O+OD} \vec{n}\,\mathrm{d}s = 0.$$

În definitiv, notînd prin $\vec{n}_0$ $(-\sin\mu, \cos\mu)$ și prin $\vec{n}_0'$ $(-\sin\mu, -\cos\mu)$ versorii normalelor la segmentele OD și OD', se găsește

$$\int_{DEAA'E'D'} \vec{n}\,\mathrm{d}s = -\,l(\vec{n}_0 + \vec{n}_0'),$$

$$\int_{C'BC} \vec{n}\,\mathrm{d}s = l'(\vec{n}_0 + \vec{n}_0'),$$

deci

$$\vec{R}_1 = \{\rho V_0^2 L(1 - \cos m) + 2 \sin \mu (p_0 l - p_1 l')\}\vec{i}.$$

Este clar că $\vec{R}_1$ reprezintă numai acțiunea hidrodinamică pe segmentele CD și $C'D'$ din partea fluidului în mișcare. Vectorii

$$\vec{R}_2 = p_0 l(\vec{n}_0 + \vec{n}_0') = -\,2p_0 l \sin\mu\, \vec{i}$$

și

$$\vec{R}_3 = -\,p_1 l'(\vec{n}_0 + \vec{n}_0') = 2p_1 l' \sin\mu\, \vec{i}$$

reprezintă respectiv acțiunea fluidului în repaus asupra segmentelor OD și OD' și OC și OC'. În definitiv, acțiunea hidrodinamică totală asupra obstacolului este

$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 = \rho V_0^2 L(1 - \cos m)\vec{i}. \tag{28}$$

În cazul limită al curentului de lărgime infinită se găsește, conform lui (27), pentru modulul lui $\vec{R}$,

$$R = 2\rho V_0^2 \lim_{m\to 0}\left(L \sin^2 \frac{m}{2}\right) \tag{29}$$

adică

$$R = \frac{\rho V_0^2 l \mu^2 \sin\mu}{\mu^2 + \frac{\pi}{2}\sin\mu + 2\pi\mu^2 \sin\mu \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2\pi^2-\mu^2} + 4\pi^3 \sin\mu \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2\pi^2-\mu^2}}$$

Această formulă constituie o generalizare a formulei date S. A. Ciaplîghin pentru cazul cînd $\mu = \frac{\pi}{2}$. În acest ultim caz se găsește, în virtutea lui (27),

$$R = \frac{2\rho V_0^2 l \pi}{\pi + 4 + 64 \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^3}{4n^2-1}\,\frac{q^{4n}}{1-q^{4n}}}\cdot \tag{31}$$

Metoda folosită de noi, spre deosebire de cea considerată de S. A. Ciaplîghin, nu utilizează metoda reprezentării conforme și nici nu recurge la utilizarea funcțiilor eliptice, fiind bazată în esență pe procedeul separării variabilelor.

În cazul particular cînd $q = 0$, avem $l' = 0$, deci dispare zona de fluid în stagnare din fața obstacolului. În acest caz se regăsește o configurație studiată [2].

Primită la redacție la 25 ianuarie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. С. А. Чаплыгин, *К вопросу о струях в несжимаемой жидкости*. 1899. Собр. соч., t. II, ОГИЗ, 1948, 5—18.
2. C. Iacob, *Introduction mathématique à la méchanique des fluides*, Bucarest-Paris, 1959, p. 606 și p. 887.
3. C. Iacob, *Curs de Matematici Superioare*. Ed. tehnică, București, 1957, p. 519.
4. П. Н. Сретенски, К теории газовых струй. ПММ, 23, 305—332 (1959).

NOTĂ ISTORICĂ

ALEXANDRU ORĂSCU

Născut în Bucureşti la 30 iulie 1817, ca fiu al serdarului Hristea Orăscu, rang modest în ierarhia boierească de atunci, Alexandru Orăscu, primul profesor universitar de geometrie descriptivă al Universităţii din Bucureşti, a fost o personalitate marcantă în ţara noastră în a doua jumătate a secolului trecut.

Elev distins al Colegiului Sf. Sava între 1831—1841 este trimis de Eforia Școalelor bursier la Berlin, apoi la München şi Paris. În 1847 devine arhitect (München) și în același an se căsătorește cu Elena, fiica lui Simeon Marcovici, profesor la Colegiul Sf. Sava unde a predat matematica între anii 1827 — 1830.

La 30 septembrie 1847 Alexandru Orăscu este numit profesor de geometrie descriptivă la Colegiul Sf. Sava. În acelaşi an Colegiul Sf. Sava fusese transformat în şcoală cu predare în limba franceză, însă Petrache Poenaru, directorul Eforiei, fost profesor de matematică al Colegiului, s-a opus desfiinţării învăţămîntului naţional şi a amînat deschiderea cursurilor pînă ce au survenit evenimentele anului 1848, care au dus la anularea transformării.

Atît tatăl, Hristea Orăscu, cît şi fiul, Al. Orăscu, au luat parte la revoluţia din 1848. Alexandru Orăscu a făcut parte din ,,Comitetul regeneraţiei" format din 19 persoane alături de N. Bălcescu, Cezar Boliac, D. Bolintineanu, I. Brătianu şi Al. Golescu. Al. Orăscu a fost numit arhitect al Capitalei, chiar de Comitetul revoluţionar.

Din 1851, o dată cu redeschiderea Colegiului Sf. Sava, Al. Orăscu a continuat să predea geometria descriptivă dezvoltînd în acelaşi timp o activitate intensă ca arhitect, construind între anii 1857 — 1859 palatul vechi al Universităţii, ceea ce a constituit un monument important arhitectonic al Capitalei. O dată cu construirea acestui palat, Orăscu a contribuit la deschiderea primei artere principale moderne est-vest, actualul bulevard al Republicii, precum şi la multe alte lucrări arhitectonice importante la Bucureşti, Craiova și Iași.

Tot în anul 1851 în tipografia Colegiului Naţional, Al. Orăscu publică prima carte de matematică superioară în limba romînă, făcînd traducerea cărţii de geometrie descriptivă în două volume a lui Lefebvre de Fourcy. Primul volum conţinea:

Teoria planului și a dreptei (geometrie sintetică). Dreapta şi planul (intersecţii, unghiuri triedre). Suprafeţe (generale, plan tangent), sferă, suprafeţe de rotaţie, hiperboloidul cu o pînză și paraboloidul hiperbolic, suprafeţe desfăşurabile. Curbe (tangente, secţiuni plane în suprafeţe), intersecţii de suprafeţe, elipsă şi epicicloidă sferică. Aplicaţii.

Volumul al II-lea conţine epurele necesare primului volum. Aceste volume se găsesc la Biblioteca Facultăţii de matematică și mecanică din Bucureşti.

În octombrie 1963 s-au împlinit o sută de ani de cînd s-a înfiinţat Şcoala Superioară de Ştiinţe sub direcţia lui Al. Orăscu.

Un an mai tîrziu, această Şcoală intră ca Facultate de Ştiinţe în cadrul Universităţii, creată în Bucureşti printr-un decret al domnitorului Al. I. Cuza, iar Al. Orăscu este numit decan al acestei Facultăţi, în care calitate funcţionează pînă în 1870.

În 1876 este pentru puţin timp ministru al învăţămîntului, şi la 29 aprilie 1877 susţine în Senat moţiunea de independenţă prin care s-a declarat oficial starea de război cu Imperiul Otoman.

Între anii 1885 — 1892 este rector al Universităţii din Bucureşti, astfel că în 1884, cînd s-au împlinit 25 de ani de la înfiinţarea Universităţii din Bucureşti, Al. Orăscu a fost acela care a ţinut discursul oficial cu ocazia solemnităţii ce a avut loc atunci.

Al. Orăscu a decedat la 16 decembrie 1894.

Prin activitatea sa didactică în slujba învăţămîntului geometriei descriptive şi prin lucrările sale arhitectonice, Al. Orăscu poate fi considerat ca unul din profesorii cei mai de seamă ai începutului Universităţii din Bucureşti, Universitate ce împlineşte anul acesta o sută de ani de activitate neîntreruptă şi rodnică.

Acad. prof. *G. Vrănceanu*

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1283

STRUCTURI ALGEBRICE DE OPERAŢII ALGEBRICE FORMALE

PARTEA A II-A. APLICAŢII 1)

DE

SERGIU VASILACHE

CAPITOLUL I

ECUAŢII LINIARE ÎN MODULE ŞI ALGEBRE DE SUME FORMALE. APLICAŢII LA SPAŢIILE DE DISTRIBUŢII TEMPERATE

§ 1. PUNEREA PROBLEMEI

1. Ecuații liniare

Fie : A o algebră comutativă pe un inel $\mathfrak{U}$, avînd un element unitate e pentru o lege de compoziție internă notată $\top$; $[[A^{\mathbf{N}}]]$ algebra sumelor formale a imaginelor monoidului $\mathbf{N}$ în algebra A 2). Pentru σ_f, $\sigma_g \in [[A^{\mathbf{N}}]]$ avem :

$$\sigma_f \top \sigma_g = (\sum_{n\in\mathbf{N}} f(n)) \top (\sum_{n\in\mathbf{N}} g(n)) = \sum_{n\in\mathbf{N}} (\sum_{r+s=n} f(r) \top g(s)).$$

Fie u inversibilă (v. [1], Cap. IV, § 1, nr. 6, prop. 4) și v oarecare sume formale din $[[A^{\mathbf{N}}]]$; în aceste condiții ecuația

$$u \top z = v$$

admite soluția

$$z = v \top \overset{\top}{u}{}^{-1}$$

---

1) Apărută in extenso în limba engleză și în „Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées", VIII, *4* (1964).

2) Asupra algebrelor de sume formale a se vedea lucrările noastre anterioare [1]; în special Cap. III.

unde $\overset{\mathsf{T}}{u}{}^{-1} = \dfrac{[[e]]}{u}$, e fiind elementul unitate al algebrei $[[A^{\mathbf{N}}]]$ (v. [1], Cap. III, § 1, nr. 1).

Să considerăm acuma în A ecuaţia

$$(a + b) \mathsf{T} z = c \tag{1}$$

cu a, b inversibile şi c oarecare în A.

Fie E *soluţia elementară* a ecuaţiei (1), adică soluţia ecuaţiei

$$(a + b) \mathsf{T} E = e, \tag{2}$$

unde e este elementul unitate al algebrei A pentru legea de compoziţie internă T.

Pentru a rezolva ecuaţia (2) vom proceda după cum urmează (v. [1], Cap. IV, § 1, nr. 9).

Să transportăm (2) în $[[A^{\mathbf{N}}]]$; obţinem ecuaţiile

$$[[a + b]] \mathsf{T} [[E_1]] = [[e]] \tag{3}$$

şi

$$[[b + a]] \mathsf{T} [[E_2]] = [[e]] \tag{4}$$

ale căror soluţii sînt date respectiv de (v. [1], Cap. IV, § 1, nr. 7) :

$$[[E_1]] = \sum_{n \in \mathbf{N}} (-1)^n \overset{\mathsf{T}}{a}{}^{-n-1} \mathsf{T} \overset{\mathsf{T}}{b}{}^n \tag{5}$$

şi

$$[[E_2]] = \sum_{n \in \mathbf{N}} (-1)^n \overset{\mathsf{T}}{a}{}^n \mathsf{T} \overset{\mathsf{T}}{b}{}^{-n-1}, \tag{6}$$

unde

$$\underbrace{\overset{\mathsf{T}}{a}{}^n = a \mathsf{T} a \mathsf{T} \ldots \mathsf{T} a}_{n \text{ ori ;}} ; \quad \overset{\mathsf{T}}{a}{}^{-n-1} = \frac{e}{a \mathsf{T} a \mathsf{T} \ldots \mathsf{T} a}.$$

De asemenea, transportînd (1) în $[[A^{\mathbf{N}}]]$, obţinem ecuaţiile

$$[[a + b]] \mathsf{T} [[z_1]] = [[c]] \tag{7}$$

şi

$$[[b + a]] \mathsf{T} [[z_2]] = [[c]], \tag{8}$$

ale căror soluţii sînt respectiv

$$[[z_1]] = c \mathsf{T} [[E_1]] = c \mathsf{T} (\sum_{n \in \mathbf{N}} (-1)^n \overset{\mathsf{T}}{a}{}^{-n-1} \mathsf{T} \overset{\mathsf{T}}{b}{}^n \tag{9}$$

şi

$$[[z_2]] = c \mathsf{T} [[E_2]] = c \mathsf{T} (\sum_{n \in \mathbf{N}} (-1)^n \overset{\mathsf{T}}{a}{}^n \mathsf{T} \overset{\mathsf{T}}{b}{}^{-n-1}. \tag{10}$$

Remarcă. Ecuaţia (1) se mai poate scrie :

$$a \mathsf{T} E + b \mathsf{T} E = e$$

de unde deducem

$$E = \overset{\mathsf{T}}{a}{}^{-1} - \overset{\mathsf{T}}{a}{}^{-1} \mathsf{T} (b \mathsf{T} E) \tag{11}$$

și

$$E = \overset{\mathsf{T}}{b}{}^{-1} - a \mathsf{T} (\overset{\mathsf{T}}{b}{}^{-1} \mathsf{T} E). \tag{12}$$

Aplicînd ecuațiilor (11) și (12) metoda ,,*substituțiilor succesive*'', obținem ca soluții în $[[A^{\mathbf{N}}]]$, respectiv soluțiile (9) și (10).

2. Ecuații cu operatori

Fie $\mathbf{A}$ o algebră comutativă pe corpul numerelor complexe $\mathbf{C}$, ale cărei elemente sînt operatori liniari, ce acționează într-un spațiu vectorial $\mathbf{E}$ pe corpul $\mathbf{C}$. Să presupunem că algebra $\mathbf{A}$ admite un element unitate I pentru o lege de compoziție internă notată multiplicativ în $\mathbf{A}$.

Fie S, T doi operatori inversibili în $\mathbf{A}$; să căutăm în $\mathbf{E}$ sau într-un subspațiu din $\mathbf{E}$, soluția Z a ecuației :

$$(S + T)\cdot Z = v, \tag{13}$$

unde v este un element dat din E.

Pentru aceasta, fie $[[\mathbf{A}^{\mathbf{N}}]]$ algebra sumelor formale a imaginelor lui $\mathbf{N}$ în $\mathbf{A}$ și $[[\mathbf{E}^{\mathbf{N}}]]$ spațiul vectorial al sumelor formale a imaginelor lui $\mathbf{N}$ în $\mathbf{E}$. Să considerăm pe de altă parte $[[\mathbf{A}^{\mathbf{N}}]]$ — modulul $\mathbf{E}$ (asupra modulelor de sume formale a se vedea [1], Cap. II, § 3). Transportînd (13) în $[[\mathbf{A}^{\mathbf{N}}]]$ — modulul $\mathbf{E}$, obținem ecuațiile

$$[[S + T]]\cdot[[Z_1]] = [[v]] \tag{14}$$

și

$$[[T + S]]\cdot[[Z_2]] = [[v]] \tag{15}$$

cu $[[S + T]]$ și $[[T + S]]$ inversibile în $[[\mathbf{A}^{\mathbf{N}}]]$.

În aceste condiții, soluțiile $[[Z_1]]$, $[[Z_2]]$ în $[[\mathbf{A}^{\mathbf{N}}]]$ — modulul $\mathbf{E}$ sînt date respectiv de

$$[[Z_1]] = (\sum_{n\in\mathbf{N}} (-1)^n S^{-n-1} T^n)\cdot v \tag{16}$$

și

$$[[Z_2]] = (\sum_{n\in\mathbf{N}} (-1)^n S^n \cdot T^{-n-1})\, v, \tag{17}$$

care se pot de asemenea obține prin metoda ,,*aproximațiilor succesive*'' aplicată ecuației (13).

Remarcă. În [1], Cap. IV, § 1, nr. 9, am considerat două cazuri particulare de ecuații de forma (13), și anume, ecuațiile (28) și (36).

§ 2. ALGEBRE DE SUME FORMALE ȘI ECUAȚII DE CONVOLUȚIE ÎNTR-O ALGEBRĂ DE CONVOLUȚIE

Punerea problemei

Fie : **A** o algebră de convoluție pe corpul numerelor complexe **C**, ale cărei elemente sînt distribuții, „convolutibile" ; $[[\mathbf{A}^{\mathbf{N}}]]$ algebra de convoluție a sumelor formale a imaginilor monoidului **N** în algebra **A** (v. [1], Cap. III, § 2, nr. 5). Să considerăm în **A** ecuația de convoluție :

$$\{A + B\} \star \{Z\} = \{C\}, \tag{1}$$

cu $\{A\}$, $\{B\}$ distribuții inversibile și $\{C\}$ distribuție oarecare din algebra de convoluție **A**.

Soluția Z este dată de

$$\{Z\} = \{E\} \star \{C\}, \tag{2}$$

unde $\{E\}$ este *„soluția elementară"*, adică soluția ecuației

$$\{A + B\} \star \{E\} = \delta \tag{3}$$

în care δ este măsura Dirac, element unitate pentru convoluția din **A**.

Ecuația (3) este de forma (1) din § 1 ; soluția ei, ținînd seama de formulele (5) și (6) din § 1, este dată, în $[[\mathbf{A}^{\mathbf{N}}]]$, de :

$$[[E_1]] = \sum_{n \in \mathbf{N}} (-1)^n \{\overset{\star}{A}\}^{-n-1} \star \{\overset{\star}{B}\}^n \tag{4}$$

și

$$[[E_2]] = \sum_{n \in \mathbf{N}} (-1)^n \{\overset{\star}{A}\}^n \star \{\overset{\star}{B}\}^{-n-1}. \tag{5}$$

Deci, în virtutea formulelor (9) și (10) din § 1, soluția ecuației (1), în $[[\mathbf{A}^{\mathbf{N}}]]$, este

$$[[Z_1]] = \{C\} \star \Big(\sum_{n \in \mathbf{N}} (-1)^n \{\overset{\star}{A}\}^{-n-1} \star \{\overset{\star}{B}\}^n \Big) \tag{6}$$

și

$$[[Z_2]] = \{C\} \star \Big(\sum_{n \in \mathbf{N}} (-1)^n \{\overset{\star}{A}\}^n \star \{\overset{\star}{B}\}^{-n-1}. \tag{7}$$

Dacă **A** este o algebră topologică de convoluție și dacă $[[E_1]]$ (resp. $[[E_2]]$) converge în **A** pentru această topologie, atunci $[[E_1]]$ (resp. $[[E_2]]$) este un element din **A**. În aceste condiții același lucru va avea loc și pentru $[[Z_1]]$ (resp. $[[Z_2]]$). Pentru a rezolva ecuațiile de convoluție în **A**, se utilizează metode de calcul bazate pe transformarea Fourier, transformarea Laplace sau calculul operațional.

§ 3. ALGEBRE DE SUME FORMALE ŞI ECUAŢII DE CONVOLUŢIE ÎN SPAŢIUL DISTRIBUŢIILOR TEMPERATE

1. Noţiuni preliminare

Fie :

$\mathbf{R}$ dreapta reală ;

$(\mathbf{R}^2)_{xy}$ (resp. $(\mathbf{R}^2)_{\xi\eta}$) produsul cartezian $(\mathbf{R})_x \times (\mathbf{R})_y$ (resp. $(\mathbf{R})_\xi \times (\mathbf{R})_\eta$) în raport cu variabilele (x, y) (resp. (ξ, η)) ;

$(\mathbf{S}')_{xy}$ (resp. $(\mathbf{S}')_{\xi\eta}$) spaţiul vectorial (pe corpul numerelor complexe C) al distribuţiilor temperate pe $(\mathbf{R}^2)_{xy}$ (resp. $(\mathbf{R}^2)_{\xi\eta}$) ;

$[[S')^{\mathbf{N}}_{xy}]]$ (resp. $[[S')^{\mathbf{N}}_{\xi\eta}]]$) spaţiul vectorial (pe C) (v. [1], Cap. II, § 3, nr. 2) al sumelor formale a imaginelor monoidului $\mathbf{N}$ în spaţiul vectorial $(\mathbf{S}')_{xy}$ resp. $(\mathbf{S}')_{\xi\eta}$;

$(\mathbf{S}')_x$ şi $(\mathbf{S}')_y$ (resp. $(\mathbf{S}')_\xi$) şi $(\mathbf{S}')_\eta$) spaţiile vectoriale (pe $\mathbf{C}$), ale distribuţiilor pe $(\mathbf{R})_x$ şi $(\mathbf{R})_y$ (resp. $(\mathbf{R})_\xi$ şi $(\mathbf{R})_\eta$) ;

$(\mathbf{S}')_x \otimes (\mathbf{S}')_y$ (resp. $(\mathbf{S}')_\xi \otimes (\mathbf{S}')_\eta$) produsul tensorial al spaţiilor $(\mathbf{S}')_x$ şi $(\mathbf{S}')_y$ (resp. $(\mathbf{S}')_\xi$ şi $(\mathbf{S}')_\eta$).

Fie F transformarea Fourier (asupra transformării Fourier a se vedea L. Schwartz [2], Cap. VI şi Gelfand-Şilov, [3], vol. II, Cap. II ; vol. III, Cap. III).

Se ştie că F şi inversa ei $\overset{-1}{F}$ stabilesc două izomorfisme reciproce între spaţiile topologice $(\mathbf{S}')_{xy}$ şi $(\mathbf{S}')_{\xi\eta}$.

În plus, F şi $\overset{-1}{F}$ stabilesc două izomorfisme reciproce între spaţiul $(\mathbf{O}_M)$ al funcţiilor indefinit derivabile lent crescătoare şi spaţiul $(\mathbf{O}'_C)$ al distribuţiilor rapid descrescătoare, şi schimbă convoluţia şi multiplicarea, adică avem (v. [2], Cap. VII, teorema XV) :

$$\{T \in (\mathbf{O}'_C),\quad U \in (\mathbf{S}')\} \Rightarrow \{F(T) \in (\mathbf{O}_M),\quad F(U) \in (\mathbf{S}')\}$$

şi

$$F(T * U) = F(T)\,F(U).$$

Pentru $T \in (\mathbf{O}'_C)$, $U \in (\mathbf{O}'_C)$, avem $T * U$ $(\mathbf{O}'_C)$; deci $(\mathbf{O}'_C)$ *este o algebră* (*topologică*) *de convoluţie*.

De asemenea $(\mathbf{O}_M)$ este o algebră topologică pentru legile de compoziţie interne definite de adunare şi înmulţire.

De altă parte, spaţiul distribuţiilor temperate (S'), poate fi considerat ca un $(\mathbf{O}'_C)$ — modul, a cărei lege de compoziţie externă este convoluţia. În aceste condiţii, $(\mathbf{S}')$ este un $(\mathbf{O}'_C)$ — modul topologic, iar aplicaţie biliniară :

$$(S,\ T) \to S * T \text{ de } (\mathbf{O}'_C) \times (\mathbf{S}') \text{ în } (\mathbf{S}')$$

este separat continuă (v. [2], Cap. VII, § 5, nr. 10, teorema XI).

De asemenea $(\mathbf{S}')$ este un $(\mathbf{O}_M)$ — modul topologic, pentru o lege de compoziţie externă definită de înmulţire.

2. Ecuații de convoluție și transformarea Fourier

Să considerăm ecuația de convoluție

$$\{A\ (x, y) + B(x, y)\} \star \{Z(x, y)\} = \{C(x, y)\} \tag{1}$$

în care $\{A(x, y)\}$ și $\{B(x, y)\}$ sînt distribuții inversibile în $(\mathbf{O}'_C)$ și $\{C(x, y)\}$ o distribuție oarecare din $(\mathbf{S}')_{xy}$.

Să căutăm o soluție $Z(x, y)$ în $(\mathbf{S}')_{xy}$ considerat ca $(\mathbf{O}'_C)$ — modul. După formulele (16) și (17) din § 1, nr. 2, această soluție este dată în $(\mathbf{O}'_C)$ — modulul $(\mathbf{S}')_{xy}$ de :

$$[[Z_1]] = \{C\} \star (\sum_{n\in N}(-1)^n\, \{\overset{\star}{A}\}^{-n-1} \star \{\overset{\star}{B}\}^n) = \{C\} \star [[E_1]] \tag{2}$$

și

$$[[Z_2]] = \{C\} \star (\sum_{n\in N}(-1)^n\, \{\overset{\star}{A}\}^n \star \{\overset{\star}{B}\}^{-n-1} = \{C\} \star [[E_2]]. \tag{3}$$

Pentru a calcula $[[Z_1]]$ și $[[Z_2]]$ cu ajutorul transformării Fourier, vom aplica operatorul F ecuației (1); punînd :

$$F(A(x, y)) = \tilde{A}(\xi, \eta) \in (\mathbf{O}_M)_{\xi\eta}\,;\ F(B(x, y)) = \widetilde{B}(\xi, \eta) \in (\mathbf{O}_M)_{\xi\eta}$$

$$F(C(x, y)) = \widetilde{C}(\xi, \eta) \in (\mathbf{S}')_{\xi\eta}\,;\ F(Z)(x, y)) = \widetilde{Z}(\xi, \eta) \in (\mathbf{S}')_{\xi\eta}\,,$$

ecuația (1) ia forma :

$$\{\tilde{A}(\xi, \eta) + \widetilde{B}(\xi, \eta)\}\, \{\widetilde{Z}(\xi, \eta)\} = \{\widetilde{C}(\xi, \eta)\} \in (\mathbf{S}')_{\xi\eta}, \tag{4}$$

de unde, în $[[(\mathbf{O}_M)^{\mathbf{N}}]]$ — modulul $(\mathbf{S}')_{\xi\eta}$, soluțiile :

$$[[\widetilde{Z}_1(\xi, \eta)]] = \{\widetilde{C}(\xi, \eta)\}\, (\sum_{n\in\mathbf{N}}(-1)^n\ \{\tilde{A}(\xi, \eta)\}^{-(n+1)}\, \{\widetilde{B}(\xi, \eta)\}^n) \tag{5}$$

și

$$[[\widetilde{Z}_2(\xi, \eta)]] = \{\widetilde{C}(\xi, \eta)\}\, (\sum_{n\in\mathbf{N}}(-1)^n\ \{\tilde{A}(\xi, \eta)\}^n\, \{B(\xi, \eta)\}^{-(n+1)}. \tag{6}$$

Fie $[[(\mathbf{S}')^{\mathbf{N}}_{xy}]]$ (resp. $[[(\mathbf{S}')^{\mathbf{N}}_{\xi\eta}]]$) spațiul vectorial (pe $\mathbf{C}$), al sumelor formale a imaginilor monoidului $\mathbf{N}$ în $(\mathbf{S}')_{xy}$ (resp. $(\mathbf{S}')_{\xi\eta}$); $[[(\mathbf{O}'_C)^{\mathbf{N}}]]$ — modulul $(\mathbf{S}')_{xy}$ (resp. $[[(\mathbf{O}_M)^{\mathbf{N}}]]$ — modulul $(\mathbf{S}')_{\xi\eta}$) este conținut în $[[(\mathbf{S}')^{\mathbf{N}}_{xy}]]$ [[resp. $(\mathbf{S}')^{\mathbf{N}}_{\xi\eta}$]]), (v. § 1, nr. 2).

Aplicînd relațiilor (5) și (6) operatorul invers al lui Fourier $\overset{-1}{F}$, regăsim soluțiile (2) și (3). Seriile formale ce figurează în membrul doi din formulele (2) și (3) reprezintă *soluția formală elementară* a ecuației (1), transportată în $[[(\mathbf{O}'_C)^{\mathbf{N}}]]$ — modulul $(\mathbf{S}')_{xy}$.

Dacă $[[E_1]]$ (resp. $[[E_2]]$) converge în $(\mathbf{S}')_{xy}$, atunci $[[Z_1]]$ (resp. $[[Z_2]]$) este un element din $(\mathbf{S}')_{xy}$, soluție a ecuației (1).

În particular, dacă

$\{A(x, y)\} = \delta'(x) \otimes \delta(y) \in (\mathbf{O}'_C)$; $\{B(x, y)\} = \delta(x) \otimes B(x, y) \in (\mathbf{O}'_C)_{xy}$ cu $\{B(y)\} \in (\mathbf{O}'_C)_y$, atunci ecuația

$$\{\delta'(x) \otimes \delta(y) + \delta(x) \otimes B(y)\} \star \{Z(x, y)\} = \{C(x, y)\} \tag{7}$$

admite în $[[(\mathbf{O}'_C)^{\mathbf{N}}]]$ — modulul $(\mathbf{S}')_{xy}$ soluțiile :

$$[[Z_1]] = [[C]] \star [[E_1]] = \{C\} \star [[E_1]] \tag{8}$$

și

$$[[Z_2]] = [[C]] \star [[E_2]] = \{C\} \star [[E_2]], \tag{9}$$

în care *soluția elementară* $[[E_1]]$, $[[E_2]]$ este dată de

$$[[E_1]] = \sum_{n \in \mathbf{N}} (-1)^n \{\overset{\star}{\delta}'(x)\}^{-(n+1)} \otimes \{\overset{\star}{B}(y)\}^n \tag{10}$$

și

$$[[E_2]] = \sum_{n \in \mathbf{N}} (-1)^n \{\delta^{(n)}(x)\} \otimes \{B(y)\}. \tag{11}$$

Vom calcula distribuția $\{\overset{\star}{\delta}'(x)\}^{-(n+1)}$ cu ajutorul transformării Fourier. Pentru aceasta, vom proceda după cum urmează :

Fie $\{A(x, y)\}$ inversibilă în $(\mathbf{O}'_C)$; avem :

$$F(\{A(x, y)\} \star \{\overset{\star}{A}(x, y)\}^{-1}) = F(\{A(x, y)\} F(\{A(x, y)\}^{-1}) = \\ = 1_\xi \otimes 1_\eta = 1 \in (\mathbf{S}')_{\xi\eta}, \tag{12}$$

unde

$$F(\{A(x, y)\}) \in (\mathbf{O}_M),$$

deci

$$F(\{\overset{\star}{A}(x, y)\}^{-1}) = \frac{1}{F(\{A(x, y)\}},$$

de unde

$$\{\overset{\star}{A}(x, y)\}^{-1} = \overset{-1}{F}\left(\frac{1}{F(\{A(x, y)\})}\right). \tag{13}$$

În particular, pentru

$$\{A(x, y)\} = \delta'(x) \otimes \delta(y)$$

găsim

$$\{\overset{\star}{\delta}'(x)\}^{-1} \otimes \delta(y) = \overset{-1}{F}\left(\frac{1}{F(\delta'(x)) \otimes 1_\eta}\right) = \overset{-1}{F}\left(\frac{1_\xi}{F(\delta'(x))}\right) \otimes \delta(y)$$

deci

$$\{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-1} = \overset{-1}{F}\left(\frac{1_\zeta}{F(\delta'(x))}\right). \tag{14}$$

Dar

$$F(\delta'(x)) = (-i\xi),$$

deci

$$\{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-1} = \overset{-1}{F}\left(\frac{i}{\xi}\right), \tag{15}$$

de unde

$$\{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-(n+1)} = \overset{-1}{F}\left(\left(\frac{i}{\xi}\right)^{n+1}\right). \tag{16}$$

Ne rămîne deci să calculăm $\overset{-1}{F}\left(\left(\frac{i}{\xi}\right)^{n+1}\right)$.

Pentru aceasta vom pleca de la formulele (v. [3], vol. 1, p. 218—219);

$$FF(f) = 2\pi f(-x) \text{ (unde } F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} f(x)\,dx) \tag{17}$$

și

$$F(|x|^\lambda) = -2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\,\Gamma(\lambda+1)\,|\xi|^{-\lambda-1}, \tag{18}$$

de unde deducem

$$F(|x|^{-\lambda-1}) = \frac{-\pi|\xi|^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)\sin\lambda\frac{\pi}{2}}. \tag{19}$$

Pentru $\lambda = 2k+1$, găsim

$$F(x^{-2k-2}) = (-1)^{k+1}\frac{\pi|\xi|^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{20}$$

De asemenea, plecînd de la formula (13) din [3], vol. I, p. 217, adică

$$F(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x) = 2i\,\Gamma(\lambda+1)\cos\frac{\lambda\pi}{2}|\xi|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\xi; \tag{21}$$

găsim, ținînd seama de (16):

$$FF(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x) = 2\pi|x|^\lambda \operatorname{sgn}(-x) = -2\pi|x|^\lambda \operatorname{sgn} x \tag{22}$$

și

$$F(|x|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn} x) = -\frac{\pi i\,|\xi|^{\lambda}\operatorname{sgn}\xi}{\Gamma(\lambda+1)\cos\lambda\dfrac{\pi}{2}}. \tag{23}$$

Pentru $\lambda = 2k$, avem :

$$F(x^{-2k-1}) = \frac{i\pi(-1)^{k}}{(2k)!}|\xi|^{2k}\operatorname{sgn}\xi. \tag{24}$$

Formulele (20) și (24) se pot încă scrie, respectiv :

$$\overset{-1}{F}(\xi^{-2k-2}) = (-1)^{k+1}\frac{1}{2}\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2}(-i)^{2k+2}\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{25}$$

și

$$\overset{-1}{F}(\xi^{-2k-1}) = \frac{1}{2}(-1)^{k}(-i)\frac{|x|^{2k}}{(2\,k)!}\operatorname{sgn} x, \tag{26}$$

de unde obținem

$$\{\overset{\star}{\delta}'(x)\}^{-(2k+2)} \star \overset{-1}{F}\left(\left(\frac{i}{\xi}\right)^{2k+2}\right) = \frac{1}{2}\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{27}$$

și

$$\{\overset{\star}{\delta}'(x)\}^{-(2k+1)} = \overset{-1}{F}\left(\left(\frac{i}{\xi}\right)^{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\frac{|x|^{2k}}{(2k)!}\operatorname{sgn} x. \tag{28}$$

Înlocuind în (10) pe $\{\delta'(x)\}^{-(n+1)}$ prin valorile de mai sus găsim :

$$[[E_1]] = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sgn} x \otimes \delta(y) - \frac{|x|}{1!} \otimes B(y) + \frac{|x|^2}{2!}\operatorname{sgn} x \otimes \{\overset{\star}{B}(y)\}^2 - \dots \right.$$
$$\left. + \frac{|x|^{2k}}{(2k)!}\operatorname{sgn} x \otimes \{\overset{\star}{B}(y)\}^{2k} - \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \otimes \{\overset{\star}{B}(y)\}^{2k+1} + \dots\right] \tag{29}$$

care se poate pune sub forma

$$[[E_1]] = \frac{1}{2}e^{-x\dot{B}(y)}\operatorname{sgn} x, \tag{30}$$

unde

$$e^{-x\dot{B}(y)} = \delta(y) - \frac{x}{1}B(y) + \frac{x^2}{2!}\{\overset{\star}{B}(y)\}^2 - \dots + (-1)^n\frac{x^n}{n!}\{\overset{\star}{B}(y)\}^n + \dots \tag{31}$$

$[[E_1]]$ este o *funcție exponențială* în $x \in (\mathbf{R})_x$, cu valori în spațiul vectorial $[[(\mathbf{S}')^{\mathbf{N}}_{xy}]]$. Dacă membrul al doilea din (31) converge în $(\mathbf{S}')_y$, atunci

$e^{-x\overset{*}{B}(y)}$ este un element din $(\mathbf{S}')_y$, *distribuție exponențială*, ce depinde de parametrul $x \in (\mathbf{R})_x$. Este ușor de văzut, că $[[E_1]]$ satisface ecuația de convoluție

$$\{\delta'(x) \otimes \delta(y)\} + \delta(x) \otimes B(y)\} \star [[E_1]] = [[\delta(x) \otimes \delta(y)]] \tag{32}$$

sau ecuația echivalentă

$$\frac{\partial[[E_1]]}{\partial x} + \{B(y)\}\overset{y}{\star}\, [[E_1]] = [[\delta(x) \otimes \delta(y)]]. \tag{33}$$

Demonstrația se poate face plecînd de la (29) sau (30). Să plecăm de la (30); vom avea, derivînd în sensul distribuțiilor:

$$\frac{\partial[[E_1]]}{\partial x} = -\frac{1}{2}\{B(y)\}\overset{y}{\star}\, e^{-x\overset{*}{B}(y)} \operatorname{sgn} x + [[\partial(x) \otimes \delta(y)]] \tag{34}$$

deoarece

$$[[E_1]]_{x=0} = [[\delta(y)]].$$

Dar (34) este identică cu (33).

Să arătăm că $[[E_2]]$ definită prin (11) verifică de asemenea ecuația

$$\frac{\partial[[E_2]]}{\partial x} + \{B(y)\} \star [[E_2]] = [[\delta(x) \otimes \delta(y)]]. \tag{35}$$

În adevăr, avem

$$\frac{\partial[[E_2]]}{\partial x} = \sum_{n\in\mathbf{N}} (-1)^n \{\delta^{(n+1)}(x) \otimes \{\overset{*}{B}(y)\}^{-(n+1)} \tag{36}$$

și

$$B(y)\overset{y}{\star}\, [[E_2]] = \sum_{n\in\mathbf{N}} (-1)^n \delta^{(n)}(x) \otimes \{\overset{*}{B}(y)\}^n =$$

$$= \delta(x) \otimes \delta(y) + \sum_{n\in\mathbf{N}} (-1)^{n+1} \delta^{(n+1)}(x) \otimes \{\overset{*}{B}(y)\}^{-(n+1)} \tag{37}$$

de unde (35).

c.c.t.d.

§ 4. ALGEBRE DE SUME FORMALE ȘI ECUAȚII DIFERENȚIALE ÎN (S')

1. Soluție elementară a ecuațiilor diferențiale cu coeficienți constanți

Fie $(\mathbf{S}')_x$ spațiul distribuțiilor temperate pe $(\mathbf{R})_x$.

Să determinăm în $(\mathbf{S}')_x$ soluția (elementară) $E(x)$ a ecuației diferențiale lineare de ordinul n:

$$a_0 \frac{d^n\{E\}}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}\{E\}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{d\{E\}}{dx} + a_n\{E\} = \delta(x), \tag{1}$$

unde $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ sînt constante arbitrare; $a_0 \neq 0$.

Ecuaţia (1) este echivalentă cu ecuaţia de convoluţie :

$$\{a_0 \delta^{(n)}(x) + a_1 \delta^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n\, \delta(x)\} \star \{E\} = \delta(x). \tag{2}$$

Cum, prin ipoteză, $a_0 \neq 0$, putem presupune $a_0 = 1$; în aceste condiţii, „convolutînd'' ambii membri ai ecuaţiei (2) cu $\delta^{(-n)}(x)$, obţinem

$$[\{\delta(x)\} + a_1\{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-1} + a_2\{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-2} + \ldots + a_n\{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-n}] \star \{E\} = \{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-n}. \tag{3}$$

Punînd

$$H_0(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-\nu}, \tag{4}$$

ecuaţia (3) ia forma

$$\{\delta(x) + H_0(x)\} \star \{E_0\} = \{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-n}. \tag{5}$$

Dar

$$\{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-l} \star \{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-k} = \{\overset{*}{\delta}'(x)]^{-(k+l)} \tag{6}$$

oricare ar fi $k, l \in Z = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Fie $(\mathfrak{A})_x$ submodulul din $(\mathbf{O}_C)$ — modulul $(\mathbf{S}')_x$, generat de familia $\{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-l}$ de elemente din $(\mathbf{S}')_x$.

$(\mathfrak{A})_x$ (v. Bourbaki [4], § 1, nr. 7, prop. 9) este format din combinaţiile lineare ale elementelor din familia $\{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-l}$.

Să considerăm structura (subjacentă) de grup a $(\mathbf{O}'_C)_x$ — modulului $(\mathfrak{A})_x$. Din (6) rezultă că $(\mathfrak{A})$ este o algebră de convoluţie.

Fie $[[(\mathfrak{A})_x^{\mathbf{N}}]]$ algebra sumelor formate a imaginilor monoidului $\mathbf{N}$ în algebra de convoluţie $(\mathfrak{A})_x$.

Să punem

$$[[\delta(x) + H_0(x)]] = \sum_{n \in \mathbf{N}} \alpha_n(x) \in [[(\mathfrak{A})_x^{\mathbf{N}}]], \tag{7}$$

unde

$$\alpha_n(x) = \begin{cases} \delta(x) & \text{pentru } n = 0 \\ H_0(x) & ,, \quad n = 1 \\ 0 & ,, \quad n > 1. \end{cases} \tag{8}$$

După [1], Cap. IV, § 1, nr. 6, prop. 4, suma formală $[[\delta(x) + H_0(x)]]$ este inversibilă în $[[(\mathfrak{A})_x^{\mathbf{N}}]]$; deci transportînd (5) în $[[(\mathfrak{A})_x^{\mathbf{N}}]]$ obţinem

$$[[E_0]] = \{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-n} \star \Big(\sum_{\nu \in \mathbf{N}} (-1)^\nu \{\overset{*}{H}(x)\}^\nu\Big) \in [[(\mathfrak{A})_x^{\mathbf{N}}]]$$

$\{H_0{}^{\star}(x)\}^\nu$ putere $\nu^{\text{-mă}}$ de convoluţie a lui $H_0(x) \in (\mathfrak{A})_x$, aparţine de asemenea lui $(\mathfrak{A})_x$, adică este o combinaţie lineară de elemente din familia $(\{\delta^{\star\prime}(x)\}^{-l})_{l \in \mathbf{Z}}$.

Dar, în virtutea formulelor (27) şi (28), $\{H^*(x)\}^\nu$ este o combinaţie lineară de elemente de forma $\frac{x^l}{l\,!}\operatorname{sgn} x$; $l \in \mathbf{N}$.

Deci $H_0(x)$ se poate pune sub forma:

$$[[E_0]] = \Gamma(x) \operatorname{sgn} x, \tag{9}$$

unde $\Gamma(x)$ este suma unei serii absolut şi uniform convergente pe orice interval mărginit din $(\mathbf{R})_x$.

Exemple. Fie $n = 1$; soluţia $\{E_0\}$ a ecuaţiei

$$\frac{\mathrm{d}\{E\}}{\mathrm{d}x} + aE = \delta(x) \tag{10}$$

este dată de

$$[[E_0]] = \{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-1} * \Big(\sum_{\nu \in \mathbf{N}} (-1)^\nu a^\nu \{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-\nu}\Big), \tag{11}$$

deoarece $H_0(x) = a\,\{\delta'(x)\}^{-1}$, în acest caz.

De altă parte, relaţia

$$|\,x\,|^{2k+1} = x^{2k+1} \operatorname{sgn} x \tag{12}$$

ne permite să scriem relaţiile (27) şi (28) din § 3, nr. 2 sub forma unică

$$\{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-(l+1)} = \frac{1}{2}\,\frac{x^l}{l\,!} \operatorname{sgn} x,\ l \in \mathbf{N}. \tag{13}$$

Deci, ţinînd seama de (13), găsim pentru $[[E_0]]$ expresia

$$[[E_0]] = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-ax} \operatorname{sgn} x \in (\mathrm{S}')\,xy. \tag{14}$$

Deci soluţia elementară în $(S')_x$ a ecuaţiei (10) este dată de

$$E_0(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-ax} \operatorname{sgn} x \in (\mathrm{S}')_x. \tag{15}$$

Să revenim acuma la ecuaţia (1) (resp. (2)).

Să punem

$$a_k\,\{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-k} + \sum_{j \neq k}^{n} a_j\,\{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-j} = a_k\,\{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-k} + H_k(x), \tag{16}$$

unde

$$H_k\,(x) = \sum_{j=0,\ j \neq k}^{n} \{\overset{*}{\delta}'(x))\}^{-j}. \tag{17}$$

De altă parte, (3) se poate scrie sub forma

$$\{a_k\,\{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-k} + H_k\,(x)\} * \{E_k\} = \delta(x). \tag{18}$$

Dar $a_k \{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-k}$ este inversibilă în $(\mathcal{A})_x$, deci $a_k \{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-k} + H_k(x)$ este inversibilă în $[[(\mathcal{A})_x^{\mathbf{N}}]]^x$, de unde pentru $E_k \in [[(\mathcal{A})_x^{\mathbf{N}}]]$;

$$[[E_k]] = \sum_{\nu \in \mathbf{N}} (-1)^{\nu} \frac{1}{a_k^{\nu+1}} \{\overset{*}{\delta}^{(k)}(x)\}^{\nu+1} * \{H_k^{*}(x)\}^{\nu} =$$

$$= \{\overset{*}{\delta}^{(k)}(x)\} * \sum_{\nu \in \mathbf{N}} (-1)^{\nu} \frac{1}{a_k^{\nu+1}} \{\delta^{(k)}(x) * H_k(x)\}^{*\nu}. \tag{19}$$

Dar

$$\overset{*}{\delta}^{(k)}(x) * H_k(x) = \{\overset{*}{\delta}'(x)\}^k * \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{M} \{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-j} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}} \{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{k-j} \tag{20}$$

şi

$$\{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{k-j} = \begin{cases} \delta^{(k-j)}(x) \text{ pentru } k > j \\ \{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-(j-k)} = \dfrac{x^{j-k-1}}{(j-k-1)!} \operatorname{sgn} x \text{ pentru } k < j. \end{cases} \tag{21}$$

Formulele (20) şi (21) ne arată că în membrul al doilea din (19), termenul $\{\{\overset{*}{\delta}^{(k)}(x)\} * H_k(x)\}^{*\nu}$ (puterea $\nu^{-\text{mă}}$ de convoluţie a lui $\{\overset{*}{\delta}^{(k)}(x) * H_k \cdot (x)\}^{*\nu}$), conţine, pe de o parte, termenii de forma $\dfrac{x^{\rho}}{\rho!} \operatorname{sgn} x$, pentru $\rho = j - k > 0$, şi derivate $\delta^{(\mu)}(x)$ a măsurei Dirac, pentru $j - k = \mu < 0$.

Deci, în acest caz, soluţia $[[E_k]]$, pentru $k > 0$, este un element din $[[(\mathcal{A})_x^{\mathbf{N}}]]$ care nu se reduce niciodată la o distribuţie.

În rezumat, ecuaţia diferenţială (1) admite în $[[(\mathcal{A})_x^{\mathbf{N}}]]$:

a) O soluţie $E_0(x)$, funcţie de forma $\Gamma(x) \operatorname{sgn} x$, cu $\Gamma(x)$ serie absolut şi uniform convergentă pe orice interval mărginit din $(R)_x$;

b) $(E_k(x))_{1 \leqslant k \leqslant n}$ soluţii, elemente din $[[(\mathcal{A}_x^{\mathbf{N}})$, care nu se reduc niciodată la distribuţii.

Exemple. În cazul ecuaţiei (10), găsim:

$$[[E_1(x)]] = \sum (-1)^{\nu} \frac{1}{a^{\nu+1}} \delta^{(\nu)}(x). \tag{22}$$

Deci, ecuaţia (10) admite, de o parte, soluţia $E_0(x)$, funcţie dată de (15); de altă parte, soluţia $[[E_1]]$ dată de (22), element din $[[(\mathcal{A})_x^{\mathbf{N}}]]$, care nu se reduce niciodată la o distribuţie.

Ţinînd seama de cele de mai sus, găsim că ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = f(x) \in (\mathrm{S}')_x \tag{23}$$

admite în $[[(\mathrm{S}')_x^{\mathbf{N}}]]$ soluţiile:

$$\{y_1(x)\} = f(x) * \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-ax} \operatorname{sgn} x \in (\mathrm{S}')_x \tag{24}$$

şi

$$[[y_2(x)]] = f(x) \star \sum_{\nu\in\mathbf{N}} (-1)^{\nu} \frac{1}{a^{\nu+1}} \delta^{(\nu)}(x) = \sum_{\nu\in\mathbf{N}} (-1)^{\nu} \frac{d^{\nu}\{f\}}{dx^{\nu}} \tag{25}$$

unde derivatele lui $f(x)$ sînt luate în sensul distribuţiilor. Dacă, în particular, f este o funcţie îndefinit derivabilă în sensul obişnuit pe toată dreapta reală $(\mathbf{R})_x$, derivatele în sensul distribuţiilor coincid cu derivatele în sensul obişnuit, de unde:

$$[[y_2(x)]] = \sum_{\nu\in\mathbf{N}} (-1)^{\nu} \frac{1}{a^{\nu+1}} \frac{d^{\nu} f}{dx^{\nu}} \,. \tag{26}$$

2. Soluţia elementară a operatorului $a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + c$.

Să considerăm în $(\mathbf{S}')_{xy}$ ecuaţia

$$a\frac{\partial E}{\partial x} + b\frac{\partial E}{\partial y} + cE = \delta(x) \otimes \delta(y) \tag{27}$$

echivalentă cu

$$\{a\delta'(x) \otimes \delta(y) + b\delta(x) \otimes \delta'(y) + c\delta(x) \otimes \delta(y)\} \star \{E\} = \delta(x) \otimes \delta(y). \tag{28}$$

Punînd

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y) = a\delta'(x) \otimes \delta(y) + c\delta(x) \otimes \delta(y)\,;\ B(x,y) = b\delta(x) \otimes \delta'(y) \\ \text{sau} \\ A(x,y) = a\delta'(x) \otimes \delta(y)\,;\ B(x,y) = b\delta(x) \otimes \delta(y) + c\delta(x) \otimes \delta(y) \end{array}\right\} \tag{29}$$

şi aplicînd operatorul F al lui Fourier la ecuaţia (27), găsim (v. formulele (5) şi (6) din § 3, nr. 2).

$$\widetilde{E}_1(\xi,\eta) = \frac{i}{a} \sum_{n\in\mathbf{N}} (-1)^n \left(\frac{1}{\xi + ic/a}\right)^{n+1} \otimes \left(\frac{b}{a}\,\eta\right)^n \tag{30}$$

şi

$$\widetilde{E}_2(\xi,\eta) = \frac{i}{b} \sum_{n\in\mathbf{N}} (-1)^n \left(\frac{a}{b}\,\xi\right)^n \otimes \left(\frac{1_{\eta}}{\eta + ic/b}\right)^{n+1} \cdot \tag{31}$$

De altă parte

$$[\varphi(\xi) = F(f(x))] \Rightarrow [\varphi(\xi + \alpha)] = F\,(e^{i\alpha x} f(x)). \tag{32}$$

Deci, relaţiile (25), (26) din § 3, nr. 2 şi implicaţia (12) de mai sus ne dau:

$$\overset{-1}{F}\left(\left(\frac{1_{\xi}}{\xi + ic/a}\right)^{2k}\right) = (-1)^k \frac{1}{2} \frac{|\,x\,|^{2k-1}}{(2k-1)\,!}\, e^{-\frac{c}{a}x} \tag{33}$$

şi

$$\overset{-1}{F}\left(\left(\frac{1_\xi}{\xi + ic/a}\right)^{2k-1}\right) = (-1)^k (-i) \frac{1}{2} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} e^{-\frac{c}{a}x} \operatorname{sgn} x. \tag{34}$$

Pe de altă parte, (v. Gelfand şi Şilov, *loc. cit.*, p. 218–219):

$$\overset{-\vec{1}}{F} (\eta^{2k}) = (-1)^k \delta^{(2k)} (y) \tag{35}$$

şi

$$\overset{-1}{F} (\eta^{2k+1}) = (-1)^{k+1} (-i)\, \delta^{2(k+1)} (y). \tag{36}$$

Deci, aplicînd operatorul $\overset{-1}{F}$ formulelor (30) şi (31), găsim pentru soluţiile $[[E_1(x, y)]]$ şi $[[E_2(x, y)]]$ expresiile:

$$[[E_1]] = \frac{1}{2a} e^{-\frac{c}{a}x} [\delta(y) - \frac{b}{a} x\, \delta'(y) + \frac{1}{2!}\left(\frac{b}{a} x\right)^2 \delta''(y) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\left(\frac{b}{a} x\right)^n \delta^{(n)} (y) + \ldots] \operatorname{sgn} x. \tag{37}$$

Dar ţinînd seama de formula (31) din § 3, nr. 2 în care facem $B(y) = \delta'(y)$, avem:

$$[[E_1]] = \frac{1}{2a} e^{-\frac{c}{a}x} \delta\left(y - \frac{b}{a} x\right) \operatorname{sgn} x = \frac{1}{2a} e^{-\frac{c}{a}x} e^{-x\overset{*}{\delta}'(y)} \operatorname{sgn} x =$$

$$= E_1 y(x) = \text{distribuţie în } y, \text{ funcţie în } x. \tag{38}$$

Prin calcule analoage găsim:

$$[[E_2]] = \overset{-1}{F}(E(\xi, \eta)) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{c}{b}y} \delta\left(x - \frac{a}{b} y\right) \operatorname{sgn} y =$$

$$= \frac{1}{2b} e^{-\frac{c}{b}y} e^{-y\overset{*}{\delta}'(x)} \operatorname{sgn} y = E_{2x} (y) = \text{distribuţie în } x, \text{ funcţie în } y. \tag{39}$$

3. Soluţie elementară a operatorului $\dfrac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} + \alpha$.

Fie în $(S')_{(\mathbf{R}^n)_x}$, ecuaţia

$$\frac{\delta^n \{E\}}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} + \alpha \{E\} = \delta(x_1) \otimes \delta(x_2) \otimes \ldots \otimes \delta(x_n) = \delta(x) \tag{40}$$

echivalentă cu ecuaţia de convoluţie

$$\{\bigotimes_{j=1}^{n} \delta'(x_j) + \alpha (\bigotimes_{j=1}^{n} \delta(x_j)\} * \{E\} = \{\bigotimes_{j=1}^{n} \delta(x_j)\} = \delta(x), \tag{41}$$

care, transportată în $[[(S')^{\mathbf{N}}_{(\mathbf{R}^n)_x}]]$, este de forma :

$$[[\bigotimes_{j=1}^{n}\delta'(x_j) + \alpha\,(\bigotimes_{j=1}^{n}\delta(x_j))]] \star [[E_1]] = [[\delta(x)]] \tag{42}$$

și

$$[[\alpha\,(\bigotimes_{j=1}^{n}\delta(x_j) + \bigotimes_{j=1}^{n}\delta'(x_j)]] \star [[E_2]] = [[\delta(x)]], \tag{43}$$

ale cărei soluții în virtutea formulelor (4) și (5) din § 2, sînt date de :

$$[[E_1]] = \sum_{\nu\in\mathbf{N}}(-\alpha)^{\nu}\,\{\bigotimes_{j=1}^{n}\delta'(x_j)\}^{\star\,-(\nu+1)} \tag{44}$$

și

$$[[E_2]] = \sum_{\nu\in\mathbf{N}}(-1)^{\nu}\,\frac{1}{\alpha^{\nu+1}}\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\delta^{(n)}(x)\right)\cdot \tag{45}$$

Dar după formulele (27), (28) din § 3, nr. 2, găsim

$$[[E_1]] = \frac{1}{2^n}\left[\bigotimes_{j=1}^{n}\operatorname{sgn} x_j - \alpha\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\left(\frac{|x_j|}{1\,!}\right)\right) + \alpha^2\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\left(\frac{|x_j|^2}{2\,!}\operatorname{sgn} x_j\right)\right) - \dots\right.$$

$$\dots + \alpha^{2k}\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\left(\frac{|x_j|^{2k}}{(2k)\,!}\operatorname{sgn} x_j\right)\right) - \alpha^{2k+1}\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\left(\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)\,!}\right)\right) + \dots =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[1 - \alpha\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{1\,!}\right)\right) + \alpha^2\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{2\,!}\right)\right) + \dots + (-\alpha)^{\nu}\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{v\,!}\right)^{\nu}\right.\right. +$$

$$\left. + \dots\right]\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\operatorname{sgn} x_j\right). \tag{46}$$

Punînd

$$J_0^{(n)}(\alpha x) = \sum_{\nu\in\mathbf{N}}(-1)^{\nu}\,\alpha^{\nu}\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{v\,!}\right)^{\nu}\right); \tag{47}$$

obținem

$$[[E_1]] = \frac{1}{2^n}J_0^{(n)}(\alpha x)\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\left(\operatorname{sign} x_j\right)\right) \tag{48}$$

deci

$$[[E_1]] = \{E_1(x)\} \in (\mathbf{S}')_{(\mathbf{R}^n)_x} = (\mathbf{S}')_{x_1,\,x_2,\,\dots,\,x_n},$$

Remarcă. Aplicînd ecuației (40) operatorul lui Fourier, găsim :

$$\overset{1}{F}\left(\frac{\overset{n}{\underset{j=1}{\otimes}} 1_{\xi_j}}{\alpha + (-i)^n \left(\overset{n}{\underset{j=1}{\otimes}} \xi_j\right)}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} J_0^{(n)}(\alpha x)\left(\overset{n}{\underset{j=1}{\otimes}} \operatorname{sgn} x_j\right) \text{ pentru } \overset{n}{\underset{j=1}{\otimes}} x_j \gtrless 0 \\ [[E_2]] \text{ pentru } \alpha \neq 0, \end{cases} \tag{49}$$

de unde, pentru ecuația

$$\frac{\partial^n \{Z\}}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} + \alpha \{Z\} = \{f\}, \tag{50}$$

cu $\{f\}$ distribuție convolutibilă în $(S')_{x_1, x_2, \ldots, x_n}$, soluția :

$$\{Z_1\} = \{f\} * \frac{1}{2^n} J_0^{(n)}(\alpha x)\left(\overset{n}{\underset{j=1}{\otimes}} \operatorname{sgn} x_j\right) \tag{51}$$

în $(S')_{x_1, x_2, \ldots, x_n}$, şi

$$[[Z_2]] = \sum_{\nu \in N} (-1)^\nu \frac{1}{\alpha^{\nu+1}} \frac{\partial^{n\nu}\{f\}}{\delta x_1^\nu \ldots \delta x_n^\nu} \tag{52}$$

în $[[(S')^N_{x_1, \ldots, x_n}]]$, cu derivatele lui $\{f\}$ luate în sensul distribuțiilor.

Pentru $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, avem

$$J_0^{(2)}(x, y) = \sum_{\nu \in N} (-1)^\nu \frac{(\alpha x y)^\nu}{(\nu\,!)^2} = J_0 (2 \sqrt{\alpha x y}), \tag{53}$$

unde J_0 este funcția lui Bessel de ordin 0.

Deci ecuația

$$\frac{\partial^2\{Z\}}{\partial x\, \partial y} + \alpha \{Z\} = \{f(x, y)\} \tag{54}$$

admite, în virtutea relațiilor (55) și (57), soluția

$$\{Z_1(x, y)\} = \{f\} * \frac{1}{4} J_0 (2 \sqrt{\alpha x y}) \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y \tag{55}$$

în $(S')_{xy}$, și soluția

$$[[Z_2]] = \sum_{\nu \in N} (-1)^\nu \frac{1}{\alpha^{\nu+1}} \frac{\partial^{2\nu}\{f\}}{\partial x^\nu\, \partial y^\nu} \tag{56}$$

în $[[(S')^N_{xy}]]$, derivatele lui f fiind luate în sensul distribuțiilor.

§ 5. SOLUŢIA ELEMENTARĂ PENTRU ECUAŢIA UNDELOR

Să determinăm în $(\mathbf{S}')_{xy}$ soluția elementară a ecuației undelor, adică soluția $\{E\}$ a ecuației :

$$\frac{\partial^2\{E\}}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \{E\}}{\partial y^2} = \delta(x) \otimes \delta(y), \tag{1}$$

unde α este un număr real oarecare.

Ecuația (1) este echivalentă cu ecuația de convoluție

$$\{\delta''(x) \otimes \delta(y) - \alpha^2 \delta(x) \otimes \delta''(y)\} * \{E\} = \delta(x) \otimes \delta(y) \tag{2}$$

care, în virtutea formulelor (2) și (3) din § 3, nr. 2 (unde facem $f(x, y) = \delta(x) \otimes \delta(y)$), admite în $[[\mathbf{S}')_{xy}]]$ soluțiile

$$[[E_1]] = \sum_{\nu\in\mathbf{N}} \{\delta'(x)\}^{-(\nu+1)} \otimes \alpha^{2\nu} \delta^{(2\nu)}(y) \tag{3}$$

şi

$$[[E_2]] = -\frac{1}{\alpha^2} \sum_{\nu\in\mathbf{N}} \delta^{(2\nu)}(x) \otimes \frac{1}{\alpha^{2\nu}} \{\overset{*}{\delta}''(y)\}^{-(\nu+1)}. \tag{4}$$

Dar, ținînd seama de formula (27), § 3, nr. 2, avem

$$\{\overset{*}{\delta}''(x)\}^{-(\nu+1)} = \{\overset{*}{\delta}'(x)\}^{-(2\nu+2)} = \frac{1}{2} \frac{|\,x\,|^{2\nu+1}}{(2\nu+1)\,!} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{cases} \{\overset{*}{Y}(x)\}^{2\nu+2} & \text{pentru } x > 0, \\ \{-\overset{*}{Y}(-x)\}^{2\nu+2} & \text{,,} \quad x < 0, \end{cases}$$

unde $Y(x)$ (resp. $-Y(-x)$) este funcția lui Heaviside pe $(\mathbf{R})_x$, adică

$$Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x > 0 \\ 0 & \text{,,} \quad x < 0 \end{cases} \quad (\text{resp. } -Y(-x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x > 0, \\ -1 & \text{,,} \quad x < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Deci

$$[[E_1]] = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \sum\limits_{\nu\in\mathbf{N}} \alpha^{2\nu} \{\overset{*}{Y}(x)\}^{2\nu+2} \otimes \delta^{(2\nu)}(y) & \text{pentru } x > 0 \\ \dfrac{1}{2} \sum\limits_{\nu\in\mathbf{N}} \alpha^{2\nu} \{-\overset{*}{Y}(-x)\}^{2\nu+2} \otimes \delta^{(2\nu)}(y) & \text{,,} \quad x < 0 \end{cases} \tag{6}$$

sau

$$[[E_1]] = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \{Y(x)\} \overset{x}{*} \sum\limits_{\nu\in\mathbf{N}} \alpha^{2\nu} \{\overset{*}{Y}(x)\}^{2\nu+1} \otimes \delta^{(2\nu)}(y) \text{ pentru } x > 0, \\ \dfrac{1}{2} \{-Y(-x)\} \overset{x}{*} \sum\limits_{\nu\in\mathbf{N}} \alpha^{2\nu} \{\overset{*}{Y}(x)\}^{2\nu+1} \otimes \delta^{(2\nu)}(y) \text{ ,, } x < 0. \end{cases} \tag{7}$$

De altă parte, făcînd în (31), § 3, nr. 2, $B(y) = \alpha\delta'(y)$, obținem

$$\delta(y + \alpha x)\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \sum\limits_{\nu\in n} \alpha^{\nu} \{\overset{*}{Y}(x)\}^{\nu+1} \otimes \delta^{(\nu)}(y) \text{ pentru } x > 0 \\ \sum\limits_{\nu\in n} \{-\overset{*}{Y}(-x)\}\, \alpha^{\nu} \otimes \delta^{(\nu)}(y) \quad ,, \quad x < 0 \end{cases} \tag{8}$$

şi

$$\delta(y - \alpha x)\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \sum\limits_{\nu\in \mathbf{N}} (-1)^{\nu} \alpha^{\nu} \{\overset{*}{Y}(x)\}^{\nu+1} \otimes \delta^{(\nu+1)}(y) \text{ pentru } x > 0 \\ \sum\limits_{\nu\in \mathbf{N}} (-1)^{\nu} \alpha^{\nu} \{-\overset{*}{Y}(-x)\}^{\nu+1} \otimes \delta^{(\nu)}(y) \quad ,, \quad x < 0 \end{cases} \tag{9}$$

de unde

$$\frac{1}{2}\left[\delta(y+\alpha x)+\delta(y-\alpha x)\right]\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \sum\limits_{\nu\in \mathbf{N}} \alpha^{2\nu}\{\overset{*}{Y}(x)\}^{2\nu+1} \otimes \delta^{(2\nu)}(y) \text{ pentru } x > 0, \\ \sum\limits_{\nu\in \mathbf{N}} \alpha^{2\nu}\{-\overset{*}{Y}(-x)\}^{2\nu+1} \otimes \delta^{(2\nu)}(y) \quad ,, \quad x < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Deci

$$[[E_1]] = \begin{cases} \frac{1}{4}\{Y(x)_{*}^{x} \left[\delta(y + \alpha x) + \delta(y - \alpha x)\right] \text{ pentru } x > 0 \\ \frac{1}{4}\{-Y(-x)\}_{*}^{x} \left[\delta(y + \alpha x) + \delta(y - \alpha x)\right] \quad ,, \quad x < 0. \end{cases} \tag{11}$$

sau

$$[[E_1]] = \frac{1}{4}\operatorname{sgn} x_{*}^{x} \{\delta(y + \alpha x) + \delta(y - \alpha x)\} \text{ pentru } x \gtrless 0. \tag{12}$$

Din (12) se vede că $[[E_1]]$ este funcția vectorială definită pe $(\mathbf{R})_x$, cu valori în spațiul distribuțiilor temperate $(S')_y$. Putem deci scrie

$$[[E_1]]=\{E_{1y}(x)\} = \frac{1}{4}\operatorname{sgn} x_{*}^{x} \left[\delta(y + \alpha x) + \delta(y-\alpha x)\right] \text{ pentru } x \gtrless 0. \tag{13}$$

Prin calcule analoage, găsim

$$[[E_2]]=\{E_{2x}(y)\} = -\frac{1}{4\alpha^2}\operatorname{sgn} y_{*}^{y}\left[\delta\left(x + \frac{y}{\alpha}\right) + \delta\left(x - \frac{y}{\alpha}\right)\right] \text{pentru } y \gtrless 0, \tag{14}$$

$E_{2x}(y)$ fiind funcție vectorială definită în $(\mathbf{R})_y$, cu valori în spațiul distribuțiilor temperate $(\mathbf{S}')_x$.

Să arătăm că $E_{1y}(x)$ (resp. $E_{2x}(y)$) satisface ecuația (1). În adevăr, avem, derivatele fiind luate în sensul distribuțiilor :

$$\begin{aligned} \frac{\delta\,\{E_{1y}(x)\}}{\delta x} &= \frac{1}{2}\,\delta(x)_{*}^{x}\left[\delta(y + \alpha x) + \delta(y - \alpha x)\right] = \frac{1}{2}\left[\delta(y + \alpha x) + \delta(y - \alpha x)\right] \\ \frac{\delta^2\,\{E_{1y}(x)\}}{\partial x^2} &= \frac{\alpha}{2}\left[\delta'(y + \alpha x) + \delta(y - \alpha x) + \delta(x) \otimes \delta(y)\right. \end{aligned} \tag{15}$$

şi

$$\frac{\delta^2 \{E_{1y}(x)\}}{\partial y^2} = \frac{1}{4} \operatorname{sgn} x \overset{x}{\underset{*}{}} [\delta''(y + \alpha x) + \delta''(y - \alpha x)]$$

Dar

$$\delta''(y \pm \alpha x) = \frac{\pm 1}{\alpha} \delta'(x) \overset{x}{\underset{*}{}} \delta'(y \pm \alpha x),$$

deci

$$\frac{\delta^2 \{E_{1y}(x)\}}{\partial y^2} = \frac{1}{4\alpha} \delta'(x) \overset{x}{\underset{*}{}} \operatorname{sgn} x \overset{x}{\underset{*}{}} [\delta'(y + \alpha x) - \delta'(y - \alpha x)] =$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \delta(x) \overset{x}{\underset{*}{}} [\delta'(y + \alpha x) - \delta'(y - \alpha x)] =$$

$$= \frac{1}{2\alpha} [\delta'(y + \alpha x) - \delta'(y - \alpha x)]. \tag{16}$$

Din (15) şi (16) se vede că $E_{1y}(x)$ satisface ecuaţiei (1).
Demonstraţie analoagă pentru $E_{2x}(y)$.

2. A doua expresie a soluţiei elementare

Expresia (13) a funcţiei $E_{1y}(x)$ se mai poate scrie :

$$\{E_{1y}(x)\} = \frac{1}{4} \operatorname{sgn} x \overset{x}{\underset{*}{}} \frac{1}{2\alpha} \delta'(x) \overset{x}{\underset{*}{}} [\operatorname{sgn}(y + \alpha x) - \operatorname{sgn}(y - \alpha x)]$$

sau

$$\{E_{1y}(x)\} = \frac{1}{4\alpha} [\operatorname{sgn}(y + \alpha x) - \operatorname{sgn}(y - \alpha x)]. \tag{17}$$

De asemenea, (14) ne dă :

$$E_{2x}(y) = -\frac{1}{4\alpha} \left[\operatorname{sgn}\left(x + \frac{y}{\alpha}\right) - \operatorname{sgn}\left(x - \frac{y}{\alpha}\right)\right] \tag{18}$$

Remarca 1. Punînd

$$\{E_\alpha\} = \begin{cases} E_{1y}(x) & \text{pentru } x \gtreqless 0 \\ E_{2x}(y) & \text{,, } \quad y \gtreqless 0 \end{cases}, \tag{19}$$

$\{E_\alpha\}$ este soluţia elementară în $(\mathbf{S}')_{xy}$ a ecuaţiei (1).

Remarca 2. Aplicînd operatorul lui Fourier F ecuaţiei (4), obţinem :

$$F(\{E\}) = \widetilde{E} = \frac{1_\xi \otimes 1_\eta}{\alpha^2\eta^2 - \xi^2}$$

de unde :

$$\overset{-1}{F}\left(\frac{1_\xi \otimes 1_\eta}{\alpha^2\eta^2 - \xi^2}\right) = \begin{cases} E_{1y}(x) & \text{pentru } x \gtreqless 0, \\ E_{2x}(y) & \text{,, } \quad y \gtreqless 0. \end{cases}$$

Primită la redacţie la 1 februarie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. S. VASILACHE, *Algebraic structures of algebraic Formal Operations*. Chap. I—III. Rev. Roumaine de math. pures et appl., **VIII**, *3*, 353—390 (1963);
Chap. IV, Rev. Roumaine de math. pures et appl., **VIII**, *4*, 543—564 (1963).
2. L. SCHWARTZ, *Théorie de distributions*. Paris, tome I, 1957; tome II, 1951.
3. И. М. ГЕЛФАНД и Г. Е. ЩИЛОВ, *Обобщенные функции*, Москва, vol. I, 1959; vol. 2, 3, 1958.
4. N. BOURBAKY, *Algèbre*. Chap. II, 3ème édition, Paris, 1962.

ASUPRA *K*-GRUPURILOR INFINITE

DE

DUMITRU ENE

În această notă se extinde, la grupuri infinite, un rezultat al lui Zacher [3] privind K-grupurile finite. Vom da mai întîi unele proprietăți generale, noi ale K-grupurilor infinite.

Fie un grup G și $\mathcal{L}(G)$ laticea subgrupurilor sale. G se numește *K-grup* dacă $\mathcal{L}(G)$ e latice cu complemente. Se constată imediat că orice K-grup abelian (sau hamiltonian) e decompozabil în produs direct (chiar în mai multe moduri) și că orice K-grup care nu e simplu, e o extindere a unui subgrup al său prin alt subgrup al său.

Într-adevăr, un K-grup care nu e simplu, conține cel puțin un divizor normal U și pentru U există complementarul V:

$$U \cup V = G, \quad U \cap V = E$$

deci din teorema de izomorfism rezultă $G/U \cong V$.

Dacă $\mathcal{L}(G)$ e latice distributivă, G se numește *D-grup*.

PROPOZIȚIA 1. *Se dă D-grupul $G = A \times B$, A și B fiind K-grupuri.*

Dacă subgrupul U din G e omogen în raport cu A, atunci U are un complementar în G.

Demonstrație. Fie $u \in U$. Avem $u = ab$ cu $a \in A$, $b \in B$ și din ipoteză $a \in U$ așa că $b = a^{-1}u \in U$ deci $b \in U \cap B$ și prin urmare $U = (U \cap A) \times (U \cap B)$. Cum A și B sînt K-grupuri, există subgrupurile $V_A \subseteq A$, $V_B \subseteq B$ cu

$$(U \cap A) \cup V_A = A, \quad (U \cap B) \cup V_B = B$$

și

$$(U \cap A) \cap V_A = (U \cap B) \cap V_B = E.$$

Cum $A \cap B = E$, rezultă $V_A \cap V_B = E$. Deci $V = V_A \cup V_B = V_A \times \times V_B$ (Kuroș [2], pag. 124).

Avem

$$U \cup V = ((U \cap A) \cup (U \cap B)) \cup (V_A \cup V_B) =$$

$$= ((U \cap A) \cup V_A) \cup ((U \cap B) \cup V_B) = A \cup B = G$$

G fiind D-grup, avem

$$U \cap V = ((U \cap A) \cap V_A) \cup ((U \cap B) \cap V_B) = E,$$

fiindcă

$$V_A \cap (U \cap B) \subseteq V_A \cap B = E$$

și la fel

$$V_B \cap (U \cap A) = E.$$

Deci V e complementarul lui U în $\mathcal{L}(G)$.

CONSECINȚĂ. *În condițiile ipotezei propoziției 1, dacă orice subgrup din G e omogen în raport cu A, studierea condițiilor în care un grup abelian e K-grup, se reduce la aceeași problemă pentru grupuri abeliene complete și reduse. La fel un grup abelian, mixt, disociabil e K-grup dacă partea sa periodică și partea fără torsiune sînt K-grupuri.*

Într-adevăr, e suficient să observăm că orice grup abelian e suma directă a două grupuri, unul complet, celălalt redus (Kuroș [2], pag. 175) iar un grup abelian, mixt, disociabil, e suma directă a două grupuri, unul periodic celălalt fără torsiune.

TEOREMA 1. *Orice K-grup abelian G cu un număr finit de generatori e grup finit.*

Demonstrație. Orice subgrup al grupului G are și el un număr finit de generatori (Kuroș [2], pag. 157), deci orice lanț crescător de subgrupuri ale lui G se termină după un număr finit de termeni (Kuroș [2], pag. 415). G fiind K-grup, luînd complementarele termenilor fiecărui lanț crescător de subgrupuri din G, obținem toate lanțurile descrescătoare de subgrupuri din G, care se termină deci, și ele, după un număr finit de termeni. Rezultă că G are un șir de compoziție (Kuroș [2], pag. 117), fiindcă G e abelian, deci orice lanț al său e normal.

Dar un grup abelian care are un șir de compoziție este un grup finit (Kuroș [2], pag. 116).

Fie un subgrup A al lui G. Dacă pentru orice subgrup $B \in \mathcal{L}(G)$, $B \neq A$, există cel puțin un subgrup propriu C al lui A astfel ca $B \cap C = E$, vom spune că A satisface *condiția de separare*.

Un grup G se numește grup *modular* sau *M-grup* dacă pentru orice U, V, $W \in \mathcal{L}(G)$ are loc identitatea modulară :

$$(U \cup V) \cap W = U \cup (V \cap W)$$

dacă $U \subseteq W$.

TEOREMA 2. *Fie în grupul modular G un divizor normal L care satisface condiția de separare și e D-grup.*

G e K-grup dacă și numai dacă L are un complementar care e K-grup.

Demonstrație. Dacă G e K-grup, atunci L are complementarul H : $G = L \cup H$, $L \cap H = E$. Trebuie demonstrat că H e K-grup.

Cum din teorema de izomorfism rezultă $G/L \cong H$, e necesar să arătăm că G/L e K-grup.

Pentru aceasta fie subgrupul U din G, $U \supseteq L$. Conform ipotezei, U are în $\mathcal{L}(G)$ complementarul V, deci

$$U \cup V = G \text{ și } U \cap V = E.$$

Din identitatea modulară rezultă

$$U \cap (V \cup L) = (U \cap V) \cup L = L.$$

Cum

$$U \cup (V \cup L) = G,$$

rezultă că $V \cup L/L$ e complementarul lui U/L în $\mathcal{L}(G/L)$.

Reciproc, admitem că G satisface condițiile din teoremă. Fie H complementarul lui L. Atunci $G/L \cong H$ și cum H e prin ipoteză K-grup, G/L va fi și el K-grup. Fie subgrupul U din G. $U \cup L \supseteq L$ și cum G/L e K-grup, există subgrupul V din G astfel că

$$(U \cup L) \cup V = G \text{ și } (U \cup L) \cap V = L.$$

Deci $L \subseteq V$ și conform identității modulare avem

$$(U \cap V) \cup L = (U \cup L) \cap V = L.$$

Deci $U \cap V \subseteq L$ așa că $U \cap V \subseteq U \cap L$. Cum $L \subseteq V$ rezultă $U \cap L \subseteq U \cap V$ deci $U \cap V = U \cap L$. Prin ipoteză există subgrupul $N \subset L$ cu $N \cap U = E$. Folosind lema lui Zorn putem presupune că N e maximal cu această proprietate. Vom demonstra că $W = N \cup (V \cap H)$ e complementarul lui U în $\mathcal{L}(G)$.

Într-adevăr, folosind identitatea modulară, relația dedusă $U \cap V = U \cap L$ și faptul că L, H sînt complementare, deducem :

$$U \cap W = U \cap (N \cup (V \cap H)) = U \cap ((N \cup H) \cap V) =$$
$$= U \cap L \cap (N \cup H) = U \cap (N \cup (L \cap H)) = U \cap N = E$$

fiindcă

$$N \subset L \subseteq V.$$

Dacă $U \cup W \supseteq L$, atunci avem

$$U \cup W = U \cup W \cup L = U \cup L \cup (V \cap H) =$$
$$= U \cup (V \cap (L \cup H)) = U \cup (V \cap G) = U \cup V = G$$

fiindcă

$$L \cup H = G.$$

Dacă $U \cup W \not\supseteq L$, fie subgrupul M care conține pe $U \cup W$ (M există, el poate fi de exemplu chiar $U \cup W$). Cum

$$U \cup W \cup L = G,$$

M nu conține pe L (contrar ar conține pe $U \cup W \cup L = G$). Conform ipotezei există subgrupul propriu T din L cu $T \cap M = E$.

Avem $N \cup T \subset L$, $T \cap U \subseteq T \cap M = E$ şi $N \cap U = E$ conform alegerii lui N. L fiind D-grup, avem :

$$(N \cup T) \cap (U \cap L) = (N \cap U \cap L) \cup (T \cap U \cap L) = \\ = (N \cap U) \cup (T \cap U) = E.$$

Deci

$$(N \cup T) \cap (U \cap L) = ((N \cup T) \cap U) \cap L = E.$$

Cum

$$(N \cup T) \cap U \subseteq N \cup T \subset L$$

rezultă

$$(N \cup T) \cap U = E$$

deci $N \cup T$ satisface aceleaşi condiţii ca şi N, contrar maximalităţii lui N.

Deci $U \cup W = G$ şi W e complementarul lui U în $\mathcal{L}(G)$.

CONSECINŢĂ. *Presupunem că în grupul modular G, centrul Z al grupului, satisface condiţia de separare şi e D-grup.*

Dacă G e K-grup, atunci grupul Φ_1 al automorfismelor interioare ale lui G, e K-grup.

Demonstraţie. Z e divizor normal în K-grupul G şi are complementarul T. Avem deci $G/Z \cong T$. Conform teoremei 2, T e K-grup. Dar $\Phi_1 \cong G/Z$ (Kuroş [2], pag. 88), deci $\Phi_1 \cong T$ aşa că Φ_1 e K-grup.

Observaţie. O clasă de K-grupuri infinite particulare — grupuri complet factorizabile — a fost considerată de Baeva [1].

Primită la redacţie la 26 decembrie 1963.

BIBLIOGRAFIE

1. Н. В. БАЕВА, *Вполне факторизуемые группы*, ДАН, СССР, **92**, 5, 877—879 (1953).
2. A. G. KUROŞ, Teoria grupurilor. Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
3. G. ZACHER, *Caraterizzatione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementari.* Rend. Seminar Mat. Univ. Padova, **22**, 111—122 (1953).

ASUPRA UNUI SISTEM FORMAL(I)[1]

DE

T. RUS

În această lucrare vom construi un sistem formal ale cărui obiecte într-o interpretare adecvată să corespundă unor categorii de obiecte matematice din analiza numerică şi logică. Scopul acestui sistem formal este acela de a arăta rezolvabilitatea unor clase largi de probleme care admit o formalizare (probleme ce se vor preciza într-o altă lucrare) cu ajutorul maşinilor electronice de calcul. Categoriile de bază ale sistemului formal pe care îl avem în vedere vor fi definite în cele ce urmează, ţinînd seama de observaţiile propuse de Church asupra noţiunii de ,,nume proprii'' în lucrarea [1].

Termenul de constantă va fi sinonim cu expresia ,,numele propriu care are un denotat''. Atunci cînd vom face apel la unul din numele proprii care au denotat, sau mai scurt, la o constantă, vom deosebi două cazuri :

a) Constanta respectivă este de bază — adică face parte dintr-o mulţime $\mathcal{C}$ de constante precizate dinainte prin denotatul lor. Deoarece noi nu avem în vedere o interpretare imediată a sistemului formal pe care-l construim, nu vom preciza constantele din $\mathcal{C}$ în afară de specificarea că în $\mathcal{C}$ intră un număr finit de constante. Mulţimea $\mathcal{C}$ o vom numi alfabetul constantelor de bază.

b) Constante care sînt cuvinte în alfabetul $\mathcal{C}$, unde prin termenul de cuvînt se înţelege, şiruri finite de intrări ale constantelor de bază.

Noţiunea de variabilă, ca de obicei în matematică, coincide cu conţinutul unui oarecare nume propriu sau cu o constantă în care denotatul constantei se schimbă cu diferite valori posibile ale variabilei. Prin urmare este necesar să mărginim valorile pe care le poate lua variabila şi în felul acesta apare necesitatea de a lega de variabilă un anumit domeniu nevid de valori pe care poate să le ia. Subliniem că noţiunea de valoare în cazul nostru este sinonimă cu expresia ,,denotatul unui oarecare nume propriu''.

---

[1] Lucrare prezentată în şedinţa de comunicări din 26.X.1963 a Institutului de calcul din Cluj.

Presupunem în cele ce urmează că mulțimea variabilelor întîlnite în sistemul nostru formal este grupată în mulțimea $\mathcal{X}$, pe care o numim și alfabetul variabilelor. Din această frază rezultă că deși noțiunea de variabilă este precizată, noi nu fixăm de la început numărul variabilelor, ci facem ipoteza că dacă o variabilă apare într-o expresie oarecare, atunci această variabilă este un element al mulțimii $\mathcal{X}$.

Este util, în cele ce urmează, să observăm că dacă într-un sistem formal expresiile se descompun în simboluri simple, atunci la un moment dat simbolurile simple nu se mai pot descompune, socotindu-se nedecomponibile (de exemplu literele alfabetului unei oarecare limbi). Această nedecomponibilitate trebuie înțeleasă în sensul că în continuare termenii care compun aceste simboluri nu posedă conținut. În felul acesta, într-o astfel de descompunere, pot să apară la sfîrșit două genuri de simboluri :

a) Nume proprii inițiale (constante și variabile). Acestea vor fi numite pe scurt simboluri proprii sau simboluri de bază și socotim că ele au conținut luate singure, după cum s-a văzut mai sus.

b) Simbolurile improprii sau sintactice care nu au conținut luate singure, însă luate împreună cu simbolurile proprii în anumită ordine determinată, după cum se va vedea mai jos, formează expresii compuse care au deja conținut de sine stătător. Această categorie de simboluri o vom considera descompusă în trei subcategorii, după rolul pe care simbolurile respective îl joacă în expresiile în care apar.

Prima subcategorie o formează simbolurile sintactice care se întîlnesc în expresii și care nu schimbă expresia în care apar în sensul schimbării denotatului acestei expresii. Ele au rolul numai de a preciza sau de a limita anumite părți componente ale expresiei respective. Exemplu de asemenea simboluri îl constituie parantezele așa cum apar ele de obicei în matematică. Presupunem că mulțimea acestor simboluri este grupată în mulțimea $\mathcal{S}$. Asupra mulțimii $\mathcal{S}$ nu facem nici o ipoteză, în afară de aceea că dacă la un moment dat în sistemul formal apare necesitatea folosirii unui simbol sintactic care nu face parte din $\mathcal{S}$, acest simbol se introduce în mulțimea $\mathcal{S}$. Mulțimea $\mathcal{S}$ o vom numi-o și alfabetul simbolurilor sintactice de prima categorie.

A doua subcategorie de simboluri sintactice o constituie așa-numiții operatori. Aceștia sînt simboluri care ajută la construirea unor expresii noi în sistemul formal, pornind de la expresii deja date. Aceste expresii trebuie înțelese ca expresii noi în sensul că denotatul lor diferă de denotatul expresiilor de la care pornim, el fiind un denotat nou, obținut din cele date. În cele ce urmează vom deosebi două tipuri de operatori.

Operatorii care dau naștere la expresii noi pornind întodeauna de la două expresii date, pe care-i vom numi operatori cu două locuri și operatori care dau naștere la expresii noi pornind de la o singură expresie dată, numiți în cele ce urmează operatori cu un loc. Dacă presupunem că am fixat mulțimea operatorilor cu două locuri O_2 și mulțimea operatorilor cu un loc O_1, atunci mulțimea operatorilor va fi $O \overline{\underline{\circ}}\, O_1 \cup O_2$, unde simbolul $\cup$ are sensul reuniunii din teoria mulțimilor. Mulțimea O o vom numi și alfabetul operatorilor și presupunem că ea este o mulțime finită. Din cele de mai sus urmează că întotdeauna cînd avem de-a face cu un operator, de el se leagă o anumită expresie pe care el o transformă în altă expresie. Expresia inițială o vom numi, în cele ce urmează, domeniu de acțiune al operatorului și o vom nota prin D_θ unde prin θ am notat operatorul respectiv. În cazul operatorilor din O_2, această expresie o punem în evidență în sistemul nostru formal sub forma $(P)\ \theta\ (Q)$ unde simbolurile (și) sînt paranteza dreaptă, respectiv stîngă, iar prin P și Q am înțeles două expresii date. Dacă operatorul este din O_1, atunci domeniul său de acțiune se pune în evidență sub forma $\theta(P)$. În primul caz, D_θ este (P) și (Q) iar în al doilea caz (P).

A treia subcategorie de simboluri sintactice o constituie așa-numitele relații. Acestea sînt simboluri care desenează raportul în care se găsesc unele expresii față de altele.

Dacă presupunem că am fixat de la început un număr finit de relații, atunci le putem grupa în mulțimea $\mathcal{R}$, care se numește mulțimea relațiilor sau alfabetul relațiilor. Ca și în cazul operatorilor și aici vom avea de-a face cu un domeniu de acțiune al relației care apare într-o expresie, și care este format chiar din expresiile pe care le leagă relația respectivă, împreună cu parantezele care le conțin, și care servesc pentru delimitarea lor.

În cele ce urmează vom mai folosi următoarele notații : Deoarece simbolul egalității obișnuite „=" considerăm că face parte din alfabetul $\mathcal{R}$, cînd vom raționa asupra obiectelor sistemului formal, pentru a nota egalitatea a două obiecte, vom folosi simbolul $\overline{\ominus}$. Deoarece parantezele fac parte din simbolurile alfabetului $\mathcal{S}$, atunci cînd vom spune că o anumită transformare, de exemplu un algoritm $\mathfrak{A}$, se aplică asupra unui obiect P al sistemului formal și-l transformă în obiectul R, vom scrie acesta folosind simbolurile $\lfloor$ și $\rfloor$ sub forma $\mathfrak{A}\ \lfloor \mathcal{R} \rfloor\ \overline{\ominus}\ \mathcal{R}$.

Alfabetul

$$\mathcal{A} = \mathcal{C} \cup \mathcal{X} \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{R}$$

în cele ce urmează va fi numit alfabetul sistemului formal.

Simbolurile de bază formează prima categorie de obiecte formale. Pornind de la ele, putem obține o a doua categorie de obiecte formale, pe calea construirii unui șir finit de intrări a simbolurilor formale. Acest șir îl vom numi în cele ce urmează expresia formală sau cuvînt în alfabetul $\mathcal{A}$. Cuvîntul „intrare" înseamnă că termenii șirului se consideră în calitate de părți componente ale expresiei formale, sau a cuvîntului considerat, adică se subliniază împrejurarea că diferiți termeni pot fi unul și același simbol. Cuvîntul care nu conține nici un simbol va fi numit cuvîntul vid, și se va nota prin Λ.

În raționamentele despre obiectele formale, noi deseori nu vom scrie aceste obiecte explicit, ci vom folosi litere sau expresii, care conțin litere — după cum am văzut deja mai sus — pentru a nota aceste obiecte.

Trebuie deci să deosebim două genuri de simbolisme. Simbolismul formal despre care vorbim și simbolismul intuitiv sau metamatematic [2] cu ajutorul căruia noi vorbim despre un alt simbolism. Pentru primul gen de simbolisme vom folosi litere care presupunem că aparțin alfabetului $\mathcal{A}$, atunci cînd vom scrie explicit un cuvînt în acest alfabet. În cazul celui de-al doilea simbolism vom folosi litere sau litera cu indici care presupunem că nu fac parte din alfabetul $\mathcal{A}$.

Pentru studierea expresiilor formale sau a cuvintelor, în alfabetul $\mathcal{A}$ vom folosi operația de reunire (sau de compunere) prin mijlocul căreia două sau mai multe expresii formale se reunesc în una singură, formînd o nouă expresie formală.

Vom defini, în cele ce urmează, cîteva subcategorii de expresii formale cu ajutorul regulilor de formare prin recurență [4].

DEFINIȚIA 1.1). *Orice simbol format* s *este termen dacă* $s \in \mathcal{C} \cup \mathcal{X}$, *unde simbolul* $\in$ *este simbolul de apartenență care presupunem că nu face parte din* $\mathcal{A}$.

2) $s_0 s_1 \ldots s_k$, $k \geqq 0$ *este termen dacă și numai dacă* $s_i \in \mathcal{C}$, $i \overline{\underline{\circ}}\, 0, 1, \ldots, k$. *Cu alte cuvinte,* $s_0 s_1 \ldots s_k$ *este termen dacă și numai dacă el este un cuvînt în* $\mathcal{C}$.

3) *Dacă* P *și* Q *sînt termeni, atunci și cuvîntul* $(P)\,\theta\,(Q)$ *este termen dacă* $\theta \in O_2$.

4) *Dacă* P *este termen, atunci și cuvîntul* $\theta\,(P)$ *este termen dacă* $\theta \in O_1$.

5) *Nu există alți termeni în afară de cei definiți de regulile 1)—4).*

DEFINIȚIA 2. 1) *Dacă cuvintele* P *și* Q *sînt termeni, atunci cuvîntul* $(P)\,\alpha\,(Q)$ *este o condiție dacă* $\alpha \in \mathcal{R}$.

2) *Dacă* A *și* B *sînt condiții, atunci există în mulțimea* O *operatorii* $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_k$ *astfel ca și cuvintele* $(A)\ \theta_1\ (B)$, $(A)\ \theta_2\ (B)$, $(A)\ \theta_3\ (B), \ldots, (A)\ \theta_k\ (B)$ *și* $\theta_0\ (A)$ *să fie numite condiții.*

3) *Dacă* x *este o variabilă iar* A *o condiție, atunci există în* O *operatori* θ' *și* θ'' *astfel ca și cuvintele* $\theta'\ ((x)\ (A))$ *și* $\theta''\ ((x)\ (A))$ *să fie numite condiții.*

4) *Nu există nici o altă condiție în sistemul formal în afara celor definite de regulile 1)—3).*

Să facem acum cîteva observații :

1) Dacă P și Q sînt termeni și dacă $\alpha \overline{\underline{\circ}} =$, atunci condiția $(P)\ \alpha\ (Q)$ va fi numită formulă.

2) Operatorii $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_k$ de la punctul 2) al definiției 2 vor fi numiți operatori logici.

3) Operatorii θ' și θ'' de la punctul 3) al definiției 2 vor fi numiți cvantori [1].

4) Variabila x care apare în cuvintele $\theta'\,((x)\,(A))$ și $O''\,((x)(A)$ (de la punctul 3) al definiției 2 se va numi variabilă legată [2].

DEFINIȚIA 3. *Cuvîntul* $P \overline{\underline{\circ}}\, s_0 s_1 \ldots s_k$ *în alfabetul* $\mathcal{A}$ *se numește bine construit în sistemul formal, dacă el este construit după regulile definițiilor 1 și 2.*

Se observă imediat că într-un cuvînt bine construit intră întotdeauna un număr par $2k$ de paranteze, k drepte și k stîngi. Această observație este o consecință directă a faptului că parantezele apar în regulile de formare numai pentru a delimita domeniul de acțiune al operatorilor sau al relațiilor. Dacă θ este un operator din O_2, atunci față de domeniul său de acțiune el poate să aibă numai forma $_{i})\theta(_{j}$, unde parantezele notate cu

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoremele de descompunere ale algebrei)**, 619 p., 25,50 lei.
D. BARBILIAN, **Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)**, 380 p., 7 lei.
JANKÓ BÉLA, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare**, 223 p., 8,85 lei
N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU şi A. CORNEA, **Seminar S. Stoilow** 1959—1960, **Teoria potenţialului pe suprafeţe riemanniene**, 160 p., 5 lei.
G. CIUCU şi R. THEODORESCU, **Procese cu legături complete**, 232 p., 9,85 lei.
C. CONSTANTINESCU, **Seminar M. Neculcea. Teoria mulţimilor**, 108 p., 3,25 lei.
C. CORDUNEANU, **Funcţii aproape-periodice**, 191 p., 8,30 lei.
ROMULUS CRISTESCU, **Spaţii liniare ordonate**, 332 p., 11,10 lei.
I. CUCULESCU, **Seminar O. Onicescu. Algebre Lie**, 148 p., 5.15 lei.
C. FOIAŞ, **Seminar M. Nicolescu** 1959—1960. **Teoria spectrală în algebre Banach (necomutative) axată pe noţiunea de rezolventă**, 82 p. 2,85 lei
ALEXANDRU FRODA, **Algebră superioară, fundamente : mulţimi şi operaţii, divizibilitate, spaţii liniare, forme pătratice**, 455 p., 24,50 lei.
GH. GALBURĂ, **Corpuri de funcţii algebrice şi varietăţi algebrice**, 180 p., 7,85 lei.
M. CHERMĂNESCU, **Ecuaţii funcţionale**, 523 p., 25,60 lei.
A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 484 p., 21,50 lei.
CAIUS JACOB, **Introduction mathématique à la mécanique des fluides**, 1288 p., 66,50 lei.
TRAIAN LALESCU, **Introducerea în teoria ecuaţiilor integrale**, 135 p., 5,90 lei
LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 52 p., 18,50 lei.
* * * **Lucrările celui de-al III-lea Congres al matematicienilor romîni**, 228 p., 8,55 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie şi topologie, Iaşi 2—5 iunie 1958**, 264 p., 9,75 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie diferenţială din 9—12 iunie 1955, organizată de Secţia de ştiinţe matematice şi fizice a Academiei R.P.R.**, 368 p., 9,50 lei.
G. MARINESCU, **Spaţii vectoriale normate**, 295 p., 6 lei.
G. MARINESCU, **Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice**, 219 p., 8,80 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie neeuclidiană**, 144 p., 4,30 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă**, 495 p., 25,90 lei
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă. Teoria corespondenţei**, 144 p., 4,30 lei.
GH. MIHOC şi V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 732 p., 34,70 lei.
GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 142 p., 8,55 lei ; vol. II, 155 p., 8,25 lei.
GR. C. MOISIL, **Funcţionarea în mai mulţi timpi a schemelor cu relee ideale**, 279 p., 12 lei.
GR. C. MOISIL, **Introducere în algebră, I. Inele şi ideale**, vol. I, 256 p., 9,10 lei.
GR. C. MOISIL, **Matricele asociate sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale. Introducerea în studiul cercetărilor lui I. N. Lopatinschi**, 64 p., 1,20 lei.
GR. C. MOISIL, **Scheme cu comandă directă cu contacte şi relee**, 205 p., 9,65 lei.
ALEXANDRU MYLLER, **Scrieri matematice**, 595 p. + 1 pl., 30,40 lei.
VERA MYLLER-LEBEDEV, **Lecţii de algebră**, 396 p., 8,75 lei.
MIRON NICOLESCU, **Analiza matematică**, vol. II, 420 p., 11,90 lei.
OCTAV ONICESCU, **Numere şi sisteme aleatoare**, 260 p., 11,20 lei
OCTAV ONICESCU, **Stategia jocurilor. Cu aplicaţii la programarea liniară**, 228 p., 8,45 lei.
OCTAV ONICESCU şi COLAB., **Calculul probabilităţilor şi aplicaţii**, 788 p., 15 lei.
O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU,
* * * **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 123 p., 4,23 lei.
* * * **Opera matematică a lui Alexandru Pantazi**, 496 p., 24,20 lei.
DIMITRIE POMPEI, **Opera matematică**, 535 p. + 1 pl., 30,20 lei.
N. RANCU şi L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicaţii în producţie**, 898 p. + 20 pl., 45 lei.
SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 159 p., 5,75 lei.
S. STOILOW, **Teoria funcţiilor de o variabilă complexă**, vol. I, 308 p., 10 lei ; vol. II în colaborare cu **Cabiria Andreian-Cazacu**, 379 p., 25,70 lei.
P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. I, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.
GHEORGHE ŢIŢEICA, **Geometria diferenţială proiectivă a reţelelor**, 287 p., 8 lei.
DRAGOŞ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 76 p., 3,15 lei.
SERGIU VASILACHE, **Elemente de teoria mulţimilor şi structurilor algebrice**, 235 p., 5 lei.
GH. VRĂNCEANU, **Leçons de géometrie différentielle**, vol. I., 407, p., 26,50 lei : vol. II, 428 p. 27,60 lei.
GH. VRĂNCEANU, **Lecţii de geometrie diferenţială**, vol. III, 455 p., 15 lei.

Revista apare de 10 ori pe an.

Prețul unui abonament este de 12 lei.

În țară abonamentele se fac la oficiile poștale, agențiile poștale factorii și difuzorii voluntari din întreprinderi și instituții.

Orice comandă din străinătate (numere izolate sau abonamente) se face prin :

CARTIMEX

Căsuța poștală 134 — 135
București R. P. Romînă

sau prin reprezentanții săi din străinătate

ST. CERC MAT., TOM. 15, Nr. 3 P. 283—430, BUCUREȘTI, 1964

I. P. „Informația" — c. 709

43831 Lei — 12.

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

4

TOMUL 15

1 9 6 4

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

[illegible]

TOM. 15, Nr. 4
1964

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1883

Pag.

SERGIU VASILACHE, Structuri algebrice de operaţii algebrice formale. Partea a II-a. Aplicaţii 433
DUMITRU ENE, Asupra *K*-grupurilor infinite 455
T. RUS, Asupra unui sistem formal (I) 459
HORIA I. ENE şi OPRICĂ I. MIHAI, O mişcare plană cu vîrtej constant în prezenţa unui obstacol plan 471
ION MUNTEAN, Contribuţii la rezolvarea problemei sintezei schemelor cu contacte şi relee (I) 477
ION COLOJOARĂ, Operatori spectrali generalizaţi 499
ŞTEFAN N. BERŢI, Extinderea unei teoreme a lui H. Weyl privitoare la şirurile de distribuţie uniformă 537
RECENZIE 541

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. AL. GHIKA;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
ACAD. GH. MIHOC;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb precum și orice altă corespondență, se trimit la comitetul de redacție al revistei pe adresa: str. M. Eminescu, nr. 47.
Revista apare de 10 ori pe an

indici i şi j admit paranteze cu aceiaşi indici corespunzători dreaptă şi stîngă $(_{i,}\ _{j})$ în cuvîntul bine construit. În cazul cînd avem de-a face cu o relaţie, situaţia este analogă. Dacă $\theta \in O_1$, atunci în cuvîntul bine construit el poate să apară numai sub forma $\theta\,(_i\ _i)$. Prin urmare dacă în cuvîntul bine construit P avem k_1 operatori din O_1, k_2 operatori din O_2 şi k_3 relaţii, numărul parantezelor în cuvîntul respectiv este $2\,\lfloor k_1 \dotplus 2k_2 \dotplus k_2 \rfloor$, unde prin $\dotplus$ am notat operaţia obişnuită de adunare pentru a nu se confunda cu simbolul $+$ care presupunem că face parte din $\mathcal{A}$. Din acelaşi motiv am folosit şi parantezele $\lfloor$, şi,$\rfloor$ iar semnul operaţiei de înmulţire l-am omis.

DEFINIŢIA 4. *Un cuvînt* $P \,\overline{\underline{\ominus}}\, s_0 s_1 \ldots s_k$ *este compatibil în alfabetul* $\mathcal{A}$*, dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii :*

1) $s_0 s_1 \ldots s_k$ *este un cuvînt în* $\mathcal{A}$ *şi nu există intrări de formă* ( ) *în* P.

1′) *Dacă în cuvîntul* P *există intrări de simboluri din* $O \cup \mathcal{R}$*, atunci orice simbol din* $\mathcal{C} \cup x$ *sau cuvînt în* $\mathcal{C}$ *apare sub forma* (ξ), $\xi \in \mathcal{C} \cup \mathcal{X}$ *sau* (P_1), $P_1 \subset \mathcal{C}$.

2) *În cuvîntul* P *nu există intrare a unui operator sau relaţii oarecare fără domeniu de acţiune în acest cuvînt şi nici un simbol, diferit de simboalele operatorilor sau al relaţiilor, în afara domeniului de acţiune a unui oarecare operator sau relaţie.*

3) *Dacă cuvîntul* P *nu conţine intrări ale operatorilor, atunci el este compatibil dacă şi numai dacă este sau un simbol din* $\mathcal{C} \cup \mathcal{X}$ *sau un cuvînt în* $\mathcal{C}$ *sau o condiţie.*

4) *Oricare ar fi simboalele* s_1 *şi* s_2 *din* $O \cup \mathcal{R}$ *care intră în cuvîntul* P*, unul dintre ele aparţine domeniului de acţiune al celuilalt.*

Înainte de a trece la enunţarea cîtorva rezultate asupra cuvintelor compatibile, să facem cîteva observaţii asupra unui sistem de $2n$ paranteze dispuse liniar, n drepte (deschise) şi n stîngi (închise) expuse pe larg în lucrarea [2].

Vom numi pereche de paranteze, două paranteze, una dreaptă şi alta stîngă, notate cu aceiaşi indici $(_i\ _i)$.

Spunem că două perechi de paranteze se separă dacă ele se întîlnesc sub forma $(_i\,(_j\,)_i\,)_j$.

O corespondenţă biunivocă stabilită între parantezele drepte şi parantezele stîngi astfel ca cele $2\,n$ paranteze să se grupeze în perechi de paranteze, şi să nu existe perechi care să se separe, o vom numi împerechere proprie a celor $2\,n$ paranteze.

Kleene în lucrarea [2] a demonstrat următoarele proprietăţi ale unui sistem de $2\,n$ paranteze dispuse liniar, n drepte şi n stîngi.

a) Orice împerechere proprie a $2n$ $(n > 0)$ paranteze admite cel puţin o pereche interioară, adică o pereche de paranteze între care nu există nici o altă pereche de paranteze.

b) Orice mulţime din $2\,n$ paranteze dispuse liniar, n drepte şi n stîngi, admite o singură împerechere proprie.

c) Dacă o mulţime din $2\,n$ paranteze şi o submulţime a ei din $2\,m$ paranteze admit ambele cîte o împerechere proprie, atunci împerecherea proprie a submulţimii este o parte a împerecherii proprii a mulţimii, adică fiecare paranteză a submulțimii se împerechează cu una și aceeași paranteză în ambele împerecheri.

În cele ce urmează construim un algoritm normal, care aplicat oricărui cuvînt format din $2\,n$ paranteze transformă acest cuvînt în cuvîntul vid dacă cuvîntul inițial admite o împerechere proprie și într-un cuvînt diferit de cuvîntul vid în caz contrar. Să considerăm pentru construirea algoritmului respectiv alfabetul $\mathcal{S}_0 \mathrel{\overline{\ominus}} \{(,)\}$ și o extindere a sa $\mathcal{A}_0 \mathrel{\overline{\ominus}} \mathcal{S}_0 \cup \cup \{\alpha\}$, unde $\alpha \urcorner \in \mathcal{S}$. Notînd cu $\mathfrak{A}$ algoritmul despre care a fost vorba, va trebui să avem

$$\mathfrak{A} \llcorner P \lrcorner \mathrel{\overline{\ominus}} \begin{cases} \Lambda \text{ dacă } P \subset \mathcal{S}_0 \text{ și admite o împerechere proprie,} \\ R \not\supset \Lambda \text{ dacă } P \subset \mathcal{S}_0 \text{ și nu admite o împerechere proprie.} \end{cases}$$

Schema algoritmului $\mathfrak{A}$ în alfabetul $\mathcal{A}_0$ este următoarea :

$$\left.\begin{array}{r} \alpha((\rightarrow (\alpha(, \\ \alpha() \rightarrow \alpha, \\ (\alpha) \rightarrow \alpha(), \\ (\alpha \rightarrow . (\alpha, \\ \alpha(\rightarrow . \alpha(\\ \alpha) \rightarrow . \alpha), \\ \alpha \rightarrow ., \\ \rightarrow \alpha. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Se poate vedea ușor că algoritmul $\mathfrak{A}$ dat prin schema (1) este cel căutat. Algoritmul $\mathfrak{A}$ aplicat la cuvîntul P în alfabetul $\mathcal{A}_0$ caută în acest cuvînt perechea cea mai interioară și o înlocuiește cu litera α. Dacă o asemenea pereche nu există, înseamnă că toate parantezele sînt sau dreapta și atunci algoritmul se va opri la cuvîntul α(sau stîngi și atunci algoritmul se va opri la cuvîntul α). Dacă s-a înlocuit o pereche interioară ( ) cu α, în continuare algoritmul caută următoarele perechi interioare care fie că există inițial fie că se obțin prin înlocuirea primei perechi.

Să demonstrăm în cele ce urmează cîteva proprietăți ale cuvintelor compatibile în alfabetul $\mathcal{A}$.

TEOREMA 1. *Dacă cuvîntul P este un cuvînt compatibil în alfabetul $\mathcal{A}$, atunci orice parte proprie a cuvîntului P de forma (P_1) unde în P_1 avem intrările unui număr par de paranteze care admit o împerechere proprie, este un cuvînt compatibil în $\mathcal{A}$.*

Demonstrația acestei teoreme o vom face arătînd că cuvîntul P_1 verifică condițiile de compatibilitate din definiția 4.

Deoarece cuvîntul P este un cuvînt compatibil, se vede imediat că condițiile (1) și (1′) sînt îndeplinite.

Prin parte proprie a unui cuvînt P înțelegem orice cuvînt P_1 astfel ca $P = P_1P_2$ sau $P = P_2P_1$, P_2, $P_1 \not\supset \Delta$.

Condiția 3) din definiția 4 rezultă imediat, deoarece în acest caz cuvîntul P_1 este una din expresiile care aparțin domeniului de definiție a condiției α din condiția 3). Cum alți operatori nu există, înseamnă că P_1 este simbol din $\mathcal{C} \cup \mathcal{X}$ și prin urmare cuvînt compatibil în $\mathcal{A}$.

Condiția 2) rezultă din faptul că dacă ar exista relații sau operatori fără domeniu de acțiune în P_1, atunci ei ar fi fără domeniu de acțiune și în P. Aceasta datorită faptului că domeniul de acțiune al oricărui operator sau relații cuprinde un număr par de paranteze care admit o împerechere proprie. În cuvîntul P_1 avem un număr par de paranteze care admit o împerechere proprie. Cum aceasta este o parte a împerecherii parantezelor din cuvîntul P, înseamnă că nici o paranteză nu se deschide în P_1 fără să se închidă tot în acest cuvînt, ceea ce înseamnă că oricare operator sau relație din P_1 are domeniu de acțiune tot în P_1.

Din același motiv se observă că dacă ar exista vreun simbol în afara domeniului de acțiune al unui oarecare operator sau relații din P_1, el ar fi în afara domeniului de acțiune al unui operator sau relații oarecare și în P ceea ce contrazice ipoteza compatibilității cuvîntului P.

Condiția 4) rezultă ușor că este îndeplinită și pentru cuvîntul P_1, deoarece dacă s_1 și s_2 ar fi două simboluri din $O \cup \mathcal{R}$ care intră în P_1, astfel ca $s_1] \in D_{s2}$, și $s_2] \in D_{s1}$, atunci aceasta ar fi valabil și în cuvîntul P pentru simbolurile s_1 și s_2, ceea ce ar contrazice ipoteza compatibilității cuvîntului P.

TEOREMA 2. *Dacă într-un cuvînt compatibil P există intrări ale simbolurilor din* $O \cup \mathcal{R}$, *atunci există unul și numai unul în afara domeniului de acțiune al oricărui alt simbol din* $O \cup \mathcal{R}$ *care intră în cuvîntul P.*

Să arătăm în primul rînd că există simboluri din $O \cup \mathcal{R}$ care nu aparțin domeniului de acțiune al altor simboluri din $O \cup \mathcal{R}$ care intră în P.

Să facem însă cîteva observații înainte de aceasta:

1) Dacă $s_1 \in O \cup \mathcal{R}$, atunci $s_1] \in D_{s1}$ ceea ce se vede clar din definiția domeniului de acțiune.

2) Dacă $s_i \in D_{sj}$, atunci $D_{si} \subset D_{sj}$. Aceasta se vede clar din faptul că între s_i și domeniul său de acțiune nu există nici un alt simbol.

Să presupunem acum contrariul și anume că nu există nici un simbol din $O \cup \mathcal{R}$ dintre cele care intră în cuvîntul P în afara domeniului de acțiune a oricărui alt simbol din $O \cup \mathcal{R}$ care intră în P. Fie atunci $s_1, s_2, \ldots, \ldots, s_k$ toate simbolurile din $O \cup \mathcal{R}$ care intră în P, unele din ele putînd avea intrări repetate în acest șir însă diferă ca poziție în cuvîntul P. După o renumerotare a acestor simboluri, din cauza ipotezei contrarii vom avea:

$$\begin{aligned} & s_1 \in D_{s_2}, \\ & s_2 \in D_{s_3}, \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & s_{k-1} \in D_{sk}, \\ & s_k \in D_{s_1}. \end{aligned} \tag{a}$$

Pentru a ajunge la numerotarea simbolurilor s_i astfel ca ele să se găsească în relațiile (a) vom aplica următorul algoritm. Să presupunem că relațiile inițiale au fost

$$\begin{array}{l} s_1 \in D_{s_{i_1}}, \\ s_2 \in D_{s_{i_2}}, \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \\ s_{k-1} \in D_{s_{i_{k-1}}}, \\ s_k \in D_{s_{i_k}}, \end{array} \tag{a'}$$

unde $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_k}$ este o permutare a șirului $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Aceste relații există datorită ipotezei contrarii de mai sus. Să considerăm prima din aceste relații :

$$s_1 \in D_{s_{i_1}}.$$

Simbolul s_{i_1} se găsește în șirul $s_2, \ldots, s_k$. Îl vom nota cu s_2. Atunci relația de mai sus se transformă în

$$s_1 \in D_{s_2}.$$

Vom considera apoi următoarea relație din (a′)

$$s_2 \in D_{s_{i_2}},$$

unde s_2 din această relație presupunem că este chiar simbolul notat mai sus cu s_2 iar s_{i_2} este unul din elementele, șirului $s_1, s_3, \ldots, s_k$. Să arătăm că nu poate fi s_1. Să presupunem că ar fi s_1. Atunci $s_2 \in D_{s_1}$ și $s_1 \in D_{s_2}$. De aici rezultă că

$$D_{s_2} \subset D_{s_1} \text{ și } D_{s_1} \subset D_{s_\nu},$$

de unde $D_{s_1} \supseteq D_{s_2}$, deci s_1 și s_2 coincid și ca simboluri și ca poziții în șir, caz care se exclude. Deci $s_1 \not\supseteq s_2$. Prin urmare simbolul s_{i_2} se găsește în șirul $s_3, s_4 \ldots, s_k$. Fie acesta un s_l oarecare. Îl vom nota pe acesta cu s_3 și vom considera relația următoare din (a′). După un număr finit de pași, cel mult k, vom ajunge la relațiile (a).

Datorită observațiilor de mai sus vom avea și

$$D_{s_2} \subset D_{s_3}, \ldots, D_{sk} \subset D_{s_1},$$

de unde rezultă că

$$s_1 \subset D_{s_3}, \ldots, s_1 \in D_{s_1}$$

ceea ce este o absurditate.

Dacă am considera în locul lui s_1 oricare alt simbol din șirul considerat și am raționa în mod analog, am ajunge la aceeași concluzie absurdă și anume că acesta aparține domeniului său de acțiune. Aceasta înseamnă că ipoteza că oricare simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ care intră în P aparține domeniului de acțiune al unui oarecare alt simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ care intră în P este falsă. Atunci înseamnă că există astfel de simboluri din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ care intră în P și care nu aparțin domeniului de acțiune al nici unui alt simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ care intră în P.

Să arătăm acum că există un singur astfel de simbol. Să presupunem că acest simbol nu ar fi unic și anume că există două astfel de simboluri s_1 și s_2. Atunci am avea situația $s_1] \in D_{s_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ și $s_2] \in D_{s_i}$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$; de aici rezultă, în particular, că $s_1] \in D_{s_2}$ și $s_2] \in D_{s_1}$ ceea ce contrazice ipoteza compatibilității cuvîntului P deoarece nu are loc condiția 4) pentru simbolurile s_1 și s_2.

TEOREMA 3. *Orice cuvînt bine construit în alfabetul $\mathcal{A}$ este un cuvînt compatibil în alfabetul $\mathcal{A}$.*

Această teoremă o vom demonstra verificînd condițiile compatibilității din definiția 4 asupra cuvintelor bine construite.

Condiția 1) din definiția compatibilității (definiția 4) rezultă imediat deoarece regulile de formare din definițiile 1 și 2 se aplică numai asupra simbolurilor din alfabetul $\mathcal{A}$. Prin urmare orice cuvînt bine construit este un cuvînt în alfabetul $\mathcal{A}$, de unde rezultă condiția 1) a compatibilității. Condiția 1') de asemenea este evident îndeplinită.

Fie acum cuvîntul bine construit P. El este un termen sau o condiție. Să presupunem că el este termen. Atunci putem avea două cazuri posibile. Sau în cuvîntul P nu avem intrări ale operatorilor și atunci el este sau un cuvînt în alfabetul $\mathcal{C}$, caz în care conform condiției 3) din definiția compatibilității (definiția 4) el este compatibil, sau un simbol din $\mathcal{C} \cup \mathcal{X}$, caz în care conform aceleeași condiții el este de asemenea un cuvînt compatibil în $\mathcal{A}$.

Dacă în cuvîntul P avem intrări ale operatorilor, atunci din regulile 3) și 4) ale definiției 1 rezultă că el are una din formele

$$P \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} (P_1)\, \theta\, (P_2) \tag{1}$$

sau

$$P \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} \theta\, (P_1) \qquad \theta \in \mathcal{O}. \tag{2}$$

Dacă notăm cu θ_1 operatorul pus în evidență în descompunerile de mai sus, atunci se vede că el are un domeniu de definiții în cuvîntul P, cuvintele P_1 și P_2 fiind la rîndul lor termeni. Raționînd în mod analog asupra cuvintelor P_1 și P_2 care sînt la rîndul lor termeni deci cuvinte bine construite, ne situăm sau în cazul în care ele nu conțin intrări de operatori și atunci sînt cuvinte compatibile, sau în cazul în care ele conțin intrări ale operatorilor și atunci ele trebuie să aibă la rîndul lor o descompunere de forma (1) sau (2). Deoarece cuvîntul P are un număr finit de simboluri, după un număr finit de pași o să ajungem la descompunerea de forma (1) sau (2) în care P_1 sau P_1 și P_2 sînt fie cuvinte în $\mathcal{C}$, fie simboluri în $\mathcal{C} \cup \mathcal{X}$, de unde rezultă că sînt cuvinte compatibile în $\mathcal{A}$. Parcurgînd apoi calea inversă, rezultă că fiecare operator care intră în P are domeniu de acțiune în acest cuvînt și nici un simbol în afară de simbolurile operatorilor nu este în afara domeniului de acțiune al unui oarecare operator care intră în acest cuvînt. Dacă θ_2 este un oarecare operator diferit de operatorul θ_1 de mai sus, se vede că $\theta_2 \in D_{\theta_1}$, de unde rezultă că pentru cuvintele bine construite, în cazul cînd ele sînt termeni, are loc și condiția 4) din definiția compatibilității (definiția 4). Prin urmare în acest caz cuvîntul P este compatibil.

Să presupunem acum că P este o condiție. Atunci și acest caz admite două subcazuri posibile. Sau în P nu există intrări de operatori și atunci el este o condiție simplă de forma $(P_1)\alpha(P_2)$, unde P_1 și P_2 sînt fie simboluri din $\mathcal{C} \cup \mathcal{X}$ fie cuvinte în $\mathcal{C}$ și atunci cuvîntul P este compatibil conform condiției 3) din definiția compatibilității sau în cuvîntul P avem intrări de operatori. În acest caz cuvîntul P poate avea forma

$$P \overline{\ominus} (P_1)\,\alpha\,(P_2), \tag{3}$$

unde P_1 și P_2 sînt termeni, deci cuvinte compatibile și prin urmare și cuvîntul P este un cuvînt compatibil ceea ce rezultă imediat. În afară de forma (3) dacă cuvîntul P este o condiție, și conține intrări ale operatorilor el poate admite și una din descompunerile

$$P = (P_1)\,\theta\,(P_2), \tag{4}$$

sau

$$P = \theta\,((x)\,(P_1)). \tag{5}$$

Asupra acestor descompuneri vom raționa exact ca și mai sus în sensul că dacă P_1 sau P_1 și P_2 sînt compatibile, atunci și P este compatibil în $\mathcal{A}$. Prin urmare vom considera cuvintele P_1 sau P_1 și P_2 și după un număr finit de pași vom ajunge la unul din cazurile analizate mai sus în care cuvintele P_1 sau P_1 și P_2 au fost compatibile în $\mathcal{A}$. Pornind apoi pe calea inversă, rezultă că P este un cuvînt compatibil în alfabetul $\mathcal{A}$.

TEOREMA 4. *Orice cuvînt compatibil în alfabetul $\mathcal{A}$ este un cuvînt bine construit în acest alfabet.*

Fie deci cuvîntul P compatibil în alfabetul $\mathcal{A}$. Vom deosebi două cazuri, după cum în P intră sau nu intră simboluri din alfabetul $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$. Să presupunem, pentru început, că în P nu intră nici un simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$. Deoarece P este un cuvînt compatibil, atunci el este sau nu simbol din $\mathcal{C} \cup \mathcal{X}$ sau un cuvînt în $\mathcal{C}$. În ambele cazuri conform primei reguli din definiția 1 cuvîntul P este bine construit.

Fie acum cazul în care în cuvîntul P intră simboluri din alfabetul $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$. Atunci, după teorema 2, există un singur simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ astfel ca el să nu aparțină domeniului de acțiune al nici unui alt simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ care intră în cuvîntul P. Fie acest simbol s_1. Cum cuvîntul P este un cuvînt compatibil, înseamnă că toate simbolurile lui aparțin domeniului de acțiune al unui simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$, în particular se poate vedea simplu că toate simbolurile lui aparţin domeniului de acţiune al simbolului s_1.

Dacă ar exista vreun simbol care nu aparţine domeniului de acţiune al simbolului s_1, atunci cuvîntul P ar admite descompunerea

$$P \overline{\underline{\circ}} P_1 (P_2) s_1 (P_3) P_4, \tag{6}$$

unde se presupune că simbolul s care nu aparţine domeniului de acţiune al lui s_1 se găseşte fie în P_1 fie în P_4, deoarece (P_2) şi (P_3) constituie domeniul de acţiune al lui s_1. Dacă ar fi aşa, atunci cel puţin unul dintre cuvintele P_1 sau P_4 diferă de cuvîntul vid. Fie acesta, pentru precizarea ideilor, P_1; cum $P_1 \neq \Lambda$ şi P este un cuvînt compatibil, înseamnă că s aparţine domeniului de acţiune al unui simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ care intră în P_1. Fie acest simbol s_2. Atunci $s_2] \in D_{s_1}$ şi $s_1] \in D_{s_2}$ din teorema 2. Atunci ar rezulta că cuvîntul P nu este compatibil, deoarece pentru simbolurile s_1 şi s_2 nu are loc condiţia 4) din definiţia 2, ceea ce este în contradicţie cu ipoteza compatibilităţii cuvîntului P.

Rezultă deci că toate simbolurile cuvîntului P, în afară de s_1, aparţin domeniului de acţiune al simbolului s_1. Atunci cuvîntul P are următoarea descompunere :

$$P \overline{\underline{\circ}} (P_1) s_1 (P_2), \tag{7}$$

sau

$$P \overline{\underline{\circ}} s_1 (P_1). \tag{8}$$

După teorema 1 în oricare din aceste cazuri cuvintele P_1 sau P_1 şi P_2 sînt cuvinte compatibile. Dacă ele sînt şi cuvinte bine construite, atunci cuvîntul P este un cuvînt bine construit, deoarece se încadrează în una din regulile de bine construire ale definiţiilor 1 sau 2.

Pentru a decide dacă, cuvintele P_1 sau P_1 şi P_2 sînt bine construite, procedăm cu ele în mod analog ca şi cu cuvîntul P. După un număr finit de paşi vom ajunge la cuvintele P_i sau P_i şi P_{i+1}, care joacă rolul lui P_1 sau P_1 şi P_2 de forma

$$P_i \overline{\underline{\circ}} (P'_i) s_i (P'_{i+1}) ; \; P_{i+1} \overline{\underline{\circ}} (P''_{i+1}) s_{i+1} (P''_{i+2}), \tag{7'}$$

$$P_i \overline{\underline{\circ}} s_i (P'_i) ; \quad P_{i+1} = s_{i+1} (P''_{i+1}), \tag{8'}$$

unde P'_i sau P'_i şi P'_{i+1}, P''_{i+1} sau P''_{i+1} şi P''_{i+2} sînt sau simboluri din $\mathcal{C} \cup \mathcal{X}$ sau cuvinte în $\mathcal{C}$. În ambele cazuri conform regulilor 1) şi 2) din definiţia 1 respectiv 1) din definiţia 2, cuvintele P_i sau P_i şi P_{i+1} sînt cuvinte bine construite. Parcurgînd acum şirul cuvintelor P_i în sens invers, ajungem la concluzia că P_1 sau P_1 şi P_2 sînt cuvinte bine construite, deci cuvîntul P este un cuvînt bine construit.

Din teoremele 3 şi 4 rezultă că definiţiile 3 şi 4 sînt echivalente. Aceasta ne dă posibilitatea ca dîndu-ne un cuvînt oarecare în alfabetul $\mathcal{A}$ să conchidem dacă el este cuvînt bine construit sau nu în acest alfabet, după cum el este un cuvînt compatibil sau nu în acest alfabet.

Primită la redacţie la 7 februarie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. ALONZA CHURCH, *Introduction to Mathematical Logic*, I. Princeton, New-Jersey, 1956.
2. ST. C. KLEENE, *Introduction to Metamathematics*. D. Van Nostrand, New York, 1952.
3. А. А. МАРКОВ, *Теория алгорифмов*. Труды матем.инст. им. В. А. Стеклова, **XLII**, (1954).
4. Р. ПЕТЕР, *Рекурсивные функции*, *перевод с немецкого*, И. Л., Москва, 1954.
5. Н. А. ШАНИН, *О конструктивном понимании суждений*. Труды метем. инст. им. В. А. Стеклова, **LII**, 226–311 (1958).
6. ALFRED TARSKI, *A decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. University of California press Berkeley and Los Angeles, 1951.
7. ALFRED TARSKI, *Logics Semantics*, *Mathematics*. Oxford, 1956.

O MIŞCARE PLANĂ CU VÎRTEJ CONSTANT ÎN PREZENŢA UNUI OBSTACOL PLAN

DE

HORIA I. ENE şi OPRICĂ I. MIHAI

1. Punerea problemei

Se ştie că problema mişcării fluide cu vîrtej constant a făcut obiectul cercetării mai multor autori printre care menţionăm pe : S. A. Ciaplîghin [2], V. Vâlcovici [7], H. S. Tsien [6], Y. H. Kuo [5], C. Iacob [3], I. Cristea [1].

În cele ce urmează ne propunem să studiem un caz de mişcare plană cu vîrtej constant a unui fluid perfect incompresibil, care poate prezenta interes în practică. La punctul 2 va fi studiată mişcarea în prezenţa unei plăci plane de lungime $2c$. Pentru aceasta vom folosi unele rezultate obţinute de I. Cristea [1] relative la introducerea unui potenţial complex generalizat.

Dacă n-ar exista obstacolul în calea fluidului, mişcarea ar fi caracterizată de un potenţial complex generalizat [1] $F_0(z)$, în expresia căruia apare o constantă a desemnînd mărimea vîrtejului (rot $\vec{v} = a\vec{k}$).

Distribuţia de viteze a fluidului neperturbat va fi dată de expresia :

$$w_0 = \frac{dF_0}{dz} - iax.$$

Dat fiind că la mari distanţe cu toată prezenţa obstacolului mişcarea rămîne neperturbată, viteza fluidului în prezenţa obstacolului va satisface la mari distanţe condiţia :

$$\lim_{z \to \infty} w = w_0 \qquad (1)$$

---

[1] Denumirea de potenţial complex generalizat este atribuită prin analogie cu cea din mişcarea irotaţională, deşi în cazul acesta el se calculează în mod diferit [1].

Vom căuta atunci potențialul complex generalizat al mişcării fluidului în prezența obstacolului sub forma :

$$F(z) = F_0(z) + F^*(z), \tag{2}$$

unde $F^*(z)$ este un potențial perturbator.

Viteza fluidului perturbat va avea expresia :

$$w = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} - iax = w_0 + \frac{\mathrm{d}F^*}{\mathrm{d}z}$$

astfel încît la mari distanțe, conform relației (1) vom avea de satisfăcut condiția :

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\mathrm{d}F^*}{\mathrm{d}z} = 0. \tag{1'}$$

Pe suprafața obstacolului, punînd condiția ca fluidul să alunece vom avea :

$$\left[\mathrm{Im}\ \{F(z)\} - \frac{1}{2}ax^2\right]_C = k, \tag{3}$$

unde k este o constantă. Dacă :

$$\begin{aligned} F(z) &= \varphi(x,y) + i\psi(x,y) \\ F_0(z) &= \varphi_0(x,y) + i\psi_0(x,y) \\ F^*(z) &= \varphi^*(x,y) + i\psi^*(x,y) \end{aligned}$$

condiția la limită (3) se scrie sub forma :

$$\psi(x,y) - \frac{1}{2}ax^2 = k \text{ pe } (C) \tag{3'}$$

sau încă, conform relației (2) :

$$\psi^*(x,y) = -\psi_0(x,y) + \frac{1}{2}ax^2 + k \text{ pe } (C). \tag{3''}$$

Problema revine deci la a determina potențialul perturbator $F^*(z)$ care este o funcție olomorfă în exteriorul obstacolului, avînd de îndeplinit condiția la mari distanțe (1') și condiția pe contur (3'').

2. Cazul plăcii plane

Vom lua cazul unui fluid nelimitat situat în exteriorul plăcii de lungime $2c$, care însă la mari distanțe este antrenat de o mişcare de translație paralelă cu axa Ox (fig. 1).

În acest caz funcţia $F_0(z)$ va fi :

$$F_0(z) = i\,\frac{a}{2}\,z^2 + V_0 z, \tag{4}$$

unde a este mărimea vîrtejului iar V_0 este mărimea vitezei particulelor situate pe axa Ox la mari distanţe. Rezultă că viteza fluidului neperturbat are expresia :

$$w_0 = V_0 - ay.$$

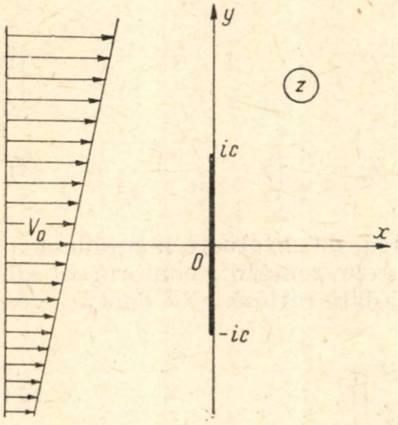


Fig. 1

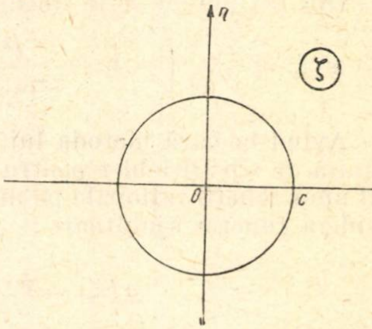


Fig. 2

Deci condiţia (1) se va scrie în cazul nostru :

$$\lim_{z\to\infty} w = V_0 - ay. \tag{5}$$

În conformitate cu (2) vom căuta potenţialul complex generalizat al mişcării sub forma :

$$F(z) = i\,\frac{a}{2}\,z^2 + V_0 z + F^\star(z). \tag{6}$$

Viteza fluidului perturbat se va scrie deci :

$$w = V_0 - ay + \frac{\mathrm{d}F^\star}{\mathrm{d}z},$$

urmînd să avem de îndeplinit aceeaşi condiţie (1').

Condiţia pe contur (3'') se va scrie sub forma :

$$\psi^\star(x, y) = \frac{a}{2}\left(y - \frac{V_0}{a}\right)^2 + k - \frac{V_0^2}{2a} \text{ pe } (C). \tag{7}$$

Deci va trebui determinat potenţialul perturbator $F^\star(z)$ cu condiţia la mari distanţe (1') şi condiţia pe contur (7).

Făcînd o rotaţie de unghi $\frac{\pi}{2}$ şi apoi folosind transformarea lui Jukovski, vom putea reprezenta conform exteriorul plăcii din planul (z) pe exteriorul cercului $|\zeta| = c$ din planul (ζ) (fig. 2).

Transformarea conformă va fi :

$$z = \frac{i}{2}\left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta}\right) \tag{8}$$

iar inversa ei va fi :

$$\zeta = i\,(-z + \sqrt{z^2 + c^2}). \tag{9}$$

Din (8) putem scrie imediat :

$$x(\xi, \eta) = \frac{\eta}{2}\left(-1 + \frac{c^2}{\xi^2 + \eta^2}\right);\ y(\xi, \eta) = \frac{\xi}{2}\left(1 + \frac{c^2}{\xi^2 + \eta^2}\right)\cdot \tag{10}$$

Avînd la bază metoda lui C. Iacob [4], de rezolvare a problemelor la limită de tip Dirichlet pentru contururi reprezentabile conform cu ajutorul unor funcţii raţionale pe un cerc şi cu date raţionale pe contur, vom considera funcţia ajutătoare :

$$g(\zeta) = F^{\star}\left[\frac{i}{2}\left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta}\right)\right]\cdot \tag{11}$$

Membrul doi al condiţiei la limită (7) fiind un polinom de gradul doi în y, îl vom nota cu :

$$P(y) = \frac{a}{2}\left(y - \frac{V_0}{a}\right)^2 + k', \tag{12}$$

unde

$$k' = k - \frac{V_0^2}{2a}\cdot$$

Condiţia pe contur (7) va avea forma :

$$\mathrm{Re}\,\{-ig(\zeta)\}_{|\zeta|=c} = P\,[y(\xi, \eta)_{|\zeta|=c}], \tag{13}$$

unde este vizibil că membrul al doilea este o funcţie raţională.

Pe cercul $|\zeta| = c$ avem :

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta}\right), \qquad \eta = \frac{1}{2i}\left(\zeta - \frac{c^2}{\zeta}\right)$$

astfel încît aveam de considerat funcţia :

$$A(\zeta) = P\left\{y\left[\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta}\right),\ \frac{1}{2i}\left(\zeta - \frac{c^2}{\zeta}\right)\right]\right\}\cdot \tag{14}$$

Notăm

$$B(\zeta) = y\left[\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta}\right),\ \frac{1}{2i}\left(\zeta - \frac{c^2}{\zeta}\right)\right].$$

Un calcul simplu ne dă

$$B(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta}\right). \tag{15}$$

Introducînd (15) în (14) obţinem

$$A(\zeta) = P\left[\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta}\right)\right]. \tag{16}$$

Cu ajutorul lui (12) expresia (16) capătă forma :

$$A(\zeta) = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta}\right) - \frac{V_0}{a}\right]^2 + k'$$

de unde

$$A(\zeta) = \frac{ac^4}{8}\,\frac{1}{\zeta^2} - \frac{V_0 c^2}{2}\,\frac{1}{\zeta} + \frac{ac^2}{4} + k' + \frac{V_0^2}{2a} - \frac{V_0}{2}\,\zeta + \frac{a}{8}\,\zeta^2. \tag{17}$$

Polurile funcţiei $A(\xi)$ sînt $\zeta = 0$ şi $\zeta = \infty$. Vom nota cu $A_0(\zeta)$ partea principală a funcţiei $A(\xi)$ referitoare la polul exterior $\zeta = \infty$ şi cu $A_1(\zeta)$ partea principală a aceleiaşi funcţii referitoare la polul interior $\zeta = 0$. Se vede imediat că avem :

$$\begin{aligned} A_0(\zeta) &= -\frac{V_0}{2}\,\zeta + \frac{a}{8}\,\zeta^2, \\ A_1(\zeta) &= \frac{ac^4}{8}\,\frac{1}{\zeta^2} - \frac{V_0 c^2}{2}\,\frac{1}{\zeta}. \end{aligned} \tag{18}$$

Conform cu [4] vom avea deci

$$-ig(\zeta) = 2A_1(\zeta) - i\tau$$

de unde

$$g(\zeta) = ic^2\left[\frac{ac^2}{4}\,\frac{1}{\zeta^2} - V_0\,\frac{1}{\zeta}\right] + \tau, \tag{19}$$

τ fiind o constantă pur imaginară.

Ţinînd seama de (11) putem scrie

$$F^*(z) = g\,[i\,(-z + \sqrt{z^2 + c^2})]$$

sau

$$F^{\star}(z) = ic^2\left[-\frac{ac^2}{4}\,\frac{1}{(-z+\sqrt{z^2+c^2})^2}+iV_0\,\frac{1}{(-z+\sqrt{z^2+c^2})}\right]. \tag{20}$$

Avem deci

$$\frac{\mathrm{d}F^{\star}}{\mathrm{d}z} = -\frac{iac^4}{2}\,\frac{1}{\sqrt{z^2+c^2}\,(-z+\sqrt{z^2+c^2})^2} -$$

$$- V_0c^2\,\frac{1}{\sqrt{z^2+c^2}\,(-z+\sqrt{z^2+c^2})}.$$

Se vede că avem îndeplinită şi condiţia (1′) :

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\mathrm{d}F^{\star}}{\mathrm{d}z} = 0.$$

După o serie de calcule elementare putem scrie funcţia $F(z)$ sub forma finală :

$$F(z) = -V_0\sqrt{z^2+c^2}-\frac{ai}{4}(c^2+2z\sqrt{z^2+c^2}), \tag{21}$$

iar viteza poate fi scrisă astfel :

$$w = -V_0\frac{z}{\sqrt{z^2+c^2}}-ay-\frac{ia}{2}\,\frac{(z+\sqrt{z^2+c^2})^2}{\sqrt{z^2+c^2}}. \tag{22}$$

Se remarcă imediat că formula găsită de noi (21) este o generalizare a potenţialului complex al mişcării fluide permanente incompresibile, în cazul unei repartiţii uniforme a vitezei la mari distanţe. Într-adevăr, făcînd în (21) $a = 0$ se obţine :

$$f(z) = -V_0\sqrt{z^2+c^2},$$

tocmai formula cunoscută.

În (21) se poate separa uşor partea reală şi partea imaginară obţinînd ecuaţiile liniilor echipotenţiale şi ale liniilor de curent.

Primită la redacţie la 25 ianuarie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. ION I. CRISTEA, Studii şi cercetări matematice, **XIV**, *2*, 253—306 (1963).
2. С. А. ЧАПЛЫГИН, *К теории метелей*, Москва-Ленинград, 1948.
3. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucureşti—Paris, 1959.
4. — Comunicările Academiei R.P.R., **XII**, *4*, 381—385 (1962).
5. Y. H. KUO, Quarterly of Applied Math., **1**, *3*, 273—275 (1943).
6. N. S. TSIEN, Quarterly of Applied Math., **1**, *2*, 130—148 (1943).
7. V. VÂLCOVICI, Bulletin scientifique de l'Ecole Polytehnique de Timişoara, **2**, *3—4*, 199—237 (1929).

CONTRIBUȚII LA REZOLVAREA PROBLEMEI SINTEZEI SCHEMELOR CU CONTACTE ȘI RELEE (I)

DE

ION MUNTEAN

I

1.1. Este cunoscută următoarea teoremă a lui J. Clerk Maxwell asupra căldurii dezvoltate într-o rețea electrică [1]:

TEOREMA 1. *În orice sistem de conductori care sînt sediul unor f. e. m. interne, căldura dezvoltată de curenții distribuiți conform legii lui Ohm este mai mică decît căldura dezvoltată de către niște curenți distribuiți în alt mod compatibil cu condițiile obligatorii de sosire și scurgere a curenților.*

În sensul teoremei 1, condițiile obligatorii de sosire și scurgere a curenților reprezintă condiția impusă de prima lege a lui Kirchhoff ca suma curenților în fiecare nod să fie nulă.

1.2. În această lucrare vom considera cazul unei scheme electrice dipolare pasive și vom da o demonstrație a teoremei 1 pentru acest caz particular punînd în evidență și o teoremă duală cu aceasta (teorema 2).

Rezultatele obținute le vom folosi pentru descrierea unui algoritm pentru sinteza schemelor cu contacte fără repetiție (partea I) și vom arăta cum se aplică algoritmul în cazul sintezei schemelor cu contacte și relee oarecare (partea a II-a).

1.3. Fie deci o schemă electrică dipolară în care notăm cu $1, 2, \ldots, n$ nodurile și cu r_{jk}, $(j, k = 1, 2, \ldots, n;\ j \neq k)$ laturile compuse din rezistențe. Fiecare dintre rezistențele r_{jk} poate fi simplă sau compusă prin suprapunerea în paralel a unui număr oarecare de rezistențe. De asemenea în cazurile practice un circuit format din mai multe rezistențe legate în serie poate fi considerat ca o singură rezistență pentru simplificarea calculelor.

Pentru demonstrațiile ce vor urma, laturile le vom considera formate din rezistențe simple și simetrice $r_{jk} = r_{kj}$, iar schema completă (cu toate nodurile interconectate).

Deoarece $r_{jk} = r_{kj}$ pentru orice j și k convenim să scriem indicii j, k în ordinea mărimii, adică în r_{jk}, $j < k$, în afară de cazurile cînd se va specifica acest lucru.

Curenții în laturi îi notăm cu i_{jk}. Vom conveni să luăm sensul curentului în latura r_{jk} de la j spre k.

1.4. După cum se știe, curenții în laturile unei scheme electrice date se află rezolvînd un sistem de ecuații liniare obținut prin aplicarea celor două legi ale lui Kirchhoff la această schemă.

Numărul de ecuații liniar independente ale acestui sistem este egal cu numărul de laturi și se obține scriind :

$$p = n - s \tag{1}$$

ecuații aplicînd prima lege a lui Kirchhoff în noduri și

$$b = l - n + s \tag{2}$$

ecuații aplicînd cea de-a doua ecuație a lui Kirchhoff în bucle.

În relațiile (1) și (2), l este numărul de laturi, n numărul de noduri, s numărul de subscheme conexe, p numărul de tensiuni în noduri liniar independente iar b numărul de curenți ciclici liniar independenți.

1.5. În cele ce urmează vom presupune schema conexă ($s = 1$).

În aceste condiții cele $n - 1$ ecuații liniar independente corespunzătoare primei legi a lui Kirchhoff aplicată la o schemă conexă și completă cu n noduri se pot scrie :

$$\begin{aligned} i_{12} + i_{13} + \dots + i_{1\,n-1} + i_{1n} &= i, \\ -\,i_{12} + i_{23} + \dots + i_{2\,n-1} + i_{2n} &= 0, \\ -\,i_{13} - i_{23} + \dots + i_{3\,n-1} + i_{3n} &= 0, \\ -\,i_{1\,n-1} - i_{2\,n-1} - \dots - i_{n-2\,n-1} + i_{n-1n} &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

unde i este curentul debitat de sursă. Fiecare ecuație reprezintă suma curenților care intră într-unul din nodurile $1, 2, \dots, n - 1$.

Sistemul de ecuații (3) este liniar independent. Într-adevăr, înlocuind pe i_{12} scos din ecuația întîi, în ecuația a doua, apoi pe i_{23} în ecuația a treia și așa mai departe, se obține următorul sistem

$$\begin{aligned} i_{12} + i_{13} + \dots + i_{1n} \qquad\qquad\qquad\qquad &= i, \\ i_{13} + \dots + i_{1n} + i_{23} + \dots + i_{2n} &= i, \\ i_{14} + \dots + i_{1n} + i_{24} + \dots \qquad\qquad & \\ \dots\, i_{2n} + i_{34} + \dots\, i_{3n} \qquad &= i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad & \\ i_{1n} + i_{2n} + \dots + i_{n-1n} \qquad\qquad &= i \end{aligned} \tag{4}$$

care este echivalent cu sistemul (3).

Fiecare dintre variabilele i_{12}, i_{23}, $i_{34}, \dots, i_{n-1n}$, apare într-una și numai într-una din ecuațiile sistemului (4), de unde rezultă că matricea coeficienților acestor variabile este diagonală, deci cu determinant diferit de zero.

Matricea asociată sistemului (4) se obţine scriind succesiv $n - 1$ matrice triunghiulare de ordine egale respectiv cu $n - 1$, $n - 2, \ldots, 2, 1$ şi completînd locurile rămase goale cu 0, astfel:

$$\left\| \begin{array}{c} 1\,1\,1 \ldots 1\,0\,0 \ldots 0\,0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0\,1\,1 \ldots 1\,1\,1 \ldots 1\,0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0\,0\,1 \ldots 1\,0\,1 \ldots 1\,1 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\,0\,0 \ldots 1\,0 \ldots 1\,0 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \end{array} \right\| . \tag{5}$$

1.6. Să considerăm forma pătratică:

$$F = \sum_{j,k} r_{jk}\, i_{jk}^2, \quad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \ldots, n - 1 \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{6}$$

pentru orice j, k.

Dacă r_{jk} sînt rezistenţele iar i_{jk} sînt curenţii care le străbat, forma pătratică (6) reprezintă puterea consumată în aceste rezistenţe.

Atunci teorema 1 se poate enunţa astfel:

1.7. TEOREMA 1′. *Curenţii în laturile unei reţele electrice date, sînt univoc determinaţi de ecuaţiile sistemului (3) şi de condiţia ca aceştia să minimizeze forma pătratică (6).*

Demonstraţia va consta în stabilirea echivalenţei între condiţiile teoremei şi ecuaţiile lui Kirchhoff.

Sistemul de ecuaţii (3) reprezintă, după cum s-a arătat, $n - 1$ ecuaţii liniar independente corespunzătoare primei legi a lui Kirchhoff.

Rezolvînd sistemul (3) în raport cu $i_{12}, i_{23}, \ldots, i_{n-1\,n}$ şi ţinînd seama de (4) obţinem:

$$\begin{aligned} i_{12} &= i - i_{13} - i_{14} - \ldots\ldots\ldots - i_{1n}, \\ i_{23} &= i - i_{13} - i_{14} - \ldots\ldots\ldots - i_{2n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_{n-1n} &= i - i_{1n} - i_{2n} - \ldots\ldots\ldots - i_{n-2n}. \end{aligned} \tag{3′}$$

Condiţia de extrem din enunţul teoremei se obţine egalînd cu 0 derivatele parţiale ale formei pătratice F în raport cu variabilele r_{13}, $r_{14}, \ldots, r_{n-2n}$, în număr de $l - n + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial i_{13}} &= -r_{12}i_{12} + r_{13}i_{13} - r_{23}i_{23} = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial i_{14}} &= -r_{12}i_{12} + r_{14}i_{14} - r_{23}i_{23} - r_{34}i_{34} = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial i_{15}} = -\,r_{12}i_{12} + r_{15}i_{15} - r_{23}i_{23} - r_{34}i_{34} - r_{45}i_{45} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial i_{n-2\,n}} = -\,r_{n-2\,n-1}\,i_{n-2\,n-1} + r_{n-2n}\,i_{n-2n} - r_{n-1n}\,i_{n-1n} = 0.$$

Matricea asociată acestui sistem este matricea următoare:

$$\left\|\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
-r_{12} & r_{13} & 0 & \dots & 0 & -r_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
-r_{12} & 0 & r_{14} & \dots & 0 & -r_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & -r_{34} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
-r_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & -r_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & -r_{34} & 0 & \dots & 0 & -r_{45} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\hdotsfor{19} \\
-r_{12} & 0 & 0 & \dots & r_{1n} & -r_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & -r_{34} & 0 & \dots & 0 & -r_{45} & \dots & -r_{n-2n-1} & 0 & -r_{n-1n} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -r_{23} & r_{24} & 0 & \dots & 0 & -r_{34} & 0 & \dots & 0 & -r_{45} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -r_{23} & 0 & r_{25} & \dots & 0 & -r_{34} & 0 & \dots & 0 & -r_{45} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\hdotsfor{19} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -r_{23} & 0 & 0 & \dots & r_{2n} & -r_{34} & 0 & \dots & 0 & -r_{45} & \dots & -r_{n-2n-1} & 0 & -r_{n-1n} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -r_{34} & r_{35} & \dots & 0 & -r_{45} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\hdotsfor{19} \\
0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -r_{34} & 0 & \dots & r_{3n} & -r_{45} & \dots & -r_{n-2n-1} & 0 & -r_{n-1n} \\
\hdotsfor{19} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -r_{n-2n-1} & r_{n-2n} & -r_{n-1n}
\end{array}\right\| \qquad (8)$$

Se observă că în această matrice coeficienții r_{jk} ai variabilelor i_{jk} apar fiecare într-o coloană și numai într-una cu observația că r_{12}, r_{23}, $r_{34}, \ldots, r_{n-1n}$ apar de mai multe ori în aceeași coloană cu semnul minus iar restul de coeficienți apar cu semnul plus o singură dată. Variabila r_{k-1k} apare pe orice linie pe care se găsește r_{jm} cu $j = 1, 2, \ldots, k-2$; $m = k$, $k+1, \ldots, n$; sau $j = k-1$; $m = k+1$, $k+2, \ldots, n$.

Fiecare din liniile matricii conține elemente care se obțin unul din altul prin permutări circulare ale indicilor, în afară de elementul cu semnul plus care închide circuitul format de celelalte elemente. În acest fel fiecare linie a matricii conține elemente dintr-o buclă a schemei date. Atunci sistemul (7) este compus din $l - n + 1$ ecuații reprezentînd a doua lege a lui Kirchhoff aplicată la $l - n + 1$ bucle.

Deoarece fiecare buclă din cele considerate conține cel puțin o latură diferită de celelalte, rezultă că sistemul (7) este liniar independent. Acest lucru se observă ușor și pe matricea asociată întrucît determinantul corespunzător variabilelor i_{13}, i_{14}, i_{1n}, $i_{24}, \ldots, i_{2n}, \ldots, i_{n-2n}$, are elemente diagonalei principale diferite de zero iar celelalte elemente nule și deci este diferit de 0.

Sistemul format din ecuațiile (3) și (7) luate împreună este un sistem de l ecuații cu l necunoscute. Vom arăta că acest sistem este liniar independent și că determină deci univoc curenții în laturi în funcție de rezistențele acestora și de sursele exterioare.

Matricea asociată acestui sistem este următoarea :

$$\left\| \begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\hdotsfor{14} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\
-r_{12} & r_{13} & 0 & \dots & 0 & -r_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
-r_{12} & 0 & r_{14} & \dots & 0 & -r_{23} & 0 & \dots & 0 & -r_{34} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\hdotsfor{14} \\
-r_{12} & 0 & 0 & \dots & r_{14} & -r_{23} & 0 & \dots & 0 & -r_{34} & \dots & -r_{n-2n-1} & 0 & -r_{n-1n} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -r_{23} & r_{24} & \dots & 0 & -r_{34} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\hdotsfor{14} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -r_{n-2n-1} & r_{n-2n} & -r_{n-1n}
\end{array} \right\| . \tag{9}$$

Determinantul matricii (9) este în general diferit de 0. Într-adevăr, dacă permutăm coloanele între ele astfel încît să aducem coloanele corespunzătoare elementelor $r_{12}, r_{23}, \dots, r_{n-1n}$ în ultimele $n-1$ locuri, se pun în evidenţă doi minori, fiecare avînd elementele diagonalei principale diferite de 0 şi restul de elemente nule. Primul minor obţinut ca intersecţie a primelor $n-1$ linii cu ultimele $n-1$ coloane are elementele diagonalei principale egale cu 1, iar al doilea, obţinut ca intersecţie a ultimelor $l-n+1$ linii cu primele $l-n+1$ coloane, are elementele diagonalei principale egale respectiv cu $r_{13}, r_{14}, \dots, r_{1n}, r_{23}, r_{24}, \dots, r_{n-2n}$. Valoarea primului determinant este 1 iar a celui de-al doilea

$$(-1)^{C_n^3} r_{13}\, r_{14} \dots r_{1n}\, r_{24} \dots r_{n-2n}. \tag{10}$$

Semnul produsului (10) se obţine observînd că pentru aducerea coloanelor corespunzătoare elementelor $r_{12}, r_{23}, \dots, r_{n-1n}$, în ultimele locuri am făcut :

$$1(n-2) + 2(n-3) + 3(n-4) + \dots + (n-2)\,1 = C_n^3$$

permutări, deci tot atîtea schimbări de semn.

Dezvoltînd determinantul matricii (9) după regula lui Laplace, după primele $n-1$ linii, unul din termenii dezvoltării va fi produsul celor doi minori de care s-a vorbit mai sus, multiplicat cu $(-1)^{(l+1)(n-1)}$ adică :

$$(-1)^{C_n^3 + (l+1)(n-1)} r_{13}\, r_{14} \dots r_{14}\, r_{24} \dots r_{n-2n}. \tag{11}$$

Se vede cu uşurinţă că produsul (11) nu mai poate să apară în nici unul din termenii dezvoltării şi deci determinantul nu este identic nul.

Vom arăta că valoarea determinantului este o sumă de produse de forma (11).

În acest scop să aplicăm o permutare nodurilor schemei date. Prin această transformare schema rămîne nemodificată, se realizează doar o altă denumire a nodurilor şi laturilor sale.

Această transformare poate fi interpretată și într-altfel ținînd seama de (3′) : permutarea a două noduri, de exemplu, este echivalentă cu schimbarea rolului celor două noduri și curenților care intră în acestea.

Să arătăm că o astfel de transformare nu schimbă valoarea determinantului matricii asociate. Pentru ușurința demonstrației vom considera un caz particular și anume cazul cînd permutăm între ele nodurile 2 și 3. În matricea asociată la această permutare se realizează înlocuind indicele 2 cu 3 și invers.

Se obține în acest fel matricea următoare :

$$\left\| \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hdotsfor{14} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -r_{13} & r_{12} & 0 & \dots & 0 & -r_{23} & 0 & \dots & 0 & -r_{24} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -r_{13} & 0 & r_{14} & \dots & 0 & -r_{23} & 0 & \dots & 0 & -r_{24} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hdotsfor{14} \\ -r_{13} & 0 & 0 & \dots & r_{14} & -r_{23} & 0 & \dots & 0 & -r_{24} & \dots & -r_{n-2\,n-1} & 0 & -r_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -r_{23} & r_{34} & \dots & 0 & -r_{24} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hdotsfor{14} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -r_{n-2\,n-1} & r_{n-2\,n} & -r_{n-1\,n} \end{array} \right\| \qquad (12)$$

Matricea (12) se obține din matricea (9) prin transformări elementare. Într-adevăr, acest lucru se obține prin următoarele transformări :

— scăderea liniei n din următoarele $n - 3$ linii ;

— scăderea liniei $2(n - 1)$ din $n - 3$ linii care o preced și din $2(n - 4)$ linii care o succed ;

— permutarea coloanei întîi cu coloana a doua ;

— permutarea coloanelor $n + 1 + i$ cu coloanele $2(n - 1) + i$, pentru $i = 1, 2, \dots, n - 4$;

— scăderea liniei întîi din linia a doua ;

— scăderea liniei a treia din linia a doua ;

— înmulțirea liniei n și liniei $2(n - 1)$ cu -1 ;

— înmulțirea coloanei n și coloanei $n + 1$ cu -1.

Ținînd seama de cele de mai sus, rezultă că determinantul matricii (12) este egal cu determinantul matricii (9).

Dar în determinantul matricii (12) unul dintre termeni este :

$$(-1)^{C_n^3 + (l+1)(n-1)} r_{12} r_{14} \cdots r_{1n} r_{34} r_{35} \cdots r_{3n} r_{25} \cdots r_{2n} r_{46} \cdots r_{n-2\,n}, \qquad (13)$$

deci acesta trebuie să apară și în determinantul matricii (9).

Am considerat permutarea a două noduri pentru ușurința demonstrației. Puteam lua o permutare oarecare a nodurilor și am fi obținut toate produsele posibile de $l - n + 1$ elemente.

Rezultă următoarele leme consecinţă :

LEMA 1. *Prin aplicarea unei permutări oarecare indicilor, elementelor matricii (9) se obţine o matrice echivalentă cu aceasta.*

LEMA 2. *Valoarea determinantului matricii (9) este un polinom omogen şi de gradul întîi în fiecare variabilă, semnul fiecărui termen al acestui polinom fiind* :

$$(-1)^{C_n^3+(l+1)(n-1)}. \tag{14}$$

Din lema 2 rezultă că determinantul matricii (9) este diferit de 0 şi că sistemul de ecuaţii corespunzător este liniar independent, avînd soluţie unică.

Se obţine un extrem al formei pătratice (6) care este definită pozitiv şi nu are maxim de distanţă finită. Se obţine deci un minim. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

1.8. *Observaţie.* În demonstraţia teoremei nu a fost esenţial faptul că impedanţele sînt rezistenţe ci numai faptul că acestea sînt constante în raport cu curenţii în laturi.

Din această observaţie rezultă un mod foarte comod de scriere a ecuaţiilor lui Kirchhoff :

1.9. Scriem un sistem de $n-1$ (în general $n-s$) ecuaţii liniar independente, funcţii de curenţii în noduri, aplicînd prima lege a lui Kirchhoff, pe care-l rezolvăm în raport cu $n-1$ dintre variabile.

Scriem forma pătratică (6) şi calculăm derivatele parţiale ale acesteia în raport cu variabilele arbitrare din ecuaţiile de mai sus, pe care le egalăm cu 0.

Vom obţine un sistem de l ecuaţii cu l necunoscute ($(n-1)$ ecuaţii de curenţi şi $l-n+1$ ecuaţii de tensiuni) care determină univoc curenţii în laturi.

1.10. Să considerăm acum problema duală obţinută în felul următor :

Înlocuim rezistenţele r_{jk} cu conductanţele corespunzătoare g_{jk} iar curenţii în laturi i_{jk} cu tensiunile u_{jk}. Forma pătratică (6) va deveni :

$$F = \Sigma\, r_{jk}\, i_{jk}^2 = \Sigma\, g_{jk}\, u_{jk}^2 \tag{15}$$

în care vor exista următoarele relaţii între curenţi şi tensiuni :

$$u_{jk} = r_{jk} i_{jk} \tag{16}$$

$$i_{jk} = g_{jk} u_{jk}. \tag{17}$$

Ţinînd seama de relaţia (16), ecuaţiile (7) devin :

$$\begin{aligned} -u_{12} + u_{13} - u_{23} &= 0,\\ -u_{12} + u_{14} - u_{23} - u_{34} &= 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ -u_{n-2\,n-1} + u_{n-2n} - u_{n-1n} &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (18) în raport cu variabilele care au semnul „+", obținem :

$$
\begin{aligned}
&u_{13} = u_{12} + u_{23}, \\
&u_{14} = u_{12} + u_{23} + u_{34}, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&u_{1n} = u_{12} + u_{23} + \dots + u_{n-1n}, \\
&u_{24} = u_{23} + u_{34}, \\
&u_{25} = u_{23} + u_{34} + u_{45}, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&u_{2n} = u_{23} + u_{34} + \dots + u_{n-1n}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&u_{k\,k+2} = u_{k\,k+1} + u_{k+1\,k+2}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
&u_{kn} = u_{k\,k+1} + u_{k+1\,k+2} + \dots + u_{n-1n}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&u_{n-2n} = u_{n-2\,n-1} + u_{n-1n}.
\end{aligned}
\tag{18'}
$$

În forma (18') a sistemului (18) se observă că u_{1n} este tocmai tensiunea între poli și poate fi interpretată ca f.e.m. a sursei.

Rămîne să mai determinăm tensiunile în restul de $l - 1$ laturi.

Pentru aceasta folosim rezultatele teoremei 1.

Într-adevăr, forma pătratică (15) este maximă o dată cu forma (6). Ținînd seama că sistemul de ecuații (18) este un sistem de legături între variabilele formei pătratice (15), rezultă următoarea teoremă, duală teoremei 1.

TEOREMA 2. *Tensiunile în laturile unei rețele electrice date sînt univoc determinate de ecuațiile sistemului (18) și de condiția ca acestea să minimizeze forma pătratică (15).*

1.11. Dacă luăm derivatele parțiale ale formei pătratice (15) în raport cu variabilele din membrul drept al ecuațiilor sistemului (18') și ținem seama de relațiile (16'), obținem un sistem de $n - 2$ ecuații liniar independente ale căror variabile sînt curenții în laturi.

DEFINIȚIE. *Numim acest sistem de ecuații de curenți asociat sistemului de ecuații de tensiuni (18').*

TEOREMA 3. *Se poate găsi un sistem de ecuații de tensiuni astfel încît ecuațiile sistemului de curenți asociat să reprezinte suma curenților care intră în $n - 2$ din nodurile schemei.*

Într-adevăr, prin transformări simple sistemul (18′) se poate aduce la sistemul echivalent următor:

$$\begin{aligned}
&u_{12} + u_{2n} = u_{1n}\\
&u_{13} + u_{3n} = u_{1n}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{1n-1} + u_{n-1n} = u_{1n}\\
&u_{23} + u_{3n} = u_{2n}\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&u_{2n-1} + u_{n-1n} = u_{2n}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{k\,k+1} + u_{k+1n} = u_{kn}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{k\,n-1} + u_{n-1n} = u_{kn}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{n-2\,n-1} + u_{n-1n} = u_{n-2n}
\end{aligned} \tag{19}$$

în care dacă luăm arbitrare necunoscutele u_{jn}, $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ (u_{1n} se presupune cunoscut şi egal cu forţa electromotoare a sursei), fiecare ecuaţie conţine una şi numai una din restul de $l - n$ variabile.

Prin egalarea cu 0 a derivatelor parţiale ale formei pătratice (15) în raport cu necunoscutele arbitrare u_{jn} şi dacă ţinem seama de relaţiile (16′), obţinem următorul sistem de ecuaţii de curenţi din laturi:

$$\begin{aligned}
&-i_{12} + i_{23} + \ldots + i_{2n} = 0,\\
&-i_{13} - i_{23} + \ldots + i_{3n} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-i_{1n-1} - i_{2n-1} - \ldots - i_{n-2n-1} + i_{n-1n} = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Fiecare ecuaţie din sistemul (20) reprezintă suma curenţilor care intră într-un nod şi anume în $n - 2$ dintre nodurile schemei.

II

2.1 Rezultatele obţinute pînă în prezent ne permit să stabilim un algoritm pentru sinteza schemelor cu contacte fără repetiţie, pe care să-l extindem apoi la sinteza schemelor cu contacte şi relee în cazul general.

Această posibilitate rezultă din izomorfismul schemelor cu contacte fără repetiţie cu schemele electrice cu rezistenţe.

Observaţie. În această lucrare prin sinteză înţelegem construirea unei scheme dacă se dă formula de structură a acesteia.

DEFINIŢIE. *Numim izomorfe două scheme pentru care:*

a) *grafurile corespunzătoare sînt izomorfe, adică se poate găsi o corespondenţă biunivocă între mulţimea laturilor acestor grafuri care păstrează incidenţele între laturi şi dacă polii se păstrează prin această corespondenţă*;

b) *corespondența precedentă aplicată variabilelor atașate laturilor transformă formula de structură a unei scheme în formula de structură a celeilalte scheme și invers.*

Observație. Din punct de vedere al reprezentării în spațiu, schemele izomorfe diferă doar printr-o altă denumire a laturilor și prin legile proprii de compunere a elementelor (legile algebrei logicii pentru schemele cu contacte și legile calculului cu impedanțe pentru schemele electrice [3]).

2.2. Să considerăm o schemă dipolară cu contacte fără repetiție și o schemă electrică cu rezistențe.

Formula de structură a schemei cu contacte se poate scrie sub forma disjunctivă normală redusă:

$$F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k, \tag{21}$$

unde conjuncțiile F_j reprezintă conductibilitățile tuturor circuitelor elementare din schema dată. Prin circuite elementare înțelegem circuite care unesc polii [3].

Să atașăm fiecărei conjuncții

$$F = a_{j1} a_{j2} \dots a_{j_{k_j}} \tag{22}$$

forma liniară

$$f_j = a_{j1} + a_{j2} + \dots + a_{j_{k_j}} \tag{23}$$

și să stabilim o corespondență biunivocă între formele liniare f_j și ecuațiile de tensiuni:

$$f_j \rightleftarrows U_{j1} + U_{j2} + \dots + U_{j_{k_j}}, \tag{24}$$

unde U_{j_k} este tensiunea în latura corespunzătoare lui a_{j_k}.

Numărul de forme (23) liniar independente este egal cu numărul de ecuații de tensiuni liniar independente adică cu $l - n + 1$.

2.3. Dacă se dă formula de structură (21) a unei scheme oarecare, știm să construim această schemă dacă reușim să determinăm pentru fiecare nod N_p toate laturile conectate la el.

În cele ce urmează prin nodul N_p înțelegem mulțimea:

$$N_p = \left\{ a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_{q_p}} \right\}$$

a laturilor conectate la N_p.

La fel ca la punctul 2.2, putem pune în corespondență biunivocă mulțimea nodurilor unei scheme date cu mulțimea ecuațiilor de curenți din schema cu rezistențe izomorfă:

$$N_p \rightleftarrows i_{p_1} + i_{p_2} + \dots + i_{p_{q_p}}. \tag{25}$$

Numărul de ecuații de curenți este egal cu $n - 2$.

Determinarea ecuațiilor de curenți asigură datorită corespondenței (25) determinarea a $n - 2$ dintre nodurile schemei, restul de două noduri (polii) urmînd să se determine din mulţimea laturilor care apar într-un singur nod prin gruparea acestora în două clase. În fiecare clasă se grupează toate laturile care nu apar împreună în nici o conjuncţie elementară. Cele două mulţimi de laturi astfel construite reprezintă cei doi poli.

Observaţie. Dacă tensiunea în latura sursei se presupune necunoscută, atunci în cele $l - n + 1$ ecuaţii de tensiuni există $n - 1$ variabile arbitrare, şi deci prin calcularea derivatelor parţiale în raport cu acestea se determină $n - 1$ ecuaţii de curenţi, deci $n - 1$ noduri. Unul dintre nodurile găsite este unul din poli. Al doilea pol este construit de variabilele rămase nelegate la un capăt.

2.4. Teoremele 2 şi 3 şi corespondenţele stabilite la aliniatele 2.2 şi 2.3 ne permit să stabilim următorul algoritm pentru sinteza schemelor cu contacte fără repetiţie :

Alegem un număr de conjuncţii elementare din formula de structură scrisă sub forma normal disjunctivă redusă [1]) care să îndeplinească condiţiile :

α) fiecare conjuncţie elementară diferă de fiecare din restul de conjuncţii elementare alese prin cel puţin o conductibilitate ;

β) în ansamblu conjuncţiile elementare alese conţin toate conductibilităţile cuprinse în forma de structură ;

γ) conjuncţiile elementare se aleg astfel încît să fie de lungime minimă, prin lungime înţelegînd numărul de conductibilităţi care compun conjuncţiile respective ;

δ) numărul acestor conjuncţii nu este saturat, în sensul că nu se poate elimina nici una din conjuncţiile alese, începînd cu cele de lungime maximă, astfel încît condiţia β) să mai fie satisfăcută.

Scriem un sistem de ecuaţii de tensiune punînd în corespondenţă la fiecare conjuncţie elementară o ecuaţie de tensiuni, ca în (24).

Scriem apoi sistemul de ecuaţii de curenţi asociat sistemului de ecuaţii de tensiuni obţinute.

Sistemul de ecuaţii de curenţi ce se obţine este compus din $n - 2$ relaţii între curenţii din laturile schemei electrice cu rezistenţe izomorfă cu schema cu contacte dată. În general aceste relaţii conţin curenţi care intră în noduri diferite nu numai în acelaşi nod.

Observaţie. Condiţiile α), β) şi δ) sînt impuse de necesitatea alegerii unui sistem de ecuaţii de tensiune liniar independente iar condiţia γ) asigură alegerea unui număr maximum de ecuaţii de tensiune liniar independente. Condiţia γ) este necesară şi din următoarele cauze :

a) Conjuncţiile elementare alese trebuie să caracterizeze întreaga formulă de structură adică într-un fel oarecare conjuncţiile elementare nealese să poată fi exprimate în funcţie de conjuncţiile alese. Or, în schemele fără repetiţie, conjuncţiile de lungime mai mică nu pot fi exprimate folosind legile din algebra logicii prin conjuncţii de lungime mai mare.

b) Rezultatele de la punctul 1.11 ne arată că putem alege ecuaţiile de tensiuni astfel încît sistemul de ecuaţii de curenţi asociat să fie compus din ecuații care fiecare reprezintă suma curenților care intră într-un nod dacă ecuațiile de tensiune conțin un număr minim de termeni.

---

[1]) Pentru definiţie vezi lucrarea lui A. V. Kuzneţov [2].

De la ecuațiile de curenți, prin corespondența biunivocă (25), trecem la nodurile N_p.

Ne putem convinge că rezultatul este corect dacă fiecare variabilă (conductibilitate) apare în cel mult două noduri. Dacă acest lucru nu se întîmplă, atunci înseamnă că nu este ales bine sistemul de ecuații de tensiune și deci, asociatul său, sistemul de ecuații de curenți. Ar trebui să operăm transformări asupra sistemului de ecuații de tensiune pentru a-l aduce la forma (19). Acest lucru este întotdeauna posibil, dar este incomod pentru calcule practice.

2.5. În continuare vom pune în evidență unele proprietăți grupale ale ecuațiilor de curenți (tensiune) care ne vor conduce la un procedeu de simplificare foarte comod.

Să considerăm ecuațiile de curenți. Sistemul (20) este un sistem de forme liniare egalate cu 0. Eliminarea unor variabile din două ecuații ale acestui sistem se face prin adunarea sau scăderea acestor ecuații după cum necunoscutele ce trebuie să se elimine au semne opuse sau același semn.

Prin operația de eliminare se obțin ecuații echivalente cu ecuațiile din care provin, iar prin înlocuirea uneia din ecuațiile inițiale cu ecuația obținută prin eliminare se obține un sistem echivalent cu cel inițial.

Să observăm că ecuația obținută prin eliminare, în afară de semn, este compusă din suma tuturor curenților care compun ecuațiile inițiale dintre care dispar curenții comuni acestor ecuații.

2.6. Dacă $\{i_k\}$, $(k = 1, 2, \ldots, l)$ este mulțimea curenților unei scheme electrice oarecare, l fiind numărul de laturi și $\{i_{p_q}\} = I_{p_q}$, $(q = 1, 2, \ldots, q_p$; $p = 1, 2, \ldots, n - 2)$ cele $n - 2$ ecuații de curenți, atunci operația de eliminare se efectuează după următoarea lege :

$$\begin{aligned} &I_s \oplus I_r = I_t,\ I_s \in S_I,\ I_r \in S_I,\ I_t \in S_I, \\ &t = s \cup r/s \cap r,\ s \in M_l,\ r \in M_l,\ t \in M_l, \end{aligned} \tag{26}$$

unde S_I este mulțimea ecuațiilor de curenți și M_l este mulțimea părților mulțimii $\{1, 2, \ldots, l\}$.

Vom arăta că mulțimea ecuațiilor de curenți înzestrată cu legea (26) formează grup.

Într-adevăr, existența și unicitatea lui I_t este definită prin (26). Apoi :

$$I_s \oplus I_s = I_\theta,\ s \in M_l,\ \theta \in M_l \tag{27}$$

θ fiind mulțimea vidă, căci :

$$S \cup S/S \cap S = \theta;$$

I_s este propriul său invers pentru orice $S \in M_l$ căci I_θ este elementul unitate după cum rezultă din :

$$I_s \oplus I_\theta = I_s,\ s \in M_l,\ \theta \in M_l \tag{28}$$

deoarece

$$S \cup \theta / S \cap \theta = S.$$

Asociativitatea şi comutativitatea se verifică uşor deoarece aceste proprietăţi există în M_l.

Rezultă următoarea teoremă :

TEOREMA 4. *Mulţimea ecuaţiilor de curenţi formează grup comutativ, pe care-l numim grupul ecuaţiilor de curenţi.*

Fără dificultate se poate demonstra că şi ecuaţiile de tensiuni formează grup după o lege similară cu cea pentru ecuaţiile de curenţi.

Dacă $\{u_j\}$, $(j = 1, 2, \ldots, l)$ este mulţimea ecuaţiilor de tensiuni, l fiind numărul de laturi, $\{u_{p_q}\} = U_{p_q}$, $(q = 1, 2, \ldots, q_p;\ p = 1, 2, \ldots, l - n + 1)$, cele $l - n + 1$ ecuaţii de tensiuni, atunci înzestrînd această mulţime cu legea de compunere :

$$U_s \oplus U_r = U_t, \quad U_s \in S_u, \quad U_r \in S_u, \quad U_t \in S_u,$$
$$t = s \cup r \backslash s \cap r, \quad s \in M_l, \quad r \in M_l, \quad t \in M_l,$$

unde S_u este mulţimea ecuaţiilor de tensiuni iar M_l este mulţimea părţilor mulţimii $\{1, 2, \ldots, l\}$, se organizează mulţimea ecuaţiilor de tensiuni ca grup.

2.7. Proprietatea precedentă se extinde la nodurile schemelor cu contacte datorită corespondenţei biunivoce stabilite la punctul 2.3.

Datorită acestei proprietăţi, operaţia de eliminare se poate aplica direct nodurilor după legea :

$$\begin{aligned} &N_p \oplus N_q = N_r, \quad p \in M_l, \quad q \in M_l, \quad r \in M_l \\ &r = p \cup q \backslash p \cap q \end{aligned} \tag{29}$$

şi de fiecare dată înlocuim unul din nodurile N_p, N_q cu N_r.

Vom aplica (29) pînă cînd vom ajunge la un sistem de mulţimi de elemente N_p astfel încît fiecare conductibilitate să se găsească în cel mult doi N_p.

De asemenea în locul ecuaţiilor de tensiuni se pot considera conjuncţiile care se vor compune după legea

$$F_p \oplus F_q = F_r, \quad p \in M_l, \quad q \in M_l, \quad r \in M_l$$
$$r = p \cup q \backslash p \cap q.$$

2.8. Vom indica în continuare cîteva exemple de aplicare a algoritmului de sinteză expus :

Exemplul 1. Fie

$$F = ac + bd + aed + bec.$$

Considerăm formele liniare :

$$f_1 = a + c$$
$$f_2 = b + d$$
$$f_3 = a + e + d,$$

la care corespund ecuațiile de tensiune

$$U_a + U_c = U$$
$$U_b + U_d = U$$
$$U_a + U_e + U_d = U$$

și sistemul asociat de curenți :

$$-i_a - i_c - i_e = 0$$
$$-i_d - i_b - i_e = 0$$

la care corespund nodurile :

$$N_2 = \{a, c, e\}$$
$$N_3 = \{b, d, e\}$$

polii N_1 și N_4 se obțin din analiza conjuncțiilor elementare, deoarece se știe că două conductibilități care apar în aceeași conjuncție nu pot fi conectate la același pol. În cazul de față polii sînt :

$$N_1 = \{a, b\}, \; N_2 = \{c, d\}$$

și obținem schema punții Wheatstone (fig. 1).

Nu putem lua în considerare conjuncțiile *aed*, *bec* deși acestea conțin toate conductibilitățile laturilor deoarece nu se respectă condiția γ) de alegere a conjuncțiilor elementare de lungime minimă.

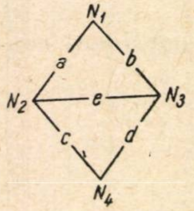


Fig. 1

Această condiție se asigură numai dacă se aleg mai întîi conjuncțiile de lungime minimă și se crește lungimea cu cîte o unitate pînă se includ toate conductibilitățile în conjuncțiile alese.

Explicația funcțională a acestei condiții constă în aceea că în formula de structură a schemelor fără repetiție scrisă sub formă disjunctivă normală redusă nu se pot face simplificări astfel încît din termeni de lungime K să se obțină prin aplicarea legilor de calcul ale algebrei logicii o conjuncție de lungime mai mică decît K.

Exemplul 2. Fie

$$F = ace + acyf + axdf + axdye + bdf + bdye + bxce + bxcyf.$$

Considerăm formele liniare:

$$\begin{aligned} f_1 &= a + c + e \\ f_2 &= b + d + f \\ f_3 &= a + x + d + f \\ f_4 &= b + d + y + e \end{aligned}$$

la care corespund ecuaţiile de tensiune:

$$\begin{aligned} &u_a + u_c + u_e = u \\ &u_b + u_d + u_f = u \\ &u_a + u_x + u_d + u_f = u \\ &u_b + u_d + u_y + u_e = u \end{aligned}$$

şi sistemul asociat de ecuaţii de curenţi:

$$\begin{aligned} &i_a - i_e - i_x - i_y = 0 \\ &i_c - i_e - i_y = 0 \\ &i_d - i_x - i_b = 0 \\ &i_f - i_x - i_b - i_y = 0 \end{aligned}$$

şi deci nodurile:

$$N'_1 = \{a, e, x, y\},\ N'_2 = \{c, e, y\},\ N'_3 = \{d, x, b\},$$
$$N'_4 = \{b, x, f, y\}.$$

Deoarece x şi y apar în cîte trei noduri, facem simplificările necesare compunînd, de exemplu, pe N_2 cu N_1 şi pe N_3 cu N_4 şi obţinem:

$N_1 = \{a, x, c\}$, $N_2 = \{c, e, y\}$, $N_3 = \{d, x, b\}$, $N_4 = \{d, f, y\}$, adică schema din figura 2.

Observaţie. Trecerea de la formele liniare ale conjuncţiilor elementare (sau chiar de la conjuncţiile elementare) la noduri se poate face direct astfel:

— Se scriu formele liniare corespunzătoare conjuncţiilor sau se lucrează chiar pe conjuncţii.

— Se aleg conductibilităţile dependente.

— Nodurile vor fi constituite din fiecare conductibilitate arbitrară la care se adaugă conductibilităţile dependente care se găsesc în aceleaşi conjuncţii elementare cu conductibilitatea arbitrară considerată.

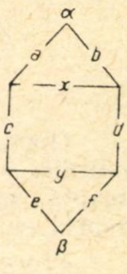


FIG. 2

În mod sistematic operaţiile descrise mai sus, pe care le vom aplica la un exemplu concret, se pot face astfel după cum se vede în cele ce urmează:

Exemplul 3. Fie

$$F = gh + gec + abc + adh + gdbc + abeh + adec.$$

Se întocmeşte un tablou dreptunghiular pe care-l vom numi matricea ecuaţiilor de tensiuni, în care se scriu în partea stîngă conjuncţiile alese după criteriile α), β), γ), δ), iar sus se scriu toate variabilele care sînt cuprinse în formula de structură. În cazul de față se obține tabloul următor :

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*g*	*h*
gh	0	0	0	0	0	1	①
gec	0	0	1	0	①	1	0
abc	①	1	1	0	0	0	0
gdbc	0	1	1	①	0	1	0

Pe fiecare linie se trece 1 în dreptul variabilelor care sînt cuprinse în conjuncția corespunzătoare liniei respective și 0 în locurile rămase libere. Pe fiecare coloană pe care 1 se găsește o singură dată, acesta se închide într-un cerc. În fiecare linie care nu conține 1 încercuit se închide într-un dreptunghiu un 1 ales astfel încît determinantul format luînd coloanele care conțin 1 încercuit sau închis în dreptunghi să fie diferit de 0. Se observă că este suficient pentru aceasta să fie diferit de zero determinantul format de liniile și coloanele care conțin 1 închis în dreptunghi, întrucît restul de coloane conțin 1 o singură dată și prin permutări acesta se poate aduce pe diagonală.

În exemplul considerat, pe fiecare linie se găsește 1 încercuit. Variabilele corespunzătoare acestuia se consideră variabile dependente.

Simbolic, rezolvarea sistemului de forme liniare corespunzătoare ecuațiilor de tensiuni se reduce la separarea variabilelor dependente de cele arbitrare, ceea ce se poate face trecînd într-un tablou, în partea stîngă variabilele dependente, iar în partea dreaptă restul de variabile, pentru fiecare conjuncție, astfel :

h	*g*
e	*gc*
a	*bc*
d	*gbc*

Operația de derivare prin care se obțin ecuațiile de curenți, respectiv nodurile, se face simbolic, atașînd fiecărei variabile arbitrare, din partea dreaptă, variabilele dependente care se găsesc în tabloul de mai sus, în dreptul ei.

Procedînd astfel, se vor găsi nodurile :

$$N_1' = (g, h, e, d), \quad N_2' = (c, e, a, d), \quad N_3' = (a, b, d).$$

Deoarece d apare în toate trei nodurile, facem simplificările necesare, compunînd nodul N_2' cu N_3' și păstrînd nodul N_3'. Vor rezulta nodurile :

$$N_1 = (g, h, e, d), \quad N_2 = (c, e, b), \quad N_3 = (a, b, d)$$

adică schema din figura 3.

Observaţie. Compunerea nodurilor se face astfel încît drept rezultat al compunerii să scadă numărul de variabile şi prin aceasta să nu se repete o variabilă de mai mult de două ori.

2.9. În unele cazuri, din cauza unor legături serie paralel, este posibil ca numărul de conjuncţii alese după criteriile α), β), γ), δ) să fie insuficient pentru sinteza schemei care realizează funcţia dată. Un exemplu simplu va clarifica această problemă.

Fie schema din figura 4 a cărei formulă de structură este :

$$F = ac + bd + ad + bc.$$

Numărul de ecuaţii de tensiuni, liniar independente, este 3, deoarece numărul de laturi, considerînd şi latura sursei, este egal cu 5, numărul de noduri este 3 şi deci $l - n + 1 = 3$.

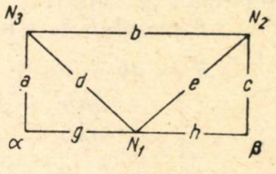


Fig. 3

Alegerea conjuncţiilor după criteriile α), β), γ), δ) ne conduce în schimb numai la două conjuncţii *ac* şi *bd* sau *ad* şi *bc*, pe baza căreia se realizează schemele din figura 5.

Explicaţia acestui fapt se obţine imediat prin comparaţia schemelor din figura 5 cu schema din figura 4. După cum se vede, schema din figura 4, considerînd şi latura sursei care nu este desenată, are trei bucle liniar independente în timp ce schemele din figura 5 au numai două bucle liniar independente şi după cele cunoscute din teoria schemelor electrice numărul de ecuaţii de tensiuni liniar independente este egal, pentru prima schemă, cu 3 iar pentru celelalte scheme cu 2.

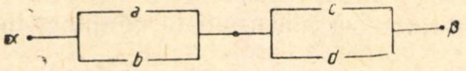
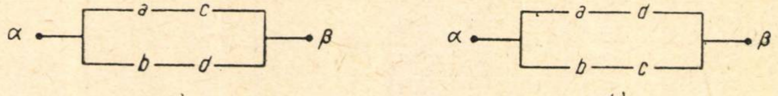


Fig. 4



a) b)

Fig. 5

Datorită acestui lucru, în astfel de cazuri, este necesar să se verifice dependenţa liniară a conjuncţiilor nealese de conjuncţiile independente.

Această verificare se face în grupul ecuaţiilor de tensiuni sau, ceea ce este acelaşi lucru, se poate face compunînd direct conjuncţiile.

DEFINIȚIE. *Se spune că o conjuncție F este liniar dependentă de conjuncțiile $F_1, F_2, \ldots, F_k$ dacă se poate scrie sub forma :*

$$F = F_{i_1} \oplus F_{i_2} \oplus \ldots \oplus F_{i_r}$$

unde $F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_r}$ sînt r dintre conjuncțiile $F_1, F_2, \ldots, F_k$, $r \leqslant k$.

Vom da un exemplu de sinteză în care este necesar să se verifice dependența liniară.

Exemplul 4. Fie

$$\begin{aligned} F = {} & ab + ac + dl + afhl + afgl + aihl + aigl + \\ & + dhfc + dhfb + dhic + dhib + dgfc + dgfb + \\ & + dgic + dgib. \end{aligned}$$

Aplicînd criteriile α), β), γ), δ) se obține, spre exemplu, conjuncțiile independente :

$$ab,\ ac,\ dl,\ afhl,\ aigl,$$

care conțin toate variabilele. Printr-o verificare simplă rezultă că, de exemplu, conjuncția $afgl$ nu se poate obține prin compunerea conjuncțiilor de mai sus. Într-adevăr, prin compunerea conjuncțiilor ac, dl, $afhl$, $aigl$ se obține :

$$ac \oplus dl \oplus afhl \oplus aigl = afgl \oplus cdhi.$$

Independența rezulta din faptul că $cdhi$ e diferit de conjuncțiile alese și nu poate fi obținut din acestea.

Rezultă deci că pentru considerarea tuturor conjuncțiilor liniar independente, este necesar să alăturăm la conjuncțiile de mai sus, conjuncția $afgl$.

Se verifică mai departe că restul de conjuncții sînt liniar dependente de cele șase avute în vedere pînă în prezent. Spre exemplu :

$$\begin{aligned} cdhi &= ac \oplus dl \oplus afhl \oplus aigl \oplus afgl, \\ dhfc &= ac \oplus dl \oplus afhl, \\ dgfb &= dl \oplus afgl \oplus ab. \end{aligned}$$

etc.

Observația 1. Legea de compunere a ecuațiilor de tensiuni este echivalentă cu adunarea modulo 2 a liniilor în matricea ecuațiilor de tensiuni.

Scriem acum matricea ecuațiilor de tensiuni :

	a	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*	*i*	*l*
ab	1	①	0	0	0	0	0	0	0
ac	1	0	①	0	0	0	0	0	0
dl	0	0	0	①	0	0	0	0	1
afhl	1	0	0	0	1	0	①	0	1
aigl	1	0	0	0	0	1	0	①	1
afgl	1	0	0	0	$\boxed{1}$	1	0	0	1

Observația 2. S-ar fi putut include în dreptunghi oricare din variabilele conjuncției $afgl$. S-a ales o variabilă care să fie inclusă în cît mai puține din restul de conjuncții pentru a scurta calculele.

Rezultă următorul tablou pentru aplicarea nodurilor :

b	a
c	a
d	l
h	afl
i	agl
f	agl

sau eliminînd pe f din partea dreaptă prin compunerea conjuncţiilor care îl conţin, obţinem tabloul :

b	a
c	a
d	l
h	g
i	agl
f	agl

de unde rezultă nodurile :

$$N'_1 = (a, b, c, i, f), \quad N'_2 = (l, d, i, f), \quad N'_3 = (g, h, i, f).$$

Deoarece variabilele i, f apar în toate trei nodurile, compunînd pe N'_2 cu N'_3 şi reţinînd pe N'_3, obţinem nodurile :

$$N'_1 = (a, b, c, i, f), \quad N_2 = (l, d, g, h), \quad N_3 = (g, h, i, f)$$

şi schema din figura 6.

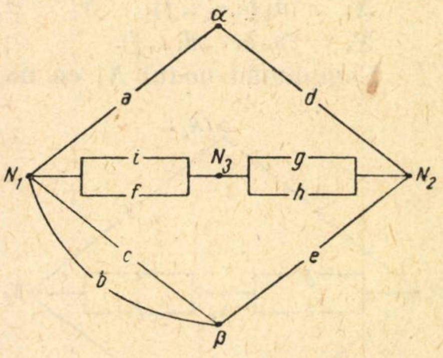


Fig. 6

Observaţia 3. În exemplul de mai sus variabilele i, f apar în toate cele trei noduri şi prin compunerea a oricăror două noduri, acestea s-ar fi putut elimina şi am fi ajuns în situaţia ca fiecare variabilă să se găsească în cel mult două noduri. Cu toate acestea schema obţinută nu ar fi fost cea căutată. Acest inconvenient se întîmplă din cauză că nu s-au fixat şi polii.

Eliminarea acestui inconvenient se realizează ţinînd seama de observaţia de la punctul 2.3.

Într-adevăr, dacă se presupune necunoscută tensiunea în latura sursei şi se introduce o variabilă corespunzătoare acestei laturi, atunci se determină $n - 1$ noduri, adică se determină şi unul dintre poli. Practic se determină amîndoi polii întrucît variabilele care rămîn nelegate la un capăt constituie al doilea pol.

Refacem sinteza ţinînd seama de această observaţie, notînd cu p variabila corespunzătoare laturii sursei. Avem

	a	b	c	d	f	g	h	i	l	p
abp	1	①	0	0	0	0	0	0	0	1
acp	1	0	①	0	0	0	0	0	0	1
dlp	0	0	0	①	0	0	0	0	1	1
$afhlp$	1	0	0	0	1	0	①	0	1	1
$aiglp$	1	0	0	0	0	1	0	①	1	1
$afglp$	1	0	0	0	$\boxed{1}$	1	0	0	1	1

Mai departe se obţine tabloul :

b	ap
c	ap
d	lp
h	$aflp$
i	$aglp$
f	$aglp$

sau eliminînd pe f din partea dreaptă

b	ap
c	ap
d	lp
h	g
i	$aglp$
f	$aglp$

şi se obţin nodurile :

$N'_1 = (a, b, c, i, f)$, $N'_2 = (l, d, i, f)$, $N'_3 = (g, h, i, f)$,
$N'_4 = (p, b, c, d, i, f)$.

Compunînd nodul N'_1 cu nodul N'_4 şi reţinînd pe N'_1, obţinem :

$N'_1 = (a, b, c, i, f)$,
$N'_2 = (l, d, i, f)$,
$N'_3 = (g, h, i, f)$,
$N'_4 = (p, a, d)$.

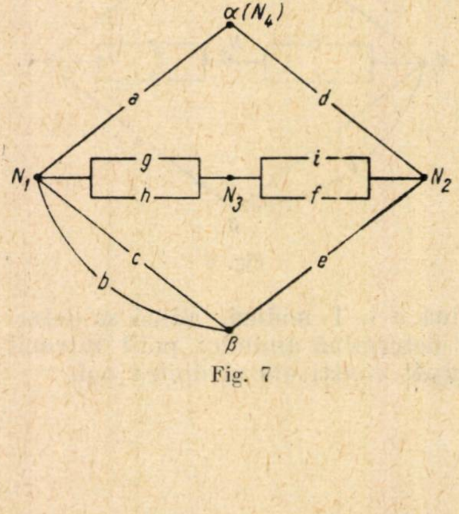


Fig. 7

Latura sursei nu trebuie să apară decît într-un singur nod, din care cauză în compunerea făcută am reţinut pe N'_1 şi nu pe N'_4 pentru a nu repeta pe p.

Acum se observă că nu putem compune nodul N'_1 cu N'_2 deoarece acestea conţin variabile legate la polul N'_4 şi din acelaşi motiv în urma compunerii nodului N'_3 cu oricare dintre nodurile N'_1 sau N'_2 trebuie să-l reţinem pe N'_3.

Dacă-l compunem pe N'_3 cu N'_2, obţinem schema din figura 6. Dacă-l compunem pe N'_3 cu N'_1, obţinem nodurile :

$$N_1 = (a, b, c, g, h), \quad N_2 = (l, d, i, f), \quad N_3 = (g, h, i, f) \text{ şi}$$
$$N_4 = (p, a, d)$$

adică schema din figura 7, care diferă de schema din figura 6 numai prin permutarea între ele a grupelor de elemente legate în paralel : (g, h) şi (i, f).

Observaţia 4. Dacă se compunea N'_2 cu N'_4 s-ar fi obţinut al doilea pol şi mai departe sinteza ne-ar fi condus de asemenea la schemele din figura 6 şi figura 7.

Primită la redacţie la 5 februarie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. J. C. Maxwell, *Traité d'Electricité et de Magnetism.* Paris, Gauthier-Villars, 1885, 1889.
2. А. В. Кузнецов, *Об одном свойстве функции реализуемых неплоскими бесповторными схемами.* Труды Математического института имени ,,В. А. Стеклова", **LI**, 1918.
3. I. Muntean, Метод расчета электрических цепей. Revue de math. pures et appl. **VIII**, *1*, (1963).

OPERATORI SPECTRALI GENERALIZAȚI[1])

DE

ION COLOJOARĂ

INTRODUCERE

Se știe că orice operator autoadjunct sau, mai general, orice operator normal S într-un spațiu Hilbert H se poate descompune într-o sumă directă, în general, continuă, de operatori mai simpli, care să reprezinte fiecare înmulțirea cu un anumit scalar într-un spațiu unidimensional corespunzător. Această descompunere are forma

$$S = \int_{\sigma(S)} \lambda \mathrm{d} E_{\lambda},$$

unde $\sigma(S)$ $(= \complement \{\lambda \in C \mid (\lambda I - S)^{-1}$ există și $\in \mathfrak{L}(H)\})$ este spectrul lui S, iar E este o măsură spectrală.

Dacă se renunță la condiția de normalitate, atunci o astfel de descompunere nu mai este posibilă în general, nici chiar în spațiile cu un număr finit de dimensiuni. În spațiile cu un număr infinit de dimensiuni, problema devine mai complicată, datorită existenței operatorilor de tip Voltera cu spectrul redus la un punct. Operatorul

$$Tx = \int_0^s x(t)\, \mathrm{d}t$$

nu poate fi întotdeauna descompus în operatori elementari unidimensionali, sau măcar finit dimensionali. Datorită acestor dificultăți, teoria spectrală a operatorilor neautoadjuncți nu a atins gradul de dezvoltare la care a ajuns teoria operatorilor autoadjuncți.

În teoria spectrală a operatorilor neautoadjuncți s-au conturat două direcții de cercetare. O direcție este dezvoltată de către M. S. Livșit și școala sa din Odesa, care studiază operatorii neautoadjuncți pe spații Hilbert (folosind realizarea spațiilor Hilbert sub forma $l^2(I)$ sau $\mathcal{L}^2([a, b])$). În această direcție au fost studiați numai operatori care nu diferă prea mult de operatorii autoadjuncți. Unul din primele rezultate importante în această direcție a fost lucrarea lui M. V. Keldîș [14] asupra completitudinii sistemului de funcții proprii ale operatorului

---

[1]) Disertație pentru obținerea titlului de candidat în științe fizico-matematice, susținută la 19 decembrie 1963.

$$T = T_1 + iT_2 \left[T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*) \right],$$

unde T_1^{-n} are pentru un $n > 0$ o urmă finită, T_1 este autoadjunct iar $T_1^{-1}\, T_2$ este un operator compact.

Un operator $T \in \mathfrak{L}(H)$ (= algebra operatorilor liniari mărginiți pe spațiul Hilbert H) se spune că aparține clasei $(i\Omega)$ dacă partea sa imaginară $T_2 = \dfrac{1}{2i}(T - T^*)$ este un operator compact cu urmă finită. M. S. Livșit ([16], [2], de asemenea [20]) a arătat că orice operator simplu (pentru care nu există nici un subspațiu invariant pe care să fie autoadjunct) din clasa $(i\Omega)$ este unitar echivalent cu un „model triunghiular" (operatorul de înmulțire cu variabila independentă este considerat model triunghiular atunci cînd spațiul H este realizat sub forma $\mathfrak{L}^2([a, b])$). Acest rezultat poate fi considerat ca o generalizare a teoremei de reducere a matricilor la forma triunghiulară cu ajutorul transformărilor unitare.

O altă direcție este cea dezvoltată de către N. Dunford și elevii săi. Întrucît lucrarea noastră se situează pe această a doua direcție, schițăm pe scurt noțiunile și rezultatele mai importante din teoria lui Dunford.

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu Banach, $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ algebra Banach a operatorilor liniari mărginiți pe $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{X}}$ (respectiv $\mathfrak{B}$) algebra booleană a proiectorilor pe $\mathfrak{X}$ (respectiv a mulțimilor boreliene din planul complex C). Un omomorfism $E : \mathfrak{B} \to \mathfrak{Q}_{\mathfrak{X}}$ se numește *măsură spectrală* dacă este mărginit și $E(C) = I$. Deci, o măsură spectrală are următoarele proprietăți :

1) $E(\alpha \cap \beta) = E(\alpha) E(\beta)$;

2) $E(\alpha \cup \beta) = E(\alpha) \vee E(\beta)\ [= E(\alpha) + E(\beta) - E(\alpha) E(\beta)]$;

3) $E(\emptyset) = 0$, $E(C) = I$, $E(\complement_\alpha) = I - E(\alpha)$;

4) $\|E(\alpha)\| \leqslant M$.

Se mai cere ca E să fie numărabil aditivă în topologia tare, adică

5) $E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right) x = \sum_{n=1}^{\infty} E(\alpha_n)\, x \quad (\alpha_n \in \mathfrak{B},\ \alpha_n \cap \alpha_m = \emptyset,\ x \in \mathfrak{X}).$

Un operator $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ se numește *spectral în sensul lui Dunford* (sau simplu *spectral*) dacă :

(i) există o măsură spectrală E astfel încît

$$TE(\alpha) = E(\alpha)\, T, \quad (\alpha \in \mathfrak{B});$$

(ii) $\sigma(T|_{E(\alpha)\mathfrak{X}}) \subset \bar{\alpha}, \quad (\alpha \in \mathfrak{B})$.

Un operator spectral S se numește *de tip scalar* (sau simplu *scalar*) dacă :

$$S = \int_{\sigma(S)} \lambda \mathrm{d} E_\lambda .$$

Un operator $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ se numește cvasinilpotent dacă

$$\| Q^n \|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

sau, echivalent, dacă

$$\sigma(Q) = \{0\}.$$

Dunford a arătat ([3], [4]) că un operator $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ este spectral dacă și numai dacă este de forma

$$T = S + Q,$$

unde S este un operator scalar, iar Q un operator cvasinilpotent care comută cu S. Mai mult, această descompunere este unică.

S se numește *partea scalară* a lui T, iar Q *partea radicală*.

În spațiile cu un număr finit de dimensiuni problema descompunerii spectrale este echivalentă cu reducerea matricilor la forma canonică Jordan. Deci, orice operator liniar într-un spațiu finit dimensional este un operator spectral. Teorema de descompunere spectrală în spații Hilbert arată că orice operator autoadjunct sau normal este spectral.

Teoria operatorilor scalari în spații Hilbert nu aduce nimic nou față de teoria operatorilor autoadjuncți și normali, deoarece operatorii scalari în spații Hilbert sînt asemenea cu operatorii normali. Mai precis, Wermer [25] a arătat că dacă $E, F : \mathfrak{B} \to \mathfrak{P}_H$ (unde H este un spațiu Hilbert) sînt două măsuri spectrale permutabile, atunci există un operator bicontinuu A astfel încît $A^{-1} E(\alpha) A$ și $A^{-1} F(\beta) A$ sînt operatori autoadjuncți, oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}$. Din aceasta a dedus că dacă T_1, $T_2 \in \mathcal{L}(H)$ sînt operatori spectrali permutabili, atunci $T_1 + T_2$ și $T_1 T_2$ sînt de asemenea operatori spectrali, fapt care, în general, nu are loc pentru operatori spectrali într-un spațiu Banach oarecare, cum arată exemplul lui Kakutani [13]. Totuși, Foguel [6] a arătat că suma (respectiv produsul) a doi operatori spectrali este tot un operator spectral dacă și numai dacă suma (respectiv produsul) părților lor scalare este un operator scalar.

Clasa operatorilor spectrali în sensul lui Dunford, deși este destul de largă, totuși nu conține anumiți operatori care au o descompunere spectrală ([15], [26]). Chiar operatorul de înmulțire al unei funcții cu variabila independentă, operator folosit în Mecanica cuantică, nu admite o descompunere spectrală în spațiile de funcții derivabile.

Fie $\Omega \subset R^n$ un deschis și $C^\infty(\Omega)$ spațiul funcțiilor indefinit derivabile pe Ω. Spațiul $C^\infty(\Omega)$ este înzestrat cu topologia local convexă dată de convergența uniformă (a funcțiilor și a tuturor derivatelor lor) pe părțile compacte ale lui Ω. O distribuție vectorială $\mathbf{U} : C^\infty(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ cu suport compact, se numește *distribuție spectrală* [8] dacă este multiplicativă ($\mathbf{U}_{fg} = \mathbf{U}_f \mathbf{U}_g$) și $\mathbf{U}_1 = I$.

Cu ajutorul acestei noțiuni, care generalizează noțiunea de măsură spectrală, C. Foiaș [8] a introdus noțiunea de *operator scalar generalizat*.

Un operator $S \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ se numește scalar generalizat dacă există o distribuție spectrală $\mathbf{U}$, astfel încît

$$\mathbf{U}_{id} = S.$$

Clasa operatorilor scalari generalizați conține clasa operatorilor scalari în sensul lui Dunford. Chiar mai mult, conține clasa operatorilor spectrali în sensul lui Dunford care sînt de tip finit (adică operatorii spectrali Dunford T pentru care operatorul Q din descompunerea canonică $T = S + Q$ este nilpotent: există $n \geqslant 0$ astfel încît $Q^n = 0$). Această proprietate a clasei operatorilor scalari generalizați rezultă din următoarea teoremă a lui Foiaș [9], [11]:

Un operator spectral Dunford este scalar generalizat dacă și numai dacă este de tip finit.

Această clasă (a operatorilor scalari generalizați) mai are proprietatea remarcabilă că sumele și produsele de operatori scalari generalizați regulați (definiția 0.4.4) sînt operatori scalari generalizați, proprietate care, după cum am remarcat mai sus, lipsește clasei operatorilor spectrali Dunford.

Problema găsirii unei clase de operatori care să poată îngloba întreaga clasă a operatorilor spectrali Dunford (nu numai subclasa operatorilor spectrali de tip finit) precum și clasa operatorilor scalari generalizați și care, totuși, să păstreze proprietățile mai importante ale ambelor clase de operatori (în special descompunerea canonică — de la operatorii spectrali Dunford — și proprietatea de a fi închisă față de sumă și produs — de la operatorii scalari generalizați) ne-a condus la noțiunea de operator spectral generalizat.

În introducerea acestei noțiuni ne-am sprijinit pe noțiunea de operator decompozabil introdusă de C. Foiaș [10] cu ajutorul așa-numitelor spații maximal spectrale ale unui operator. Noțiunea de spațiu maximal spectral al unui operator a fost prezentată axiomatic prima dată de către C. Foiaș în [10], deși ea apare sub o formă neprecizată încă la Wolff [26] și Bishop [1], care lucrează cu aceste subspații. Chiar subspațiile $E(\alpha)\mathfrak{X}$ ($\alpha \in B$), unde E este măsura spectrală a unui operator spectral T, sînt spații maximal spectrale ale lui T.

Independent de noi Fumi-Yuki Maeda a introdus și el noțiunea de operator spectral generalizat. Legat de noțiunea de operator spectral generalizat introdusă în [27], am căutat să extindem la această clasă cît mai multe din proprietățile operatorilor spectrali Dunford. Trebuie remarcat că această clasă (a operatorilor spectrali generalizați) conservă o bună parte din proprietățile clasei operatorilor spectrali Dunford.

În capitolul 0 se dau noţiunile şi rezultatele care se folosesc în capitolele următoare. Toate aceste noţiuni şi rezultate se datoresc lui C. Foiaş ([8], [9] şi [10]). În § 1 se dă noţiunea de spaţiu maximal spectral [10]. În § 2 se aminteşte noţiunea de operator decompozabil [10] şi se enunţă proprietăţile mai importante ale acestor operatori, proprietăţi care servesc la demonstrarea mai multor teoreme relative la operatori spectrali generalizaţi. În § 4 sînt expuse proprietăţile mai importante ale operatorilor scalari generalizaţi ([8], [9] şi [10]) şi se dau două exemple de operatori scalari generalizaţi care au mai multe distribuţii spectrale.

În capitolul I se introduce noţiunea de operator spectral generalizat. În § 1 al acestui capitol se demonstrează teorema de descompunere canonică a operatorilor spectrali generalizaţi, rezultat care extinde teorema de descompunere canonică a operatorilor spectrali Dunford la cazul operatorilor spectrali generalizaţi, aceasta din urmă fiind la rîndul său o generalizare a formei jordaniene a operatorilor liniari pe spaţiile finit dimensionale. Faptul că orice operator spectral Dunford este spectral generalizat este o consecinţă a teoremei de descompunere canonică. În § 2 se demonstrează cîteva proprietăţi imediate ale operatorilor spectrali generalizaţi. De exemplu : 1) suma directă a doi operatori spectrali generalizaţi este un operator spectral generalizat ; 2) restricţia unui operator spectral generalizat la un subspaţiu vectorial închis invariant la operator şi la o distribuţie spectrală a sa, este tot un operator spectral generalizat ; 3) imaginea unui operator spectral generalizat printr-un omomorfism continuu este un operator spectral generalizat ; 4) adjunctul unui operator spectral generalizat este spectrul generalizat şi reciproc (dacă spaţiul este reflexiv).

Capitolul II este consacrat relaţiilor ce există între un operator spectral generalizat şi partea sa scalară. Teoremele demonstrate în acest capitol extind o parte din rezultatele lui S. R. Foguel din teza sa de doctorat [7], relative la operatori spectrali Dunford, la cazul operatorilor spectrali generalizaţi.

În § 1 al acestui capitol se arată că dacă $T = S + Q$ este un operator spectral generalizat, iar U o distribuţie spectrală a sa de ordinul n care dă această descompunere canonică, atunci unele proprietăţi ale lui T se transmit şi operatorilor S^{p+1}, Q^{p+1} $(p \geqslant n)$.

În § 2 se demonstrează descompunerea operatorilor scalari (respectiv spectrali) generalizaţi în partea „reală" şi partea „imaginară" ; ambele părţi avînd spectrele reale. Această descompunere este analogul scrierii numerelor complexe sub forma $z = x + iy$. Analogul scrierii numerelor complexe sub forma $z = |z|$ (cos Arg $z + i$ sin Arg z) nu este valabil pentru operatorii scalari (respectiv spectrali) generalizaţi, analog care are loc totuşi pentru operatorii scalari (respectiv spectrali) în sensul lui Dunford. Această lipsă este determinată de faptul că funcţiile Arg f şi $|f|$, din scrierea

$$f = |f| (\cos \operatorname{Arg} f + i \sin \operatorname{Arg} f),$$

nu sînt derivabile în origine.

În capitolul III se studiază anumite proprietăți caracteristice operatorilor care se descompun cu ajutorul distribuțiilor spectrale, proprietăți care au fost demonstrate de către C. Foiaş în [8] pentru cazul operatorilor scalari generalizați şi pe care le extindem la operatori spectrali generalizați. În § 1 se arată că suma şi produsul a doi operatori spectrali generalizați complet regulați (noțiune introdusă în [27]; vezi şi definiția 0.4.4) permutabili este tot un operator spectral generalizat. În § 2 se demonstrează că distribuțiile spectrale ale operatorilor spectrali generalizați complet regulați sînt unic determinate, abstracție făcînd de nilpotenți aditivi.

În § 1 al capitolului IV se arată că rădăcinile de ordinul n $(n \geqslant 1)$ ale unui operator scalar generalizat regulat al cărui spectru nu separă 0 de ∞, sînt operatori scalari generalizați. Folosind un rezultat al lui J. T. Schwartz din teoria perturbațiilor, se extinde teorema precedentă la cazul operatorilor spectrali generalizați.

Cu ajutorul unei teoreme a lui H. G. Tillmann [24], teorema 2) se dă în § 2 al capitolului IV o condiție necesară şi suficientă ca un operator cu spectrul real să fie scalar generalizat. Această condiție necesară şi suficientă se exprimă în funcție de comportarea aplicației rezolvante $\lambda \to (\lambda I - S)^{-1}$ la apropierea lui λ de spectrul $\sigma(S)$ al lui S.

În § 3 al capitolului IV se dă definiția lui Fumi-Yuki Maeda a operatorilor spectrali generalizați şi se arată că este echivalentă cu definiția noastră.

Capitolul IV se încheie cu cîteva exemple de operatori spectrali generalizați care nu sînt nici spectrali în sensul lui Dunford şi nici scalari generalizați.

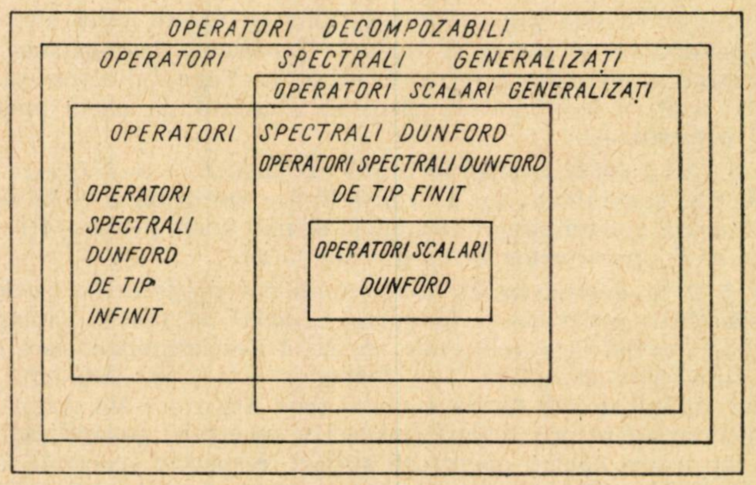

OPERATORI DECOMPOZABILI
OPERATORI SPECTRALI GENERALIZAȚI
OPERATORI SCALARI GENERALIZAȚI
OPERATORI SPECTRALI DUNFORD
OPERATORI SPECTRALI DUNFORD DE TIP FINIT
OPERATORI SPECTRALI DUNFORD DE TIP INFINIT
OPERATORI SCALARI DUNFORD

Fig. 1

Schița din figura de mai sus arată în ce relații se găsesc clasele operatorilor decompozabili, spectrali generalizați, scalari generalizați, spectrali în sensul lui Dunford şi scalari Dunford.

0. PRELIMINARII

§ 1. SPAŢII MAXIMAL SPECTRALE

Fie $\mathscr{X}$ un spaţiu Banach complex şi $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ algebra Banach a operatorilor liniari mărginiţi pe $\mathscr{X}$. Pentru orice $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ notăm cu $\rho(T)$ (respectiv $\sigma(T)$) mulţimea rezolvantă a operatorului T (respectiv spectrul operatorului T). Avem

$$\rho(T) = \{\lambda \in C \mid (\sigma I - T)^{-1} \text{ există şi } \in \mathscr{L}(\mathscr{X})\},$$

$$\sigma(T) = \complement\rho(T).$$

Mulţimea rezolvantă este deschisă, iar spectrul este o mulţime compactă.

Definiţia 0.1.1. Un subspaţiu vectorial închis $\mathscr{Y}$ al lui $\mathscr{X}$ se numeşte *spaţiu maximal spectral* al lui $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, dacă :

(*i*) $\mathscr{Y}$ este invariant la T;

(*ii*) dacă $\mathscr{Z}$ este un alt subspaţiu vectorial închis al lui $\mathscr{X}$, invariant la T astfel încît

$$\sigma(T \mid \mathscr{Z}) \subset \sigma(T \mid \mathscr{Y}),$$

atunci $\mathscr{Z} \subset \mathscr{Y}$.

Teorema 0.1.1. Dacă $\mathscr{Y}$ este un spaţiu maximal spectral al lui $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, iar $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ cu $AT = TA$, atunci $\mathscr{Y}$ este invariant la A.

Consecinţa 1. Dacă $\mathscr{Y}$ este un spaţiu maximal spectral al lui $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, atunci

$$\sigma(T \mid \mathscr{Y}) \subset \sigma(T).$$

Consecinţa 2. Dacă $\mathscr{Y}_1$, $\mathscr{Y}_2$ sînt spaţii maximal spectrale ale lui T, atunci

$$\mathscr{Y}_1 \subset \mathscr{Y}_2 \text{ dacă şi numai dacă } \sigma(T \mid \mathscr{Y}_1) \subset \sigma(T \mid \mathscr{Y}_2).$$

§ 2. OPERATORI DECOMPOZABILI

Definiţia 0.2.1. Un operator $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ se numeşte *decompozabil*, dacă pentru orice acoperire finită deschisă $\{G_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ a lui $\sigma(T)$ există un sistem $\{\mathscr{Y}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de spaţii maximal spectrale ale lui T astfel încît :

(*i*) $\sigma(T \mid \mathscr{Y}_i) \subset \bar{G}_i$, pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n$;

(*ii*) orice $x \in \mathscr{X}$ se poate scrie sub forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} y_i, \text{ cu } y_i \in \mathscr{Y}_i \cdot$$

DEFINIȚIA 0.2.2. Un operator $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ se spune că are *proprietatea prelungirii unice* (single-valued extension property) dacă

$$f : D_f \to \mathfrak{X} \text{ cu } (\lambda I - T) f(\lambda) = x, \quad \lambda \in D_f \supset \rho(T), \quad D_f \text{ deschisă}$$

și

$$g : D_g \to \mathfrak{X} \text{ cu } (\lambda I - T) g(\lambda) = x, \quad \lambda \in D_g \supset \rho(T), \quad D_g \text{ deschisă}$$

atunci

$$f(\lambda) = g(\lambda), \qquad \lambda \in D_f \cap D_g.$$

TEOREMA 0.2.1. *Orice operator decompozabil are proprietatea prelungirii unice.*

Scrierea $f > R(\cdot, T)\, x$ va însemna că f este o prelungire a funcției

$$\lambda \to R(\lambda, T)\, x \; (: \rho(T) \to \mathfrak{X}; \; R(\lambda, T) = (\lambda J - T)^{-1}).$$

Mulțimea deschisă

$$\rho_T(x) = \bigcup_{f > R(\cdot,T)x} D_f$$

se numește *rezolvanta* lui $x \in \mathfrak{X}$ în raport cu T, are proprietatea

$$\rho_T(x) \supset \rho(T)$$

și este domeniul maximal de prelungire al funcției $\lambda \to R(\cdot, T)\, x$.

Mulțimea închisă

$$\sigma_T(x) = \complement \rho_T(x)$$

se numește *spectrul* lui x în raport cu T și are proprietatea

$$\sigma_T(x) \subset \sigma(T).$$

TEOREMA 0.2.2. Pentru orice operator decompozabil T și mulțime închisă $F \subset C$, spațiul liniar

$$\mathfrak{X}_T(F) = \{x \in \mathfrak{X} \mid \sigma_T(x) \subset F\}$$

este un spațiu Banach.

DEFINIȚIA 0.2.3. Spațiul $\mathfrak{X}_T(F)$ se numește *spațiul spectral* al lui T asociat mulțimii închise F.

Observație. Condiția $F \subset \sigma(T)$ din definiția lui $\mathfrak{X}_T(F)$ este justificată de incluziunea $\sigma_T(x) \subset \sigma(T)$, precum și de faptul că dacă F este o submulțime închisă arbitrară a lui C, atunci

$$\mathfrak{X}_T(F) = \mathfrak{X}_T(F \cap \sigma(T)).$$

TEOREMA 0.2.2'. Dacă T este un operator decompozabil, atunci $\mathfrak{X}_T(F)$ este un spațiu maximal spectral al lui T și $\sigma(T \mid_{\mathfrak{X}_T(F)}) \subset F$. Invers, dacă $\mathfrak{Y}$ este un spațiu maximal spectral al lui T, iar T este decompozabil, atunci

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_T(\sigma(T \mid \mathfrak{Y}))$$

adică

$$\mathcal{Y} = \{x \in \mathcal{X} \mid \sigma_T(x) \subset \sigma(T \mid \mathcal{Y})\}.$$

TEOREMA 0.2.3. Dacă T este un operator decompozabil, iar Q un cvasinilpotent cu $TQ = QT$, atunci :

1) $T + Q$ este decompozabil ;

2) $\mathcal{X}_{T+Q}(F) = \mathcal{X}_T(F)$, oricare ar fi $F \subset \sigma(T)$ închisă.

TEOREMA 0.2.4. Dacă T_1, T_2 sînt operatori decompozabili astfel încît

$$T_1 T_2 = T_2 T_1$$

și

$\mathcal{X}_{T_1}(F \cap \sigma(T_1)) = \mathcal{X}_{T_2}(F \cap \sigma(T_2))$, oricare ar fi $F \subset C$ închisă, atunci

$T_1 - T_2$ este un operator cvasinilpotent.

§ 3. DISTRIBUȚII SPECTRALE

Fie $\Omega \subset R^n$ [2] o mulțime deschisă și $C^\infty(\Omega)$ spațiul funcțiilor indefinit derivabile pe Ω. Cînd $\Omega = R^2$, notăm simplu C^∞ în loc de $C^\infty(R^2)$.

Pe $C^\infty(\Omega)$ se consideră topologia convergenței uniforme (a funcțiilor și a tuturor derivatelor lor) pe părțile compacte ale lui Ω.

DEFINIȚIA 0.3.1. Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach cu unitate e. O distribuție vectorială $\mathbf{U} : C^\infty(\Omega) \to \mathcal{A}$ cu suport compact se numește *distribuție spectrală* dacă :

1) $\mathbf{U}_1 = e$;

2) $\mathbf{U}_{fg} = \mathbf{U}_f \mathbf{U}_g$, oricare ar fi $f, g \in C^\infty(\Omega)$.

În cele ce urmează ne vom rezuma la cazul cînd :

$$\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{X}).$$

§ 4. OPERATORI SCALARI GENERALIZAȚI

DEFINIȚIA 0.4.1 Un operator $S \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ se numește *scalar generalizat*, dacă există o distribuție spectrală $\mathbf{U}$ astfel încît :

$$\mathbf{U}_{id} = S, \quad (id : \lambda \to \lambda).$$

În acest caz se spune că $\mathbf{U}$ este o distribuție spectrală a lui S.

TEOREMA 0.4.1. (i) Dacă $\mathbf{U}$ este o distribuție spectrală și $f \in C^\infty$, atunci $\mathbf{U}_f$ este un operator scalar generalizat și

$$\sigma(\mathbf{U}_f) \subset f(\mathcal{S}(\mathbf{U}))\ {}^{3)}.$$

(ii) Dacă S este un operator scalar generalizat și $\mathbf{U}$ o distribuție spectrală a sa, atunci

---

[2] De obicei se consideră cazul $\Omega = R^2$ și atunci R^2 se identifică cu corpul C al numerelor complexe.

[3] $\mathcal{S}(\mathbf{U})$ = suportul lui $\mathbf{U}$.

$$\sigma(S) = \mathcal{S}(\mathbf{U}).$$

TEOREMA 0.4.2. Orice operator scalar generalizat are proprietatea prelungirii unice.

TEOREMA 0.4.3. Dacă S este un operator scalar generalizat și $\mathbf{U}$ o distribuție spectrală a sa, atunci :

$$\sigma_S(\mathbf{U}_f\, x) \subset \mathcal{S}(f)\,^{4)}, \text{ oricare ar fi } f \in C^\infty \text{ și } x \in \mathfrak{X}.$$

TEOREMA 0.4.4. Fie S un operator scalar generalizat și $\mathbf{U}$ o distribuție spectrală a sa. Dacă $\sigma_T(x) \cap \mathcal{S}(f) = \emptyset$, atunci $\mathbf{U}_f = 0$.

DEFINIȚIA 0.4.3. Fie S un operator scalar generalizat și $\mathbf{U}$ o distribuție spectrală a sa, $G \subset C$ o mulțime deschisă, iar $F \subset C$ o mulțime închisă. Notăm cu $\mathfrak{X}_{\mathbf{U}}(G)$ cel mai mic spațiu vectorial închis generat de mulțimea

$$\bigcup_{\substack{f\in C^\infty \\ \mathcal{S}(f)\subset G}} \mathbf{U}_f \mathfrak{X} = \{\mathbf{U}_f\, x \mid x\in\mathfrak{X},\ f \in C^\infty,\ \mathcal{S}(f)\subset G\}$$

și

$$\mathfrak{X}_S(F) = \bigcap_{G\supset F} \mathfrak{X}_{\mathbf{U}}(G).$$

TEOREMA 0.4.5. $\mathfrak{X}_S(F)$ este un spațiu Banach cu proprietățile :

1) $S\mathfrak{X}_S(F) \subset \mathfrak{X}_S(F)$;

2) $\mathbf{U}_f \mathfrak{X}_S(F) \subset \mathfrak{X}_S(F)$, oricare ar fi $f \in C^\infty$;

3) $A\mathfrak{X}_S(F) \subset \mathfrak{X}_S(F)$, oricare ar fi $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ cu $AT = TA$;

4) $\mathfrak{X}_S(F) = \{x \in \mathfrak{X} \mid \sigma_S(x) \subset F\}$

5) $F_1 \subset F_2$ implică $\mathfrak{X}_S(F_1) \subset \mathfrak{X}_S(F_2)$;

6) $\sigma(S \mid \mathfrak{X}_S(F)) \subset F \cap \sigma(S)$.

Pentru $\mathfrak{X}_{\mathbf{U}}(G)$ proprietatea 5) se păstrează, iar proprietatea 6) devine

$$G \cap \sigma(S) \subset \sigma(S\,|_{\mathfrak{X}_{\mathbf{U}}(G)}) = \bar{G} \cap \sigma(S).$$

Din 4) rezultă că spațiile $\mathfrak{X}_S(F)$ nu depind de distribuția spectrală a lui S ci numai de S.

DEFINIȚIA 0.4.4. O distribuție spectrală $\mathbf{U}$ se numește *regulată* (respectiv *complet regulată*) dacă din

$$A\mathbf{U}_{id} = \mathbf{U}_{id}\, A$$

(respectiv

$A\mathfrak{X}_{\mathbf{U}_{id}}(F) \subset \mathfrak{X}_{\mathbf{U}_{id}}(F)$, oricare ar fi $F \subset \Omega$ închisă) cu $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, rezultă

$$A\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_f\, A \text{ oricare ar fi } f \in C^\infty(\Omega).$$

Un operator scalar generalizat se numește *regulat* (respectiv *complet regulat*) dacă are o distribuție spectrală regulată (respectiv complet regulată).

---

[4] $\mathcal{S}(f)$ = suportul lui f.

Observație. Din faptul că spațiile spectrale $\mathfrak{X}_S(F)$ ale unui operator scalar generalizat S sînt invariante la orice operator permutabil cu S (teorema 0.4.5, proprietatea 3)) rezultă că orice operator complet regulat este regulat.

TEOREMA 0.4.6. Distribuțiile spectrale ale unui operator scalar generalizat regulat sînt unic determinate, abstracție făcînd de nilpotenți aditivi.

Fie S un operator scalar generalizat și $\mathbf{U}$ o distribuție spectrală a sa. Se poate construi o distribuție spectrală $\mathbf{V}$ a lui S diferită de $\mathbf{U}$. Fie N un operator nilpotent, de exemplu $N^{m+1} = 0$, cu

$$\mathbf{U}_f N = N \mathbf{U}_f, \text{ oricare ar fi } f \in C^{\infty}.$$

Atunci

$$\mathbf{V}_f = \mathbf{U}_f + \sum_{k=1}^{m} \frac{N^k}{k!} \mathbf{U}_{D^k f},$$

unde $D = \dfrac{\partial}{\partial \operatorname{Re} \lambda} + i \dfrac{\partial}{\partial \operatorname{Im} \lambda}$ este o distribuție spectrală a lui S. Într-adevăr, funcția *id* fiind olomorfă în orice disc, este, în particular, olomorfă într-o vecinătate a lui $\sigma(S) = \mathfrak{S}(\mathbf{U})$ (teorema 0.4.1, punctul (ii)), prin urmare avem $D_{id} = 0$ într-o vecinătate a lui $\mathfrak{S}(\mathbf{U})$, de unde $\mathbf{V}_{id} = \mathbf{U}_{id} = S$.

Acest exemplu este dat de Fumi-Yuki Maeda [12]. Următorul exemplu a fost sugerat de către Laurent Schwartz lui Ciprian Foiaș [7].

Fie $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ cu $A^2 = 0$ și δ_1 distribuția $f \to f(1)$. Atunci

$$\mathbf{U}_A = I \otimes \delta_1 + \frac{1}{2} A \otimes D\delta_1$$

este o distribuție spectrală a operatorului identic I. Deci operatorul I are cel puțin atîtea distribuții spectrale cîți operatori $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ există cu proprietatea $A^2 = 0$.

Din aceste exemple se vede că un operator scalar generalizat S poate avea distribuții spectrale diferite și care nu permută neapărat cu orice operator permutabil cu S.

TEOREMA 0.4.7. Suma și produsul a doi (deci și a oricărui număr finit de) operatori scalari generalizați regulați permutabili, sînt operatori scalari generalizați.

TEOREMA 0.4.8. Un operator spectral $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ în sensul lui Dunford este scalar generalizat dacă și numai dacă este de tip finit (adică dacă $T = S + N$, unde S este un operator scalar în sensul lui Dunford, iar N un nilpotent permutabil cu S).

În [8], C. Foiaș a arătat numai că orice operator spectral de tip finit este scalar generalizat (chiar regulat). Implicația inversă a demonstrat-o ulterior în [9] și [11].

I. OPERATORI SPECTRALI GENERALIZAȚI

§ 1. DESCOMPUNEREA CANONICĂ A OPERATORILOR SPECTRALI GENERALIZAȚI

DEFINIȚIA I.1.1. *Un operator* $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ *se numește spectral generalizat dacă* :

(i) T *este decompozabil* (definiția 0.2.1);

(ii) *există o distribuție spectrală* $\mathbf{U}$ *astfel încît*

$$T\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_f T, \text{ oricare ar fi } f \in C^\infty;$$

(iii) *pentru orice mulțime închisă* $F \subset C$,

$$\mathfrak{X}_T(F) = \mathfrak{X}_{\mathbf{U}_{id}}(F).$$

În acest caz se spune că $\mathbf{U}$ este o distribuție spectrală a lui T.

Următoarea teoremă dă structura operatorilor spectrali generalizați și constituie generalizarea teoremei de descompunere canonică a operatorilor spectrali în sensul lui Dunford ([3], teorema 8, [4], pag. 227—229). Teorema lui Dunford fiind la rîndul său o generalizare a formei jordaniene a operatorilor liniari pe spațiile de dimensiune finită.

TEOREMA I.1.1. (*Teorema de descompunere canonică*). *Un operator* $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ *este spectral generalizat dacă și numai dacă*

$$T = S + Q,$$

unde S *este un operator scalar generalizat, iar* Q *un operator cvasinilpotent care comută cu* $\mathbf{U}$.

Pentru demonstrarea acestei teoreme avem nevoie de următoarele leme relative la operatori scalari generalizați, ultima avînd și un interes în sine.

LEMA I.1.1. *Dacă* S *este un operator scalar generalizat, atunci*

$$\mathfrak{X}_S[\sigma(S\,|\,_{\mathfrak{X}_S(F)})] \subset \mathfrak{X}_S(F)$$

Demonstrație. Avem (conform teoremei 0.4.5, punctul 6)) relația

$$\sigma(S\,|\,_{\mathfrak{X}_S(F)}) \subset F \cap \sigma(S) \subset F,$$

de unde, aplicînd teorema 0.4.5, punctul 5), rezultă

$$\mathfrak{X}_S[\sigma(S\,|\,_{\mathfrak{X}_S(F)})] \subset \mathfrak{X}_S(F).$$

LEMA I.1.2. *Dacă* $S \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ *este un operator scalar generalizat, atunci spațiile* $\mathfrak{X}_S(F)$ *din definiția* 0.4.3 *sînt spații maximal spectrale.*

Demonstrație. Punctul (i) al definiției spațiului maximal spectral rezultă din teorema 0.4.5, punctul 1).

Pentru demonstrarea punctului (ii), fie $\mathfrak{Y}$ un alt subspațiu vectorial închis al lui $\mathfrak{X}$ invariant la S, astfel încît

$$\sigma(S|_{\mathfrak{Y}}) \subset \sigma(S|_{\mathfrak{X}_S(F)}) \qquad \text{(I.1.1)}$$

și să arătăm că

$$\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X}_S(F).$$

Din (I.1.1) și din teorema 0.4.5, punctul 6) rezultă

$$\sigma(S|_{\mathfrak{Y}}) \subset \sigma(S),$$

de unde

$$\rho(S|_{\mathfrak{Y}}) \supset \rho(S).$$

Din această incluziune și din faptul că pentru orice $\lambda \in \rho(S|_{\mathfrak{Y}})$ și orice $x \in \mathfrak{Y}$, avem relația

$$(\lambda I - S)\,(\lambda I|_{\mathfrak{Y}} - S|_{\mathfrak{Y}})^{-1}\, x \equiv x,$$

rezultă că aplicația $\lambda \to (\lambda I|_{\mathfrak{Y}} - S|_{\mathfrak{Y}})^{-1} x$ (de la $\rho\,(S|_{\mathfrak{Y}})$ la $\mathfrak{X}$) este o prelungire a lui $\lambda \to R(\lambda, S)\,x$.

Deci

$$\rho_S(x) \supset \rho(S|_{\mathfrak{Y}}),$$

însă (conform (I.1.1))

$$\rho(S|_{\mathfrak{Y}}) \supset \rho(S|_{\mathfrak{X}_S(F)}),$$

prin urmare

$$\rho_S(x) \supset \rho(S|_{\mathfrak{X}_S(F)}),$$

de unde

$$\sigma_S(x) \subset \sigma(S|_{\mathfrak{X}_S(F)}).$$

Ținînd seama de definiția 0.4.3 și de lema I.1.1, rezultă

$$x \in \mathfrak{X}_S\,[\sigma(S|_{\mathfrak{X}_S(F)})] \subset \mathfrak{X}_S(F),$$

oricare ar fi $x \in \mathfrak{Y}$, deci $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X}_S(F)$.

LEMA I.1.3. *Orice operator scalar generalizat este decompozabil.*

Demonstrație. Fie $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ un operator scalar generalizat, $\mathfrak{U}$ o distribuție spectrală a sa și $\{G_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o acoperire deschisă finită a lui $\sigma(S)$. Să notăm

$$\mathfrak{Y}_i = \mathfrak{X}_S(G_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

$\mathfrak{Y}_i$ este un spațiu maximal spectral al lui S (conform lemei precedente).

Avem

$$\sigma(S|_{\mathfrak{Y}_i}) = \sigma(S|_{\mathfrak{X}_S(\overline{G}_i)}) \subset \overline{G}_i \cap \sigma(S) \subset G_i$$

și deci punctul (i) din definiția operatorilor decompozabili este demonstrat.

Notînd $G_0 = \rho(S)$, rezultă că $\{G_0, G_1, \ldots, G_n\}$ este o acoperire deschisă finită a planului complex. Fie $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o partiție a unității subordonată acestei acoperiri.

Avem

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i,$$

$$\mathfrak{S}(\varphi_i) \subset G_i.$$

Atunci

$$x = Ix = \mathbf{U}_1 x = \mathbf{U} x = U_{\varphi_0} x + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{U}_{\varphi_i} x, \tag{I.1.2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_i$$

oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$.

Observăm că

$$\mathfrak{S}(\varphi_0) \cap \mathfrak{S}(\mathbf{U}) = \emptyset,$$

căci

$$\mathfrak{S}(\varphi_0) \subset G_0 = \rho(S)$$

și (conform teoremei 0.4.1, punctul (ii))

$$\mathfrak{S}(\mathbf{U}) = \sigma(S)$$

deci

$$\mathbf{U}_{\varphi_0} = 0. \tag{I.1.3}$$

Notînd

$$y_i = \mathbf{U}_{\varphi_i} x \tag{I.1.4}$$

și ținînd seama de teorema 0.4.3, deducem

$$\sigma_S(y_i) = \sigma_S(\mathbf{U}_{\varphi_i} x) \subset \mathfrak{S}(\varphi_i) \subset G_i \subset \overline{G}_i,$$

de unde, în baza definiției 0.4.3, rezultă

$$y_i \in \mathfrak{X}_S(\overline{G}_i) = \mathfrak{Y}_i. \tag{I.1.5}$$

Pe de altă parte, din (I.1.2), (I.1.3) și (I.1.4) rezultă

$$x = \sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{I.1.6}$$

Relațiile (I.1.6) și (I.1.5) demonstrează punctul (ii) al definiției operatorilor decompozabili.

CONSECINȚĂ. *Pentru orice operator scalar generalizat $S \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ și orice mulțime închisă $F \subset C$, avem*

$$\mathfrak{X}_S[\sigma(S|_{\mathfrak{X}_S(F)})] = \mathfrak{X}_S(F)$$

Aceasta rezultă din lema precedentă și din teorema 0.2.2 (reciproca).

Cu aceste elemente pregătitoare putem trece la demonstrarea teoremei de descompunere canonică, descompunere pe care se bazează majoritatea rezultatelor din paragrafele următoare.

Demonstrația teoremei I.1.1. (*teorema de descompunere canonică*). Presupunem că $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ este un operator spectral generalizat și fie $\mathbf{U}$ o distribuție spectrală a sa. Vom arăta că T se poate scrie sub forma

$$T = S + Q,$$

unde S este un operator scalar generalizat, iar Q un cvasinilpotent care comută cu $\mathbf{U}$.

Pentru orice $f \in C^{\infty}$, operatorul $\mathbf{U}_f$ este scalar generalizat (teorema 0.4.1, punctul (i)), în particular, operatorul $\mathbf{U}_{id}$ este scalar generalizat. Punem

$$S = \mathbf{U}_{id}.$$

Operatorii S și T sînt decompozabili; primul fiind scalar generalizat (conform lemei 3), al doilea prin ipoteză.

Din definiția I.1.1, punctul (ii), pentru $f = id$, obținem

$$TS = ST,$$

iar din (ii) (aceeași definiție), rezultă

$$\mathfrak{X}_T(F) = \mathfrak{X}_S(F)$$

oricare ar fi $F \subset C$ închisă.

Putem, deci, aplica teorema 0.2.4 (ținînd seama și de observația relativă la definiția 0.2.3) operatorilor decompozabili T, S și obținem că $T - S$ este un operator cvasinilpotent.

Punem

$$Q = T - S.$$

Avem

$$S\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_{id}\,\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_{id\,f} = \mathbf{U}_{f\,id} = \mathbf{U}_f\,\mathbf{U}_{id} = \mathbf{U}_f\,S$$

și

$$T\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_f T,$$

deci

$$Q\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_f Q,$$

oricare ar fi $f \in C^{\infty}$.

Așadar

$$T = S + Q,$$

unde S este un operator scalar generalizat, iar Q un operator cvasinilpotent care comută cu $\mathbf{U}$.

Reciproc, să presupunem că

$$T = S + Q,$$

unde S este un operator scalar generalizat și fie $\mathbf{U}$ o distribuție spectrală a sa (a lui S), iar Q un operator cvasinilpotent care comută cu $\mathbf{U}$.

Operatorul S fiind scalar generalizat, este decompozabil (lema I.1.3). Q este un operator evasinilpotent care comută cu S, căci

$$Q\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_f Q, \text{ oricare ar fi } f \in C^\infty,$$

deci, în particular pentru $f = id$, avem

$$QS = SQ$$

Putem, deci, aplica teorema 0.2.3 operatorilor S, Q şi obţinem că

$$S + Q \text{ este decompozabil}$$

şi

$$\mathfrak{X}_{S+Q}(F) = \mathfrak{X}_S(F),$$

oricare ar fi $F \subset C$ închisă.

Deci

$$\text{(i) } T = S + Q \text{ este decompozabil.}$$

Din

$$S\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_f S$$

(căci $\mathbf{U}$ este distribuţie spectrală a lui S) şi din

$$Q\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_f Q \text{ (prin ipoteză),}$$

rezultă

$$\text{(ii) } T\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_f T, \text{ oricare ar fi } f \in C^\infty.$$

Avem şi

$$\text{(iii) } \mathfrak{X}_T(F) = \mathfrak{X}_{S+Q}(F) = \mathfrak{X}_S(F) = \mathfrak{X}_{\mathbf{U}_{id}}(F),$$

oricare ar fi mulţimea închisă $F \subset C$.

Aşadar

$$T = S + Q$$

este un operator spectral generalizat.

Observăm că operatorii T şi S din teorema I.1.1 au cel puţin o aceeaşi distribuţie spectrală.

Luînd în teorema precedentă $Q = 0$, obţinem imediat,

CONSECINŢA 1. *Orice operator scalar generalizat este spectral generalizat.*

CONSECINŢA 2. *Orice operator spectral în sensul lui Dunford este spectral generalizat.*

Demonstraţie. Presupunem că $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ este un operator spectral în sensul lui Dunford şi fie E măsura sa spectrală; atunci ([3], teorema 8, [4], pag. 227–229)

$$T = S + Q,$$

unde

$$S = \int_{\sigma(T)} \lambda \mathrm{d}E(\lambda)$$

este partea scalară a lui T, iar

$$Q = T - S$$

este un cvasinilpotent care comută cu S.

Aplicația

$$\mathbf{U} : f \to \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\mathrm{d}E(\lambda),$$

de la C^∞ la $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$, este o distribuție spectrală astfel încît $\mathbf{U} = S$. Deci S este un operator scalar generalizat.

Operatorul Q comutînd cu S, comută și cu $T = S + Q$, deci ([3], teorema 5) comută cu măsura spectrală E, prin urmare comută cu distribuția spectrală $\mathbf{U}$. Aplicînd acum teorema de descompunere canonică a operatorilor spectrali generalizați (reciproca), rezultă că T este un operator spectral generalizat.

Din această consecință și din teorema 0.4.8 se vede că clasa operatorilor spectrali generalizați conține clasa operatorilor spectrali în sensul lui Dunford, pe cînd clasa operatorilor scalari generalizați cuprinde numai o parte din clasa operatorilor spectrali, anume operatorii spectrali de tip finit ([9], [11]).

§ 2. CÎTEVA PROPRIETĂȚI IMEDIATE ALE OPERATORILOR SPECTRALI GENERALIZAȚI

PROPOZIȚIA I.2.1. *Suma directă a doi operatori spectrali generalizați este un operator spectral generalizat.*

Demonstrație. Fie $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X}_i)$ $(i = 1, 2)$ un operator spectral generalizat, U^i o distribuție spectrală a sa și $T_i = S_i + Q_i$ descompunerea canonică dată de această distribuție spectrală. Vom arăta că $T_1 \oplus$ $\oplus$ $T_2 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2)$ este un operator spectral generalizat.

Aplicația

$$f \to \mathbf{U}^1_f \oplus \mathbf{U}^2_f$$

este o distribuție spectrală, astfel încît

$$\mathbf{U}^1_{id} \oplus \mathbf{U}^2_{id} = S_1 \oplus S_2.$$

Deci $S_1 \oplus S_2$ este un operator scalar generalizat.

Ținînd seama de faptul că

$$Q_i Q_j = 0, \quad (i, j = 1, 2 \ i \neq j)$$

rezultă că

$$(Q_1 \oplus Q_2)^n = Q_1^n \oplus Q_2^n,$$

de unde

$$\| (Q_1 + Q_2)^n \|^{\frac{1}{n}} = \| Q_1^n \oplus Q_2^n \|^{\frac{1}{n}} = (\| Q_1^n \| + \| Q_2^n \|)^{\frac{1}{n}} \leqslant \| Q_1^n \|^{\frac{1}{n}} + \| Q_2^n \|^{\frac{1}{n}},$$

deci

$$\| (Q_1 \oplus Q_2)^n \|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(căci $\| Q_i^n \|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$), prin urmare $Q_1 \oplus Q_2$ este un operator cvasinilpotent.

Din

$$Q_i \mathbf{U}_f^j = 0, \ (i, j = 1, 2\,;\ i \neq j),$$

rezultă că

$$(Q_1 \oplus Q_2)(\mathbf{U}_f^1 \oplus \mathbf{U}_f^2) = (\mathbf{U}_f^1 \oplus \mathbf{U}_f^2)(Q_1 \oplus Q_2),$$

oricare ar fi $f \in C^\infty$.

Deci

$$T_1 \oplus T_2 = (S_1 \oplus S_2) + (Q_1 \oplus Q_2)$$

este un operator spectral generalizat (conform teoremei de descompunere canonică).

PROPOZIȚIA I.2.2. *Restricția unui operator spectral generalizat la un subspațiu vectorial închis invariant la operator și la o distribuție spectrală a sa, este un operator spectral generalizat.*

Demonstrație. Fie $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ un operator spectral generalizat, U o distribuție spectrală a sa, $T = S + Q$ descompunerea canonică dată de această distribuție și $\mathfrak{X}_1$ un subspațiu vectorial închis al lui $\mathfrak{X}$, astfel încît

$$T\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}_1 \tag{I.2.1}$$

și

$$\mathbf{U}_f \mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}_1, \text{ oricare ar fi } f \in C^\infty. \tag{I.2.2}$$

Din ultima incluziune rezultă că $\mathbf{U}^1 = \mathbf{U}|\mathfrak{X}_1$ este o distribuție spectrală cu proprietatea

$$\mathbf{U}_{id}^1 = S_1\ (= S|\mathfrak{X}_1).$$

$Q_1 = Q|\mathfrak{X}_1$ este cvasinilpotent pe $\mathfrak{X}_1$, deoarece Q este cvasinilpotent pe $\mathfrak{X}$, $Q\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}_1$ (conform (I.2.1) și (I.2.2) pentru $f = id$) și

$$\| Q_1^n \|^{\frac{1}{n}} = (\sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \in \mathfrak{X}_1}} \| Q_1^n x \|)^{\frac{1}{n}} = (\sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \in \mathfrak{X}_1}} \| Q^n x \|)^{\frac{1}{n}} \leqslant$$

$$\leqslant (\sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \in \mathfrak{X}}} \| Q^n x \|)^{\frac{1}{n}} = \|Q^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Evident, Q_1 comută cu $\mathbf{U}^1$. Deci

$$T_1 = T|\mathfrak{X}_1 = S_1 + Q_1$$

este un operator spectral generalizat.

PROPOZIŢIA I.2.3. *Dacă* $\mathfrak{X}$ *și* $\mathfrak{Y}$ *sînt spații Banach,* T *un operator spectral generalizat pe* $\mathfrak{X}$ *și* $h : \mathfrak{L}(\mathfrak{X}) \to \mathfrak{L}(\mathfrak{Y})$ *un omomorfism continuu, atunci* $h(T)$ *este un operator spectral generalizat pe* $\mathfrak{Y}$.

Demonstrație. T fiind spectral generalizat se poate scrie sub forma $T = S + Q$, unde S este un operator scalar generalizat, iar Q un operator cvasinilpotent care comută cu $\mathbf{U}$ (distribuția spectrală a lui T care dă această descompunere canonică).

Avem

$$h(T) = h(S) + h(Q),$$

$h(S)$ fiind scalar generalizat ([11], lema 2, (iii)). Din faptul că h este omomorfism continuu, rezultă

$$\| h(Q)^n \|^{\frac{1}{n}} = \| h(Q^n) \|^{\frac{1}{n}} \leqslant \| h \|^{\frac{1}{n}} \cdot \| Q^n \|^{\frac{1}{n}},$$

de unde obținem că $h(Q)$ este un operator cvasinilpotent. Comutativitatea lui $h(Q)$ cu distribuția spectrală a lui $h(S)$ rezultă din comutativitatea lui Q cu distribuția $\mathbf{U}$ a lui S și din faptul că h este un omomorfism.

PROPOZIŢIA I.2.4. *Dacă* T *este un operator spectral generalizat pe* $\mathfrak{X}$, $\mathbf{U}$ *o distribuție spectrală a sa și* $\mathfrak{X}_1$ *un subspațiu vectorial închis al lui* $\mathfrak{X}$ *invariant la* T *și* U, *atunci* $\dot{T}$ $(\dot{T}\dot{x} = \widehat{Tx})$ *este spectral generalizat pe* $\dot{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$.

Aceasta este o consecință imediată a propoziției I.2.3.

PROPOZIŢIA 1.2.5. *Dacă* $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ *este spectral generalizat, atunci adjunctul său* $T^\star \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X}^\star)$ *este de asemenea spectral generalizat. Reciproc, dacă* $T^\star$ *este spectral generalizat și spațiul* $\mathfrak{X}$ *este reflexiv, atunci* T *este spectral generalizat.*

Demonstrație. Fie $\mathbf{U}$ o distribuție spectrală a lui T și $T = S + Q$ descompunerea dată de această distribuție spectrală.

Avem

$$T^\star = S^\star + Q^\star.$$

$S^\star$ este scalar generalizat și $\mathbf{U}^\star : f \to (\mathbf{U}_f)^\star$ (de la C^∞ la $\mathfrak{L}(\mathfrak{X}^\star)$) este o distribuție spectrală a sa.

Se știe că

$$(A^n)^\star = (A^\star)^n$$

deci

$$\| (Q^\star)^n \|^{\frac{1}{n}} = \| (Q^n)^\star \|^{\frac{1}{n}} = \| Q^n \|^{\frac{1}{n}}$$

prin urmare $Q^\star$ este cvasinilpotent o dată cu Q. Pe de altă parte

$$Q^\star \mathbf{U}_f^\star = (\mathbf{U}_f Q)^\star = (Q\mathbf{U}_f)^\star = \mathbf{U}_f^\star Q^\star.$$

Așadar $T^\star = S^\star + Q^\star$ este un operator spectral generalizat.

Reciproc, dacă $T^\star$ este spectral generalizat, atunci, conform primei părți a acestei propoziții, $T^{\star\star}$ este spectral generalizat, $\mathfrak{X}$ fiind reflexiv, avem $T^{\star\star} = T$, deci T este un operator spectral generalizat.

II. RELAȚII ÎNTRE UN OPERATOR SPECTRAL GENERALIZAT ȘI PARTEA SA SCALARĂ

§ 1. RELAȚII ÎNTRE $T = S + Q$ ȘI S, Q

Fie $\Omega \subset R^n$ o mulțime deschisă astfel ca $0 \in \Omega$ și $C^p(\Omega)$ spațiul funcțiilor complexe definite pe Ω de p ori derivabile și cu derivate continue, înzestrat cu topologia convergenței uniforme pe părțile compacte ale lui Ω. Notăm

$$C_0^p(\Omega) = \{f \in C^p(\Omega) \mid f^{(i)}(0) = 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant p\}$$

Lema II.1.1. *Orice funcție $f \in C_0^p(\Omega)$ poate fi aproximată uniform împreună cu derivatele sale de ordin $\leqslant p$ pe fiecare compact $k \subset \Omega$ prin funcții $g \in C^p(\Omega)$ cu $\mathcal{S}(g) \not\ni 0$.*

Demonstrație. Să notăm cu

$$\mathcal{A}_0^p(\Omega) = \{f \in C^p(\Omega) \mid \mathcal{S}(f) \not\ni 0\}.$$

Demonstrarea lemei se reduce la demonstrarea faptului că $\mathcal{A}_0^p(\Omega)$ este dens în raport cu $C_0^p(\Omega)$, adică

$$C_0^p(\Omega) \subset \overline{\mathcal{A}_0^p(\Omega)}.$$

Presupunem, prin absurd, că această incluziune nu are loc; atunci există o funcție $f_0 \in C_0^p(\Omega)$ astfel încît

$$\rho(f, \mathcal{A}_0^p(\Omega)) = d > 0$$

(d fiind distanța de la f_0 la $\mathcal{A}_0^p(\Omega)$).

Conform unei consecințe a teoremei lui Hahn-Banach rezultă existența unei funcționale liniare continue pe $C^p(\Omega)$, adică a unei distribuții scalare $\mathbf{U}_0$, cu proprietățile:

1) $\mathbf{U}_0(f_0) = d > 0$;

2) $\mathbf{U}_0(f) = 0$, oricare ar fi $f \in \mathcal{A}_0^p(\Omega)$.

Din aceste două proprietăți ale distribuției U, rezultă că

$$\mathcal{S}(\mathbf{U}_0) = \{0\}.$$

Însă orice distribuție al cărei suport este redus la origine are forma

$$\mathbf{U}_0 = \sum_{k=(k_1+\ldots+k_n)} a_k\, \delta^{(k)}\ ^{5)}$$

și cum $\mathbf{U}_0$ este de ordin $\leqslant p$, avem

$$|k| = k_1 + \ldots + k_n \leqslant p,$$

---

5) δ este distribuția lui Dirac și este dată prin relația

$$f \to f(0).$$

aşa că

$$\mathbf{U}_0(f) = \sum_k a_k\, \delta^{(k)} f = \sum_k (-1)^k a_k f^{(k)}(0) = 0,$$

ceea ce contrazice proprietatea 1) a lui U_0. Contradicţia a provenit din ipoteza absurdă că $\mathcal{A}_0^p(\Omega)$ n-ar fi dens în $C_0^p(\Omega)$, deci $\mathcal{A}_0^p(\Omega)$ este dens în $C_0^p(\Omega)$ şi lema este demonstrată.

TEOREMA II.1.1. *Fie $\mathcal{J} \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ un ideal la stînga (la dreapta, bilateral) uniform închis. Dacă $T \in \mathcal{J}$ este un operator spectral generalizat, iar* $\mathbf{U}$ *o distribuţie spectrală de ordinul n a lui T, atunci*

$$\mathbf{U}_f \in \mathcal{J}, \textit{ oricare ar fi } f \in C_0^p(\Omega) \quad (p \geqslant n).$$

Demonstraţie. Vom arăta mai întîi că

$$\mathbf{U}_g \in \mathcal{J}, \text{ oricare ar fi } g \in \mathcal{A}_0^p(\Omega) \quad (p \geqslant n).$$

Fie $g \in \mathcal{A}_0^p(\Omega)$; atunci există o vecinătate V a originii, astfel încît

$$g(\lambda) = 0, \text{ oricare ar fi } \lambda \in V$$

deci

$$\mathfrak{S}(g) \subset \Omega - V.$$

Fie $T = S + Q$ descompunerea canonică a lui T dată de distribuţia $\mathbf{U}$. Atunci din relaţia

$$\sigma(\mathbf{U}_g x) \subset \mathfrak{S}(g), \text{ oricare ar fi } x \in \mathfrak{X}$$

(teorema 0.4.3) şi din teorema 0.4.5 punctul 4)), rezultă

$$\mathbf{U}_g\, x \in \mathfrak{X}_S(\mathfrak{S}(g)) = \mathfrak{X}_T(\mathfrak{S}(g)) \text{ oricare ar fi } x \in \mathfrak{X},$$

de unde

$$\mathbf{U}_g\, \mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_T(\mathfrak{S}(g)).$$

Din

$$0 \notin \mathfrak{S}(g)$$

şi din

$$\sigma(T|_{\mathfrak{X}_T(\mathfrak{S}(g))}) \subset \mathfrak{S}(g)$$

(teorema 0.2.2), rezultă

$$0 \notin \sigma(T|_{\mathfrak{X}_T(\mathfrak{S}(g))}),$$

deci $(T|_{\mathfrak{X}_T(\mathfrak{S}(g))})^{-1}$ există şi este mărginit pe $\mathfrak{X}_T(\mathfrak{S}(g))$.

Punînd

$$P_g = (T|_{\mathfrak{X}_T(\mathfrak{S}(g))})^{-1}\mathbf{U}_g,$$

avem

$$P_g \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X}).$$

Din

$$P_g T = (T|_{\mathfrak{X}_T(\mathfrak{S}(g))})^{-1}\, \mathbf{U}_g T = (T|_{\mathfrak{X}_T(\mathfrak{S}(g))})^{-1}\, T\mathbf{U}_g = \mathbf{U}_g$$

(respectiv

$$TP_g = T(T|_{\mathfrak{X}_T(\mathfrak{S}(g))})^{-1}\, \mathbf{U}_g = \mathbf{U}_g)$$

rezultă că

$$\mathbf{U}_g \in \mathfrak{J}.$$

Aplicînd acum lema precedentă și ținînd seama de continuitatea distribuției spectrale $\mathbf{U}$ precum și de faptul că $\mathbf{U}$ este uniform închis, rezultă că

$$\mathbf{U}_f \in \mathfrak{J}, \text{ oricare ar fi } f \in C_0^p(\Omega)\ (p \geqslant h).$$

TEOREMA II.1.2. *Fie* $\mathfrak{J} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ *un ideal la stînga (la dreapta, bilateral) uniform închis. Dacă* $T \in \mathfrak{J}$ *este un operator spectral generalizat,* $\mathbf{U}$ *o distribuție spectrală a sa de ordinul* n, *iar* $T = S + Q$ *descompunerea canonică dată de această distribuție, atunci :*

1) $S^{p+1} \in \mathfrak{J}$

și

2) $Q^{p+1} \in \mathfrak{J}$,

oricare ar fi $p \geqslant n$.

Demonstrație. Funcția $(id)^{p+1} : \lambda \to \lambda^{p+1}$ $(p \geqslant n)$ aparținînd lui $C_0^p(\Omega)$, rezultă

$$S^{p+1} = (\mathbf{U}_{id})^{p+1} = \mathbf{U}_{(id)^{p+1}} \in \mathfrak{J}.$$

Pentru demonstrarea punctului 2) să observăm că S^{p+1} se poate scrie sub forma

$$S^{p+1} = (T - Q)^{p+1} = T_1 + Q^{p+1},$$

unde, datorită comutativității lui Q cu T, operatorul T_1 are forma

$$T_1 = T^{p+1} + \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \binom{i}{p+1} Q^i\, T^{p+1-i},$$

deci

$$T_1 \in \mathfrak{J},$$

prin urmare

$$Q^{p+1} = S^{p+1} - T_1 \in \mathfrak{J}.$$

CONSECINȚA 1. *Dacă* T *este un operator spectral generalizat (slab) compact,* $\mathbf{U}$ *o distribuție spectrală a sa de ordinul* n *și* $T = S + Q$ *descompunerea canonică dată de* $\mathbf{U}$, *atunci*

1) $\mathbf{U}_f$ *este (slab) compact pentru orice* $f \in C_0^p(\Omega)$ și $p \geqslant n$;

2) S^{p+1} *și* Q^{p+1} *sînt (slab) compacți pentru orice* $p \geqslant n$.

Aceasta rezultă din faptul că mulțimea operatorilor (slab) compacți este un ideal bilateral uniform închis în algebra $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ ([4], Cap. VI, §§ 4—5).

CONSECINȚA 2. *Fie* $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ *un operator spectral generalizat,* $\mathbf{U}$ *o distribuție spectrală a sa de ordinul* n *și* $T = S + Q$ *descompunerea canonică* *dată de* $\mathbf{U}$. *Dacă* $\mathfrak{X}_1$ *este un subspaţiu vectorial închis al lui* $\mathfrak{X}$, *astfel încît* $T\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_1$, *atunci*

$$S^{p+1}\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_1\,;\quad Q^{p+1}\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_1 \quad (p \geqslant n)\,;$$

$$\mathbf{U}_f\,\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_1,\ \textit{oricare ar fi } f \in C_0^p(\Omega) \quad (p \geqslant n).$$

Aceasta rezultă din faptul că mulţimea

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{X}} = \{A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}) \mid A\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_1\}$$

este un ideal la dreapta uniform închis, după cum se poate verifica uşor.

CONSECINŢA 3. *Fie* $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ *un operator spectral generalizat,* U *o distribuţie spectrală a sa de ordinul* n *şi* $T = S + Q$ *descompunerea canonică dată de* U. *Dacă* $A_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ *este un operator cu proprietatea* $A_0\, T = 0$ (*respectiv* $TA_0 = 0$), *atunci*

1) $A_0\,\mathbf{U}_f = 0$ *respectiv* $\mathbf{U}_f\, A_0 = 0$) *oricare ar fi* $f \in C_0^p(\Omega)$ *şi* $p \geqslant n$;

2) $A_0\, S^{p+1} = A_0\, Q^{p+1} = 0$ (*respectiv* $S^{p+1}A_0 = Q^{p+1}A_0 = 0$) *oricare ar fi* $p \geqslant n$.

Aceasta rezultă din faptul că mulţimea

$$_{A_0}\mathcal{J} = \{A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}) \mid A_0 A = 0\}$$

(respectiv

$$\mathcal{J}_{A_0} = \{A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}) \mid AA_0 = 0\},$$

este un ideal la dreapta (respectiv la stînga uniform închis).

CONSECINŢA 4. *Dacă* $T = S + Q$ *este un operator generalizat pe* $\mathfrak{X}$, $\mathbf{U}$ *distribuţia sa spectrală de ordinul* n *care dă această descompunere canonică şi* $x_0 \in \mathfrak{X}$ *astfel încît* $Tx_0 = 0$, *atunci*

$$U_f\, x_0 = S^{p+1}\, x_0 = Q^{p+1}\, x_0 = 0$$

oricare ar fi $f \in C_0^p(\Omega)$ *şi* $p \geqslant n$.

Aceasta rezultă din faptul că mulţimea

$$\mathcal{J}_{x_0} = \{A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}) \mid Ax_0 = 0\}$$

este un ideal la stînga uniform închis.

CONSECINŢA 5. *Fie* $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ *un operator spectral generalizat,* $\mathbf{U}$ *o distribuţie spectrală a sa de ordinul* n *şi* $T = S + Q$ *descompunerea canonică dată de* $\mathbf{U}$. *Dacă* $\{x_n\} \subset \mathfrak{X}$ *este un şir mărginit astfel încît* lim Tx_n *există, atunci şirurile*

$$\{U_f\, x_n\}_{n\in N},\quad \{S^{p+1}\, x_n\}_{n\in N},\quad \{Q^{p+1}\, x_n\}_{n\in N}$$

sînt convergente, oricare ar fi $f \in C_0^p(\Omega)$ *şi* $p \geqslant n$.

Aceasta rezultă din faptul că mulţimea

$$\mathcal{J}_{\{x_n\}} = \{A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}) \mid \lim Ax_n \text{ există}\}$$

este un ideal la stînga uniform închis.

§ 2. DESCOMPUNEREA OPERATORILOR SPECTRALI GENERALIZAŢI ÎN PARTEA „REALĂ" ŞI PARTEA „IMAGINARĂ"

TEOREMA II.2.1. *Dacă S este un operator scalar generalizat, atunci*

$$S = S_1 + iS_2,$$

unde S_1 şi S_2 sînt operatori scalari generalizaţi care permută între ei şi au spectrele reale.

Demonstraţie. Fie U o distribuţie spectrală a lui S; atunci

$$S = \mathbf{U}_{id} = \mathbf{U}_{\mathrm{Re}(id)+i\mathrm{Im}(id)} = \mathbf{U}_{\mathrm{Re}(id)} + i\mathbf{U}_{\mathrm{Im}(id)} = $$
$$= S_1 + iS_2.$$

Aplicaţia $\mathbf{U}^1 : f \to \mathbf{U}_{f\circ\mathrm{Re}(id)}$ (respectiv $\mathbf{U}^2 : f \to \mathbf{U}_{f\circ\mathrm{Im}(id)}$) este o distribuţie spectrală şi

$$\mathbf{U}^1_{id} = S_1 \text{ (respectiv } \mathbf{U}^2_{id} = S_2),$$

deci S_1 (respectiv S_2) este un operator scalar generalizat.

Din relaţia

$$\sigma(\mathbf{U}_f) \subset f\,[\$\,(\mathbf{U})]$$

teorema 0.4.1, (i)), valabilă pentru orice $f \in C^\infty(\Omega)$, rezultă

$$\sigma(S_1) = \sigma(\mathbf{U}_{\mathrm{Re}(id)}) \subset \mathrm{Re}\,(id)\,[\$\,(\mathbf{U})] = \mathrm{Re}\,[\$\,(\mathbf{U})]$$

şi

$$\sigma(S_2) = \sigma(\mathbf{U}_{\mathrm{Im}(id)}) \subset \mathrm{Im}\,(id)\,[\$\,(\mathbf{U})] = \mathrm{Im}\,[\$\,(\mathbf{U})].$$

deci $\sigma(S_1)$ şi $\sigma(S_2)$ sînt mulţimi de numere reale.

Comutativitatea lui S_1 cu S_2 rezultă din

$$\mathbf{U}_{fg} = \mathbf{U}_f\,\mathbf{U}_g, \text{ oricare ar fi } f,\ g \in C^\infty(\Omega).$$

TEOREMA II.2.2. *Dacă T este un operator spectral generalizat, atunci există doi operatori R şi J astfel încît*

1) $T = R + iJ$ *şi* $RJ = JR$;

2) *spectrele lui R şi J sînt reale*;

3) *R este scalar generalizat, iar J este spectral generalizat*;

4) *dacă mai există doi operatori R_1 şi J_1 cu proprietăţile* 1), 2) *şi care comută cu R, atunci aceştia sînt operatori spectrali generalizaţi şi există un operator cvasinilpotent Q_1 cu proprietăţile* :

$$R_1 = R + Q_1 \text{ şi } J_1 = J + iQ_1.$$

Demonstraţie. T fiind spectral generalizat se poate scrie sub forma

$$T = S + Q.$$

Aplicînd lui S teorema precedentă, obţinem

$$S = S_1 + iS_2,$$

unde S_1 și S_2 sînt operatori scalari generalizați permutabili cu spectrele reale.

Punînd

$$R = S_1$$

și

$$J = S_2 - iQ,$$

rezultă

$$T = R + iJ.$$

Din

$$S_1 S_2 = S_2 S_1$$

și din

$$\mathbf{U}_f Q = Q \mathbf{U}_f, \text{ oricare ar fi } f \in C^\infty(\Omega),$$

(aici $\mathbf{U}$ este distribuția care dă descompunerea canonică $T = S + Q$), rezultă

$$RJ = JR.$$

Avem

$$\sigma(R) = \sigma(S_1)$$

și

$$\sigma(J) = \sigma(S_2 + (-iQ)) = \sigma(S_2)$$

deci R și J au spectrele reale.

$R = S_1$ este scalar generalizat, $J = S_2 + (-iQ)$ este spectral generalizat deoarece este suma unui operator scalar generalizat și a unui operator cvasinilpotent care comută cu $\mathbf{U}^2$ (distribuția lui S_2). Aceasta fiindcă Q comută cu $\mathbf{U}$, iar $\mathbf{U}^2$ este distribuția $f \to \mathbf{U}_{f \circ \mathrm{Im}(id)}$.

Fie, acum, R_1 și J_1 doi operatori cu proprietățile 1), 2) și care comută cu R, atunci operatorii R, J, R_1 și J_1 comută între ei. Fie $\mathcal{A}$ algebra generată de acești operatori și $\mathfrak{M}$ spațiul idealelor maximale. Operatorii R, J, R_1 și J_1 avînd spectrele reale, rezultă că, pentru orice $M \in \mathfrak{M}$, numerele

$$R(M)^\wedge,\ J^\wedge(M), R_1^\wedge(M) \text{ și } J_1^\wedge(M)$$

sînt reale, deci și

$$(R_1 - R)^\wedge(M), (J_1 - J)^\wedge(M)$$

sînt numere reale. Din

$$T = R + iJ = R_1 + iJ_1,$$

rezultă

$$0 = (R_1 - R) + i(J_1 - J),$$

de unde

$$0 = (R_1 - R)^\wedge(M) + i(J_1 - J)^\wedge(M), \text{ oricare ar fi } M \in \mathfrak{M},$$

deci

$$(R_1 - R)^\wedge(M) = (J_1 - I)^\wedge(M) = 0, \text{ oricare ar fi } M \in \mathfrak{M},$$

prin urmare operatorii $R_1 - R$ și $J_1 - J$ sînt cvasinilpotenți.

Punînd

$$Q_1 = R_1 - R$$

şi

$$Q_2 = J_1 - J,$$

rezultă

$$Q_2 = iQ_1,$$

deci

$$R_1 = R + Q_1$$

şi

$$J_1 = J + iQ_1.$$

III. PROPRIETĂŢI CARACTERISTICE ALE OPERATORILOR CARE SE DESCOMPUN CU AJUTORUL DISTRIBUŢIILOR SPECTRALE

§ 1. SUME ŞI PRODUSE DE OPERATORI SPECTRALI GENERALIZAŢI

Se ştie că un operator $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ este cvasinilpotent dacă şi numai dacă $\sigma(A) = \{0\}$. Atunci, notînd cu

$$r_A = \sup \{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$$

raza spectrală a operatorului A, rezultă că A este cvasinilpotent dacă şi numai dacă $r_A = 0$.

LEMA III. 1.1. *Suma şi produsul a doi operatori cvasinilpotenţi permutabili, precum şi produsul a doi operatori mărginiţi permutabili dintre care unul este cvasinilpotent, sînt operatori cvasinilpotenţi.*

Într-adevăr, aceasta rezultă din inegalităţile

$$r_{A+B} \leqslant r_A + r_B$$

şi

$$r_{AB} \leqslant r_A r_B,$$

([14]), Cap. XI, nr. 149) care au loc pentru orice pereche A, B de operatori permutabili mărginiţi.

DEFINIŢIA III.1.1. *Un operator spectral generalizat $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ se numeşte regulat (respectiv complet regulat) dacă are o distribuţie spectrală regulată (respectiv complet regulată)* [definiţia 0.4.4]. *Altfel spus, dacă partea scalară a lui T este regulată* (*respectiv complet regulată*) *după definiţia 0.4.4.*

TEOREMA III.1.1. *Suma şi produsul a doi operatori spectrali generalizaţi complet regulaţi permutabili sînt operatori spectrali generalizaţi.*

Demonstrație. Fie $T_1 = S_1 + Q_1$ și $T_2 = S_2 + Q_2$ doi operatori spectrali generalizați care satisfac condițiile teoremei și fie U și V distribuțiile lor spectrale regulate care au dat aceste descompuneri canonice. Avem

$$T_1 + T_2 = (S_1 + S_2) + (Q_1 + Q_2) = S + Q.$$

Din regularitatea completă a distribuțiilor $\mathbf{U}$ și $\mathbf{V}$ rezultă comutativitatea lor

$$\mathbf{U}_f \mathbf{V}_g = \mathbf{V}_g \mathbf{U}_f, \text{ oricare ar fi } f, g \in C^\infty (R^2),$$

de unde

$$\mathbf{U}_{id} \mathbf{V}_{id} = \mathbf{V}_{id} \mathbf{U}_{id},$$

adică

$$S_1 S_2 = S_2 S_1.$$

Deci $S = S_1 + S_2$ este un operator scalar generalizat, fiind suma a doi operatori scalari generalizați regulați permutabili (teorema 0.4.7).

Aplicînd lema III.1.1 cvasinilpotenților Q_1, Q_2 și acest lucru se poate deoarece Q_1 comută cu Q_2 fiindcă $T_1 T_2 = T_2 T_1$ și $S_1 S_2 = S_2 S_1$, rezultă că $Q_1 + Q_2$ este un operator cvasinilpotent. Pentru a demonstra că $S + Q$ este spectral generalizat, mai trebuie arătat că cvasinilpotentul Q comută cu o distribuție spectrală a lui S.

O distribuție spectrală a lui S este produsul tensorial al distribuțiilor spectrale $\mathbf{U}$ și $\mathbf{V}$ ale lui S_1 și S_2, adică aplicația liniară $\mathbf{W}$ a produsului tensorial proiectiv $C^\infty (R^2) \hat{\otimes}_\pi C^\infty (R^2) [= C^\infty (R^4)]$ ([12],[22]) în $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ care satisface relația

$$\mathbf{W}_{f \otimes g} = \mathbf{U}_f \mathbf{V}_g, \text{ oricare ar fi } f, g \in C^\infty(R^2).$$

([11], [7], pag. 157). Trebuie să arătăm că

$$Q \mathbf{W}_{f \otimes g} = \mathbf{W}_{f \otimes g} Q \quad (f, g \in C^\infty (R^2))$$

și aceasta este suficient, deoarece mulțimea elementelor de forma $f \otimes g$ cu $f, g \in C^\infty (R^2)$ este densă în $C^\infty (R^2) \hat{\otimes}_\pi C^\infty (R^2)$ întrucît aceasta este un sistem de generatori pentru $C^\infty (R^2) \hat{\otimes}_\pi C^\infty (R^2)$.

Ținînd seama de comutativitatea operatorilor T_1 și T_2 precum și de regularitatea distribuțiilor $\mathbf{U}$ și $\mathbf{V}$, rezultă

$$Q_1 \mathbf{W}_{f \otimes g} = Q_1 \mathbf{U}_f \mathbf{V}_g = \mathbf{U}_f Q_1 \mathbf{V}_g = \mathbf{U}_f \mathbf{V}_g Q_1 = \mathbf{W}_{f \otimes g} Q_1$$

și analog

$$Q_2 \mathbf{W}_{f \otimes g} = \mathbf{W}_{f \otimes g} Q_2,$$

deci

$$Q\, \mathbf{W}_{f \otimes g} = \mathbf{W}_{f \otimes g} Q, \text{ oricare ar fi } f, g \in C^\infty (R^2)$$

Așadar,

$$T_1 + T_2 = S + Q$$

este un operator spectral generalizat.

Analog

$$T_1 T_2 = S + Q,$$

unde

$$S = S_1 S_2$$

este un operator scalar generalizat (teorema 0.4.7), iar

$$Q = Q_1 Q_2 + Q_1 S_2 + Q_2 S_1$$

este un operator cvasinilpotent (lema III.1.1) care comută cu distribuția spectrală a lui $S_1 S_2$, deci $T_1 T_2$ este un operator spectral generalizat.

CONSECINȚĂ. *Dacă T_1 și T_2 sînt operatori spectrali în sensul lui Dunford, permutabili, atunci $T_1 + T_2$ și $T_1 T_2$ sînt operatori spectrali generalizați.*

Demonstrație. T_1 și T_2 fiind spectrali în sensul lui Dunford, sînt spectrali generalizați (consecința 2 a teoremei I.1.1). Pe de altă parte, operatorii spectrali în sensul lui Dunford sînt complet regulați. Într-adevăr dacă T este spectrul iar $\{E(\sigma)\}$ măsura sa spectrală, atunci $\mathfrak{X}_T(F) = E(F)\mathfrak{X}$ pentru orice $F \subset \sigma(T)$ închisă. Faptul că $Z\mathfrak{X}_T(F) \subseteq \mathfrak{X}_T(F)$ pentru orice F atrage

$$ZE(F) = E(F)ZE(F).$$

Această relație fiind adevărată pentru orice F închisă, prin continuitate o putem obține pentru orice $F\sigma$, în particular pentru orice G deschisă, apoi pentru orice G_σ și așa mai departe pentru orice σ boreliană. Prin urmare

$$E(\sigma)Z = E(\sigma)Z(E(\sigma) + E(\complement\sigma)) = E(\sigma)ZE(\sigma) + E(\sigma)ZE(\complement\sigma) =$$
$$= E(\sigma)Z + E(\sigma)E(\complement\sigma)ZE(\complement\sigma) = E(\sigma)Z$$

așa că Z comută cu fiecare

$$\mathbf{U}_\varphi = \int \varphi(\lambda)\,dE_\lambda.$$

§ 2. UNICITATEA DISTRIBUȚIILOR SPECTRALE ALE OPERATORILOR SPECTRALI GENERALIZAȚI COMPLET REGULAȚI

LEMA III.2.1. *Fie S un operator scalar generalizat, $\mathbf{U}$ o distribuție spectrală a sa, $F \subset C$ închisă și $x \in \mathfrak{X}$; atunci*

$$\mathbf{U}_f x = 0 \text{ pentru orice } f \in C^\infty \text{ cu } \mathfrak{S}(f) \cap F = \emptyset,$$

dacă și numai dacă $x \in \mathfrak{X}_S(F)$.

Demonstrație. Să presupunem că $x \in \mathfrak{X}_S(F)$ și să arătăm că $\mathbf{U}_f x = 0$, oricare ar fi funcția $f \in C^\infty$ cu $\mathfrak{S}(f) \cap F = \emptyset$. Fie, deci, $f \in C^\infty$ cu $\mathfrak{S}(f) \cap F = \emptyset$. Din

$$x \in \mathfrak{X}_S(F)$$

rezultă (definiția 0.4.3)

$$x \in \mathfrak{X}_{\mathbf{U}}(G),$$

oricare ar fi $G \supset F$ deschisă, în particular, pentru $G = \mathbf{C}\mathcal{S}(f)$, avem

$$x \in \mathfrak{X}_{\mathbf{U}}(\mathbf{C}\mathcal{S}(f)).$$

Datorită liniarităţii şi continuităţii lui U_f este suficient să arătăm că $U_f x = 0$ pentru cazul cînd x este chiar în mulţimea $\bigcup\limits_{\mathcal{S}(g) \subset \mathbf{C}\mathcal{S}(f)} U_g \mathfrak{X}$. Aşadar presupunînd că $x \in \bigcup\limits_{\mathcal{S}(g) \subset \mathbf{C}\mathcal{S}(f)} U_g \mathfrak{X}$ rezultă existenţa unei funcţii $g \in C^\infty$ cu $\mathcal{S}(g) \subset \mathbf{C}\mathcal{S}(f)$ (deci $\mathcal{S}(g) \cap \mathcal{S}(f) = \emptyset$, prin urmare $fg = 0$) şi a unui $z \in \mathfrak{X}$, astfel încît

$$x = \mathbf{U}_g z.$$

Aplicînd U_f lui x, rezultă

$$\mathbf{U}_f x = \mathbf{U}_f \mathbf{U}_g z = U_{fg} z = \mathbf{U}_0 z = Oz = 0.$$

Reciproc, să presupunem că $\mathbf{U}_f x = 0$, oricare ar fi $f \in C^\infty$ cu $\mathcal{S}(f) \cap F = \emptyset$ şi să arătăm că $x \in \mathfrak{X}_S(F)$. Pentru aceasta fie $G \supset F$ o mulţime deschisă şi să notăm cu G_0 complementarea lui F. $\{G, G_0\}$ fiind o acoperire a planului complex, există o partiţie a unităţii subordonată acestei acoperiri, deci există două funcţii $f, f_0 \in C^\infty$ cu proprietăţile

$$\mathcal{S}(f) \subset G, \; \mathcal{S}(f_0) \subset G_0$$

şi

$$f + f_0 = 1.$$

Avem

$$\mathcal{S}(f_0) \cap F = \emptyset,$$

de unde

$$0 = \mathbf{U}_{f_0} x = \mathbf{U}_{1-\varphi} x = x - \mathbf{U}_f x$$

(conform ipotezei), deci

$$x = \mathbf{U}_f x.$$

Din această egalitate, precum şi din incluziunile $\mathcal{S}(f) \subset G$ şi $G \supset F$, deducem (definiţia 0.4.3.)

$$x \in \mathfrak{X}_{\mathbf{U}}(G).$$

Cum această relaţie are loc pentru orice mulţime deschisă $G \supset F$, rezultă

$$x \in \mathfrak{X}_S(F).$$

Se ştie (teorema 0.4.1, (i)) că dacă $\mathbf{U}$ este o distribuţie spectrală, atunci $\mathbf{U}_f$ este un operator scalar generalizat, pentru orice $f \in C^\infty$, iar aplicaţia $g \to U_{g \circ f}$ este o distribuţie spectrală a sa. În particular, operatorii $\mathbf{U}_{id}$ şi $\mathbf{U}_{\overline{id}}$ sînt scalari generalizaţi.

Notînd cu

$$F^\star = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in F\}$$

putem enunţa

LEMA III.2.2. *Pentru orice mulțime închisă $F \subset C$ și orice distribuție spectrală U, avem*

$$\mathfrak{X}_{\overline{id}}(F) = \mathfrak{X}_{id}(F^\star).\ ^{6})$$

Demonstrație. Ținînd seama de relația

$$\mathfrak{X}_S(F) = \{x \in \mathfrak{X} \mid \sigma_S(x) \subset F\}$$

(teorema 0.4.5, punctul 4), valabilă pentru orice operator scalar generalizat S, va fi suficient să arătăm că $\sigma_{\mathbf{U}_{\overline{id}}}(x) \subset F$ dacă și numai dacă $\sigma_{\mathbf{U}_{\overline{id}}}(x) \subset F^\star$.

Presupunînd că $\sigma_{\mathbf{U}_{\overline{id}}}(x) \subset F$ și aplicînd teorema 0.4.4, deducem

$$\mathbf{U}_{g\circ\overline{id}}\, x = 0, \text{ oricare ar fi } g \in C^\infty \text{ cu } \mathfrak{S}(g) \cap F = \emptyset$$

adică

$$\mathbf{U}_{g\circ\overline{id}}\, x = 0, \text{ oricare ar fi } g \in C^\infty \text{ cu } \mathfrak{S}(g\circ\overline{id}) \cap F^\star = \emptyset.$$

Aplicația $g \to g\circ\overline{id}$ de la C^∞ la C^∞ fiind biunivocă, rezultă

$$\mathbf{U}_g x = 0, \text{ oricare ar fi } g \in C^\infty \text{ cu } \mathfrak{S}(g) \cap F^\star = \emptyset$$

de unde

$$\sigma_{\mathbf{U}_{id}}(x) \subset F^\star$$

(conform lemei precedente).

TEOREMA III.2.1. (*Teorema de „unicitate”*). *Distribuțiile spectrale ale unui operator spectral generalizat complet regulat sînt unic determinate, abstracție făcînd de nilpotenți aditivi.*

Demonstrație. Fie T un operator spectral generalizat complet regulat față de o distribuție spectrală $\mathbf{U}$ și fie $\mathbf{V}$ o altă distribuție spectrală a sa. Din definiția operatorilor spectrali generalizați rezultă

$$T\mathbf{V}_g = \mathbf{V}_g T, \text{ oricare ar fi } g \in C^\infty, \tag{III.2.1}$$

și

$$\mathfrak{X}_T(F) = \mathfrak{X}_{\mathbf{U}_{id}}(F) = \mathfrak{X}_{\mathbf{V}_{id}}(F) \tag{III.2.2}$$

oricare ar fi $F \subset C$ închisă.

Din lema III.2.2 și din relația (III.2.2) rezultă

$$\mathfrak{X}_{\mathbf{U}_{\overline{id}}}(F) = \mathfrak{X}_{\mathbf{U}_{id}}(F^\star) = \mathfrak{X}_{\mathbf{V}_{id}}(F^\star) = \mathfrak{X}_{\mathbf{V}_{\overline{id}}}(F). \tag{III.2.3}$$

Ținînd seama de faptul că spațiile $\mathfrak{X}_T(F)$ sînt invariante la orice operator permutabil cu T (teoremele 0.1.1, 0.2.2, 0.4.5 punctul 4) precum și de relația (III.2.1), deducem

$$V_g \mathfrak{X}_{\mathbf{U}_{id}}(F) \subset \mathfrak{X}_{\mathbf{U}_{id}}(F),$$

oricare ar fi $g \in C^\infty$ și $F \subset C$ închisă, de unde

$$\mathbf{U}_f \mathbf{V}_g = \mathbf{V}_g \mathbf{U}_f, \text{ oricare ar fi } f,\ g \in C^\infty. \tag{III.2.4}$$

---

[6] $\overline{id}$ este funcția $\lambda \to \overline{\lambda}$.

Luînd în (III.2.4) $f = g = id$ (respectiv $f = g = \overline{id}$) şi ţinînd seama de (III.2.2), respectiv (III.2.3), rezultă, în baza teoremei 0.2.4, $\mathbf{U}_{id} - \mathbf{V}_{id}$ (respectiv $\mathbf{U}_{\overline{id}} - \mathbf{V}_{\overline{id}}$) este un operator cvasinilpotent, deci spectral în sensul lui Dunford.

Operatorii $\mathbf{U}_{id}$ şi $\mathbf{V}_{id}$ (respectiv $\mathbf{U}_{\overline{id}}$ şi $\mathbf{V}_{\overline{id}}$) fiind scalari generalizaţi şi avînd distribuţii spectrale care comută, $\mathbf{U}$ şi $\mathbf{V}$ (respectiv $g \to \mathbf{U}_{g\circ\overline{id}}$ şi $g \to \mathbf{V}_{g\circ\overline{id}}$), rezultă că $\mathbf{U}_{id} - \mathbf{V}_{id}$ (respectiv $\mathbf{U}_{\overline{id}} - \mathbf{V}_{\overline{id}}$) este un operator scalar generalizat (teorema 0.4.7). Pentru a putea aplica această teoremă, este suficient a observa că în demonstraţia ei regularitatea celor doi operatori s-a folosit numai pentru a arăta comutativitatea distribuţiilor lor spectrale, aceasta din urmă intervenind în mod esenţial.

Se ştie (teorema 0.4.8) că un operator spectral în sensul lui Dunford este scalar generalizat dacă şi numai dacă este de tip finit (adică partea sa radicală este un operator nilpotent). Operatorul $\mathbf{U}_{id} - \mathbf{V}_{id}$ (respectiv $\mathbf{U}_{\overline{id}} - \mathbf{V}_{\overline{id}}$) este spectral în sensul lui Dunford (fiind cvasinilpotent) şi scalar generalizat, deci de tip finit: fiind şi cvasinilpotent, rezultă că este un operator nilpotent pe care-l notăm cu N (respectiv $\overline{N}$). Atunci

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{U}_{id} &= \mathbf{V}_{id} + N \\ \mathbf{U}_{\overline{id}} &= \mathbf{V}_{\overline{id}} + \overline{N}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.2.5)}$$

Fie $p(\alpha, \beta)$ un polinom în două variabile cu coeficienţi complecşi. Atunci, datorită relaţiilor (III.2.4) şi (III.2.5), avem

$$p(\mathbf{U}_{id}, \mathbf{U}_{\overline{id}}) = p(\mathbf{V}_{id} + N, \mathbf{V}_{\overline{id}} + \overline{N}) = p(\mathbf{V}_{id}, \mathbf{V}_{\overline{id}}) + N_\circ,$$

unde $N_\circ$ este un nilpotent care permută cu $\mathbf{U}_f$ şi $\mathbf{V}_g$, oricare ar fi $f, g \in C^\infty$.

Mulţimea polinoamelor $p(\lambda, \overline{\lambda})$ fiind densă în C^∞, orice funcţie $f \in C^\infty$ este, pe fiecare compact $K \subset C$, limita unui şir de astfel de polinoame.

Din acest fapt şi din continuitatea distribuţiilor $\mathbf{U}$ şi $\mathbf{V}$ rezultă, pentru orice $f \in C^\infty$,

$$\mathbf{U}_f = \lim p_n (\mathbf{U}_{id}, \mathbf{U}_{\overline{id}}),$$

$$\mathbf{V}_f = \lim p_n (\mathbf{V}_{id}, \mathbf{V}_{\overline{id}}),$$

de unde

$$\mathbf{U}_f - \mathbf{V}_f = \lim [p_n (\mathbf{U}_{id}, \mathbf{U}_{\overline{id}}) - p_n (\mathbf{V}_{id}, \mathbf{V}_{\overline{id}})] = \lim N_n = Q.$$

Q fiind limita unui şir de nilpotenţi care comută cu $\mathbf{U}_f$ şi $\mathbf{V}_f$, este un cvasinilpotent care comută cu $\mathbf{U}_f$ şi $\mathbf{V}_f$.

Ţinînd seama de acest fapt şi făcînd aceleaşi raţionamente ca pentru $\mathbf{U}_{id} - \mathbf{V}_{id}$ şi $\mathbf{U}_{\overline{id}} - \mathbf{V}_{\overline{id}}$, deducem că $\mathbf{U}_f - \mathbf{V}_f = Q$ este un operator nilpotent.

Aşadar valorile distribuţiilor $\mathbf{U}$ şi $\mathbf{V}$ diferă prin nilpotenţi aditivi.

IV. RĂDĂCINI DE OPERATORI SPECTRALI GENERALIZAȚI

§ 1. RĂDĂCINI DE OPERATORI SPECTRALI GENERALIZAȚI

TEOREMA IV.1.1. *Dacă* $A \in \mathbb{S}(\mathcal{X})$ *este un operator astfel încît* $A^n = S$, *unde* S *este un operator scalar generalizat regulat al cărui spectru nu separă 0 de* ∞, *atunci* A *este un operator scalar generalizat.*

Demonstrație. Aplicația $\lambda \to \sqrt[n]{\lambda}$ are n ramuri, fie acestea $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Notînd

$$\sigma_k = r_k(\sigma(S)) \left[\subset \left\{ \lambda \in C \,\middle|\, \frac{2\pi}{n} k < \arg z < \frac{2\pi}{n}(k+1) \right\} \right],$$

avem

$$\sigma(A) = \bigcup_{k=1}^{n} \sigma_k,$$

cu σ_k separate (căci σ_k sînt închise și disjuncte).

Aplicînd operatorului A teorema de descompunere după părțile separate ale spectrului (E. Hille and R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, New York, 1957, teorema 5.13.1) rezultă existența unui sistem de idempotenți $\{J_1, \ldots, J_n\}$, astfel încît

1) $I = \sum_{k=1}^{n} J_k, \quad J_k J_l = 0$ pentru $k \neq l, J_k \neq 0, I$;

2) $A J_k = J_k A, \quad (k = 1, \ldots, n)$;

3) dacă $XA = AX$, atunci $XJ_k = J_k X$;

4) notînd $A_k = J_k A$, avem $A = \sum_{k=1}^{n} A_k, \quad A_k A_l = 0$ și $\sigma(A_k) = \sigma_k$.

Fie $\mathbf{U}$ o distribuție spectrală regulată a lui S. Avem

$$AS = A^{n+1} = SA$$

adică

$$A\mathbf{U}_{id} = \mathbf{U}_{id} A,$$

de unde, datorită regularității lui $\mathbf{U}$, rezultă

$$A\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_f A, \text{ oricare ar fi } f \in C^\infty.$$

Ținînd seama de această relație și de 3) deducem $\mathbf{U}_f J_k = J_k \mathbf{U}_f$, oricare ar fi $f \in C^\infty$ și $1 \leqslant k \leqslant n$, de unde, pentru $f = id$, obținem

$$S J_k = J_k S, \text{ oricare ar fi } 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Notînd

$$S_k = J_k S$$

și

$$\mathbf{U}_f^{(k)} = J_k \mathbf{U}_f$$

rezultă că $S_k = S \mid \mathfrak{X}_k$ și $\mathbf{U}_f^{(k)} = \mathbf{U}_f \mid \mathfrak{X}_k$, iar subspațiul $\mathfrak{X}_k$ este invariant la operatorii A_k, S_k și $\mathbf{U}_f^{(k)}$, deci acești operatori aparțin lui $\mathfrak{L}(\mathfrak{X}_k)$.

Observăm că S_k este spectral generalizat pe $\mathfrak{X}_k$ și $\mathbf{U}_f^{(k)}$ este o distribuție spectrală a sa. Avem

$$A_k^n = S_k$$

de unde

$$A_k = id\,(A_k) = r_k \circ id^n\,(A_k) = r_k\,[id^n\,(A_k)] = r_k\,(S_k) = r_k\,(U_{id}^{(k)}) = U_{r_k}^{(k)},$$

deci A_k este scalar generalizat, prin urmare

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$$

este scalar generalizat ([11], lema 2(i); propoziția I.2.1).

Pentru a putea extinde această teoremă (teorema IV.1.1) la cazul operatorilor spectrali generalizați, avem nevoie de următorul rezultat al lui J. T. Schwartz ([21], teorema 1, sau [3], consecința teoremei 10):

Dacă $\sigma(Q) = \{O\}$, unde Q este un operator care comută cu operatorul S și f este o funcție analitică într-o vecinătate a lui $\sigma(S)$, atunci f este analitică într-o vecinătate a lui $\sigma(S + Q) = \sigma(S)$ și

$$f(S + Q) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(S)\,\frac{Q^n}{n\,!},$$

iar seria din dreapta este convergentă în topologia uniformă (a lui $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$).

TEOREMA IV.1.2. *Dacă $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ este un operator astfel încît $A^n = T$, unde T este un operator spectral generalizat regulat al cărui spectru nu separă* 0 *de* ∞, *atunci A este spectral generalizat.*

Demonstrație. Fie $\mathbf{U}$ o distribuție spectrală regulată a lui T și $T = S + Q$ descompunerea canonică dată de această distribuție. Aplicînd rezultatul lui Schwartz operatorului $T = S + Q$ și funcției r_k $(k = 1, \ldots, n)$, obținem

$$A_k = r_k\,(T_k) = r_k\,(S_k + Q_k) = \sum_{p=1}^{\infty} r_k^{(p)}\,(S_k)\,\frac{Q_k^p}{p\,!} = r_k\,(\mathbf{U}_{id}^{(k)}) +$$

$$+ Q \sum_{p=1}^{\infty} r_k^{(p)}\,(S_k)\,\frac{Q_k}{p\,!} = U_{r_k}^{(k)} + Q_k',$$

unde

$$Q_k' = Q_k \sum_{p=1}^{\infty} r_k^{(p)}\,(S_k)\,\frac{Q^{p-1}}{p\,!}$$

este un operator cvasinilpotent (lema III.1.1) care comută cu $\mathbf{U}^{(k)}$ (căci $\mathbf{U}$ comută cu Q și $r_k^{(p)}(S_k) = \mathbf{U}_{r_{k(p)}}$), iar $\mathbf{U}_{r_k}^{(k)}$ este un operator scalar generalizat. Deci

$$A_k = \mathbf{U}_{r_k}^{(k)} + Q_k'$$

este un operator spectral generalizat. Aplicînd propoziția I.2.1 rezultă că

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$$

este un operator spectral generalizat.

§ 2. O CONDIȚIE NECESARĂ ȘI SUFICIENTĂ CA UN OPERATOR SĂ FIE SCALAR GENERALIZAT

TEOREMA IV.2.1. *Un operator* $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ *este scalar generalizat dacă și numai dacă satisface următoarele condiții* :

$$\text{(i)}\ \sigma(S) \subset K \subset R, \quad K \ \text{compactă};$$

$$\text{(ii)}\ \|R(\lambda, S)\| \leqslant M\,[\mathrm{d}(\lambda, K)^{-m} + \mathrm{d}(\lambda, K)^{-1}]\,\mathrm{d}\lambda.$$

Această teoremă este o consecință imediată a următorului rezultat al lui H. G. Tillmann ([18], teorema 2) :

Dacă S *satisface condițiile* (i) *și* (ii), *atunci:*

$$\mathbf{U}_f = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int f(\lambda)\,[R(\lambda + i\varepsilon, S) - R(\lambda - i\varepsilon, S)]\,\mathrm{d}\lambda \tag{1}$$

(*domeniul de integrare poate fi orice interval* I *al cărui interior conține mulțimea compactă* K), *definește un omomorfism continuu al algebrei* $C^\infty(R)$ *în* $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ *și acesta este o prelungire a omomorfismului*

$$f(S) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) R(\lambda, S)\,\mathrm{d}\lambda.\ ^{7)} \tag{2}$$

Invers, dacă omomorfismul (2) *poate fi prelungit la un omomorfism continuu al lui* $C^\infty(R)$ *în* $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$, *atunci* S *satisface condițiile* (i) *și* (ii).

§ 3. DEFINIȚIA LUI FUMI-YUKI MAEDA

DEFINIȚIA IV.3.1. *Un operator* $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ *se numește spectral generalizat în sensul lui Maeda dacă există o distribuție spectrală* $\mathbf{U}$ *astfel încît,*

1) $T\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_f T$, *oricare ar fi* $f \in C^\infty$;

2) $\sigma(T \mid \mathfrak{X}_{S(F)}) \subset F$, *oricare ar fi* $F \subset C$ *închisă, unde* $S = \mathbf{U}_{id}$.

În acest caz se spune că $\mathbf{U}$ este o distribuție spectrală a lui T.

Amintim următoarele rezultate ale lui Maeda relative la operatori spectrali generalizați în sensul său :

1° Orice operator spectral generalizat în sensul lui Maeda are proprietatea prelungirii unice ([17], propoziția 3.4).

---

[7] Omomorfismul (2) este definit ([4], Cap. VII, § 3, definiția 9) pentru orice funcție olomorfă f în vecinătatea lui $\sigma(S)$. Γ este un contur format dintr-un număr finit de curbe rectificabile orientate în sens pozitiv.

2° $\mathfrak{X}_{\mathbf{U}}(F) = \{x \in \mathfrak{X} \mid \sigma_T(x) \subset F\}$ ([17], teorema 3.1)
şi atunci putem scrie $\mathfrak{X}_T(F)$ în loc de $\mathfrak{X}_{\mathbf{U}}(F)$.

Apriori nu ştim că spaţiile $\mathfrak{X}_{\mathbf{U}}(F)$ sînt maximal spectrale pentru operatorul spectral generalizat Maeda în definiţia căruia intră distribuţia spectrală $\mathbf{U}$, de aceea acest fapt trebuie demonstrat.

LEMA IV.3.1. *Dacă $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ este un operator spectral generalizat în sensul lui Maeda şi U o distribuţie spectrală a sa, atunci spaţiile $\mathfrak{X}_{\mathbf{U}}(F) = \mathfrak{X}_T(F)$ sînt spaţii maximal spectrale ale lui T.*

Demonstraţie. Trebuie arătat că

(i) $T\,\mathfrak{X}(F) \subset \mathfrak{X}(F)$

şi

(ii) oricare ar fi subspaţiul vectorial închis $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X}$ invariant la T şi cu $\sigma(T \mid_{\mathfrak{Y}}) \subset \sigma(T \mid_{\mathfrak{X}_T(F)}$, avem $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X}_T(F)$.

Pentru demonstrarea punctului (i) fie $x \in \mathfrak{X}_T(F)$ deci $x \in \mathfrak{X}_{\mathbf{U}}(G)$, oricare ar fi $G \supset F$ deschisă; atunci există un $z \in \mathfrak{X}$ şi o funcţie $f \in C^\infty$ cu $S(f) \subset G$. Datorită liniarităţii şi continuităţii lui $\mathbf{U}_f$ putem presupune că x aparţine chiar mulţimii $\bigcup\limits_{\mathfrak{S}(f) \subset G} \mathbf{U}_f\, X$, astfel încît

$$x = \mathbf{U}_f\, z,$$

de unde

$$Tx = T\mathbf{U}_f x = \mathbf{U}_f(Tx) \in \mathfrak{X}_{\mathbf{U}}(G).$$

Cum această relaţie are loc pentru orice mulţime deschisă $G \supset F$, rezultă că

$$Tx \in \mathfrak{X}_T(F),$$

deci

$$T\mathfrak{X}_T(F) \subset \mathfrak{X}_T(F).$$

Punctul (ii) se demonstrează la fel ca în cazul operatorilor scalari generalizaţi (lema I.1.2). În locul lemei I.1.1 se foloseşte relaţia

$$\mathfrak{X}_T[\sigma(T \mid_{\mathfrak{X}_T(F)})] \subset \mathfrak{X}_T(F),$$

care se obţine din următoarea incluziune

$$\sigma(T \mid_{\mathfrak{X}_T(F)}) \subset \sigma(T) \cap F$$

aceasta rezultînd din punctul (i) demonstrat mai sus şi din punctul 2) al definiţiei IV.3.1.

LEMA IV.3.2. *Orice operator spectral generalizat în sensul lui Maeda este decompozabil.*

Demonstraţie. Vom observa că demonstraţia acestei leme urmează pas cu pas, însă numai pînă la un anumit punct, demonstraţia lemei I.1.3. Punctul în care nu mai merge demonstraţia lemei I.1.3 este acela în care se aplică teorema 0.4.3, deoarece *apriori* nu ştim dacă avem o astfel de teoremă pentru operatorii spectrali generalizaţi în sensul lui Maeda.

Ca și în cazul lemei I.1.3, considerăm o acoperire deschisă finită $\{G_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ a lui $\sigma(T)$. Notăm

$$\mathcal{Y}_i = \mathcal{X}_T(\bar{G}_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

și

$$G_0 = \rho(T).$$

Acoperirea deschisă $\{G_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ a planului complex determină o partiție a unității $\{\varphi_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$. Avem

$$\begin{cases} 1 = \sum\limits_{i=0}^{n} \varphi_i \\ \mathcal{S}(\varphi_i) \subset G_i \end{cases}$$

de unde

$$x = Ix = \mathbf{U}_1 x = \mathbf{U}_{\sum\limits_{i=0}^{n} \varphi_i} x = U_{\varphi_0} x + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{U}_{\varphi_i} x.$$

Notînd

$$y_i = U_{\varphi_i} x \,(\in \mathcal{X}_{\mathbf{U}}(G_i))$$

și ținînd seamă că $U_{\varphi_0} = 0$ (căci $\mathcal{S}(\mathbf{U}) \cap \mathcal{S}(\varphi_0) = \emptyset$) rezultă

$$x = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Pentru a termina demonstrația, mai trebuie arătat că $y_i \in \mathcal{Y}_i$.

Din definiție rezultă imediat că

$$\mathcal{X}_{\mathbf{U}}(M_1) \subset \mathcal{X}_{\mathbf{U}}(M_2),$$

pentru orice mulțimi M_1 și M_2 deschise sau închise cu $M_1 \subset M_2$.

Avem

$$y_i = \mathbf{U}_{\varphi_i} x \in \mathcal{X}_{\mathbf{U}}(G_i) \subset \mathcal{X}_{\mathbf{U}}(G),$$

oricare ar fi mulțimea deschisă $G \supset \bar{G}_i$, de unde

$$y_i \in \bigcap_{G \supset \bar{G}_i} \mathcal{X}_{\mathbf{U}}(G) = \mathcal{X}_T(\bar{G}_i) = \mathcal{Y}_i.$$

LEMA IV.3.3. *Dacă T este un operator spectral generalizat în sensul lui Maeda și U o distribuție spectrală a sa, atunci*

$$\mathcal{X}_T(F) = \mathcal{X}_{\mathbf{U}_{id}}(F),$$

oricare ar fi mulțimea închisă $F \subset C$.

Aceasta rezultă din definiția lui $\mathcal{X}_{\mathbf{U}}(F)$ $[= \mathcal{X}_T(F)]$ și din definiția 0.4.3 asociată cu teorema 0.4.5, punctul 4).

TEOREMA IV.3.1. *Orice operator spectral generalizat în sensul lui Maeda este spectral generalizat în sensul definiției* I.1.1.

Demonstrație. Fie T un operator spectral generalizat în sensul lui Maeda, atunci:

(i) T este decompozabil (lema IV.3.2);

(ii) există o distribuție spectrală $\mathbf{U}$ care comută cu T (conform punctului 1) din definiția IV.3.1).

(iii) $\mathfrak{X}_T(F) = \mathfrak{X}_{\mathbf{U}_{id}}(F)$, oricare ar fi $F \subset C$ închisă (lema IV.3.3).

Așadar T este spectral generalizat în sensul definiției I.1.1.

Următoarea teoremă constituie reciproca teoremei precedente și împreună cu aceasta stabilește echivalența celor două definiții (definiția I.1.1 și definiția IV.3.1 (Maeda))[8].

TEOREMA IV.3.2. *Orice operator spectral generalizat în sensul definiției I.1. este spectral generalizat în sensul lui Maeda.*

Demonstrație. Observăm că punctul 1) al definiției lui Maeda este același cu punctul (ii) al definiției I.1.1.

Din (i), (iii) și teorema 0.4.5 punctul 6), rezultă

$\sigma(T \mid \mathfrak{X}_T(F)) \subset F$, oricare ar fi $F \subset C$ închisă adică punctul 2) al definiției IV.3.1.

§ 4. EXEMPLE DE OPERATORI SPECTRALI GENERALIZAȚI CARE NU SÎNT SPECTRALI ÎN SENSUL LUI DUNFORD ȘI NICI SCALARI GENERALIZAȚI

1. Sumele și produsele finite de operatori spectrali în sensul lui Dunford, permutabili, de ordin infinit sînt operatori spectrali generalizați (consecința teoremei III.1.1).

2. Fie H un spațiu Hilbert de dimensiune infinită, Q_H un operator cvasinilpotent pe H, care nu este nilpotent, $C^n([0,1], H)$ spațiul Banach al funcțiilor $\vec{f} : [0,1] \to H$ de n ori derivabile și cu derivate continue. Pe $C^n([0,1], H)$ se consideră norma

$$\| f \|_n = \sup_{\substack{t \in [0,1] \\ 0 \leqslant k \leqslant n}} \| D^k f(t) \|_H .$$

Fie $S : \vec{f}(t) \to t\vec{f}(t)$ $[\vec{f} \in C^n([0,1], H)]$. Aplicația $\mathbf{U}_\varphi : \vec{f} \to \varphi \circ \vec{f}$ $(\vec{f} \in C^n([0,1]),\ \varphi \in C^\infty(\Omega))$ este o distribuție spectrală cu proprietatea $\mathbf{U}_{id} = S$, deci S este scalar generalizat și nu este spectral în sensul lui Dunford.

Fie $Q : \vec{f} \to Q_H \vec{f}$ $[(Q\vec{f})(t) = Q_H(\vec{f}(t))]$. Evident, Q este un operator cvasinilpotent (care nu este nilpotent) care comută cu distribuția spectrală $\mathbf{U}$.

Operatorul $T = S + Q$ este spectral generalizat pe $C^n([0,1], H)$, dar nu este nici spectral în sensul lui Dunford, nici scalar generalizat.

Acest exemplu îl datorăm lui C. Foiaș.

---

[8] Echivalența acestor definiții rezultă imediat din teorema de descompunere canonică, care are loc pentru ambele definiții. Demonstrația dată aici nu face uz de teorema de descompunere canonică.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Bishop, *A duality theorem for an arbitrary operator*. Pacific J. Math., **9**, 379—397 (1959).
2. M. C. Бродский и M.C.Лившин, *Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы*. Ж.М.Н. **XIII** I(79), 3—85 (1958).
3. N. Dunford, *Spectral operators Pacific*. J. Math., **4**, 321—354 (1954).
4. N. Dunford, *A survey of the theory of spectral operators*, Bull. Amer. Math. Soc., **64**, 217—274 (1958).
5. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Opertors I. General theory*. Interscience Publishers, New-York, 1958.
6. S. R. Foguel, *Sums and products of commuting spectral operators*. Archiv för Math., 449—461 (1957).
7. S. R. Foguel, *The relations betwen a spectral operators and its scalar part*. Pacific. J. Math., **8**, 51—65 (1958).
8. C. Foiaş, *Une application des distributions vectorielles à la théorie spectrale*. Bull. Sci. Math., **84**, 47—158 (1960).
9. C. Foiaş, *Relaţia dintre operatorii spectrali şi scalari generalizaţi*. Com. Acad. R.P.R., **11**, 1427—1430 (1961).
10. C. Foiaş, *Spectral maximal spaces and decomposable operators in Banach spaces*. Archiv der Math., **XIV**, *4—5*, 341—349 (1963).
11. C. Foiaş, *Cîteva observaţii asupra operatorilor care se descompun prin intermediul unei distribuţii spectrale*. Studii şi cercetări matematice (1964).
12. A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Mem. Amer. Math. Soc., **16** (1955).
13. S. Kakutani, *An example concerning uniform boundness of spectral measures*. Pacific J. Math., **4**, 863—872 (1954).
14. M. B. Келдын, *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений*. ДАН, **77**, I, 11—14 (1951).
15. G. L. Krabbe, *Convolution operators that satisfy the spectral theorem*. Math. Zeitschr., **70**, 446—462 (1959).
16. M. C. Лившиц, *О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов*. Матем. сб., **34 (76)** 145—198 (1954).
17. Fumi-Yuki Maeda, *Generalized spectral operators on locally convex spaces*. Pacific J. Math., **13**, 177—192 (1963).
18. M. A. Наймарк, *Нормированные кольца*. Москва, 1956.
19. F. Riesz et B. Sz. Nagy, *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*. Budapest, 1955.
20. Л. A. Сахнович, *Приведение несамосопряженных операторов с непрерывным спектром к диагональному виду*. Матем., **44 (86)** 509—548 (1958).
21. J. T. Schwartz, *Two perturbation formulae*. Comm. Pure Appl. Math., **8**, 371—376 (1955).
22. L. Schwartz, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*. Annales Inst. Fourier Ire partie, **7**, 1—141 (1957).
23. J. G. Stampfli, *Roots of spectral operators*. Proc. Amer. Math. Soc., **13** , *5*, 796—798 (1962).
24. H. G. Tillmann, *Vector — valued distributions and the spectral theorem for selfadjoint operators in Hilbert spaces*. Bull. Amer. Math. Soc., **69**, 67—71 (1963).
25. J. Wermer, *Commuting spectral measures on Hilbert spaces*, Pacific J. Math., **4**, 355—361 (1954).
26. Fr. Wolf, *Operators in Banach space with admit a generalized spectral decomposition*. Indag. Math., **19**, 302—311 (1957).
27. I. Colojoară, *Generalized spectral operators*. Rev. math. pures et appl., **VII**, *3*, 459—465 (1962).
28. I. Colojoară, *Operatori spectrali generalizaţi*. II. Com. Acad. R.P.R., **9**, 973—977 (1962).

EXTINDEREA UNEI TEOREME A LUI H. WEYL PRIVITOARE LA ȘIRURILE DE DISTRIBUȚIE UNIFORMĂ[1])

DE

ȘTEFAN N. BERȚI

După cum se știe [5], șirul

$$\alpha : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

de puncte din hipercubul unitar d-dimensional

$E_d = A(0, 0, \ldots, 0 ; 1, 1, \ldots, 1) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_d) : 0 \leqslant x_j < 1, j \in \overline{1, d}\}$
se spune că este un *șir de distribuție uniformă* pe E_d, dacă pentru orice hiperparalelipiped

$A = A\,(a_1, a_2, \ldots, a_d \,;\, b_1, b_2, \ldots, b_d) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_d) : a_j \leqslant x_i < b_j, j \in \overline{1, d}\}$
unde $0 \leqslant a_j < b_j \leqslant 1$, $j \in \overline{1, d}$ are loc relația

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \chi_A(\alpha_j) = |A|,$$

unde

$$\chi_A(\alpha_j) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } \alpha_j \in A \\ 0 \text{ dacă } \alpha_j \notin A \end{cases}$$

și

$$|A| = \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j).$$

Noțiunea de șir de distribuție uniformă, introdusă de H. Weyl în 1916, se aplică în formulele de cubatură cu nodurile aleatoare [1] sau în metodele din teoria numerelor pentru calculul integralelor multiple [3].

La baza acestor aplicații stă următoarea teoremă a lui H. Weyl [5]:

TEOREMA 1. *Dacă* $\alpha : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *este un șir de distribuție uniformă pe* E_d *și* $f(x)$ *este o funcție complexă integrabilă Riemann pe* E_d, *atunci în formula de cubatură*

$$\int_{E_d} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(\alpha_j) + R(\alpha, f, N)$$

---

[1]) Comunicare prezentată la Institutul de calcul al Academiei R.P.R. — Filiala Cluj, în ședința din 24 septembrie 1963.

are loc

$$\lim_{N\to\infty} R\,(\alpha, f, N) = 0.$$

În lucrarea de faţă se extinde acest rezultat (teorema 2) pentru integrale definite pe un cîmp de probabilitate $\{E, K, P\}$ ([4], pag. 99).

Fie f o funcţie simplă definită pe E, cu domeniul de valori $f(E) = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ ($c_1, c_2, \ldots, c_m$ sînt numere complexe) şi cu

$$f^{-1}(c_j) \in K, \quad (j \in \overline{1, d}).$$

Orice funcţie simplă cu $f(E) = \{c_1, \ldots, c_d\}$ are reprezentarea [2]:

$$f = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{f^{-1}(cj)}$$

iar integrala pe o mulţime $A \in K$ a unei funcţii simple f, se defineşte prin

$$\int_A f(s)\, P\,(\mathrm{d}s) = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot P\,(A \cap f^{-1}(c_j)).$$

Şirul $\alpha : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ de elemente din E se spune că este un şir de distribuţie uniformă faţă de cîmpul de probabilitate $\{E, K, P\}$, dacă pentru orice $A \in K$ are loc relaţia

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \chi_A\,(\alpha_j) = P\,(A).$$

Dacă α este un şir de elemente din E şi $A \subseteq E$, atunci prin

$$< \alpha, A >$$

vom nota subşirul lui α format din acei termeni care aparţin lui A.

Pentru cîmpul de probabilitate $\{E, K, P\}$ şi mulţimea $A \in K$ cu $P(A) > 0$, vom nota

$$K_A = \{B : B \in K,\ B \subseteq A\}$$

şi

$$P_A\,(B) = \frac{1}{P(A)} \cdot P(B)$$

pentru orice $B \in K_A$.

Se arată simplu că $\{A, K_A, P_A\}$ este un cîmp de probabilitate.

Dacă α este un şir de distribuţie uniformă pe $\{E, K, P\}$, mulţimea $A \in K_A$ şi $P(A) > 0$, atunci şirul $< \alpha, A >$ este de asemenea un şir de distribuţie uniformă pe $\{A, K_A, P_A\}$.

Acest fapt se demonstrează folosind definiţiile şi următoarea propoziție elementară. Dacă A, B, C, D, ε sînt numere reale strict pozitive, atunci din îndeplinirea condițiilor

$$| A - c | < \frac{BD}{A+B} \cdot \varepsilon, \; | B - D | < \frac{BD}{A+B} \cdot \varepsilon$$

rezultă

$$\left| \frac{A}{B} - \frac{C}{D} \right| < \varepsilon.$$

Cu aceste pregătiri, putem trece la demonstrarea următoarei teoreme :

TEOREMA 2. *Dacă f este o funcție simplă definită pe E, mulțimea $A \in K$ iar șirul α este un șir de distribuție uniformă pe cîmpul de probabilitate $\{E, K, P\}$, atunci în formula de cubatură*

$$\int_A f(s)\, P(\mathrm{d}s) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(\beta_j) + R(\alpha, f, A, N)$$

unde β este șirul $< \alpha, A >$, are loc

$$\lim_{N \to 8} R(\alpha, f, A, N) = 0.$$

Demonstrație. Fie M_j $(j \in \overline{1, m})$ numărul de termeni din secțiunea N a șirului $< \alpha, A >$, care aparțin mulțimii $f^{-1}(c_j)$. În acest caz

$$\sum_{j=1}^{N} f(\beta_j) = \sum_{j=1}^{m} n_j\, c_j.$$

Astfel au loc egalitățile

$$| R(\alpha, f, A, N) | = \left| \int_A f(s)\, P(\mathrm{d}s) - \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j\, n_j}{N} \right| = \left| \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \left[P(A \cap f^{-1}(c_j)) - \frac{n_j}{N} \right] \right| .$$

Şirul $< \alpha, A >$ fiind de distribuție uniformă pe cîmpul de probabilitate $\{A, K_A, P_A\}$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ corespunde un număr natural N_ε, astfel ca

$$| P(A \cap f^{-1}(c_j)) - \frac{n_j}{N} | < \frac{\varepsilon}{m} \quad (j \in \overline{1, m})$$

deci pentru $N > N_\varepsilon$ are loc

$$| R(\alpha, f, A, N) | < \varepsilon$$

şi teorema este demonstrată.

Funcţia complexă $f(u)$ definită pe E se numeşte *P-integrabilă*, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $a > 0$ există un şir de funcţii simple

$$f_{1,\varepsilon}, f_{2,\varepsilon}, \ldots, f_{n,\varepsilon} \ldots$$

şi un număr N_ε, astfel ca pentru

$$N > N_\varepsilon$$

să avem

$$P\left(\{s : |f(s) - f_{N,\varepsilon}(s)| < a\}\right) < \varepsilon \ (s \in E)$$

şi

$$\lim_{N \to \infty} \int_A f_{N,\varepsilon}(s)\, P(\mathrm{d}s) \ (A \in K)$$

există. Pentru funcţiile P-integrabile, teorema 2 se extinde imediat.

Primită la redacţie la 12 februarie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. Н. П. Бусленко, Д. И. Голенко, И. М. Соболь, В. Г. СрагоВич, Ю. А. Шрейдер, *Метод статистических испытаний*, Москва, 1962.
2. N. Dunford, J. Schwartz, *Linear operators*. New York, London, 1958.
3. Н. М. КоробоВ, *Вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел*. ДАН СССР, **115**, *6* (1957).
4. O. Onicescu, *Teoria probabilităţilor şi aplicaţii*. Bucureşti, 1963.
5. H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen Mod. 1*. Math. Ann., **77** (1916).

RECENZIE

J. MILNOR, *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1963.

Cartea lui John Milnor *Morse theory* este un ciclu de lecţii ţinute de autor, constituind o expunere succintă dar deosebit de elegantă a acestei teorii, precum şi diverse probleme de calculul variaţiilor, geometrie, topologie, care au consacrat-o ca o tehnică foarte importantă. Cu această teorie în ultimii ani s-au abordat o serie de probleme complexe (periodicitate Bott, reducţii ale conjuncturilor Poincaré etc.).

Cartea se dovedeşte utilă topologilor şi geometrilor atît prin prezentarea teoriei însăşi cît şi prin capitolele aplicative.

Partea întîi. Aceasta constituie o prezentare a chirurgiei Morse pe varietăţi diferenţiabile. Fie f o funcţie diferenţiabilă pe o varietate cu puncte critice nedegenerate; fiecărui punct critic nedegenerat i se asociază un număr λ (indexul hessienei) şi se demonstrează teoremele:

Dacă c nu este o valoare critică şi între $c - \varepsilon$ şi $c + \varepsilon$ nu se află nici o altă valoare critică şi $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ este compact, atunci $M^{c-\varepsilon} = \{x \in M \mid f(x) < c - \varepsilon\}$ este retractă de deformare a lui $M^{c+\varepsilon} = \{x \in M \mid f(x) < c + \varepsilon\}$ şi mai mult, ca varietăţi sînt difeomorfe.

În aceleaşi condiţii, dacă c este o valoare critică de index λ, $M^{c+\varepsilon}$ are tipul de omotopie al lui $M^{c-\varepsilon}$ la care s-a lipit după frontiera e^λ, celula e^λ.

Demonstrîndu-se că pe orice varietate diferenţiabilă există o funcţie cu puncte critice nedegenerate, se arată de fapt că orice varietate are tipul de omotopie al unui CW-complex cu celulele $e_1^0 \cup \ldots e_{c_0}^0 \cup e_1^{\lambda_1} \ldots e_{c_1}^{\lambda_1} \cup \ldots \cup e_1^{\lambda n} \ldots \cup e_{cn}^{\lambda n}$, fiecare celulă fiind ataşată unui punct critic, indicele superior reprezentînd indexul punctului.

Drept consecinţă a acestor rezultate se obţin inegalităţile lui Morse. Dacă c_λ este numărul de puncte critice de index λ pe varietatea M, atunci:

1) $$P_\lambda(M) \leqslant c_\lambda\ ;$$

2) $$\sum_{\lambda=0}^{p} (-1)^\lambda R_\lambda(M) \leqslant \sum_{\lambda=0}^{p} (-1)^\lambda c_\lambda \text{ pentru orice } \lambda$$

şi $$\chi(M) = \sum_{\lambda=0}^{p} (-1)^\lambda c_\lambda,$$

unde $R_\lambda(M)$ este numărul lui Betti de dimensiune λ.

Ca aplicaţii la acest capitol se dau: teorema secţiunii cu un hiperplan a unei varietăţi algebrice afine complexe a lui Lefshetz, teorema lui Reeb (dacă pe o n-varietate există o funcţie de C^∞ cu numai două puncte critice presupuse nedegenerate, această varietate este o n-sferă), triangularea de *cw* complex a spaţiului proiectiv complex cu calculul grupurilor de omologie întreagă.

Partea a doua. Se face o rapidă incursiune în geometria riemanniană (conexiune, derivată covariantă transport paralel, tensor de curbură, geodezice). Autorul foloseşte o expunere axiomatică, căreia îi dă realizarea geometrică.

Partea a treia. Defineşte o problemă variaţională pe o varietate, în particular problema geodezicelor. Se organizează mulţimea arcelor diferenţiabile pe porţiuni ce unesc două puncte $\Omega(M\,;\,p, q)$, $p, q \in M$, ca o varietate infinit dimensională şi se extinde în acest caz noţiunea de vector tangent. În acest fel problema aflării şi studierii extremelor problemei variaţionale se reduce la aceea a studierii unei funcţii diferenţiabile pe o astfel de varietate (infinit dimensională). Ca funcţională pentru problema geodezicelor se consideră

$E\frac{b}{a}(\omega) = \int_a^b \| \frac{d\omega}{dt} \|^2 \, dt$, unde : $\omega : [a, b] \rightarrow M$ cu $\omega(a) = p$, $\omega(b) = q$. Asociindu-se fiecărui drum diferenţiabil pe porţiuni care constituie un punct critic (deci o geodezică) un index λ, se demonstrează că :

Indexul λ al unei geodezice este egal cu numărul de puncte de pe geodezică conjugate de-a lungul geodezicei, considerate cu multiplicitatea respectivă.

Să considerăm un arc diferenţiabil pe porţiuni şi de-a lungul lui să luăm o mulţime de puncte date de parametrii $t_0, t_1, \ldots, t_n$ astfel încît $t_{i+1} - t_i$ să fie suficient de mic şi de asemenea prin $[t_o, t_1, \ldots, t_n]$ arcul constituit din mulţimea de bucăţi de geodezică ce unesc punctele $\omega(t_i)$ cu $\omega(t_{i+1})$.

În aceste condiţii, $\Omega(M\,;\,p, q)$ poate fi aproximat după n cu $\Omega(M, t_o, t_1, \ldots, t_n)$ care este o varietate de dimensiune finită şi pe care se poate aplica teoria lui Morse studiată în partea întîi, unde restricţia funcţiei dată de problema variaţională a geodezicelor constituie o funcţie diferenţiabilă.

Se demonstrează teoremele :

$\Omega(M\,;\,p, q)$ are tipul de omotopie al unui CW-complex numărabil cu o celulă de dimensiune λ pentru fiecare geodezică ce uneşte p cu q de index λ.

Ca aplicaţii se studiază laseurile peste sferă (loop space of sphere). Tot în această parte se analizează relaţia între invarianţii topologici şi curbură, demonstrîndu-se următoarea teoremă (ca generalizare a unei teoreme a lui E. Cartan) :

Dacă M este completă cu $< R(A, B), A, B > \leqslant 0$, atunci $\pi_i(M)$ sînt 0 pentru orice $i > 1$ şi $\pi_1(M)$ nu conţin elemente nenule de ordin finit.

De asemenea, dacă tensorul lui Ricci K este peste tot pozitiv definit, atunci $\Omega(M\,;\,p, q)$ are tipul de omotopie al unui CW-complex avînd un număr finit de celule în fiecare dimensiune.

Partea a patra. Constituie o parte aplicativă referitoare la grupuri Lie şi spaţii simetrice cu privire la geodezice şi puncte conjugate pe acestea, şi la tipul de omotopie al spaţiului de laseuri (loop space).

Tot în această parte sînt demonstrate teoremele de periodicitate ale lui Bott, anume :

$$\pi_i(G_m(C^{2m})) \cong \pi_{i+1}(SU(2m) \text{ pentru } i \leqslant 2\,m,$$

unde C este corpul numerelor complexe, $G_m(C^{2m})$ varietatea lui Grasman de dimensiune $2\,m$ iar $SU\ (2m)$ este grupul matricilor de determinant 1

$$\pi_i(G_m(C^{2m})) \cong \pi_{i-1}(U(m)) \text{ pentru } i \leqslant 2\,m$$

şi $$\pi_{i}-_1(U(m)) \cong \pi_{i-1}(U(m+1))\ldots \text{ pentru } i \leqslant 2m,$$

$$\pi_j\ (U(m)) \cong \pi_j\ (SU(m))$$

unde $U(m)$ este grupul transformărilor liniare ce păstrează produsul scalar.

Considerînd grupul stabil de omotopie al grupului unitar $\pi_j(U)$ avem

$$\pi_{i-1}(U) \cong \pi_{i+1}(U) \text{ pentru } i \geqslant 1,$$

unde

$$\pi_0(U) \cong \pi_2(U) \cong \ldots \cong 0$$
$$\pi_1(U) \cong \pi_3(U) \cong \ldots \cong Z$$

Autorul prezintă rezultatele lui Bott referitor la omotopia grupurilor ortogonale reale infinite, arătînd că pentru grupul ortogonal infinit $\mathbf{O}$, $\pi_i(\mathbf{O})$ este izomorf cu $\pi_{i+8}(\mathbf{O})$ (mai mult $\mathbf{O}$ și $\underbrace{\Omega\Omega\Omega\ldots}_{8}\Omega(\mathbf{O})$ au același tip de omotopie.

Calculînd $\pi_i(\mathbf{O})$ modulo 8 se obțin

$$\pi_1(\mathbf{O}) \cong \mathbf{Z}_2,\quad \pi_5(\mathbf{O}) \cong 0,$$
$$\pi_2(\mathbf{O}) \cong \mathbf{Z}_2,\quad \pi_6(\mathbf{O}) \cong 0,$$
$$\pi_3(\mathbf{O}) \cong 0,\quad \pi_7(\mathbf{O}) \cong 0,$$
$$\pi_4(\mathbf{O}) \cong \mathbf{Z},\quad \pi_8(\mathbf{O}) \cong \mathbf{Z}.$$

Pentru grupul simplectic infinit se obține

$$\pi_1(S_p) \cong 0,\quad \pi_5(S_p) \cong \mathbf{Z}_2,$$
$$\pi_2(S_p) \cong 0,\quad \pi_6(S_p) \cong \mathbf{Z}_2,$$
$$\pi_3(S_p) \cong 0,\quad \pi_7(S_p) \cong 0,$$
$$\pi_4(S_p) \cong \mathbf{Z},\quad \pi_8(S_p) \cong \mathbf{Z}.$$

D. Burghelea

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoremele de descompunere ale algebrei)**, 619 p., 25,50 lei.
D. BARBILIAN, **Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)**, 380 p., 7 lei.
JANKÓ BÉLA, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare**, 223 p., 8,85 lei.
N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU şi A. CORNEA, **Seminar S. Stoilow, 1959—1960, Teoria potenţialului pe suprafeţe riemanniene**, 160 p., 5 lei.
G. CIUCU şi R. THEODORESCU, **Procese cu legături complete**, 232 p., 9,85 lei.
C. CONSTANTINESCU, **Seminar M. Neculcea. Teoria mulţimilor**, 108 p., 3,25 lei.
C. CORDUNEANU, **Funcţii aproape-periodice**, 191 p., 8,30 lei.
ROMULUS CRISTESCU, **Spaţii liniare ordonate**, 332 p., 11,10 lei.
I. CUCULESCU, **Seminar O. Onicescu. Algebre Lie**, 148 p., 5,15 lei.
C. FOIAŞ, **Seminar M. Nicolescu, 1959—1960. Teoria spectrală în algebre Banach (necomutative) axată pe noţiunea de rezolventă**, 82 p., 2,85 lei.
ALEXANDRU FRODA, **Algebra superioară, (fundamente: mulţimi şi operaţii, divizibilitate, spaţii liniare, forme pătratice)**, 455 p., 24,50 lei.
GH. GALBURĂ, **Corpuri de funcţii algebrice şi varietăţi algebrice**, 180 p., 7,85 lei.
M. GHERMĂNESCU, **Ecuaţii funcţionale**, 523 p., 25,60 lei.
A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 484 p., 21,50 lei.
CAIUS JACOB, **Introduction mathématique à la mécanique des fluides**, 1288 p., 66,50 lei.
TRAIAN LALESCU, **Introducere în teoria ecuaţiilor integrale**, 135 p., 5,90 lei.
LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 52 p., 18,50 lei.
* * * **Lucrările celui de-al IV-lea Congres al matematicienilor romîni**, 228 p., 8,55 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie şi topologie, Iaşi 2—5 iunie 1958**, 264 p., 9,75 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie diferenţială din 9—12 iunie 1955, organizată de Secţia de ştiinţe matematice şi fizice a Academiei R.P.R.**, 368 p., 9,50 lei.
G. MARINESCU, **Spaţii vectoriale normate**, 295 p., 6 lei.
G. MARINESCU, **Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice**, 219 p., 8,80 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie neeuclidiană**, 144 p., 4,30 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă**, 495 p., 25,90 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă. Teoria corespondenţei**, 232 p., 10,50 lei.
GH. MIHOC şi V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 732 p., 34,70 lei.
GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 142 p., 8,55 lei; vol. II, 155 p., 8,25 lei.
GR. C. MOISIL, **Funcţionarea în mai mulţi timpi a schemelor cu relee ideale**, 279 p., 12 lei.
GR. C. MOISIL, **Introducere în algebră, I. Inele şi ideale**, vol. I, 256 p., 9,10 lei.
GR. C. MOISIL, **Matricele asociate sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale. Introducere în studiul cercetărilor lui I. N. Lopatinschi**, 64 p., 1,20 lei.
GR. C. MOISIL, **Scheme cu comandă directă cu contacte şi relee**, 205 p., 9,65 lei.
ALEXANDRU MYLLER, **Scrieri matematice**, 595 p. + 1 pl., 39,40 lei.
VERA MYLLER-LEBEDEV, **Lecţii de algebră**, 396 p., 8,75 lei.
MIRON NICOLESCU, **Analiza matematică**, vol. II, 420 p., 11,90 lei.
OCTAV ONICESCU, **Numere şi sisteme aleatoare**, 260 p., 11,20 lei.
OCTAV ONICESCU, **Strategia jocurilor. Cu aplicaţii la programarea liniară**, 228 p., 8,45 lei.
OCTAV ONICESCU şi COLAB., **Calculul probabilităţilor şi aplicaţii**, 788 p., 15 lei.
O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 123 p., 4,25 lei.
Opera matematică a lui Alexandru Pantazi, 496 p., 24,20 lei.
DIMITRIE POMPEI, **Opera matematică**, 535 p. + 1 pl., 30,20 lei.
N. RANCU şi L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicaţii în producţie**, 896 p. + 20 pl., 45 lei.
SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor boolene**, 159 p., 5,75 lei.
S. STOILOW, **Teoria funcţiilor de o variabilă complexă**, vol. I, 308 p., 10 lei; vol. II în colaborare cu Cabiria Andreian-Cazacu 379 p., 25,70 lei.
P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. I, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.
GHEORGHE ŢIŢEICA, **Geometria diferenţială proiectivă a reţelelor**, 287 p., 8 lei.
DRAGOŞ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 76 p., 3,15 lei.
SERGIU VASILACHE, **Elemente de teoria mulţimilor şi structurilor algebrice**, 235 p., 5 lei.
GH. VRĂNCEANU, **Leçons de géometrie différentielle**, vol. I., 407, p., 26,50 lei: vol. II, 428 p., 27,60 lei.
GH. VRĂNCEANU, **Lecţii de geometrie diferenţială**, vol. III, 454 p., 15 lei.

MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

Revista apare de 10 ori pe an.

Prețul unui abonament este de 120 lei.

În țară abonamentele se fac la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii și difuzorii voluntari din întreprinderi și instituții.

Orice comandă din străinătate (numere izolate sau abonamente) se face prin:

CARTIMEX
Căsuța poștală 134 — 135
București,
R. P. Romînă

sau prin reprezentanții săi din străinătate.

ST. CERC. MAT., TOM. 15, Nr. 4, P. 431—543, BUCUREȘTI, 1964

I. P. „Informația" — c. 1256

43831

Lei 12.—

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

5

TOMUL 15
1964

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. MIRON NICOLESCU – redactor responsabil;
Acad. GR. C. MOISIL – redactor responsabil adjunct;
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
GH. MARINESCU, Membru corespondent al Academiei R.P.R.;
CIPRIAN FOIAȘ – secretar de redacție.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: str. M. Eminescu, nr. 47.

Revista apare de 10 ori pe an

TOM. 15, Nr. 5
1964

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

S U M A R

Pag.

G. VRĂNCEANU și A. POPOVICI, Fundamentele teoriei generale a relativității. II 547
T. RUS, Asupra unui sistem formal. II 595
MIHAI ȘABAC, 𝔖-topologii compatibile cu structura de spațiu vectorial 617
V. VODNEV, Asupra unei clase de spații riemanniene parțial proiective 621
ANA DUCARU, Asupra soluției problemei mișcărilor de tip Poiseuille, în anumite cazuri particulare 635
ELENA UNGUREANU, Despre aproximarea unor mișcări plane pe sub baraje 639
I. SĂCUIU, Asupra q-derivabilității și q-integrabilității funcțiilor aleatoare 645
FLORIN CONSTANTINESCU, Asupra fixării unei variabile într-o distribuție de două variabile 653
V. ISTRĂȚESCU, Asupra operatorilor nucleari 661
V. ISTRĂȚESCU, Asupra spațiilor Banach cu bază numărabilă. II 665

RECENZIE 669

MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS ...CIÓS KÖZPONT

FUNDAMENTELE TEORIEI GENERALE A RELATIVITĂŢII. II

DE

G. VRĂNCEANU şi A. POPOVICI

III. SPAŢIU-TIMP ŞI MATERIE

A. ECUAŢIILE GRAVIFICE

Ecuaţiile general-covariante einsteiniene ale gravitaţiei au fost deduse de Einstein în 1915 pe cale fizică şi, în acelaşi an, de Hilbert pe cale variaţională (lagrangiană). Ulterior, H. Mandel (1926) şi I. B. Rumer au indicat o cale geometrică [25] (vezi şi [1], [2], [3] şi [26]).

a. *Deducerea fizică a ecuaţiilor gravifice.* Calea einsteiniană de deducere a ecuaţiilor gravifice se bazează pe trei criterii (postulate). În cele ce urmează vom da deducţiei einsteiniene o formă axiomatică mai riguroasă; postulatele einsteiniene 1, 2, 3 constituie atunci efectiv un sistem de 4+2+1 postulate.

Grupul *1* de postulate:

1 *a*) Proporţionalitatea (mai precis egalitatea cantitativă) a masei inerte şi masei grele (Einstein foloseşte în anumite lucrări echivalenţa dintre cîmpul gravific şi cîmpul de acceleraţie).

1 *b*) Proporţionalitatea dintre masă, energie, impuls (mai general) în virtutea covarianţei generale, proporţionalitatea tensorului M_{ik} al densităţii masei şi tensorului densităţii $T_{ik} \equiv c^2 M_{ik}$ al energiei-impulsului.

1 *c*) Identitatea tensorului metric g_{ik} cu potenţialele gravifice.

1 *d*) Determinarea tensorului g_{ik} (deci a proprietăţilor geometrice ale spaţiului şi timpului) de către tensorul energie-impuls total (negravific) simetric $T_{ik} \equiv T_{ki}$ (membrul *drept* al ecuaţiilor gravifice).

Rezultă: proprietăţile geometrice ale spaţiu-timpului, exprimate de membrul *stîng* al ecuaţiilor gravifice, sînt descrise — pe baza covarianţei generale — de asemenea de un tensor simetric H_{ik}.

Grupul *2* de postulate:

2 *a*) Tensorul H_{ik} e funcție doar a potențialelor gravifice g_{ik} (10 la număr) și a derivatelor lor de ordinul întîi și doi.

2 *b*) Tensorul H_{ik} e liniar în derivatele de ordinul doi $\partial^2_{lm}\, g_{ik}$ (în analogie cu ecuația gravifică clasică (I.3) a lui Poisson, verificată în primă aproximație de experiență).

Se demonstrează: singurul tensor de ordinul doi verificînd în V_n riemannian condițiile 2*a*), 2*b*) este o combinație liniară

$$H_{ik} \equiv \alpha R_{ik} + \beta R g_{ik} + \gamma g_{ik} \qquad \text{(III.1)}$$

a tensorului riemannian de curbură contractat R_{ik}, a tensorului Rg_{ik} și a tensorului metric g_{ik} (potențialul gravific) în V_n (α, β,γ fiind constante arbitrare) (teorema lui Vermeil [33]). Fie $\varkappa$ constanta gravifică einsteiniană (de dimensiunea LM^{-1}), c constanta vitezei relativist restrînse a luminii în cîmp față de S.C. inerțiale; fie [1], [2], [3] $\delta \equiv \sqrt{\varkappa}/c$. Densitățile spațiale (= tridimensionale) ale masei sau energiei m_0/r^3 sau W/r^3 și ale sarcinii e_0/r^3 metrizate (= înmulțite respectiv cu $\varkappa$ sau δ^2 și δ) au atunci dimensiunea L^{-2} a curburii. Aceeași dimensiune o au tensorii densității spațiale a masei sau energiei-impulsului M_{ik} sau T_{ik} (=ale densității cvadridimensionale = spațio-temporale ale acțiunii)

$$\overline{G}_{ik} \equiv \varkappa M_{ik} \equiv \delta^2 T_{ik} \qquad \text{(III.2)}$$

și vectorul densității spațiale curent-sarcină $s^i = \rho' u^i/c$ metrizat. Ecuațiile gravifice au atunci forma

$$H_{ik} = \overline{G}_{ik} \text{ (sau } H_{ik} = \varkappa M_{ik} \text{ sau } H_{ik} = \delta^2 T_{ik}). \qquad \text{(III.3)}$$

Grupul *3* de postulate:

Valabilitatea în spațiu-timp riemannian V_4 a ecuațiilor de conservare-transformare a densității energiei-impulsului:

$$(\overline{G}^k_i)_k = 0 \text{ sau } (\overline{G}^k_i \sqrt{g})_k = 0 \text{ sau } (T^k_i)_k = 0 \text{ sau } (M^k_i)_k = 0$$

$$\text{sau } \partial_k (\overline{G}^{ik}\sqrt{g}) - \overline{G}^{kl}\sqrt{g}\,\Gamma^i_{kl} = 0, \qquad \text{(III.4)}$$

( ) fiind simbolul derivatei covariante în V_4. Conform ecuațiilor gravifice (III.3) rezultă atunci legi similare de conservare-transformare

$$(H^k_i)_k = 0 \text{ sau } (H^k_i \sqrt{g})_k = 0 \qquad \text{(III.5)}$$

ale „curburilor einsteiniene" H_{ik} coordonată-durată; invers, (III.3), (III.5) dau (III.4). Notînd

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R, \qquad \text{(III.6)}$$

în geometria riemanniană sînt valabile identitățile (legile de conservare „tari") (identitățile lui Bianchi de două ori contractate):

$$(G^k_i)_k \equiv 0 \text{ sau } (G^k_i \sqrt{g})_k \equiv 0 \text{ sau } \partial_k (G^{ik}\sqrt{g}) - G^{kl}\sqrt{g}\,\Gamma^i_{kl} \equiv 0 \qquad \text{(III.7)}$$

şi anularea derivatei covariante $(g_{ik})_l$ — deci a divergenţei $(g^{ik})_k$ — a tensorului fundamental. Relaţiile (III.5), (III.7) determină astfel constanta necunoscută β/α $\left(\beta/\alpha \equiv -\frac{1}{2}\right)$. Punînd $\lambda \equiv -\gamma/\alpha$, ecuaţiile gravifice (III.3) iau forma

$$G_{ik} - \lambda g_{ik} = \overline{G}_{ik} \quad \left(\text{sau } R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} - \lambda g_{ik} = \overline{G}_{ik}\right), \qquad \text{(III.8)}$$

deci pentru $\lambda = 0$,

$$G_{ik} = \overline{G}_{ik} \left(\text{sau } R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \overline{G}_{ik}\right). \qquad \text{(III.9)}$$

Pentru tensorul energie-impuls nul $(\overline{G}_{ik} = 0)$ ecuaţiile gravifice (III.9) iau forma

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = 0 \ (G_{ik} = 0) \quad \text{sau} \quad \text{(a) } R_{ik} = 0, \text{(b) } R = 0\,; \qquad \text{(III.10)}$$

(III.10b) rezultă din (III.10a). Constanta λ are o semnificaţie astronomică („cosmologică"), avînd dimensiunea L^{-2}; $1/\sqrt{\lambda}$ este raza medie a metagalaxiei, λ fiind deci neglijabil la scara medie de mărime. Termenul λg_{ik} în (III.8) constituie în fond o parte suplimentară („cosmologică") a tensorului energie-impuls total $\overline{G}_{ik} + \lambda g_{ik}$ ($\overline{G}_{ik}$ şi λg_{ik} verificînd separat legile de conservare-transformare).

Conform teoremei Hilbert-Noether criteriul 3 (valabilitatea legilor de conservare-transformare energie-impuls), revine la covarianţa generală a legilor fizice (inclusiv a ecuaţiilor gravifice). Altfel spus : legile de conservare-transformare „slabe" (III.4) rezultă din legile de conservare-transformare „tari" (III.5) sau (III.7) şi din ecuaţiile gravifice (II.41) sau (II.42) general covariante (invers (II.41) sau (II.42) rezultă din (III.8) şi (III.3)). Rămîn doar şase ecuaţii gravifice independente ; şase potenţiale gravifice g_{ik} se determină în funcţie de celelalte patru arbitrare.

b. *Deducerea variaţională a ecuaţiilor cîmpului*. 1. Acţiunea constituie produsul variabilelor canonic conjugate (energie şi durată, lungimi şi impulsuri etc.). După cum rezultă din legile variaţionale şi din existenţa cuantumului universal (absolut) al acţiunii h, acţiunea constituie mărimea fundamentală a mecanicii analitice, a fizicii relativiste şi cuantice. Acţiunea constituie deci unitatea dialectică a proprietăţilor fizice şi geometrice ale materiei, pe baza primatului celor dintîi.

În cadrul deducerii variaţionale a legilor relativiste ale cîmpului, fie $\mathcal{L} \equiv L\sqrt{g}$ densitatea cvadridimensională a acţiunii (lagrangianul). Dacă variaţiile mărimilor de cîmp se anulează la distanţe mari (respectiv infinite) de sistemul material dat, densitatea acţiunii $\mathcal{L}$ nu e determinată decît pînă la un termen aditiv, divergenţa $\partial_i\,(A^i\sqrt{g})$ a unei densităţi vectoriale $A^i\sqrt{g}$ arbitrare.

Din legea minimei acţiuni

$$\delta\int_D \mathcal{L}\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{(III.11)}$$

(valoarea extremală totală a acţiunii $A \equiv \int_D \mathcal{L}\,\mathrm{d}x$ dintr-un domeniu oarecare D spaţio-temporal finit sau infinit de element de volum $\mathrm{d}x$) se deduc principalele legi fizice relativiste :

1° Ecuaţiile de cîmp (în particular cele gravifice şi electromagnetice) — prin variaţie directă.

2° Tensorul energie-impuls $\overline{G}_{ik}$ rezultă de asemenea prin variaţie directă a lui A în raport cu tensorul fundamental (D. Hilbert [34]). În V_n riemannian spaţiu-timp, sau C_n conform riemannian spaţiu-timp tensorul energie-impuls şi tensorul fundamental sînt deci canonic conjugate.

3° Legile de conservare-transformare (II.38) a energiei-impulsului şi (II.40) ale curburilor einsteiniene coordonate-durată — cît şi cele ale curenţilor (în particular ale 4-curentului electric) — se deduc : *a*) pe calea transformărilor infinitezimale ale lui (III.11) şi de asemenea *b*) drept consecinţe ale ecuaţiilor cîmpului (în particular ale celor gravifice şi totodată ale celor electromagnetice). Teorema 3° *b*) rezultă din teoremele 1° şi 2°.

Deducerea fizică şi deducerea lagrangiană a ecuaţiilor gravifice sînt echivalente : existenţa lagrangianului $\mathcal{L}$ constituie o consecinţă a ecuaţiilor cîmpului şi invers. Calea lagrangiană demonstrează de asemenea automat : *a*) compatibilitatea ecuaţiilor cîmpului ; *b*) proprietăţile fundamentale ale ecuaţiilor de cîmp drept consecinţe ale proprietăţilor lagrangianului ; *c*) posibilitatea simplificării considerabile a calculului diverselor cîmpuri speciale, fără utilizarea ecuaţiilor de cîmp explicite.

2. Cu toată fecunditatea ei extraordinară, teoria variaţională clasică şi în special cea cvadridimensională e limitată în conţinut şi formă.

a) Lagrangianul relativist general cvadridimensional nu constituie o mărime geometrică unitară, ci un cuplaj artificial al unor lagrangieni parţiali corespunzători cvadruplelor relativiste coordonate-durată, impuls-energie, curent-sarcină. Astfel, în lucrările lui D. Hilbert [34] şi H. Weyl [50] lagrangianul total se compune din lagrangianul gravific şi din lagrangianul electromagnetic (de tip Maxwell-Lorentz-Weyl sau de tip Mie).

b) Potenţialele gravifice g_{ik} şi electromagnetice λ_i constituie în teoria cvadridimensională variabile lagrangiane distincte.

c) Metoda variaţională se aplică în mod relativ arbitrar, în condiţii matematice diferite, lagrangienilor parţiali.

d) Lagrangianul relativist al teoriei clasice relativist-generale cvadridimensionale nu cuprinde cîmpurile mezonice, hiperonice şi spinoriale.

e) În toate teoriile variaţionale clasice, metoda variaţională e lipsită de interpretare geometrică.

nÎ teoria polidimensională a cîmpurilor tensoriale şi spinoriale — îndeosebi în teoria variaţională conformă implicînd automat legea reciprocitătății [1], [2], [3] aceste dificultăți sînt în esență depășite : *a*) lagrangianul total $\mathscr{L}'$ al cîmpurilor de spin maxim 2 constituie — în cazul cel mai simplu — densitatea curburii scalare $\mu^{n/2}\sqrt{\gamma}$ a lui C_n conform riemannian. *b*) Variabilele lagrangiene γ_{ab} (metrica lui C_n) reunesc potențialele gravifice, mezonice vectoriale (în particular cele electro- și gravito-magnetice) și pseudoscalare ; ecuațiile de cîmp tensoriale se arată a fi echivalente unor ecuații spinoriale neliniare de bază [1], [3] — generalizarea ecuației spinoriale neliniare relativist restrînse postulată de Heisenberg [8]. *c*) În spațiul-timp polidimensional C_8 al legii reciprocității (varietatea coordonată-durată-impuls-energie), puterea a patra a acțiunii constituie hipervolumul materiei, iar cuantumul acțiunii h geometrizat $l^2 \equiv h\varkappa/c$ constituie aria minimă (de ordinul lui 10^{-64} cm^2) definind o lungime absolută $l \approx 10^{-32}$ cm. Pe baza interpretării geometrice a acțiunii rezultă atunci interpretarea geometrică a lagrangianului $\mathscr{L}'$ și a metodei variaționale, ca element de volum și variație a acestuia, în metrica riemanniană de tip Vrânceanu a unui V_n definită prin $G_{ab} = \psi\,\gamma_{ab}$; conform ecuațiilor cîmpului rezultă, pentru mase de repaus nule, $\psi = \mu$ (= scalarul de curbură conform), iar în cazul maselor de repaus nenule, $\psi = J_0^{\pm}$ (= densitatea masei scalare respectiv pseudoscalare de tip Dirac) [1], [3].

c. *Deducerea geometrică a ecuațiilor cîmpului.* 1. Deducerea geometrică a legilor relativiste ale cîmpului inaugurată de H. Mandel [25] și dezvoltată de I. B. Rumer [25] ș.a. se bazează pe teoria scufundării spațiului timp riemannian V_4 în spațiul-timp pseudoeuclidian E_N (în cazul cel mai general, de 10 dimensiuni) (v. [1], [2], [3] și [26]).

Densitatea impuls-energie metrizată

$$\overline{G}_{ik} \equiv \overline{R}_{ik} - \frac{1}{2}\overline{R}\,g_{ik} \equiv \underset{\lambda}{b}_{il}\,\underset{\lambda}{d}{}^{l}_{k} - \frac{1}{2}\underset{\lambda}{b}_{lm}\,\underset{\lambda}{d}{}^{lm}\,g_{ik} \tag{III.12}$$

constituie o formă pătratică a tensorilor fundamentali $\underset{\lambda}{b}_{ik}$ de-a doua categorie ($\lambda, \mu = 5, \ldots, N$, în cazul cel mai general $\lambda, \mu = 5, \ldots, 10$). Tensorii $\underset{\lambda}{d}_{ik}$ joacă rolul unor „tensiuni”, tensorii $\underset{\lambda}{b}_{ik}$ rolul unor „deformări”, iar α_{iklm} este tensorul anizotropiei spațiului-timp riemannian V_4 (v. formula (II.16)). Relația (II.16) dintre tensorii $\underset{\lambda}{d}_{ik}$ și $\underset{\lambda}{b}_{ik}$ generalizează legea lui Hooke din teoria clasică a mediilor diformabile [25]. Aceasta nu înseamnă reducerea ecuațiilor cîmpului gravific la ecuații de tip mecanic ; dimpotrivă, legile mecanice macroscopice trebuie să rezulte ca medie statistică a legilor nemecanice și neliniare ale cîmpului în V_4. Se demonstrează de asemenea [26] că densitățile de curent $\underset{\lambda\mu}{s}{}^{i}$ (de tipul densității cvadricurentului mezonic L. de Broglie-Proca sau electric — Maxwell) constituie forme pătratice ale tensorilor $\underset{\lambda}{d}_{ik}$ și ale derivatelor lor covariante (deci conform ecuațiilor lui Codazzi contractate, forme pătratice ale tensorilor $\underset{\lambda}{d}_{ik}$ și ale torsiunilor = potențialelor vectoare mezonice, în particular electromagnetice). Densitățile energie-impuls $\overline{G}_{ik}$ și sarcină-curent $\underset{\lambda\mu}{s}{}^{i}$ descriu atunci proprietăţile rigide ale spaţiului-timp riemannian cvadridimensional V_4, scufundarea lui în spaţiul-timp pseudoeuclidian E_N.

2. Ecuaţiile gravifice einsteiniene (III.9) sînt echivlaente ecuaţiilor Gauss contractate

$$\text{(a) } R_{ik} = \overline{R}_{ik}, \text{ (b) } R = \overline{R} \text{ sau (a}'\text{) } R_{ik} = \underset{\lambda}{b}_{il}\, \underset{\lambda}{d}{}^{l}_{k}, \text{ (b}'\text{) } R = \underset{\lambda}{b}_{ik}\, \underset{\lambda}{d}{}^{ik}, \qquad \text{(III.13)}$$

iar ecuaţiile de conservare-transformare ale energiei-impulsului rezultă din ecuaţiile Codazzi contractate (sau din identităţile de conservare-transformare (III.7) ale curburilor einsteiniene coordonată-durată) şi din ecuaţiile gravifice (III.9) sau (III.13). Se demonstrează de asemenea [26] că ecuaţiile mezonice vectoriale (în particular cele electromagnetice) (divergenţe) de tipul sistemului II Proca sau Maxwell constituie o consecinţă a ecuaţiilor Ricci-Kühne şi a ecuaţiilor Codazzi contractate. În sfîrşit, dacă tensorii fundamentali de-a doua categorie $\underset{\lambda}{b}_{ik}$ („deformările") constituie funcţii diferenţiale de un anumit tip ale unor cvadrivectori $\underset{\mu}{\lambda}_i$ în V_4, ecuaţiile Codazzi contractate sînt consecinţe ale ecuaţiilor lui Gauss contractate (deci ale ecuaţiilor gravifice einsteiniene); în cazul general, mărimile de cîmp rigide şi intrinseci se determină atunci (în limitele covarianţei generale) complet pe baza ecuaţiilor cîmpului [25], [26].

3. Toate ecuaţiile de cîmp de ordinul doi tensorial (ecuaţiile Gauss şi Codazzi contractate) rezultă prin contracţie dintr-un sistem mai tare, ecuaţiile de cîmp de ordinul patru tensorial, de forma

$$M_{abcd} = 0 \qquad \text{(III.14)}$$

(M_{abcd} fiind curbura riemanniană de ordinul patru a spaţiului-timp de scufundare pseudoeuclidian E_N). Ecuaţiile (III.14) unifică în E_N ecuaţiile Gauss, Codazzi, Ricci-Kühne şi ecuaţiile care determină tensorii fundamentali de-a doua categorie $\underset{\lambda\mu}{c}_{ik}$, din V_4.

d. *Generalizarea ecuaţiilor gravifice.* 1) Fie în V_4 riemannian spaţiu-timp, W_{iklm} tensorul conform de curbură al lui Weyl, iar $g_{ii'kk'll'}$, $R_{ii'kk'll'}$, $W_{ii'kk'll'}$ anumite forme liniare ale tensorilor $g_{iklm} \equiv g_{il}\, g_{km} - g_{im}\, g_{kl}$, R_{iklm}, W_{iklm} (coeficienţii fiind componentele tensorului fundamental g_{ik}) (tensorii lui H. Lewinson şi E. Zeisler [27]) (v. şi [35]). În cazul tensorului energie-impuls nul ($\overline{G}_{ik} = 0$), pe baza variantei a doua a axiomatizării noastre a teoriei generale a relativităţii, ecuaţiile gravitaţiei pure în V_4 se reduc la unul din cele opt sisteme posibile :

$$\begin{array}{llr}
\text{(a) } R = \lambda, & \text{(a}'\text{) } G_{ik} - \lambda\, g_{ik} = 0, & \\
\text{(b) } W_{iklm} = 0, & \text{(b}'\text{) } W_{ii'kk'll'} = 0, & \\
\text{(c) } W_{iklm} = 0,\ R = \lambda, & \text{(c}'\text{) } W_{ii'kk'll'} = 0,\ R = \lambda, & \text{(III.15)} \\
\text{(d) } R_{iklm} + \lambda\, g_{iklm/3} = 0, & \text{(d}'\text{) } R_{ii'kk'll'} + \lambda\, g_{ii'kk'll'} = 0, &
\end{array}$$

(teorema lui Lewinson-Zeisler [27]) ($i,i',k,k',l,l' = 1, \ldots, 4$).

Sistemele (III.15b,c,d) sînt conform euclidiene; urmele în V_4 ale sistemelor (III.15b,b') sînt identic nule. Sistemele (III.15 a') şi (III.15 a,d') dau $\lambda = -R/4 = \text{const}$. Sistemul (III.15 a') constituie ecuaţiile einsteiniene ale gravitaţiei pure cu termen cosmologic, şi rezultă din (III.15d). În cazul $\overline{G}_{ik} \neq 0$ (tensorul energie-impuls nenul), ecuaţiile particulei de spin maxim 2 (= ecuaţiile cîmpurilor gravifice, mezonice vectoriale şi pseudoscalare unificate) iau în V_n (în particular în V_6) o formă analogă sistemelor (III.15) (în V_6 sistemele posibile sînt respectiv de ordin tensorial 0,2,4,6,8,10).

2) Fie

$$\overline{G} \equiv -\overline{R} \, (\equiv -\varkappa M \equiv -\delta^2 T) \qquad \text{(III.16)}$$

scalarul energie-impuls (rezultatul contracţiei identităţii (II.12). În absenţa termenului cosmologic ($\lambda = 0$), contracţia ecuaţiilor gravifice (III.9) dă $R = \overline{R}$. Ecuaţiile gravifice einsteiniene (III.9) iau forma

$$\text{(a)} \quad R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \overline{G}_{ik} \quad \text{sau} \quad \text{(b)} \quad \overline{G}_{ik} - \frac{1}{2} \overline{G} g_{ik} = R_{ik}. \qquad \text{(III.17)}$$

Ecuaţiile gravifice (III.17a) şi (III.17b) sînt echivalente.

În cazul general ($\lambda \neq 0$), contracţia ecuaţiilor gravifice (III.8) dă

$$-R - 4\lambda = \overline{G} \quad \text{sau} \quad -4\lambda = R - \overline{R} \qquad \text{(III.18)}$$

deci, punînd

$$V_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{4} R g_{ik}, \quad \overline{V}_{ik} \equiv \overline{G}_{ik} - \frac{1}{4} \overline{G} g_{ik} \qquad \text{(III.19)}$$

rezultă ecuaţiile

$$V_{ik} = \overline{V}_{ik} \quad \text{sau} \quad R_{ik} - \frac{1}{4} R g_{ik} = \overline{G}_{ik} - \frac{1}{4} \overline{G} g_{ik}. \qquad \text{(III.20)}$$

Ele verifică ,,legea de conservare-transformare energie-impuls, coordonate-durată'' unificată

$$(V_i^k)_k - (\overline{V}_i^k)_k = 0. \qquad \text{(III.21)}$$

Ecuaţiile gravifice (III.20) constituie o consecinţă a celor einsteiniene (III.8); teorema reciprocă nefiind valabilă (contracţia ecuaţiilor (III.20) dînd identitatea $0 \equiv 0$): toate soluţiile ecuaţiilor einsteiniene (III.8) verifică şi (III.20); ecuaţiile (III.20) mai admit însă şi alte soluţii. Conform unei teoreme a lui Weyl [60] (v. şi [1], [2], [3]), datorită urmei identic nule, ecuaţiile (III.20) derivă dintr-un lagrangian conform invariant în V_4 (lagrangianul $(R^2 - \overline{R}^2)\sqrt{g}$. De asemenea, dintre sistemele (III.15), sistemul (III.15d) (sau (III.15a') sau (II.18)) pentru $G_{ik} = 0$, dă prin contracţie

$$R_{ik} + \lambda g_{ik} = 0 \qquad \text{(III.22)}$$

de unde (sau din (III.15d′) sau din (III.20)), pentru $\overline{G}_{ik} = 0$, ecuaţiile

$$\text{(a)} \quad R_{iklm} - Rg_{iklm}/12 = 0, \quad \text{(b)} \quad R_{ik} - \frac{1}{4} R\, g_{ik} = 0, \qquad \text{(III.23)}$$

((III.23) fiind o generalizare a ecuaţiilor (III.15a)) de urmă identic nulă în V_4, derivînd deci de asemenea dintr-un lagrangian conform în V_4 (lagrangianul $R^2 \sqrt{g}$).

3) Pornind de la principiul lui Mach (relativitatea inerţiei) Einstein introdusese termenul cosmologic $-\lambda g_{ik}$ în ecuaţiile gravifice, în vederea formulării general-covariante a condiţiilor de frontieră (deci a caracterelor globale ale spaţiu-timpului V_4) corespunzătoare ecuaţiilor gravifice. În realitate, legile cele mai generale ale fizicii (de tipul ecuaţiilor (III.26) sau (III.23)), deduse din lagrangieni conformi nu trebuie să conţină nici o constantă *apriori*. Constantele fizice, azi stabilite în mod empiric (viteza relativist-restrînsă c a luminii în cîmp faţă de S.C. inerţiale; constanta gravifică einsteiniană $\varkappa$, constanta cosmologică λ, cuantumul acţiunii h, sarcinile şi masele proprii ale particulelor elementare etc.) trebuie să rezulte dimpotrivă din legile fizice (fie sub forma unor constante de integrare — cazul constantei c, cazul constantei cosmologice λ în ecuaţiile (III.8) şi (III.15), fie ca valori proprii ale unor ecuaţii spinoriale neliniare — ecuaţiile lui Heisenberg [8] şi generalizările ei [1], [3] — cazul sarcinilor şi maselor proprii ale particulelor elementare). Într-adevăr (III.15d), spre deosebire de ecuaţiile einsteiniene cosmologice (III.8) sau (III.15a, a′, c, c′, d, d′) sau (III.22) sau de ecuaţiile (III.15d), ecuaţiile gravifice generalizate (III.20) şi (III.23) (ca şi (III.9, 10)) nu conţin nici o constantă *apriori*. În ecuaţiile (III.8), conform lui (III.18), constanta cosmologică -4λ este una din valorile scalarului $R - \overline{R}$, deci pentru $\overline{R} = 0$ (în particular, cazul ecuaţiilor (III.15a′) ale gravitaţiei pure), una din valorile scalarului de curbură R. De asemenea, în ecuaţiile (III.15d, d′) constanta -4λ este una din valorile scalarului R.

c. *Proprietăţile ecuaţiilor gravifice.* Specificul determinismului relativist general rezultă din proprietăţile legii fundamentale relativist generale (ecuaţiile gravifice) : *a*) caracterul lor diferenţial (de unde existenţa vitezei limită), de unde unicitatea soluţiei problemei Cauchy (determinate de condiţiile de frontieră şi de cele iniţiale, deci de parametrii evoluţiei) : determinismul esenţă (lege) — fenomen ; *b*) caracterul neliniar al ecuaţiilor gravifice : determinismul stărilor materiei (cîmp-particulă, determinismul continuu-discontinuu) ; *c*) determinarea (între anumite limite) a mărimilor intrinseci de către cele rigide, în ultimă instanţă de către structura materiei (determinismul conţinut-formă) ; simetria ecuaţiilor gravifice în mărimile geometrice şi fizice (legea generalizată a reciprocităţii [1], [2], [3]) : determinismul formelor de existenţă a materiei.

1. Ecuaţiile gravifice constituie ecuaţii de cîmp (în limbaj matematic : ecuaţii cu derivate parţiale), valabile deci local şi momentan. Ecuaţiile gravifice (III.8) sau (III.15) sau (III.20) sau (III.23) sînt de-al doilea ordin diferenţial în potenţialele gravifice g_{ik}. Rezultă două teoreme de bază :

a) Ecuaţiile de propagare a frontului de undă (= ecuaţia varietăţilor caracteristice) a cîmpurilor de spin maxim 2 şi de masă de repaus nulă corespunzătoare ecuaţiilor gravifice (III.10), sistemului II al ecuaţiilor mezonice vectoriale (divergenţe de tip Maxwell-Proca) şi ale d'alembertianului riemannian (II.23) al cîmpurilor mezonice pseudoscalare coincide (caracteristicile depinzînd doar de derivatele de ordin maxim ale sistemului de ecuaţii considerat, în cazul de faţă de ordinul doi). Punînd $\Pi_i \equiv \partial_i \omega$, ecuaţia de propagare a frontului de undă are forma

$$\Pi^i \Pi_i = 0 \quad \text{sau} \quad g^{ik} \Pi_i \Pi_k = 0 \qquad \text{(III.24)}$$

(V. Fok [49]). Ecuaţia (III.24) e ecuaţia unui cvadrivector izotrop (= de valoare absolută nulă în varietatea impuls-energie V_4). Într-un S.C. inerţial, local (geodezic), ecuaţia (III.24) ia forma

$$\sum \Pi_i^2 = 0. \qquad \text{(III.24')}$$

Ecuaţia (III.24) implică propagarea din aproape în aproape în spaţiu şi timp a interacţiunii de orice natură a cîmpurilor de spin maxim 2, deci existenţa vitezei limită identice de propagare a oricărei interacţiuni (V. Fok) de spin maxim 2 (pentru mase de repaus nule: a gravitaţiei, a electromagnetismului şi a particulelor χ ale lui I. B. Rumer, de spin 0). Această viteză e tocmai $f \equiv \sqrt{-g_{44}}$ (viteza variabilă în timp şi spaţiu a luminii în cazul S.C. local geodezic (metrica (II.14)), viteza c a luminii în cîmp faţă de S. C. inerţiale — baza axiomei (c) în axiomatizarea noastră). Bicaracteristicile ecuaţiilor gravifice sînt geodezice de lungime nulă $ds^2 = 0$ (descrise tocmai de particulele de spin maxim 2 şi de masa proprie nulă.

b) Presupunem într-o vecinătate D_0 a hipersuprafeţei spaţio-temporale Γ îndeplinite următoarele condiţii :

1° potenţialele gravifice g_{ik} şi derivatele lor temporale $\partial_4 g_{ik}$ admit derivate parţiale pînă la ordinul cinci, respectiv patru, continue, finite şi verificînd condiţiile lui Lipschitz ;

2° pe hipersuprafaţa Γ, distanţa cvadridimensională (II.7) este de tip hiperbolic normal (suma de trei pătrate pozitive şi unul negativ) — deci condiţia (I.10). În acest caz, problema Cauchy (determinarea potenţialelor gravifice g_{ik} în afara lui Γ) admite pentru ecuaţiile gravitaţiei pure (III.10) o soluţie unică în vecinătatea lui Γ (soluţie admiţînd derivate parţiale pînă la ordinul patru continue şi finite). Soluţia e determinată pînă la o transformare a S.C. care conservă valorile numerice ale coordonatelor în orice punct al lui Γ şi datele Cauchy (g_{ik}, $\partial_l g_{ik}$) pe Γ (teorema Fouret-Lichnerowicz [24], [48]).

2. Ca şi curburile R^i_{klm}, R_{ik}, R ca atare, ecuaţiile gravifice sînt neliniare în cîmpurile gravifice Γ^i_{kl} şi în potenţialele gravifice g_{ik}, deşi liniare în derivatele de ordinul doi $\partial^2_{lm} g_{ik}$ ale potenţialelor gravifice („ecuaţii cvasiliniare''). În consecinţă, cîmpurile (ca şi forţele şi potenţialele) gravifice generate de mase nu se suprapun mecanic, ci se modifică reciproc : cîmpul gravific determinat de un sistem de mase nu constituie suma cîm-

purilor gravifice parţiale determinate de fiecare masă în parte; rezultă în fond existenţa unui cîmp gravific maxim — soluţie explicită a ecuaţiilor generalizate, conforme ale gravitaţiei [1], [2], [3]. Din caracterul neliniar al ecuaţiilor gravifice rezultă de asemenea:

a) Legea de mişcare a particulei pe geodezică în V_4 sau V_n polidimensional (v. pag. 582);

b) Defectul de masă relativist. Ca şi cîmpurile (forţele, potenţialele), nici masele generatoare ale cîmpului gravific nu se suprapun mecanic, ci se modifică reciproc. În cazul ciocnirilor relativiste, masa sistemului e superioară sumei maselor componente; dimpotrivă, masa nucleului e inferioară sumei maselor particulelor nucleare izolate dinaintea fuziunii acestora în nucleu (o parte a maselor individuale ale particulelor substanţei transformîndu-se în masa cîmpului nuclear — mai precis în masa de mişcare a fotonilor emişi cu ocazia fuziunii) şi în masa de mişcare a unor particule de substanţă emise. Ca efect neliniar, defectul de masă reflectă neaditivitatea maselor şi ca atare interacţiunea universală de tip nemecanic. Defectul de masă a fost efectiv dedus — alături de efectele neliniare ale polarizării cîmpului material şi ale transformării reciproce a particulelor — din ecuaţiile spinoriale ale lui Dirac — cu toată forma liniară clasică a acestora. (În cazul cîmpului spinorial pur vezi W. Thirring [36].) Un defect de masă rezultă de asemenea din teoria fuziunii particulelor elementare (L. de Broglie); din forma ei general covariantă (hexadimensională, spinorială şi tensorială) rezultă în particular relaţiile generale dintre tensorii sarcină-curent (tensorii Dirac unificaţi în V_6) şi tensorii mezonici unificaţi în V_6, în particular posibilitatea formării prin fuziune a unor particule de masă de repaus nenulă, pornind de la particula de masă de repaus nulă, diferenţa de masă fiind datorită cvadricurenţilor particulelor fuzionate (deci de natură electro-magnetică).

3.*a*) Densitatea locală energie-impuls (III.2) în V_4 constituie „tensorul proprietăţilor rigide" — formă biliniară (III.12) a deformărilor (tensorilor fundamentali de a doua categorie) $\underset{\lambda}{b}_{ik}$ şi a „tensiunilor" $\underset{\lambda}{d}_{ik}$. Tensorul densităţii energie-impuls T_{ik} (măsura locală spaţio-temporală a mişcării şi totodată datorită proporţionalităţii sale cu tensorul masei M_{ik}, măsura locală a densităţii materiei) determină proprietăţile intrinseci, anume valorile locale ale curburilor contractate R_{ik}, R şi deci indirect cîmpurile gravifice Γ^i_{kl} şi în ultimă instanţă potenţialele gravifice g_{ik}.

b) Ecuaţiile gravifice (III.17) ca şi cele generalizate (III.20) sînt simetrice în curburile riemanniene coordonate-durată R_{ik}, R şi în tensorii energie-impuls $\overline{G}_{ik}$, $\overline{G}$. De asemenea, ecuaţiile gravifice einsteiniene (III.9) ca şi ecuaţiile de conservare-transformare (III.7) şi (III.4) sînt simetrice în curburile einsteiniene coordonate-durată şi în tensorii energie-impuls $\overline{G}_{ik}$, iar cele generalizate, (III.20), (III.21), în tensorii V_{ik} şi $\overline{V}_{ik}$. Ecuaţiile gravifice şi ecuaţiile de conservare-transformare verifică deci o lege mai generală — legea reciprocităţii — simetria legilor fizice în mărimile canonic-conjugate (coordonate şi impulsuri, durată şi energie [6]) (v. şi [1], [2], [3], [21]). Ea enunţă de fapt simetria cantitativă şi asimetria calitativă a legilor fizice în mărimile geometrice şi fizice — în interpretarea geometrică, în mărimile intrinseci și rigide. Legea reciprocității rezultă deci din ecuațiile gravifice (III.7) sau (III.9) sau (III.20). Legea reciprocității este verificată de asemenea de ecuațiile canonice ale mecanicii analitice și de legile fundamentale ale teoriei cuantice relativiste a cîmpului (expresia fazei de undă, relațiile de imprecíziune etc. [47]). Sub forma ei generalizată ([1], [2], [3]), în mărimile cosmice și proprii, spațiale și temporale, legea reciprocității este de asemenea verificată de teoria generală a relativității.

f. *Cîmpul sferic neutru.* În cazul unei particule punctuale sau sferice neutre, cu centrul în originea O, în repaus spațial într-un S.C. legat de O, de masă totală m_0 fie tensorul energie-impuls nul ($\overline{G}_{ik} = 0$), r fiind raza vectoare corespunzătoare punctului P. Ecuațiile gravifice (III.10) dau în acest caz intervalul $\mathrm{d}s^2$ al lui Schwarzschild „exterior" într-un anumit S. C. :

$$\mathrm{d}s^2 \equiv \mathrm{d}\sigma^2 - f^2\,\mathrm{d}t^2 \equiv h^2\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2) - f^2\mathrm{d}t^2 \equiv \mathrm{d}r'^2 + $$

$$+ r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) - c^2\,\mathrm{d}t'^2 \qquad \text{(III.25)}$$

$$(1/h^2 \equiv f^2/c^2 \equiv 1 - 2\,m/r,\ m \equiv \varkappa\, m_0). \qquad \text{(III.26)}$$

Potențialele și cîmpul gravific sînt deci la rîndul lor statice avînd forma generală statică (II.26) și sferice. Rezultă :

1. Mărimea $m = \varkappa\, m_0 = \delta^2 W$ de dimensiunea lungimii este „raza de gravitație" a masei m_0 sau a energiei W.

2. Intervalul $\mathrm{d}s^2$ e același pentru o masă în repaus neutră cvasipunctuală sau sferică. Mărimea $m/r \equiv \varkappa\, m_0/r$ este tocmai potențialul gravific newtonian generat de masa totală m_0 la distanța r.

3. Congruențele ortogonale

$$\mathrm{d}s^{(1)} \equiv \mathrm{d}r' \equiv h\mathrm{d}r,\quad \mathrm{d}s^{(4)} \equiv f\,\mathrm{d}t \equiv c\mathrm{d}t' \qquad \text{(III.27)}$$

(lungimea și durata proprii) sînt în S.C. dat respectiv lungimea infinitezimală radială în P a unui obiect (de exemplu a unei rigle așezate în direcția OP) și durata infinitezimală în P a unui proces, ambele în absența cîmpului gravific (deci pentru densități limită locale și momentane infinitezimale ale materiei în P). Diferențialele de coordonate $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}t$ (lungimea și durata cosmică) corespund prezenței cîmpului gravific, datorit masei grele m_0. În S.C. dat, cu originea în centrul O a masei grele, avem relația dintre mărimile cosmice și proprii (III.27) sau

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}r \equiv \mathrm{d}r'/h \equiv f\,\mathrm{d}r'/c, \quad \mathrm{d}t = c\,\mathrm{d}t'/f, \\ &[\mathrm{d}x^1 \equiv (f/c)\ \mathrm{d}s^{(1)},\ \mathrm{d}x^4 \equiv (c/f)\,\mathrm{d}s^{(4)}]. \end{aligned}\right. \qquad \text{(III.27')}$$

Datorită cîmpului gravific în *S.C. dat*, corpurile din vecinătatea lui P situate la distanța $r = OP$ de centrul masei grele, se contractă deci în direcția radială, iar fenomenele fizice din P sînt încetinite. Dimpotrivă, în *S.C. dat*, lungimile situate în direcția tangențială ($\perp \overline{OP}$) nu suferă nici o deformare în cîmp gravific. Deformarea relativist-generală a lungimilor și duratelor este datorită interacțiunii (gravifice), iar deformarea lor relativist-restrînsă e datorită mișcării.

4. Produsul mărimilor cosmice (relative) este egal cu produsul mărimilor proprii (absolute), deci independent de cîmpul gravific exterior:

$$\mathrm{d}r\ \mathrm{d}t \equiv \mathrm{d}r'\ \mathrm{d}t'\ [\mathrm{d}x^1\ \mathrm{d}x^4 \equiv \mathrm{d}s^{(1)}\ \mathrm{d}s^{(4)}]. \qquad \text{(III.28)}$$

5. Intervalul $\mathrm{d}s^2$ implică o singularitate corespunzătoare razei $r = 2\,m$: pentru $r = 2\,m$, viteza f a luminii se anulează, iar în (II.27') mărimile cosmice $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}t$ tind respectiv spre zero și infinit. Formulele de mai sus ale potențialului Schwarzschild exterior sînt deci valabile pentru $r > 2\,m$.

6. Făcînd abstracție de două dimensiuni spațiale, geometria *spațială* a cîmpului Schwarzschild exterior de metrică (III.25) e geometria unei suprafețe parabolice cu vîrful în O' $(r = 2m)$, de ecuație $z^2 = 8\,m\,(r = 2m)$. Dimpotrivă, geometria *spațio-temporală* a cîmpului Schwarzschild exterior e geometria unui V_4 riemannian scufundat într-un E_6 pseudoeuclidian; metrica (III.25) e deci de clasa II.

7. După cum a arătat de asemenea Schwarzschild, în interiorul unei sfere fluide incompresibile, statice, adiabatice și neutre, de rază R și de masă m_0, este valabilă geometria *spațială* a unei hipersfere $\sum (x^i)^2 \equiv \alpha^2$ scufundată într-un spațiu cvadridimensional (cea de-a patra dimensiune a hipersferei fiind o funcție omografică a presiunii locale din interior [45], [50] corespunzînd în acest sens densității curentului de impuls = energiei potențiale); raza hipersferei este $\alpha \equiv R\sqrt{R/2m}$. Cea de-a 5-a dimensiune este timpul; metrica *spațio-temporală* Schwarzschild „interioară" $\mathrm{d}s^2$ e de clasa I, deci scufundată într-un E_5 pseudoeuclidian.

g. *Cîmpul electrogravific.* Teoremele de mai sus se extind la cîmpul gravific determinat de o masă punctuală sau sferică m_0 și sarcina electrică e_0, cu centrul în O, în repaus spațial $(\overline{G}_{ik} \not\equiv 0)$. Intervalul $\mathrm{d}s^2$ are forma generală (III.25); potențialele gravifice h^2, f^2 sînt însă date de

$$1/h^2 \equiv f^2/c^2 \equiv 1 - 2m/r + e^2/2r^2\ (m = \varkappa\, m_0,\ e = \delta\, e_0). \qquad \text{(III.29)}$$

Potențialul electrostatic este tocmai cel coulombian clasic $-e_0/r$. În (III.29) se adaugă potențialului gravific newtonian $-\,2m/r$, termenul electric $e^2/2r^2$, datorit cîmpului gravific al sarcinii electrice: atracției newtoniene i se opune o repulsie gravifică. Rezultă:

1. Lungimea $e = \delta e_0$ este „raza de gravitație a sarcinii electrice" e_0 $(\delta \equiv \sqrt{\varkappa}/c)$. Teoria generală a relativității duce deci la reprezentarea nu numai a timpului $t = -ix^4/c$ ci și a masei m_0 (sau energiei W) și impulsului, sarcinii e_0 și a curentului prin lungimi, deci la omogenizarea proprietăților fizice fundamentale ale materiei — interpretabile ca dimensiuni ale materiei într-un spațiu-timp polidimensional al reciprocității. Razele gravifice ale masei (energiei) și sarcinii particulei (cît și ale stelelor) sînt extrem de mici (pentru electron, $m \approx 10^{-54}$ cm, $e \approx 10^{-32}$ cm, în comparație cu dimensiunile spațiale (raza „electrică" clasică a electronului

$$a \approx e_0^2/4\,W = e^2/4\,m \approx 10^{-13}\ \text{cm}, \qquad \text{(III.30)}$$

raza „magnetică” $b \equiv (M/W)^{1/3} \approx 10^{-10}$ cm, de ordinul lungimii de undă Compton $h/m_0 c$, M fiind momentul magnetic, h cuantumul acțiunii).

2. La distanțe spațiale r de ordinul razei clasice a particulei electrizate $a \equiv e_0^2/4\,W = e^2/4m$, termenul electric $e^2/2r^2$ (neglijabil pentru $r \gg a$) devine comparabil cu cel gravific newtonian. Punînd

$$m_g \equiv m - e^2/4r \equiv m\,(1 - a/r), \qquad \text{(III.31)}$$

potențialul gravific (III.29) ia forma

$$1/h^2 = f^2/c^2 = 1 - 2m_g/r \qquad \text{(III.29')}$$

analogă potențialului (III.26) al lui Schwarzschild. În punctul P de distanță $OP = r$ de la centrul O al sarcinii punctuale, se află deci masa gravifică locală m_g. Aplicînd aceste rezultate particulei elementare electrizate (de pildă electronului), pentru orice r (H. Weyl [50]) rezultă : masa totală m a particulei e suma celei gravifice m_g (generatoarea potențialului gravific (III.29')) și a celei electromagnetice (în cazul de față electrostatice)

$$m_e \equiv e^2/4r \equiv ma/r \qquad \text{(III.31')}$$

(energia electrostatică maxwelliană fiind tocmai $e_0^2/2r$). Masele variabile m_g, m_e (funcții ale razei vectoare) ale particulei sînt distribuite în cîmp, în tot spațiul-timp infinit. Pentru $r = a$ (raza clasică electrică a particulei), m_g se anulează ; pentru $r < a$ („interiorul particulei”), masa (și energia gravifică) locală m_g și densitatea corespunzătoare m_g/r^3 a masei (și energiei) gravifice sînt negative (în sensul teoriei clasice relativiste a electronului lui Dirac). Pentru $r > a$ („exteriorul particulei” sau „cîmp”), avem $m_g > 0$.

3. În centrul O al particulei ($r=0$) densitățile locale ale masei și energiei (gravifice m_g/r^3 și electromagnetice m_e/r^3) — ca și masele locale gravifice și electromagnetice m_g, m_e — sînt infinite (cu semn negativ). În exteriorul particulei densitățile scad în valoare absolută cu distanța, fiind nule la infinit.

Masa totală m a particulei se poate defini deci în trei moduri : a) ca limită a masei locale gravifice m_g pentru $r \to \infty$; b) ca valoare a masei locale electromagnetice m_e corespunzătoare razei clasice a particulei ; c) ca integrală extinsă asupra întregului spațiu exterior razei clasice a particulei, exprimată în ultimă instanță printr-o integrală simplă

$$m \equiv \frac{1}{4} e^2/a \equiv \frac{1}{4} \iiint \frac{e^2}{r^4}\, \mathrm{d}V. \qquad \text{(III.32)}$$

Metrica Reissner-Weyl duce la un model cvasiclasic al relațiilor de impreciziune [1], [2]: determinarea precisă a masei (sau energiei m totale potențiale=a curentului de impuls) — deci localizarea precisă a particulei în varietatea V_4 impuls-energie — implică extinderea ei spațială infinită în varietatea V_4 coordonată-durată ($r \to \infty$). Invers, localizarea precisă a particulei în V_4 ($r \to \infty$) implică masa (energia locală) m_g, $m_e \to \infty$ ca fiind infinită ; relațiile de impreciziune iau forma

$$r\,m_e = am\ (\,= e^2/4) \quad \text{sau} \quad r\,(m - m_g) = m_e\ (\,= e^2/4). \qquad \text{(III.33)}$$

Aceste relații verifică legea reciprocității în r și $\bar{r} = m_e\ (=m - m_g)$, în a și $m \equiv \bar{a}$ [2].

h. *Cîmpul gravific slab.* 1. În cazul densității reduse a masei de repaus a cîmpului gravific cvasistatic ($\partial_l\, g_{ik} \approx 0$) și viteze spațiale mici față de viteza luminii ($v \ll f$), dintre cele zece componente energie-impuls T_{ik}, doar densitatea de repaus $T_{44} \approx c^2\, \mu'$ a energiei are o valoare apreciabilă. Potențialul gravific

$$-\,g_{44} = f^2 = c^2 + 2\,\Phi \qquad \text{(III.34)}$$

(pătratul vitezei variabile în spațiu a luminii e atunci proporțional potențialului gravific newtonian Φ). Ecuațiile gravifice einsteiniene (III.9) iau atunci în primă aproximație forma ecuației clasice a lui Poisson (I.3) :

$$\Delta\,\Phi \equiv \varkappa\, c^2\, \mu'/2 \qquad \text{(III.34')}$$

iar ecuația mișcării particulei pe o linie geodezică (v. jos, formula (IV. 26) se reduce la ecuația newtoniană (I.4)

$$a_\alpha = -\,\partial_\alpha\, \Phi \qquad \text{(III.35)}$$

a mișcării ei în cîmp gravific ; accelerația a_α (spațială $\bar{a}$ de componente a_α e gradientul cu semn schimbat al potențialului gravific static newtonian). Ecuațiile (III.34), (III.35) sînt în concordanță aproximativă cu experiența.

Prin comparația ecuației (III.34) cu ecuația (I.3) rezultă de asemenea relația dintre constantele gravifice newtoniană k și einsteiniană $\varkappa$ ($c =$ = viteza luminii în cîmp) :

$$\varkappa \equiv 8\pi\, k/c^2 \qquad \text{(III.36)}$$

și implicit semnul pozitiv al constantei gravifice einsteiniene $\varkappa$. În consecință, în stadiul ei actual, fizica teoretică nu explică nici valoarea, nici semnul pozitiv al constantei gravifice (legat de existența atracției universale a maselor — presupuse de același semn) ; ambele sînt date empiric.

2. Pentru densități foarte reduse ale materiei (deci pentru cîmpuri gravifice infinitezimale) și viteze spațiale v oarecare, termenii neliniari (produse ale cîmpurilor gravifice) din ecuațiile gravifice (III.9) se pot neglija, iar $\rho_{ik} \equiv g_{ik} - \delta_{ik}$ constituie abaterile potențialelor gravifice g_{ik} de la valorile relativist restrînse constante δ_{ik}. Termenii liniari ai ecuațiilor (III.9) iau atunci forma ($\square \equiv \sum \partial_i^2$ fiind operatorul lui d'Alembert, $\rho \equiv \rho_{ii}$)

$$\square \left(\rho_{ik} - \frac{1}{2}\, \rho\ \delta_{ik} \right) \equiv -\,2\,\delta^2 T_{ik}\,. \qquad \text{(III.37)}$$

Aceste ecuații sînt absolut analoge ecuațiilor maxwelliene liniare electromagnetice ale cvadripotențialelor φ_i, în funcție de densitățile s_i ale cvadricurentului electric. Rezultă propagarea în cîmpul material a gravitaţiei prin unde gravifice „tensoriale" (cu viteza c a luminii în cîmp) analoge undelor electromagnetice „vectoriale". Rezultă, de asemenea, în primă aproximaţie, potenţialul gravific newtonian, iar abaterile de la mecanica newtoniană sînt de ordinul doi în $\beta \equiv v/c$, în concordanţă cu experienţa. În regiunile de densitate nulă a energiei-impulsului ($T_{ik} = 0$), există unde gravifice plane. În particular, orice mase oscilante produc unde gravifice de energie totală pozitivă, determinate de derivatele de ordinul trei ale momentelor de inerţie. Energia radiaţiei gravifice e în condiţii obişnuite foarte redusă în comparaţie cu cea a radiaţiei electromagnetice şi cu energia sistemelor astronomice (pentru sistemul solar, radiaţia gravifică este de cca. 10^{24} ori mai mică decît cea electromagnetică, de cca. 4.10^6 t/s). Dimpotrivă, absorbţia undelor gravifice de către un sistem material, de dimensiuni mici în raport cu lungimea de undă, ar putea fi apreciabilă [45].

Teoria gravifică liniarizată a cîmpului slab (continuă sau cuantică) duce la particulele ipotetice de spin 2 („gravitonii" transportînd gravitaţia) ea nu determină însă caracterul soluţiilor riguroase neliniare. Totuşi, existenţa unor particule individuale ataşate unui cîmp de natura dată are un dublu sens : *a*) în sens cuantic, particula ca întreg relativ indivizibil (de raze de repaus, masă de repaus şi sarcini bine determinate) ; *b*) în sens topologic, particula ca regiune a cîmpului relativ localizată în varietăţile coordonate-durată V_4 şi energie-impuls $\overline{V}_4$ (şi eventual sarcină curent $\overline{\overline{V}}_4$). Într-o teorie neliniară, individualitatea oricărei particule — ca întreg şi ca regiune de cîmp — este foarte redusă în comparaţie cu teoriile liniare clasice : pe de o parte, a „doua cuantificare" îşi pierde sensul clasic, iar pe de altă parte particula e o regiune („singularitate") relativ întinsă, nepunctuală („nelocală") a cîmpului. Totuşi, în cel de-al doilea sens, caracterizînd particula ca o concentrare a materiei şi a mişcării cîmpului în volume reduse, independent de cea de-a doua cuantificare, categoria particulă îşi păstrează sensul şi într-o teorie neliniară.

În teoria conformă a cîmpului (implicînd automat legea reciprocităţii), punînd raza vectoare spaţială $r = ar'$ (a fiind raza particulei de tip dat), rezultă [1], [2], [3] existenţa a două singularităţi ($r = 0$, $r = a$) corespunzătoare funcţiilor de tipul

$$\bar{r} \equiv am/r, \ \bar{\bar{r}} = a\,e/(a - r), \ [\bar{r}' = 1\,/\,r', \bar{\bar{r}}' = 1/(1 - r')]. \quad \text{(III.38)}$$

Cuantificarea a doua revine atunci la existenţa valorii $r = a(\bar{r} = m)$ corespunzătoare singularităţii lui $\bar{\bar{r}}$ [1], [2], [3] ; existenţa singularităţilor şi cuantificarea a doua se găsesc deci indisolubil legate [1], [2], [3]. Singularitatea $r = 0$ corespunde infinitului *local* al energiei-impulsului, iar singularitatea $r = a$ infinitului *local* al sarcinii-curentului. În măsura însă în care scade gradul de localizare a particulei în varietatea coordonată-durată V_4 — deci scade ordinul singularităţii spaţio-temporale a cîmpului reprezentînd centrul O al particulei ($r = 0$), se accentuează — pe baza relațiilor de impreciziune — localizarea particulei în varietatea impuls-energie V_4 (deci preciziunea energiei și impulsului atașate particulei) și invers.

B. GEOMETRIE ȘI FIZICĂ

a. *Concepțiile lui Lobacevski și Riemann*. Dependența structurii geometrice a spațiului și timpului de structura și mișcarea materiei a fost anticipată de Lobacevski și Riemann.

1. Lobacevski postulează dependența proprietăților geometrice ale spațiului de repartiția maselor în univers ; el militează împotriva apriorismului kantian și pentru legarea geometriei de fizică.

În lecția sa inaugurală *Despre ipotezele aflate la bazele geometriei* (1854), Riemann pune problema existenței unor etaloane (unități de măsură) fundamentale, cu toată alegerea arbitrară a unităților de măsură în geometrie. Riemann distinge spații continue și spații discontinue (discrete), formate din elemente fundamentale finite relativ indivizibile (lungimi, arii sau volume minime). Pentru un spațiu discontinuu, măsura fiecărui domeniu — deci etalonul — este dat automat prin numărul elementelor constitutive.

„Problema valorii axiomelor geometrice în infinitul mic este legată de problema fundamentului intern al măsurii spațiului. În cazul unei mulțimi discrete, principiul etalonării este conținut chiar în noțiunea acestei mulțimi ; în cazul unei mulțimi continue însă, el trebuie să aibă o altă bază. În consecință, realitatea aflată la baza spațiului trebuie să constituie o mulțime discretă — sau însă, fundamentul etalonării trebuie căutat în afara spațiului, în forțe de legătură acționînd asupra acestuia. Răspunsul la această problemă poate fi găsit doar plecînd de la concepția de pînă acum a fenomenelor, fundată de Newton și prin modificarea ei treptată pe baza faptelor inexplicabile pe această bază. Cercetări de tipul celei prezente, bazate pe noțiuni generale, nu pot servi decît la eliminarea limitelor noțiunilor și la lichidarea barierelor progresului cunoașterii interdependenței obiectelor, bariere condiționate de prejudecăți tradiționale. Aceste concluzii ne duc în domeniul altei științe — în domeniul fizicii. . .”.

2. Riemann neagă deci independența proprietăților geometrice ale spațiului de fenomenele fizice ; materia însăși determină măsura spațiului. Prima idee a lui Riemann duce direct la geometria cuantică (geometria spațiului-timp relativist discontinuu), cea de-a doua — la teoria generală a relativității deci la „teoria geometrică a gravitației” sau la teoria gravifică a geometriei — V. Fok. În momentul apariției lucrării lui Riemann, ambele idei constituiau doar ipoteze îndrăznețe. Din punct de vedere logic și istoric, unificarea geometriei și gravitației și condiționarea lor de către materie presupune, la rîndul ei, teza unității cvadridimensionale relativiste a spațiului și timpului ca formă de existență a materiei, iar geometria discontinuă presupune dezvoltarea prealabilă a teoriei cuantice relativiste a cîmpului.

b. *Conţinut şi formă; materie şi mişcare.* 1. Fizica clasică consideră spaţiul şi timpul ca un cadru dat, imuabil şi absolut al materiei, cadru considerat independent de fenomenele fizice. Dimpotrivă, teoria einsteiniană a gravitaţiei reflectă unitatea şi interdependenţa dintre materie şi spaţiu-timp, unitate bazată pe primatul materiei. Densitatea materiei (măsurată prin tensorul densităţii energie-impuls G_{ik}) determină primar structura geometrică (mai precis curbura locală şi momentană) a spaţiului şi timpului, prin potenţialele gravifice (metrica) g_{ik} şi deci prin cîmpurile gravifice (conexiunile) Γ^i_{kl}. Cu cît creşte densitatea materiei într-un punct şi moment, cu atît creşte gravitaţia, cu atît creşte şi curbura, cu atît variază (faţă de cazul limită relativist-restrîns al densităţii cvasiconstante şi cvasinule a materiei în E_4 pseudoeuclidian) — lungimile şi duratele în V_n. Curbura locală şi momentană R^i_{klm} determină la rîndul ei mişcarea materiei, în momentul următor, deci o nouă variaţie a densităţii materiei etc.

Definim conţinutul unui obiect prin totalitatea elementelor constitutive, iar forma prin modul de legătură dintre ele. Schimbarea conţinutului (a densităţii materiei) determină deci în mod primar schimbarea formei (a curburii spaţio-temporale) ; invers, variaţia formei duce în mod secundar la o nouă variaţie a conţinutului. Teoria einsteiniană a gravitaţiei constituie deci o verificare a unităţii contradictorii dintre conţinut şi formă, bazată pe primatul conţinutului.

2. Mărimea infinitezimală, fondată pe noţiunea de limită, nu este un obiect unic, static, ci succesiunea însăşi a obiectelor (mărimilor), tinzînd spre zero, fără a fi finite, fără a fi nule. Mărimea infinitezimală este deci de esenţă dialectică, dinamică, unitatea, interpătrunderea şi transformarea reciprocă a contrariilor existenţă şi negaţie, finit şi infinit, cantitate şi calitate. Valabilitatea obiectivă a geometriei riemanniene a lui V_4 evidenţiată de teoria generală a relativităţii — caz particular al geometriei infinitezimale a spaţiilor de curbură variabilă — constituie o verificare a unităţii dintre materie şi mişcare, dintre mişcare şi interacţiune — ca două laturi indisolubil legate (cinematică şi dinamică) ale modului de existenţă a materiei. Viteza luminii $f \equiv \sqrt{-g_{44}}$ însăşi este variabilă în spaţiu-timp, deci relativă, tinzînd spre valoarea ei maximă absolută relativist-restrînsă c, în regiunile cîmpului material de densitate uniformă minimă.

3. H. Weyl distinge „natura" şi „orientarea" metricii (ele corespund de fapt categoriilor formă şi conţinut). Prin „natura" sa, intervalul ds^2 dintre două puncte (evenimente) este o formă pătratică diferenţială a coordonatelor sau a congruenţelor ; în geometria riemanniană este deci valabilă o teoremă Pitagora generalizată. Local (în aproximaţia relativist-restrînsă, în diferenţialele dX^i sau riguros în congruenţele $ds^{(i)}$), intervalul ds^2 se poate reduce la forma (II.14) sau (II.7) a sumei unor pătrate. Pentru două şi trei dimensiuni, Weyl deduce această formă pătratică a metricii din proprietăţile fundamentale ale grupului de rotaţie infinitezimal, verificînd anumite axiome [23]. Sub forma ei generalizată şi pentru n dimensiuni, teorema a fost demonstrată de E. Cartan [23]. „Orienta-

rea” metricii (intervalului) ds^2 este definită prin valorile locale şi momentane ale componentelor tensorului metric (potenţialelor gravifice) g_{ik}, determinate la rîndul lor de structura şi mişcarea locală a materiei (deci de conţinut). Sub influenţa lui Husserl (concepţie de tip apriorist kantian), Weyl consideră însă „natura” metricii (intervalului) — forma ei pătratică, ca fiind apriorică, în opoziţie cu „orientarea”.

În realitate, existenţa rotaţiilor infinitezimale — baza formei pătratice a intervalului — rezultă din izotropia locală relativă a spaţiu-timpului, izotropie : *a*) condiţionată de structura materiei (în ultimă instanţă de variaţia între anumite limite, nesingulare, ale densităţii şi vitezei materiei) ; *b*) limitată la rîndul ei de caracterul indefinit al metricii (existenţa unor pătrate pozitive şi negative, corespunzătoare respectiv spaţiului şi timpului) — deci în ultima instanţă determinată de unitatea contradictorie a spaţiului şi timpului ca forme de existenţă ale materiei. Forma pătratică a intervalului este deci totodată condiţionată şi limitată de valabilitatea locală a teoriei restrînse a relativităţii. În consecinţă, „natura” metricii, deci însăşi *forma* pătratică a intervalului ds^2 — nu se manifestă decît prin intermediul „orientării” ei, condiţionată de *conţinut*. *Ambele* sînt deci determinate de structura şi mişcarea materiei.

c. *Geometrie euclidiană şi riemanniană.* 1. După cum subliniază Weyl, materia nu intră în spaţiul-timp ca într-un cadru imuabil, fix, ci, după cum se exprimă Einstein, asemenea unei moluşte, materia îşi clădeşte propria ei casă.

Teoria einsteiniană a gravitaţiei răstoarnă deci în mod definitiv teza kantiană de fundare apriorică a geometriei ca ştiinţă independentă de materie şi de experienţă — în particular decretarea de către Kant a geometriei euclidiene ca singura geometrie posibilă. Problema valabilităţii reale a unei geometrii sau alteia nu poate fi soluţionată apriori, ci doar pe baza teoriei fizice verificată de experienţă. Densitatea şi mişcarea materiei determină geometria valabilă în diverse puncte şi momente, variabilă în timp şi spaţiu. Forme spaţio-temporale invariabile şi apriorice, independente de materie, nu există.

Aceasta nu înseamnă reducerea matematicii la fizică. Pe baza abstractizării, ştiinţa matematică pătrunde mai adînc în esenţă, constituind astfel o rezervă a teoriilor fizice ale viitorului.

2. Măsurînd distanţele pe o placă, supusă unor dilatări termice locale inegale, aflată momentan într-o stare de temperatură staţionară, se constată abateri de la geometria euclidiană locală, analogă abaterilor din cîmpul gravific. În aproximaţia termodinamicii clasice se consideră totuşi geometria euclidiană ca fiind valabilă, iar abaterile datorită dilatării termice ca avînd o semnificaţie pur fizică. Concepţia aprioristă aplică un raţionament analog variaţiei duratelor şi lungimilor determinate de cîmpul gravific einsteinian, într-un anumit sistem de coordonate. Astfel, pentru o anumită normare a razei vectoare spaţiale $r = [\sum(x^\alpha)^2]^{1/2}$ — (deci pentru un anumit S.C. I), metrica Schwarzschild exterioară dată de (III.25), (III.26) determină, prin potenţialele gravifice h^2 şi f^2, abaterile lungimilor şi duratelor cosmice dr, dt, de la cele proprii (congruenţele

ortogonale) (III.27) $\mathrm{d}r' \equiv h\,\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}t' \equiv f\,\mathrm{d}t/c$. În S.C. dat I, pentru $r > 2m$ avem $h = c/f > 1$. Datorită cîmpului gravific, în S.C. I lungimile radiale se contractă (cele tangenţiale rămînînd neschimbate) iar duratele se dilată (v. (III.27'));

$$\mathrm{d}r/\mathrm{d}r' < 1, \quad \mathrm{d}t/\mathrm{d}t' > 1. \qquad \text{(III.39)}$$

La limită, pentru cîmpuri gravifice nule — deci în absenţa masei m_0 sau la distanţe infinite ($r \to \infty$), conform formulei (III.27'), coordonatele cosmice se reduc la cele proprii (congruenţe ortogonale).

În realitate, există o infinitate de S.C. spaţiale şi temporale — condiţionate în cazul metricii lui Schwarzschild exterioare, de determinarea razei vectoare $r \equiv F(r')$; noua rază vectoare r' este o funcţie pozitivă şi monotonă a lui r (nulă pentru $r = 0$ şi infinită pentru $r = \infty$, dar de altfel arbitrară). Există, de pildă, un S.C. II în care toate lungimile spaţiale $\mathrm{d}\sigma$, de *orice* direcţie, în particular radială sau tangenţială, aflate la distanţa r^* de centrul O al maselor (r^* = noua rază vectoare) se contractă după formula

$$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\sigma_0 \equiv h^* \equiv (1 + m/2\,r^*)^2. \qquad \text{(III.40)}$$

Metrica spaţială riemanniană $\mathrm{d}\sigma^2$ a lui V_3 real e atunci conform-euclidian ($\mathrm{d}\sigma_0^2$ fiind metrica spaţială euclidiană a lui E_3 real). Dilatarea în cîmp gravific a timpului în acest S.C. conform euclidian II este dată de formula

$$\mathrm{d}t/\mathrm{d}t' \equiv c/f \equiv (r^* - m/2)/(r^* + m/2). \qquad \text{(III.40')}$$

Intervalul cvadridimensional spaţiu-timp $\mathrm{d}s^2$ dintre două evenimente (iar în cazul static şi metrica spaţială $\mathrm{d}\sigma^2 \equiv \gamma_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta$ şi cea temporală $f^2\mathrm{d}t^2$ luate separat), sînt absolute şi independente de S.C.; în cazul de faţă (v. (III.27), (III.27'), (III.40), (III.40'))

$$\mathrm{d}s^2 \equiv \mathrm{d}\sigma^2 - c^2\mathrm{d}t'^2 \equiv h^2\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2) - f^2\mathrm{d}t^2 \equiv h^{*2}\,\mathrm{d}\sigma_0^2 - f^2\mathrm{d}t^2.$$

În schimb, existînd o infinitate de S.C., în fiecare potenţialele gravifice g_{ik} şi variaţia corespunzătoare a lungimilor şi duratelor (deci coordonatele cosmice $\mathrm{d}x^i$) iau alte valori.

După cum remarcă Weyl, pentru orice stare locală şi momentană a materiei, ar exista atunci o infinitate de „abateri” ale geometriei riemanniene valabilă în fizică, de la aşa-zisa „geometrie euclidiană de bază” şi o infinitate de „geometrii euclidiene de bază”, — abateri şi geometrii de bază condiţionate de S.C. Noţiunea de „abateri de la geometria euclidiană” îşi pierde sensul. Singura geometrie valabilă este cea riemanniană a spaţiu-timpului curb. O geometrie euclidiană apriorică nu există. Dimpotrivă, în cazul plăcii încălzite există (în aproximaţia clasică euclidiană) o singură corecţie, dată de reducerea dimensiunilor plăcii la cele corespunzătoare temperaturii de zero absolut.

d. *Caracterul ecuaţiilor gravifice.* Pe baza interpretării geometrice a ecuaţiilor gravifice (H. Mandel [25], I.B. Rumer [25], J. Eiesland [31] — v. şi [1], [3], [26]), se rezolvă problema fundamentală a caracterului ecuațiilor gravifice. Constituie ele ecuații veritabile (interpretarea lui Weyl) sau simple identități (interpretarea lui Eddington)?

1. În interpretarea lui Eddington, densitatea energie-impuls $\overline{G}_{ik}$ nu determină curbura einsteiniană coordonate-durată G_{ik} și nici nu este determinată de ea; interpretarea lui Eddington reduce densitatea energie-impuls prin definiție, la curbura coordonatei-durată; mai mult, Eddington reduce materia însăși la spațiu-timp, la mișcare (teză monistă de tip idealist). În realitate, prin intermediul densității masei sau al densității energie-impuls, variația densității materiei determină în mod primar variația curburii spațiului și timpului; la rîndul ei, în mod secundar, densitatea materiei este modificată de variația curburii.

2. Weyl interpretează ecuațiile gravifice ca fiind ecuații veritabile; la Weyl însă, densitățile energie-impuls (partea dreaptă a ecuațiilor gravifice) sînt lipsite de semnificație geometrică — în opoziție cu tensorul curburii einsteiniene coordonată-durată (partea stîngă a ecuațiilor). În consecință, doar legile de conservare-transformare (III.4) ale energiei impulsului ar avea sens fizic; legile similare (III.7) valabile pentru curbura coordonată-durată ar avea o semnificație pur geometrică. Interpretarea lui Weyl este în acest sens dualistă. Pe de altă parte și concepțiile materialiste ale lui Weyl sînt inconsecvente: considerînd de obicei cîmpul (starea continuă a materiei) ca realitate fizică, Weyl îl reduce uneori la o formă pur geometrică (spațiu-timp), identificînd materia cu substanța, redusă la particule punctuale, considerate de Weyl adesea ca fiind situate dincolo de spațiu și timp.

3. În realitate, ecuațiile de cîmp, în particular ecuațiile gravifice (III.8) sau (III.17) sau (III.15) sau (III.20) și cele de conservare-transformare (III.4), (III.7) sau (III.21) au un sens atît fizic cît și geometric. Din punct de vedere geometric, ele constituie condiții de scufundare ale spațiului-timp riemannian V_4 în spațiul-timp polidimensional V_m sau E_N (condiții de integrabilitate contractate ale transportului paralel al vectorilor în E_N = condiții de „rigiditate"). Curburile spațio-temporale G_{ik} descriu proprietățile intrinseci; densitățile energie-impuls descriu proprietățile rigide (de scufundare) ale materiei. Primatul fizic al tensorilor de deformare $\underset{\lambda}{b_{ik}}$ și tensiune $\underset{\lambda}{d_{ik}}$ (intrînd în expresia (III.12) a energiei-impulsului $\overline{G}_{ik}$) față de potențialele gravifice g_{ik} revine la determinarea geometrică — între anumite limite — a proprietăților intrinseci de către cele rigide. Legea reciprocității — simetria cantitativă și asimetrica calitativă a ecuațiilor gravifice (III.11) sau (III.20) și de conservare-transformare (III.4), (III.7) sau (III.21) în tensorii R_{ik}, R și $\overline{G}_{ik}$, $\overline{G}$ sau G_{ik} și $\overline{G}_{ik}$ sau V_{ik} și $\overline{V}_{ik}$ revine la egalitatea matematică a respectivilor tensori ai fiecărei perechi și la determinarea primară a mărimilor nebarate de cele barate. În sfîrșit, în cazul scufundării spațiului-timp riemannian V_n (de pildă V_4) în V_m riemannian (în particular pseudoeuclidian E_N), tensorii rigizi $\underset{\lambda}{b_{ik}}$, $\underset{\lambda\mu}{c_{ik}}$, $\underset{\lambda\mu}{t_i}$ ai lui V_n în V_m intră în expresia tensorilor intrinseci (metrica) G_{ab} ai lui V_m $(a,\ b = 1, \ldots n;\ i,\ k = 1, \ldots n;\ \lambda,\ \mu = n + 1, \ldots, m)$. Tensorul intrinsec („geometric") G_{ab} al lui V_m constituie unitatea dialec-

tică a tensorilor rigizi („fizici”) și intrinseci („geometrici”) ai subspațiului-timp V_n. Opoziția dintre mărimile rigide (fizice) și intrinseci (geometrice) e deci relativă, bazată pe primatul celor rigide (fizice) și depășită pe scară tot mai superioară (V_n în V_m în V_p etc.).

4. Cîmpul și particula constituie stări (continue respectiv discontinue) ale materiei, iar spațiile-timp riemanniene V_n, V_m, V_p, forme de existență tot mai universale ale materiei. Și curburile spațio-temporale G_{ik} sau V_{ik} (partea stîngă a ecuațiilor gravifice (III.17) sau (III.20)) descriu proprietăți fizice (*gravifice*) ale materiei ; energia-impulsul $\overline{G}_{ik}$ sau $\overline{V}_{ik}$ (partea dreaptă a ecuațiilor gravifice (III.17) sau (III.20)) nu cuprind decît formele *negravifice* ale energiei-impulsului. În particular, anularea locală a energiei-impulsului $\overline{G}_{ik}$ nu implică nicidecum un spațiu-timp vid de materie, Astfel, ecuațiile gravifice (III.17) sau (III.20) admit pentru $\overline{G}_{ik} = 0$ o soluție $g_{ik} = \text{const.}$, corespunzătoare cîmpului material omogen de densitate minimă a teoriei restrînse a relativității (în cazul cîmpului gravific static această soluție a ecuațiilor (III.9) sau (III.17) e și unica posibilă [37]). În cazul $\lambda \neq 0$ dimpotrivă, ecuațiile gravifice (III.8) sau (III.15 d) admit pentru $\overline{G}_{ik} = 0$ dintre soluțiile $g_{ik} = \text{const.}$ doar soluția particulară $g_{ik} = 0$ iar alături de ele, soluții relativist-generale cu g_{ik} variabil (modelul cosmologic al lui de Sitter ș.a.).

e. *Domeniul de valabilitate al teoriei generale a relativității.* 1. Teoria restrînsă a relativității a fost aplicată mai ales microfizicii, iar teoria generală a relativității — astronomiei. Raportul forțelor gravifice newtoniene și electrice coulombiene a doi electroni este de ordinul 10^{-40} ; conform fizicii clasice, efectele gravitației ar fi deci neglijabile în microcosm.

a) În realitate, în primul rînd, mărimile geometrice spațio-temporale sînt variabile atît pe plan microcosmic cît și pe plan macrocosmic ; ecuația lui Dirac a electronului și toate ecuațiile particulelor elementare iau atunci o formă relativist-generală, bazată pe matrice variabile (V. Fok, E. Schrödinger, L. Infeld și L. Van de Waerden, A. Einstein ș.a.). Teoria generală a relativității nu se reduce la teoria gravitației (M. F. Șirokov) ; ea e teoria general covariantă a legilor fizice în V_4 [57].

b) În al doilea rînd, teoria clasică nu mai e valabilă pentru distanțe de ordinul 10^{-13} cm (ordinul de mărime al razei clasice a electronului ca și al nucleului atomic) și pentru densități mari ale materiei. Abaterea locală a geometriei riemanniene de la cea pseudoeuclidiană — deci curbura — fiind proporțională cu densitatea spațială m/r^3 și cu viteza locală a masei, este determinată de raportul m/r dintre raza de gravitație $m = \varkappa m_0$ a masei (masa exprimată ca lungime) din domeniul respectiv și extinderea sa spațială r. Pentru cîmpuri gravifice slabe, cvasistatice ($\partial_t g_{ik} \approx 0$) și pentru viteze spațiale mici în comparație cu viteza luminii ($v \ll f$), abaterea mai poate fi măsurată de diferența $f^2 - c^2 \equiv 2\,\Phi$ (Φ = potențialul gravific newtonian). În regiunile de densitate mare a materiei, potențialele gravifice pot lua valori enorme, „singulare” (M. F. Șirokov, D. Ivanenko și A. Sokolov [47]).

c) În al treilea rînd, teoria generală a relativității este singura teorie fizică care permite deducerea legii mișcării particulei din ecuațiile cîmpului, în virtutea neliniarității acestora, fără separare artificială a cîmpului total în cîmpul propriu al particulei și în cîmp exterior.

2. Rezultă necesitatea unei fuziuni complete a teoriei generale a relativității (în sensul geometriei riemanniene spațiu-timp V_4 determinată de structura și mișcarea materiei) și a teoriei cuantice — cît și perspectiva cuantificării cîmpului gravific neliniar (pentru densități oricît de mari ale materiei) ca stare a cîmpului material (L. de Broglie [11], P. Bergmann [24]). Teoria unificată va fi însă neclasică, fondată pe unitatea indisolubilă a proprietății geometrice și fizice ale materiei și a stărilor contrarii ale materiei : cîmpul material continuu și particula = discontinuul (legea generalizată a reciprocității) [1], [2], [3] și probabil pe caracterul nepunctual al cîmpului — relații de imprecizium generalizate [1], [2], [3] (în particular, pe geometria relativistă discontinuă).

IV. LEGILE DE CONSERVARE. MIȘCAREA PARTICULELOR

A. LEGILE DE CONSERVARE-TRANSFORMARE

a. *Densitățile*. 1. Pe baza transformării reciproce a densităților energiei-impulsului gravific $t^{ik}\sqrt{g}$ și negravific $T^{ik}\sqrt{g}$ (sau $u^{ik}\sqrt{g}$, $\overline{G}^{ik}\sqrt{g}$)

$$(\alpha)\ u^{ik} \equiv \varkappa\, m^{ik} \equiv \delta^2 t^{ik}, \quad (\beta)\ \overline{G}^{ik} \equiv \varkappa\, M^{ik} \equiv \delta^2 T^{ik}, \qquad \text{(IV.1)}$$

legile relativist-generale de conservare-transformare (III. 7,4) ale densităților curburii coordonate-durată și energiei-impuls sau

$$\text{(a)}\ \partial_k\,(U^{ik}\sqrt{g}) = 0, \quad \partial_k\,(\overline{U}^{ik}\sqrt{g}) = 0 \qquad \text{(IV.2)}$$

conțin, în comparație cu legile relativist-restrînse $\partial_k(G^{ik}\sqrt{g})=0$ $\partial_k(\overline{G}^{ik}\sqrt{g}) = 0$, termenii suplimentari gravifici

$$\partial_k\,(u^{ik}\sqrt{g}) \equiv -\,G^{kl}\sqrt{g}\;\Gamma^i_{kl}, \quad \partial_k\,(\overline{u}^{ik}\sqrt{g}) \equiv -\,\overline{G}^{kl}\sqrt{g}\,\Gamma^i_{kl}. \qquad \text{(IV.3)}$$

Mărimile

$$\text{(a)}\ U^{ik}\sqrt{g} \equiv (G^{ik} + u^{ik})\sqrt{g}, \quad \text{(b)}\ \overline{U}^{ik}\sqrt{g} \equiv (\overline{G}^{ik} + \overline{u}^{ik})\sqrt{g} \qquad \text{(IV.4)}$$

constituie densitățile energiei-impulsului total metrizate (= înmulțite cu $\varkappa$ respectiv δ^2 avînd acum dimensiunea L^{-1} a curburii). Mărimile nebarate sînt mărimi intrinseci, cele barate — mărimi rigide. În virtutea ecuațiilor gravifice (III.9) sau (III.8) avem

$$U^{ik} = \overline{U}^{ik} \quad (u^{ik} = \overline{u}^{ik}), \qquad \text{(IV.5)}$$

(echivalente cu ecuațiile gravifice). Lagrangianul $\mathcal{L}$ nefiind univoc determinat (v. pag. 550), nici densitățile energie-impuls gravific $u^{ik}\sqrt{g}$ și total $U^{ik}\sqrt{g}$ nu sînt univoc determinate. Forma lor cea mai generală a fost stabilită de G. Dautcourt [38] și J. Goldberg [39]. În particular densitatea „canonică" energie-impuls gravific ($=u^{ik}\sqrt{g}$ einsteinian), definită pentru un S.C. *oarecare*, nu depinde decît de g_{ik} şi de derivatele sale de ordinul întîi, deci de potenţialele gravifice g_{ik} şi de cîmpurile gravifice Γ^i_{kl}. Densităţile einsteiniene energie-impuls gravific $u^{ik}\sqrt{g}$ şi total $U^{ik}\sqrt{g}$ sînt nesimetrice.

2. Ca şi cîmpul gravific Γ^i_{kl}, componentele $u^{ik}=\overline{u}^{ik}$ şi $U^{ik}=\overline{U}^{ik}$ nu sînt tensori decît în S.C. inerţiale (deci pentru transformări liniare de coordonate, în particular pentru coordonatele armonice ale lui V. Fok); ele constituie „tensori afini". Într-adevăr, U^{ik} depind doar de cîmpurile gravifice (nu şi de derivatele acestora) şi se anulează deci în S.C. geodezic local o dată cu acestea (mai general, de-a lungul unei curbe oarecare, în S.C. geodezic respectiv). În particular componentele energie-impulsului gravific u^{ik} dispar complet în cazuri întinse (de pildă în cîmpul gravific al unei mase punctuale sau sferice, neutre sau încărcate — v. pag. 557—558). Pe de altă parte, prin simpla introducere a unui S.C. neinerţial în spaţiul-timp E_4 pseudoeuclidian (prin definiţie de curbură R^i_{klm} nulă şi deci de cîmp gravific nul), componentele u^{ik} devin totuşi nenule, iar energia totală infinită.

3. Datorită caracterului lor netensorial, densităţile energie-impulsului einsteinian gravific $u^{ik}\sqrt{g}$ sau $\overline{u}^{ik}\sqrt{g}$ şi total $U^{ik}\sqrt{g}$ sau $U^{ik}\sqrt{g}$ nu sînt univoc localizabile, localizarea depinzînd de S.C. — în opoziţie cu energia-impulsul negravific $\overline{G}^{ik}$ (de pildă tensorul energie-impuls maxwellian) şi cu curbura einsteiniană G^{ik}. De asemenea, în anumite cazuri, densitatea $u^{44}\sqrt{g}$ a energiei gravifice einsteiniene poate fi local negativă.

În opoziţie cu interpretarea pur cinematică, izolarea oricărui sistem material este relativă, limitată şi tranzitorie; în realitate sisteme izolate (=inerţiale) nu există decît într-o anumită aproximaţie. Un sistem închis presupune corpurile exterioare situate la distanţe foarte mari, riguros vorbind infinite; orice sistem în translaţie uniformă se poate considera cu suficientă aproximaţie ca fiind închis dacă masele exterioare sînt foarte depărtate. Nelocalizarea componentelor energiei-impulsului einsteinian gravific u^{ik} şi total U^{ik} implică însă inexistenţa unor ecrane gravifice absolute (posibile doar la limită pentru un sistem absolut izolat): izolarea „*pasivă*" a unui sistem este condiţionată de distanţe infinite ale maselor grele exterioare; chiar acţiunea maselor depărtate însă nu se mai poate neglija în teoria generală a relativităţii nici măcar în prima aproximaţie: sistemele „accelerate" în general nu pot fi considerate ca fiind închise, chiar dacă corpurile exterioare sînt foarte îndepărtate (W. Pauli). Pe de altă parte, izolarea „*activă*" a sistemului dat e imposibilă datorită radiaţiei proprii (gravifice, electromagnetice etc.) a sistemului. În consecinţă izolarea „activă" ar fi posibilă doar pentru substanţa pură — izolată complet de cîmp şi de radiaţie (formă de tranziţie între substanţă şi cîmp şi de masă de repaus nulă), deci făcînd abstracţie de caracterul ondulatoriu al materiei — imposibil de realizat.

Mai general, trebuie să remarcăm caracterul nepunctual al tuturor mărimilor de cîmp (nu numai a celor einsteiniene u^{ik}, $\overline{U}^{ik}=U^{ik}$) în teoriile cuantice moderne nepunctuale (nelocale) ale cîmpului; ele rezultă în mod necesar într-o teorie bazată : 1° pe invarianța Lorentz ; 2° deducerea variațională a ecuațiilor cîmpului și 3° caracterul finit al integralelor mișcării pentru o particulă elementară (în caz contrar toate interacțiunile și deci toate sarcinile ar fi nule [14]). Mai general, independent de aceste postulate, sub forma general covariantă, nepunctualitatea tuturor mărimilor cîmpului rezultă din covarianța conformă a legilor fizice [1], [2], [3].

4. Spre deosebire de densitățile energie-impuls gravific einsteinian, celelalte expresii posibile (pe baza lagrangiană) u^{ik} ale densității energie-impulsului gravific (în particular u^{ik} al lui Lorentz-Klein-Møller) depind și de derivatele de ordinul doi $\partial_{lm} g_{ik}$ ale potențialelor gravifice (deci de $\partial_m \Gamma^i_{kl}$), verificînd totodată ecuațiile (III.8) sau (III.9), (IV.2), (IV.5). De asemenea, identificînd curburile einsteiniene coordonate-durată cu energia-impulsul gravific u^{ik} ($u^{ik} \equiv - G^{ik}$) (Levi-Civita), conform ecuațiilor gravifice (III.9) energia-impulsul total (gravific + negravific) $G^{ik} + \overline{G}^{ik} = U^{ik}$ este mereu nul și verifică automat legile de conservare-transformare (III.4), (III.7) și (IV.2) și teorema variațională a lui Hilbert ($u^{ik}\sqrt{g}$ al lui Levi-Civita fiind derivata lagrangianului în raport cu g_{ik}, deci mărimea economic conjugată acestuia). În ambele cazuri, energia-impulsul gravific u^{ik} și U^{ik} sînt univoc localizabile, iar în cazul particular al lui $u^{ik} \equiv G^{ik}$ tensori simetrici ; dificultățile legate de tensorii afini și nelocalizabili u^{ik}, U^{ik} einsteinieni dispar atunci.

În sfîrșit, au fost introduse densități energie-impuls gravific și total de ,,ordin superior'' ($\geqslant 2$) (în g^p, $p \geqslant 1$) [39], în particular pentru $p = 2$: u^{ik} simetrici ai lui Landau-Lifschitz [51] (definiți într-un S.C. *oarecare*) și ai lui Fok [49] (definiți într-un S. C. *armonic*), conținînd în factori determinantul g al tensorului fundamental g_{ik} în V_4 (în loc de $\sqrt{g}$ al densităților obișnuite). Aceste densități de ordin superior, fără a fi identice cu densitățile obișnuite, duc la energia-impulsul total al unui sistem finit identic cu cele date de u^{ik} einsteinian.

b. *Integralele mișcării.* Cu tot caracterul netensorial și nepunctual al densităților energiei-impulsului einsteinian gravific și total $u^{ik}\sqrt{g}$ și $U^{ik}\sqrt{g}$, chiar în teoria einsteiniană, energia-impulsul are totuși un sens fizic, după cum a demonstrat Einstein însuși. Pe de o parte, în cazul interacțiunii a două sisteme, nu se anulează toate componentele u^{ik} simultan, în nici un S.C. Pe de altă parte, se definesc pentru un sistem material cele zece ,,integrale ale mișcării'' corespunzătoare celor zece legi clasice de conservare-transformare locale în V_4 extinse asupra volumului spațial tridimensional V (de element de volum dV) :

a) Energia $W = - ip^4 c$ totală și impulsul total p^α (reuniți într-o cantitate de patru componente $J^i \equiv (\varkappa/c)\, p^i$)

$$J^i \equiv \iiint\limits_V U^{i4}\sqrt{g}\;\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \overline{U}^{i4}\sqrt{g}\;\mathrm{d}V. \tag{IV.6}$$

b) Pentru u^{ik} simetrici (cazul mărimilor u^{ik} ale lui Landau-Lifschitz și Fok) : momentul cinetic total spațial M^α și vectorul N^α al mișcării centrului maselor inerte ale sistemului.

Componentele M^{α}, N^{α} se reunesc în $H_4\,(E_4)$ într-o mărime antisimetrică cu şase componente $M^{ik} \equiv -M^{ki}$ (momentul cinetic relativist total al sistemului) ($M^{\beta\gamma} \equiv N^{\alpha}$, $M^{4\alpha} \equiv i\,N^{\alpha}$). Mărimile $U^{ik}\sqrt{g}$, $\overline{U}^{ik}\sqrt{g}$ şi

$$\mathfrak{M}^{ikl}\, g \equiv -\mathfrak{M}^{kil}\sqrt{g} \equiv (x^i\, U^{kl} - x^k\, U^{il})\sqrt{g}\,;\; \overline{\mathfrak{M}}^{ikl}\sqrt{g} \equiv -\overline{\mathfrak{M}}^{kil}\sqrt{g} \equiv (x^i \overline{U}^{kl} - x^k\, \overline{U}^{il})\sqrt{g} \tag{IV.7}$$

sînt respectiv densităţile energiei-impulsului şi momentului cinetic *orbital*. U^{ik}, $\mathfrak{M}^{ikl}$ sînt mărimi intrinseci, $\overline{U}^{ik}$, $\overline{\mathfrak{M}}^{ikl}$ mărimi rigide. Avem :

$$M^{ik} \equiv \iiint\limits_{V} \mathfrak{M}^{ik4}\sqrt{g}\;\mathrm{d}V\,; \tag{IV.8}$$

(III.9) sau (III.8), (IV.5) şi

$$\mathfrak{M}^{ikl} = \overline{\mathfrak{M}}^{ikl} \tag{IV.9}$$

sînt echivalente. În cazul cîmpului gravific static (de metrică (II.26)) şi sferic (neutru sau electrizat) — formulele (III.25), (III.26), (III.29), — de masă totală proprie grea m_0 şi inertă m', de energie totală proprie W' :

$$W' = m'c^2, \tag{IV.10}$$

(IV.6) ia forma

$$\text{(a) } J_{\alpha}=0,\; J_4\,(=i\delta^2\, W') = im_0\varkappa, \text{ sau (b) } W' = m_0c^2 \text{ sau (c) } m' = m_0. \tag{IV.11}$$

(IV.10) şi (IV.11 b) sînt relaţiile dintre energia proprie şi masa proprie (inertă respectiv grea). (IV.11 c) e relaţia dintre masele proprii inertă şi grea. La distanţe mari de centrul O al maselor generatoare şi în raport cu O, cîmpul fiind în primă aproximaţie întotdeauna static şi sferic, relaţiile (IV.10), (IV.11) au o valabilitate universală [50].

Celor cinci legi de conservare-transformare neclasice în $C_4\,(H_4)$ ale densităţilor

$$U'^{ik} = \overline{U}'^{ik} \equiv \mu'\, x^i\, x^k \sqrt{g}$$

ale pseudovectorului momentului de inerţie j^i şi $\mu''\sqrt{g} \equiv \overline{\mu}''\sqrt{g}$ ale masei pseudoscalare m'' le corespund alte cinci integrale ale mişcării sistemului total :

$$\begin{aligned} &\text{(a) } j^i \equiv \iiint\limits_{V} U'^{i4}\sqrt{g}\;\mathrm{d}V = \iiint\limits_{V} \overline{U}'^{i4}\sqrt{g}\,\mathrm{d}V \\ &\text{(b) } m'' \equiv \iiint\limits_{V} \mu''\sqrt{g}\;\mathrm{d}V \equiv \iiint\limits_{V} \overline{\mu}''\sqrt{g}\,\mathrm{d}V \end{aligned} \tag{IV.12}$$

În teoria scufundării lui V_4 în E_N pseudoeuclidian, pe baza densităților [26] de cvadricurent

$$\underset{\lambda\mu}{s^i} (\equiv \delta \underset{\lambda\mu}{s'^i}) \equiv \underset{\lambda\mu}{s^i} \tag{IV.13}$$

verificînd legile de conservare-transformare respective (în particular pentru $m' = 0$), densitățile cvadricurentului electric

$$s^i (\equiv \delta s'^i \equiv \underset{56}{s^i}) = \underset{56}{\bar{s}^i}, \tag{IV.13'}$$

definesc sarcinile totale ale sistemului, ca integrale spațiale tridimensionale

$$e_{\lambda\mu}(\equiv \underset{\lambda\mu}{\delta} e_0) \equiv \iiint\limits_V \underset{\lambda\mu}{s^4} \sqrt{g}\ \mathrm{d}V = \iiint\limits_V \underset{\lambda\mu}{\bar{s}^4} \sqrt{g}\, \mathrm{d}V \tag{IV.14}$$

— în particular sarcina electrică maxwelliană

$$e (\equiv \delta e_0) \equiv \iiint\limits_V s^4 \sqrt{g}\, \mathrm{d}V. \tag{IV.14'}$$

În V_6 (în particular E_6), pe baza unificării densităților $U^{ik}\sqrt{g}$, $\mathfrak{M}^{ikl}\sqrt{g}$, $U'^{ik}\sqrt{g}$, $\mu''\sqrt{g}$ în densitatea $\mathfrak{M}^{abc}\sqrt{g} \equiv -\mathfrak{M}^{bac}\sqrt{g}$ a momentului cinetic total al sistemului ($a, b, c = 1, \ldots, 6$), integralele (IV.6), (IV.8), (IV.12) se unifică în momentul cinetic total $M^{ab} \equiv -M^{ba}$ al sistemului.

Fie un sistem A : 1° finit (de volum spațial V limitat de suprafața S); 2° izolat; 3° scufundat în H_4 conform euclidian (în particular H_4 de curbură constantă, în speță E_4 pseudoeuclidian — aproximație valabilă pentru S situată la distanțe mari de sistem; deci mărimile de cîmp cvasinule pe S), tensorul fundamental g_{ik} reducîndu-se într-un anumit S.C. „conform euclidian" (=uniform accelerat respectiv inerțial) la valorile $\psi^{-1}\ \delta_{ik}$ în H_4 respectiv δ_{ik} în S, în exteriorul lui V. Se demonstrează în aceste trei condiții că integralele (IV.6), (IV.8), (IV.12) (total 15 integrale ale mișcării) și (IV.14) verifică următoarele teoreme :

a) Independența de transformările S.C. din interiorul lui S (deci din V).

b) Caracterul tensorial față de transformările conform euclidiene (în particular transformările Lorentz) din spațiul-timp H_4 (în particular E_4) exterior lui S; $M^{ab} \equiv -M^{ba}$ e deci un tensor în V_6 (în speță în E_6).

c) Caracterul de tensori „liberi" în H_4 (în particular, în E_4) = tensori nelegați de punctul-moment din volumul spațial V și constanți într-un S.C. conform euclidian respectiv inerțial.

În particular, constanța în timp, deci valabilitatea legilor de conservare-transformare *globale* (= pentru sistemul total A din V spațial finit) veritabile, de forma

$$\text{(a) } \partial_t M^{ab} = 0 \text{ sau } (\text{a}_1)\ \partial_t J^i = 0,\ (\text{a}_2)\ \partial_t M^{ik} = 0,$$

$$(\text{a}_3)\ \partial_t j^i = 0,\ (\text{a}_4)\ \partial_t m'' = 0,\ \text{(b) } \partial_t \underset{\lambda\mu}{e} = 0. \tag{IV.15}$$

d) Mărimile intrinseci $\mathfrak{M}^{abc}$ ($\equiv U^{ik}$, $\mathfrak{M}^{ikl}$, U'^{ik}, μ'' ; $\underset{\lambda\mu}{s^i}$) spre deosebire de mărimile rigide $\overline{\mathfrak{M}}^{abc}$ ($\equiv \overline{U}^{ik}$, $\overline{\mathfrak{M}}^{ikl}$, $\overline{U}'^{ik}$, $\overline{\mu}''$; $\underset{\lambda\mu}{\bar{s}^i}$) verificînd legile de conservare „tari", toate integralele de mai sus în mărimile *intrinseci* (nebarate) iau forma unor *integrale pe suprafața S*, depinzînd doar de potențialele gravifice g_{ik} pe S de frontieră, deci de mărimile cîmpului la distanțe mari de sistemul A. Mărimile totale M^{ab}($\equiv J^i$, M^{ik}, j^i, m'') și $\underset{\lambda\mu}{e}$ — în particular sarcina electrică e_0 și gravifică = masa proprie m_0 — constituie deci fluxuri ale cîmpurilor corespunzătoare (în particular gravific și electromagnetic) printr-o suprafață S în jurul centrului O al particulei (teoremă postulată pentru sarcina electrică încă de Faraday). Pentru sarcini punctuale, suprafața S poate avea o rază oricît de mică în V_4; consecințele respective pentru masa grea generalizată rezultă din teoremele de la pag. 572 : masa grea = inertă locală m_g într-un punct e fluxul dat de integrala

$$m_g \equiv m - e^2/4r \equiv m\,(1 - a/r) \equiv \frac{1}{4}\iiint (e^2/r^4)\,\mathrm{d}V \equiv \int_a^r (e^2/r^2)\,\mathrm{d}r \quad \text{(IV.16)}$$

extinsă între limitele $a = e^2/4m$ și r. Masa electromagnetică locală m_e este fluxul dat de integrala

$$m_e \equiv \frac{1}{4}\cdot\frac{e^2}{r} \equiv \frac{am}{r} \equiv \frac{1}{4}\iiint \frac{e^2}{r^4}\,\mathrm{d}V \equiv \frac{1}{4}\int_r^\infty \frac{e^2}{r^2}\,\mathrm{d}r \quad \text{(IV.16')}$$

între limitele r și ∞; masa totală m (gravifică + electromagnetică) este deci integrala (III.32) corespunzătoare extinsă între limitele a și ∞, deci asupra întregului spațiu exterior razei clasice a particulei (= asupra întregului cîmp). Masa m (sau energia) totală (III.32) a cîmpului electrogravific (III.29) este deci aceeași cu cea dată de cîmpul gravific neutru (III.26) [2].

Pentru $J^i J_i \neq 0$, coordonatele ξ^i ale centrului maselor sistemului A se exprimă în funcție de momentul cinetic cvadridimensional M^{ik} și de 4-vectorul energie-impuls J^i (M. F. Șirokov [47]) :

$$\xi^i \equiv M^{ik} J_k/(J^l J_l). \quad \text{(IV.17)}$$

Rezultatele de mai sus se aplică în particular și sistemelor de ordin metagalactic în H_4 spațiul-timp de tip Friedmann al ecuațiilor gravifice cu termen cosmologic $\lambda\, g_{ik}$. Integralele totale ale energiei-impulsului gravific einsteinian corespunzătoare sistemului *metagalactic* se anulează :

$$\int U^{i4} \sqrt{g}\,\mathrm{d}V = 0.$$

Integralele mișcării (10 respectiv 15) sistemului global (IV.6), (IV.8), (IV.12) supus condițiilor 1°, 2°, 3° de mai sus ca și (IV.14) au deci un sens fizic precis (în teoria einsteiniană, în opoziție cu densitățile U^{ik}, $\mathcal{M}^{ikl}$ și U'^{ik}, μ') nelocalizabile punctual în mod univoc, — ca și cele calculate pe baza densităților neeinsteiniene de la pag. 568.

Neunivocitatea lagrangianului — și deci definiției energiei-impulsului gravific și total — implică în aproximația relativist-restrînsă anumite discordanțe cu teoria relativist-restrînsă cvadridimensională în E_4, fie în privința valorii momentului cinetic total M^{α} în E_3 fie a relației de interdependență (IV.10) sau (IV.11 b) dintre masă și energie [34]. Depășirea acestor dificultăți (deci definiția univocă a mărimilor de cîmp — densități și integrale) va rezulta din teoria conformă în C_4 sau H_4 (respectiv V_6 sau E_6), pe baza unificării covariante a energiei-impulsului, momentului cinetic, momentului de inerție și a masei pseudoscalare, în tensorul antisimetric M^{ab} al momentului cinetic de 15 componente.

B. EGALITATEA DINTRE MASA INERTĂ ȘI MASA GREA

a. *Dublul caracter al masei.* 1. Masa constituie o proprietate generală și esențială a materiei, atît a stării ei discontinue (formată din particule elementare) cît și a stării ei continue (cîmpul material). Nu există materie fără masă (materie „imponderabilă"). Experiențele lui Lebedev (1899) asupra presiunii luminii au demonstrat existența masei inerte (de mișcare) a luminii, ca stare a materiei. Curbura razelor luminoase în cîmp gravific și deplasarea spre roșu a liniilor spectrale în cîmp gravific — consecințe ale teoriei generale a relativității — au demonstrat începînd cu anul 1919, pe baza observațiilor astronomice, existența masei grele a luminii.

2. Masa inertă exprimă „proprietatea fiecărui corp de a-și modifica viteza într-un mod determinat, sub influența unei acțiuni exterioare determinate" deci „capacitatea proprie de a rezista" (Newton). În particular, în absența acțiunilor exterioare, în spațiul euclidian E_3, orice corp se mișcă, conform legii inerției, uniform și rectiliniu. După cum accentuează Engels, inerția este „expresia negativă a indestructibilității mișcării"; într-adevăr, legea mișcării inerțiale e un caz particular al legilor de conservare a energiei (sau masei de mișcare relativiste) și impulsului. Masa inertă se manifestă în anumite S.C. sub forma forțelor de inerție (în mecanica clasică, forța centrifugă și forța Coriolis), proporționale cu ea. „Formelor specifice (fizico-chimice) ale mișcării le corespund prin natura lor manifestări specifice ale inerției" (Engels) [59]. În sensul ei generalizat, inerția reflectă opoziția particulei față de schimbarea formei specifice de mișcare dată și față de tendința transformării naturii sau stării ei, deci lupta contrariilor.

3. Sub aspectul masei grele, masa generează cîmpul gravific (formă de mișcare sau interacțiune a cîmpului material), fiind în același timp supusă acțiunii cîmpului gravific. Masa grea este deci totodată masă atractivă (*activă*) și atrasă (*pasivă*) (Weyl), cantitativ egale și opuse calitativ; masa grea e o unitate de contrarii. Unitatea dintre masa grea activă și pasivă reflectă natura interacțiunii ca unitate dialectică a cauzei și efectului. Masa grea se manifestă prin intermediul forței gravifice proporționale cu ea.

Sarcinile și curenții de orice tip (sarcina electrică, barionică, leptonică, izofermionică, sarcinile mezonice etc.), iar în teoria conformă și spinul și izospinul — [1], [3] fapt aflat la baza neconservării parității particulelor elementare în interacțiunile slabe, evidențiată de Lee și Young [40] — v. și [1], [3], [8], constituie probabil măsura temporală respectiv spațială a interacțiunii particulei date cu celelalte cîmpuri și particule. Într-adevăr, cel puțin în cazul interacțiunilor dintre particule realizate prin intermediul altor particule (de tipul interacțiunii dintre sarcinile electrice realizată prin fotonii atașați cîmpului maxwellian, a interacțiunii sarcinilor barionice realizată prin mezonii vectoriali ai cîmpului de Broglie-Proca etc.), sarcinile constituie „constante de cuplaj" dintre diferitele cîmpuri și particule. Masa proprie grea se identifică cu sarcina gravifică. O particulă fără sarcini în afara masei grele, deci o particulă „neutră" — nu interacționează cu alte particule sau cîmpuri (cu excepția cîmpului gravific); ea nu e supusă forțelor exterioare negravifice (electromagnetice, mezonice etc.).

4. În teoria cuantică relativistă a cîmpului, masa proprie (=masa de repaus) a particulei se compune dintr-o masă de bază individuală și diverse mase de cîmp (electromagnetice, mezonice etc.). Masele de cîmp constituie :

a) Corecții (= perturbații) ale masei de bază, datorită interacțiunii (slabe, medii, tari) a particulei date cu alte cîmpuri și particule, fiind legate deci de existența diverselor sarcini (măsuri ale interacțiunii). Ca orice sarcină, masa proprie primară de bază (grea) trebuie să fie atunci invariantă din punct de vedere relativist (independentă de mișcarea particulei) și cuantic (independentă de interacțiunea și natura ei). Și în acest caz, pornind de la lege se explică perturbațiile și nicidecum invers. În particular diferențele de masă datorită cîmpului electromagnetic (deci izospinului) și cele datorite deosebirii dintre barioni și leptoni constituie respectiv perturbații ale izosimetriei și ale unei simetrii mai profunde ; cele corespunzătoare respectiv rotațiilor și dilatării conforme constante [1], [3], [8] — deci izotropiei locale și continuității spațiu-timpului.

b) Masa de cîmp este comună particulei și cîmpului material unic (manifestat sub forma diverselor cîmpuri) și deci într-un anumit sens comună diverselor particule. În cadrul masei de cîmp, individualitatea particulei e deci relativ depășită.

c) Masa individuală de bază este probabil ea însăși o constantă de cuplaj cu cîmpul gravific (mai precis inerțial) ; interacțiunea gravifică se identifică în acest sens cu negația ei proprie — absența oricărei interacțiuni, caz limită. Masa de orice natură (inclusiv masa de cîmp) este totodată și masa grea (gravifică) și inertă. Această poziție aparte a cîmpului gravific și a sarcinii gravifice (=a masei proprii), față de celelalte cîmpuri și sarcini se explică abia pe baza unificării în C_6 conform riemannian (sau V_6 riemannian, sau E_6) a celor 15 tensori ai lui Dirac (densitățile curentului, momentului magnetic, spinului și masei pseudoscalare) în doi tensori antisimetrici $\varphi^{\pm}_{ab}$ — tensorii densității curent-sarcină = al momentului cinetic propriu = al acțiunii, de valori absolute $J_0^{\pm}$ (densitățile masei scalare şi pseudoscalare, canonic conjugate respectiv timpului propriu $x^5 = ct'$ şi coordonatei proprii $x^6 = il'$).

În concluzie, unitatea dialectică dintre masa de bază şi masele de cîmp reflectă deci : *a*) unitatea dintre absolut şi relativ, deci dintre esenţă (lege) şi perturbaţii (fenomen) ; *b*) dintre individ şi colectiv ; *c*) dintre obiect şi relaţie.

b. *Egalitatea masă inertă — masă grea.* 1. Făcînd abstracţie de corpurile cereşti şi de legea lui Arhimede, greutatea $\overline{F}$, determinată experimental, a unui corp terestru este rezultanta forţei gravifice $\overline{F}'$ proporţională cu masa sa grea şi a forţelor inerţiale $\overline{F}''$ datorite mişcării Pămîntului şi proporţionale cu masa inertă a corpului. Încă experienţele newtoniene asupra oscilaţiei pendulului, repetate de Bessel, au evidenţiat faptul fundamental al proporţionalităţii masei inerte şi grele. După cum au arătat mai precis experienţele lui Eötvös, direcţia rezultantei $\overline{F}$ a forţei gravifice $\overline{F}'$ şi a forţei inerţiale $\overline{F}''$ este independentă de natura corpului ; masa grea şi inertă sînt deci proporţionale sau — într-un anumit sistem de unităţi — egale ; diferenţa dintre masa inertă şi masa grea este inferioară lui 10^{-8}. De asemenea, diferenţa posibilă dintre rapoartele masei inerte şi grele, în cazul oxidului de uraniu şi oxidului de plumb, este inferioară lui $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ în concordanţă cu legea relativist-restrînsă a interdependenţei dintre masa inertă şi energie şi cu egalitatea dintre masa inertă şi masa grea ; dacă, dimpotrivă, energia emisă în cadrul dezintegrării radioactive a uraniului (ducînd înspre plumb), ar fi legată de o masă inertă, nu însă de o masă grea, rapoartele de mai sus ar diferi cu (1/2, 6) 10^{-4}.

2. Constantele universale $\varkappa \equiv 8\pi k/c^2$ şi k fiind respectiv constanta gravifică einsteiniană şi newtoniană iar m' şi m_0 masele de repaus inertă şi grea (sarcina gravifică), avem

$$m_0 \equiv m' \sqrt{\varkappa}, \tag{IV.18}$$

masa grea avînd deci dimensiunea sarcinii electrice. În fizica clasică se defineşte însă adesea masa grea prin relaţia

$$\overline{m}_0 \equiv m' \sqrt{k}. \tag{IV.18'}$$

Legea newtoniană a forţei de atracţie dintre masele m', M' ia atunci forma

$$F \equiv k\, m\, M/r^2 \equiv \overline{m}_0\, \overline{M}_0/r^2. \tag{IV.19}$$

3. Relaţiile relativist-restrînse dintre masa inertă m, energia $W = mc^2$ şi impulsul $\overline{p} \equiv m\overline{v}$ se extind în teoria generală a relativităţii pe baza vitezei variabile $f \equiv c\,(+ g_{44})^{1/2}$ a luminii ($x^4 = i\, ct$). În cazul mişcării cu viteza spaţială $v^\alpha \equiv \mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}t$ a unui corp în cîmpul gravific static de metrică (II.26) (cu semn schimbat) ($\alpha = 1,2,3$)

$$\mathrm{d}s^2 \equiv -\mathrm{d}\sigma^2 + f^2 \mathrm{d}t^2 \equiv c^2 \mathrm{d}t'^2 \equiv (v^2 - f^2)\, \mathrm{d}t^2, p^i = m' u^i \quad u^i \equiv \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \equiv v^i \tag{IV.20}$$

avem

$$m \equiv m,/\sqrt{1 - v^2/f^2} \qquad \text{(IV.21)}$$

$$cp^4 \equiv i\,W \equiv imc^2,\ p^\alpha \equiv m\frac{c}{f}v^\alpha\,, \qquad \text{(IV.22)}$$

$$cp_4 \equiv imf^2,\ p_\alpha \equiv mc\,v_\alpha/f.$$

În S.C. propriu C (local și momentan, mobil) al particulei viteza spațială e nulă ($v^\alpha = 0$, $u^\alpha = 0$); u^4 se reduce la $u^4 = ic$,

$$cp_4 = i\,W = im'\,c^2,\ p_\alpha = 0\ (m = m'); \qquad \text{(IV.22')}$$

impulsul spațial p_α este nul. În particular, în cazul cîmpului static sferic generat de o masă inertă $m^\cdot$ de repaus neutră sau încărcată, (IV.22) ia forma:

$$cp^4\ (\equiv im'c^2) \equiv i\,m_0\,c^2,\ p^\alpha = 0.$$

Rezultă

$$m' = m_0. \qquad \text{(IV.23)}$$

Masa de repaus inertă m' e deci proporțională valorii absolute a intervalului energie-impuls a sistemului (cvadrivector de componente p_i ($\equiv J_i c/\varkappa$) date de formula (IV.23)). În teoria conformă a cîmpului, impulsul p_α, energia $W = -\,i\,p_4\,c$ și cele două mase de repaus (scalară $m' = ip_5/c$ și pseudoscalară $m'' = p_6/c$), canonic conjugate respectiv timpului propriu $t' = x^5/c$ și coordonatei proprii $l' = -\ ix^6$ se unifică într-un 6-vector p_a în V_6 (E_6) [1], [3]. Mai general, celor patru coordonate proprii $x^{i'}$ ($i' = 5,6,7,8$) (spațiale $x^{6,7,8} \equiv i\,X^{6,7,8}$ și temporală $x^5 \equiv X^5 \equiv ict'$) le corespund patru mărimi canonic conjugate $p_{i'}$ proporționale respectiv cu masele de repaus inerte pseudoscalare $m'_{6,7,8}$ și scalară m'_5 ($X_{i'}$ reali). Spațiul-timp cosmic-propriu V_8 (sau E_8) de coordonate $x^a(x^i,\ x^{i'})$ ($a = 1,\dots,8$) se reduce local la V_6 (sau E_6), luînd axa OX^6 în direcția mișcării locale a particulei ($x^{7,8} = 0$).

Din relația (IV.22′) dintre energia W și masa inertă m (caz particular (IV.10)) și din relația (IV. 11 b) dintre energia proprie W' și masa proprie grea m_0 — (IV.11 b) fiind o consecință a ecuațiilor gravifice — rezultă:

a) proporționalitatea generală dintre energia W și masa inertă m:

$$W = mc^2; \qquad \text{(IV.24)}$$

b) egalitatea dintre masa inertă m' și masa grea $\overline{m}_0$:

$$m = \overline{m}', \qquad \text{(IV. 25)}$$

în particular (IV.11 c). Dintr-o egalitate empirică (IV. 25) devine deci o consecință a ecuațiilor gravifice relativist generale.

Relațiile (IV.24) devin atunci totodată relații dintre energie și masa grea.

Din identitatea cantitativă a masei grele și inerte rezultă reciproc echivalența cantitativă a forțelor gravifice și inerțiale și a potențialelor corespunzătoare. În formulele (IV.18) sau (IV.18′), unitățile de măsură se aleg atunci astfel încît $\varkappa = 1$ sau $k = 1$. Mai general, pentru unități de măsură oarecare (deci $\varkappa$, k oarecare), vom considera mărimea m — măsura masei inerte — ca fiind totodată măsura masei grele $\overline{m}$ (definiția lui Einstein).

4. Dată fiind viteza de propagare finită a oricărei interacțiuni (v. ecuația frontului de undă (III.24)) schimbarea stării de mișcare a unui corp dat — datorită variației repartiției maselor exterioare situate la distanțe finite nenule — nu este instantanee : inerția este manifestarea caracterului *spațio-temporal al mișcării* (Engels). Egalitatea cantitativă a masei inerte (interne) a particulei și a masei ei grele (legată de acțiunea exterioară gravifică) — egalitate demonstrată de teoria generală a relativității — este deci totodată legată de deosebirea lor calitativă și de opoziția lor — concluzie valabilă și pentru cîmpurile potențiale și forțele gravifice și inerțiale și concretizată în teoria lui M. Kohler. Unitatea dialectică dintre masa grea și inertă reflectă unitatea dialectică : *a*) dintre particulă (discontinuu) și cîmp (continuu) — ca stări ale materiei, subordonate cîmpului — deci indirect dintre interior și exterior; *b*) dintre autoacțiune și interacțiune și deci indirect dintre obiect și relație, subordonată obiectului (corpului în mișcare).

C. MIŞCAREA GEODEZICĂ A PARTICULEI

a. *Autoparalela și geodezica.* Fie într-o varietate $\mathcal{A}_n$ de conexiune afină simetrică $\Gamma^i_{kl} \equiv \Gamma^i_{lk}$, x^i coordonatele particulei cvasipunctuale, funcții ale parametrului continuu λ, ( ) simbolizînd derivata covariantă în Γ^i_{kl}, $u^i \equiv \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda$ componentele „vitezei cosmice" a particulei, $a^i \equiv \mathrm{d}u^i/\mathrm{d}\lambda \equiv \mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}\lambda^2$ componentele „accelerației cosmice", A^i componentele „accelerației afine" (vectori în varietatea $\mathcal{A}_n$ spre deosebire de a^i). În varietatea $\mathcal{A}_n$, ecuația diferențială a „curbei autoparalele" este, prin definiție,

$$\begin{aligned}&A^i = 0 \text{ sau } a^i + \Gamma^i_{kl}\, u^k u^l = 0 \text{ sau } \mathrm{d}u^i/\mathrm{d}\lambda + \Gamma^i_{kl}\, u^k u^l = 0\\ &\text{sau } \mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}\lambda^2 + \Gamma^i_{kl}(\mathrm{d}x^k/\mathrm{d}\lambda)(\mathrm{d}x^l/\mathrm{d}\lambda) = 0 \text{ sau } (u^i)_k = 0 \text{ sau } \partial_k u^i + \Gamma^i_{kl} u^l = 0.\end{aligned} \tag{IV.26}$$

Ecuația (IV.26) exprimă transportul paralel al componentelor u^i ale vitezei cosmice între două puncte infinit vecine ale curbei autoparalele într-un S.C. oarecare, deci anularea derivatei covariante $(u^i)_k$ a vitezei cosmice u^i sau caracterul „staționar" al vectorului viteză u^i de-a lungul curbei autoparalele.

Într-o varietate riemanniană V_n de metrică (II.1), conexiunea Γ^i_{kl} e conexiunea (II.2) a lui Christoffel. În acest caz, curba autoparalelă caracterizată prin ecuațiile diferențiale (IV.26) este totodată o „linie geodezică", definită, notînd $Q \equiv \mathrm{d}s^2/\mathrm{d}\lambda^2$, de proprietatea variațională integrală

$$\text{(a) } \delta \int \mathrm{d}s^2/\mathrm{d}\lambda = 0 \quad \text{sau} \quad \text{(b) } \delta \int Q \,\mathrm{d}\lambda = 0. \qquad \text{(IV.27)}$$

Considerînd ecuația (IV.26) ca ecuație de mișcare, (IV.27) este valabilă pentru $\mathrm{d}s^2$, oarecare ($\mathrm{d}s^2 \lesseqgtr 0$), deci pentru particulele de orice masă de repaus. Pentru $\mathrm{d}s^2 < 0$, deci pentru mișcarea particulelor substanței (de masa de repaus nenulă), geodezica e caracterizată și prin proprietatea integrală variațională

$$\delta \int \mathrm{d}s = 0 \quad \text{sau} \quad \delta \int \sqrt{Q} \,\mathrm{d}\lambda = 0. \qquad \text{(IV.27')}$$

Dimpotrivă, pentru $\mathrm{d}s = 0$ (particule de masă de repaus nulă), geodezica e caracterizată doar de ecuația (IV.27). Conform lui (IV.27), geodezica e prin definiție o curbă „extremală" : distanța de-a lungul geodezicii a două puncte *suficient de apropiate*, în comparație cu curbele vecine unind cele două puncte, e întotdeauna minimă. Distanța a două puncte *oarecare* de-a lungul geodezicii e minimă, maximă sau „staționară". Astfel, în cazul suprafeței sferice, liniile geodezice sînt cercuri mari (cu centrul în centrul sferei). Considerînd pe un cerc mare punctele A, B, dintre cele două arce care unesc A cu B, cel mic este efectiv drumul cel mai scurt posibil pe sferă între A și B, iar cel mare — drumul maxim.

b. *Legea mișcării, consecință a ecuațiilor cîmpului.* 1. Definim în V_n riemannian „mișcarea inerțială" prin mișcarea pe geodezică (de pildă cercul mare pe sferă). În fizica clasică și în teoria relativist-restrînsă, egalitatea dintre masa inertă și masa grea este, după cum s-a văzut, pur empirică : mișcarea unei particule supuse doar inerției (mai precis forțelor inerțiale centrifuge și Coriolis, determinate de masa inertă — forțele de legătură presupuse date —) e o mișcare pe geodezică în particular, mișcare rectilinie și uniformă corespunzătoare geodezicii spațiului euclidian E_3 respectiv spațiului-timp pseudoeuclidian E_4. În fizica clasică și relativist-restrînsă, gravitația e considerată distinctă de inerție, ca forță exterioară aparte ; ea determină atunci — ca și orice alte forțe — o perturbație a mișcării particulei, abaterea ei de la geodezică.

2. Particula a fost definită de Einstein ca singularitate punctuală a cîmpului, iar de către V. Fok ca regiune finită de mase. Se impun două observații generale :

a) Singularitatea punctuală nu constituie decît o primă aproximație a particulei, centrul ei, în care mărimile cîmpului (densitățile energie-impuls) iau valori enorm de mari, chiar infinite [1], [2], [3]. Particula ca regiune finită a cîmpului din jurul singularității și caracterizată de o concentrare mare, de volum redus, a materiei și mișcării cîmpului, constituie o a doua aproximație mai profundă. Complexul particulă-cîmp, în unitatea lor contradictorie indisolubilă, infinit în spațiu-timp, constituie o a treia aproximație, mai profundă.

b) Pe de altă parte, singularitățile de tipul polilor (infiniților) sînt, prin definiție : 1° în teoria clasică relativistă a cîmpului, singularități ale diferențialelor coordonatelor „olonome” (coordonate $\mathrm{d}x^i$ cosmice) — în funcție de congruențele ortogonale (diferențiale de coordonate „neolonome”) = coordonate proprii $\mathrm{d}s^{(i)}$ și de singularitățile potențialelor gravifice g_{ik} ; 2° în teoria conformă a cîmpului (implicînd automat legea generalizată a reciprocității) [1], [2], [3]; apar de asemenea singularități ale metricilor „electrice” $\underset{[i]}{\mathrm{d}s}$, în funcție de metricile „magnetice” $\underset{[i]}{\mathrm{d}s'}$ și de singularitățile unor potențiale generalizate. Singularitățile de tipul polilor implică deci în ambele cazuri un S.C. fix (olonom) în V_4 (sau V_n) scufundat în E_N (sau E_M) polidimensional.

Existența singularităților de tipul polilor derivă deci : α) Din caracterul indefinit al metricii (metrica relativistă coordonate-durata sau metrica reciprocității : coordonate-durată-impuls-energie). Acesta e cazul singularităților vitezei cosmice de tip Einstein corespunzătoare mișcării și al singularităților cîmpului, de tip Born-Infeld, soluții ale ecuațiilor conforme ale cîmpului [1], [2], [3]. Fie t, $\bar{t}$ timpul cosmic și propriu relativist-restrîns, v viteza spațială a particulei, iar în teoria Born-Infeld sau în teoria conformă, F valoarea absolută a cîmpului continuu („magnetic”) F_{ik} ; F_0 cîmpul maxim corespunzător. Forma relativist-restrînsă a vitezei cosmice u^i este

$$u^i = v^i/\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{IV.28}$$

iar cîmpul discontinuu („electric”) de tip Born-Infeld este

$$H^{ik} \equiv F^{ik}/\sqrt{1 - F^2}. \tag{IV.29}$$

Formulele (IV.28) și (IV.29) sînt izomorfe (principiul de corespondență dintre legea relativității și legea reciprocității, în particular dintre mărimile cosmice-proprii și cele „electrice”-„magnetice”).

β) Singularități de tipul polilor derivă de asemenea din caracterul riemannian (mai general conform-riemannian) al metricii deci din covarianța generală față de transformările de coordonate și mai general față de transformări conforme, fiind determinate în ultimă instanță de singularitățile tensorilor energie-impuls și sarcină-curent, deci de singularitățile structurii materiei (singularitățile funcțiilor de tip $1/r'$ în teoria clasică relativist-generală, de tip $1/r$ și $1/(1-r')$ în teoria conformă) (v. pag. 561).

Singularități de alte tipuri (distincte de poli = infiniți) derivă din caracterul nelocal (nepunctual) în particular discontinuu (= cuantic) al spațiu-timpului, energiei-impulsului și sarcinii-curentului și deci al materiei.

3. În principiu, într-o teorie liniară a cîmpului, distribuția și mișcarea particulelor (determinînd cîmpul) pot fi date arbitrar (în limitele legilor de conservare) ; legea mișcării particulei nu poate fi dedusă din legi liniare ale cîmpului (de pildă din ecuația gravifică a lui Poisson sau din ecuațiile electromagnetice maxwelliene). În orice teorie neliniară (deci general covariantă) dimpotrivă, ecuația de mișcare a particulelor

trebuie determinată o dată cu cîmpul din ecuațiile acestuia (condițiile inițiale și de limită presupuse date). Ecuațiile mișcării particulei depind deci de cîmp (sistem cu o infinitate de grade de libertate). Problema depășește cadrul mecanicii; (ea nu se reduce la o problemă mecanică decît prin neglijarea părții de cîmp respectiv radiative a sistemului considerat). Mai precis: considerînd particula ca regiune (punctuală sau finită) a cîmpului, legea de mișcare a cîmpului constituie o formă particulară a legilor de conservare-transformare a mărimilor fizice, în tranziția lor din regiunea cîmpului în regiunea particulei și invers — a legilor valabile pentru impuls-energie în V_4, iar în C_4 (și V_6, C_6) și a legilor valabile pentru masele de repaus respectiv pentru curentul electric și magnetic (= spin) respectiv pentru sarcinile electrică și barionică.

4. Distincția dintre legile de conservare-transformare „tari" și „slabe" implică distincția analogă între legile de mișcare „tari" (identități independente de ecuațiile cîmpului și deci de forma lagrangianului și legi de mișcare „slabe" (consecințe ale ecuațiilor cîmpului și deci ale lagrangianului) consecințe ale ecuațiilor gravifice în V_4, în virtutea caracterului lor neliniar. Pentru legile mișcării, ca și pentru problema eliminării infiniților integralelor energiei și sarcinii *totale* în teoria cuantică relativistă uzuală (problema „regularizării"), relațiile de conservare „tari" prezintă probabil un interes deosebit. Într-adevăr, integralele corespunzătoare (IV.6, 8, 12, 14) (nebarate) se pot exprima ca integrale pe suprafețele înconjurînd singularitățile (v. pag. 571—572) cu derivate după timp, depinzînd de alte integrale de suprafață (forță-efect), independent de singularitățile interioare (și deci independent de metodele de aproximație folosite în regiunile interioare (P. Bergman [24]). În cazul legilor de conservare „slabe", dimpotrivă, integralele (IV. 6, 8, 12, 14) (barate) rămîn integrale de volum; singularitățile cîmpului din regiunea interioară — de concentrare enormă a materiei și mișcării — trebuie deci cunoscute.

c. *Mișcarea pe geodezică în* V_4. 1. În particular, presupunînd: *a*) particula neutră (=nesupusă altor forțe decît celor gravifice=inerțiale) și *b*) fără separarea cîmpului gravific exterior și a cîmpului gravific propriu al particulei (în prima aproximație deci: făcînd abstracție de cîmpul gravific propriu al particulei considerată ca un corp de probă, de masă neglijabilă, în cîmpul gravific exterior), mișcarea particulei este atunci o mișcare pe o geodezică în spațiul-timp riemannian V_4 fără a mai constitui un postulat (geodezică nenulă $ds^2 < 0$ pentru substanță, geodezică nulă $ds^2 = 0$ pentru variație (v. pag. 579)).

O demonstrație (neriguroasă) a acestei teoreme în cazul cîmpului gravific *static* a fost dată de A. Einstein și J. Grommer (1927) și de G. Darmois [41]. Lucrările ulterioare în problema mișcării geodezice în V_4 s-au dezvoltat în două direcții.

Prima direcție e reprezentată de lucrările lui A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann ș.a. [41]; ei deduc în prima aproximație legea newtoniană a mișcării, iar în a doua aproximație — ecuațiile general-covariante de mișcare pe geodezică într-un cîmp gravific oarecare, considerînd: α) particula ca singularitate punctuală a cîmpului, β) tensorul energie-impuls nul. După cum a arătat L. Infeld, calculele devin extrem de simple reprezentînd particula prin funcţia δ Dirac cu singularităţi; ea defineşte atunci totodată un anumit tensor energie-impuls.

Cea de-a doua direcţie e datorită lui V. Fok şi colaboratorilor săi [42], [49]. În contradicţie cu A. Einstein, V. Fok porneşte : α) de la mase extinse cu structura interioară, β) de la tensorul energie-impuls nenul. Astfel, în 1939, Fok a dedus din ecuaţiile gravifice (şi din condiţiile de armonicitate) ecuaţiile de mişcare ale maselor finite fără rotaţie, în prima aproximaţie, iar în 1946, Petrova a dedus ecuaţiile corespunzătoare celei de-a doua aproximaţii, în S.C. armonic determinat pînă la o transformare Lorentz. Ecuaţiile au fost puse de Fichtengolţ sub forma lagrangiană şi integrate. Kaşkarov şi Papapetrou au dedus ecuaţiile de mişcare ale maselor finite (cu şi fără rotaţie) în aproximaţia I şi II. Alte rezultate importante privind mase de dimensiuni finite în rotaţie (ecuaţiile mişcării şi integralele lor) sînt conţinute în cartea lui V. A. Fok [49].

Papapetrou a demonstrat echivalenţa matematică a celor două teorii ale mişcării maselor (punctuale şi finite) pentru o rază suficient de mică a acestora. Dirac a elaborat o teorie a mişcării particulei extinse, considerînd spaţiul în interiorul particulei ca spaţiu euclidian. Toate lucrările citate ale ambelor direcţii de dezvoltare privesc : 1° distribuţii ,,insulare'' ale maselor (condiţiile 1°, 2°, 3° de la pag. 572); 2° ele fac abstracţie de radiaţia gravifică (deci de undele gravifice), reducînd astfel problema la una de mecanică.

2. În V_4 spaţiu-timp riemannian mişcarea geodezică ($=$ inerţială) a particulei : *a*) nu este în general o mişcare rectilinie uniformă ci ,,curbă'' şi ,,accelerată'' (cîmpul gravific $\Gamma^i_{kl} \neq 0$), corespunzătoare curburii locale şi momentane a lui V_4; *b*) această mişcare e determinată prin intermediul cîmpului gravific Γ^i_{kl}, de structura şi mişcarea materiei. În teoria generală a relativităţii, mişcarea ,,gravifică'' şi ,,inerţială'' (pe geodezică) se identifică deci; mişcarea particulei neutre pe o linie geodezică determinată de cîmpul gravific reflectă în teoria generală a relativităţii egalitatea dintre masa inertă şi masa grea. În consecinţă, gravitaţia nu constituie în teoria generală a relativităţii — în opoziţie cu teoria newtoniană — o forţă exterioară aparte, ci se identifică cantitativ cu inerţia, după cum masa grea se identifică cu masa inertă. Invers, postulînd mişcarea gravifică, ca fiind o geodezică ($=$ mişcare inerţială), în general curbă — spaţiul-timp trebuie să fie la rîndul său curb, în particular riemannian.

3. În particular, abstracţie făcînd : 1° de interacţiuni negravifice, 2° de perturbaţiile reciproce ale planetelor şi sateliţilor şi ale substanţei interstelare şi 3° de cîmpul gravific propriu al planetei, geodezica descrisă în spaţiul-timp static sferic, de către centrul maselor planetei este o elipsă în rotaţie (rozetă), determinată în mod direct *exclusiv* de cîmpul gravific solar local şi momentan vecin planetei şi doar indirect, prin intermediul acestuia, de distribuţia *anterioară* a maselor solare, modificările cîmpului datorite redistribuţiei maselor propagîndu-se cel mult cu viteza luminii în regiunile cîmpului. De asemenea, existenţa unei mase grele (de mişcare) a fotonului implică devierea luminii în cîmp gravific; ecuaţia propagării frontului undei nu mai e cea relativist restrînsă (III.24) din E_4 (valabilă

doar în S.C. geodezic local) ci ecuația generală (III.24) din V_4 relativist general.

d. *Mişcarea pe geodezică în* V_n. 1. Legea mişcării particulei electrizate (postulată încă de T. Kaluza [15] ca ecuația geodezicii de gen temporal $ds^2 < 0$ a unui V_5 riemannian cu $g_{55} = 1$) a fost dedusă de Infeld, Wallace, Papapetrou ş.a., ca o consecință a ecuațiilor gravifice einsteiniene. În teoria relativistă polidimensională, mişcarea particulei cu p sarcini (în afara masei grele = sarcinii gravifice) constituie o geodezică într-o varietate riemanniană spațiu-timp V_{p+4}. Mai precis, dintre cele $p + 4$ sarcini, 4 sînt tocmai cele 4 sarcini gravifice (mase de repaus : 3 pseudoscalare şi 1 scalară — v. pag. 577).

2. În teoria uzuală relativist-generală a mişcării particulei se *postulează* totuşi existența acesteia fie : *a*) ca singularitate de un anumit tip şi ordin a cîmpului, fie *b*) ca regiune finită de o anumită structură descrisă de un tensor energie-impuls. Din ecuațiile 6-dimensionale conforme ale cîmpului (verificate de toate ecuațiile gravifice einsteiniene, dar mai generale), rezultă dimpotrivă automat : 1° existența a *două singularități de tip Born-Infeld* ale cîmpului : singularitățile energiei-impulsului şi sarcinii-curentului localizate respectiv în centrul şi pe suprafața cvasisferică a particulei (în teoria cîmpului sferic în C_4, într-un anumit S.C. şi etalon, funcții singulare de tip $1/r$ şi $1/(1 - r')$ v. pag. 561 ; 2° independența fiecărei singularități de natura specifică a cîmpului — deci existența particulei ca stare locală nepunctuală a cîmpului material neliniar; 3° forma tensorilor energie-impuls (gravific, mezonic vectorial — în particular electro- şi gravito-magnetic — şi pseudoscalar) şi sarcină-curent ca forme spinoriale cvadriliniare şi în particular în V_4 a vectorului curent-sarcină electrică şi a pseudovectorului curent-sarcină ,,magnetică'' (spin). În consecință, 1°, 2°, 3° nu mai constituie postulate (axiome), ci teoreme demonstrabile. Rezultă astfel o generalizare neliniară general-covariantă conformă a teoriei dublei soluții a lui L. de Broglie, Vigier, Bohm etc. (*teoria cvadruplei soluții* : ecuația de undă implicînd soluții continue, cu o singularitate de primul sau al doilea tip, sau cu ambele singularități) [1], [2], [3].

3. Mişcarea inerțială a particulei neutre pe o geodezică în V_4 reflectă unitatea dialectică dintre masa inertă şi masa grea. Mişcarea particulei încărcate pe o geodezică în V_n polidimensional este rezultatul luptei contrariilor : gravitația (inerția) implicînd tendința mişcării particulei pe geodezica cvadridimensională şi acțiunile contrarii perturbatoare (electromagnetice, mezonice etc.) ale cîmpului material.

Mai general : în V_m polidimensional în care e scufundat un V_n dat ($m > n$) abaterea particulei de la geodezica lui V_n (= perturbația datorită interacțiunilor neinerțiale în V_n) constituie o componentă a mişcării geodezice în V_m datorită inerției generalizate definite în V_m : mişcarea geodezică (inerțială) a particulei în V_m e unitatea dialectică contradictorie a mişcării inerțiale în V_n (implicînd tendința mişcării pe geodezică în V_n) şi a perturbației din V_n, a acesteia din urmă.

4. În teoria relativistă a mişcării este fundamentală opoziţia dintre „conservarea prin inerţie" (în sensul cel mai general) şi „adaptarea dinamică" (Weyl).

a) Mişcarea inerţială (gravifică) este condiţionată de istoricul sistemului respectiv : sistemul se mişcă în fiecare moment datorită mişcării din momentul anterior (condiţiile iniţiale fiind între anumite limite arbitrare.) Astfel, rezultatul deplasării infinitezimale paralele între două puncte a unui vector al sistemului — chiar în cazul izolării sale totale de mediu (cazul vectorului viteză cosmică pe geodezică) este dependent de drum ; vectorul deplasat se conservă prin inerţie (cazul mişcării geodezice a planetelor, a mişcării unui giroscop sau a pendulului Foucault).

b) Dimpotrivă, adaptarea dinamică (de pildă poziţia acului magnetic) este determinată în fiecare punct şi moment de cîmpul înconjurător, independent de poziţia anterioară. Deplasarea corespunzătoare între două puncte a unui vector al sistemului este independentă de drum.

D. ECHIVALENŢA CÎMPURILOR GRAVIFICE ŞI DE ACCELERAŢIE

a. *Gravitaţie şi acceleraţie*. 1. Einstein extinde principiul newtonian al echivalenţei *mecanice* dintre cîmp gravific *omogen* (= constant în spaţiu şi timp) şi acceleraţia *uniformă* (= constantă) : *a*) la toate legile *fizice* şi *b*) la cîmpuri gravifice oarecare *neomogene* (= variabile în spaţiu şi timp), deci la acceleraţii *oarecare*. În axiomatizarea einsteiniană iniţială a teoriei generale a relativităţii, echivalenţa constituie o axiomă (la rîndul ei echivalentă într-un anumit sens, identităţii dintre masa inertă şi masa grea). În realitate : ecuaţia (IV.26) a liniei geodezice a particulei exprimă egalitatea cantitativă locală a acceleraţiei cosmice a_i şi a „cîmpului gravific" — în interpretarea lui M. Kohler [29] a „cîmpului inerţial total" (de semn schimbat) — $\Gamma^i_{kl} u^k u^l$:

$$a^i = -\Gamma^i_{kl} u^k u^l ; \qquad \text{(IV.28')}$$

(IV.26) şi (IV.28) sînt echivalente. În acest sens, echivalenţa cantitativă locală dintre cîmp gravific şi cîmp de acceleraţie constituie o teoremă (echivalentă cu teorema geodezicii în $\mathcal{A}_n$ sau V_n, deci consecinţă a ecuaţiilor gravifice). După cum s-a văzut, sub o formă mai generală, independent de ecuaţiile cîmpului, echivalenţa locală dintre cîmp gravific şi cîmp de acceleraţie constituie o consecinţă a covariantei generale, deci a caracterului riemannian al metricii (V. Fok [49]).

De asemenea, pe baza egalităţii maselor proprii inerte m' şi grele m_0, ecuaţia de mişcare a particulei de acceleraţie cosmică a^i în cîmpul gravific Γ^i_{kl}

$$m' a^i = -m_0 \Gamma^i_{kl} u^k u^l \qquad \text{(IV.29')}$$

revine la ecuaţia (IV.26) a geodezicii în $\mathcal{A}_n$ sau V_n (echivalenţa locală a acceleraţiei cosmice a^i şi a „cîmpului gravific" $-\Gamma^i_{kl} u^k u^l$) şi invers.

Ecuaţia mişcării particulei „libere'' (ca şi transformarea care duce la S.C. geodezic), e deci independentă de masa particulei.

În consecinţă, în teoria generală a relativităţii ca şi în fizica clasică, teorema *dinamică* a egalităţii dintre masa inertă şi masa grea (valabilă în mod global şi riguros = în domenii de orice extindere, în limitele valabilităţii definiţiilor actuale ale masei inerte şi grele) şi teorema *cinematică* a echivalenţei (în mod riguros locale) iar în domenii finite doar aproximative) dintre cîmp gravific şi cîmp de acceleraţie sînt deci indisolubil legate. Prima teoremă e fundamentală.

Notînd

$f = e\,\Phi$ (Φ = potenţialul gravific newtonian),

în cîmpul gravific static (II.26), în S.C. propriu al particulei ($u^\alpha = 0$), (II.28) ia forma (I.4) :

$$a^i = -\,\Gamma^i_{44}\, c^2/f^2 \text{ sau } a^\alpha = -\,\partial_\alpha \Phi \text{ sau } \bar{a} = -\,\text{grad}\,\Phi(\bar{a}^4 = 0). \qquad \text{(IV.30)}$$

Legea (IV.30) sau (I.4) rezultă de asemenea în aproximaţie newtoniană (cîmpuri : a) slabe, b) cvasistatice, c) particule de viteze mici în raport cu viteza luminii).

2. Sînt valabile trei observaţii fundamentale :

a) În cazul general al acceleraţiei şi cîmpului gravific oarecare cîmpul de acceleraţie şi cîmpul gravific (de valori absolute identice şi de semn opus) sînt echivalente doar local (adică în domenii infinitezimale spaţio-temporale) : un S.C. accelerat (în absenţa gravitaţiei) este echivalent unui S.C. inerţial în cîmp gravific, de acceleraţie egală şi opusă celei dintîi.

b) Ecuaţia (IV.26) a liniei geodezice fiind ecuaţie veritabilă nicidecum identitate, egalitatea cantitativă a cîmpului gravific şi a cîmpului de acceleraţie este legată de deosebirea lor calitativă şi de opoziţia lor (datorită semnului opus al termenilor a^i şi $-\,\Gamma^i_{kl}\, u^k\, u^l$ în (IV.26).

c) În domenii finite, echivalenţa cîmpului gravific şi a cîmpului de acceleraţie e aproximativă ; ea nu e valabilă decît în anumite cazuri (foarte largi) : cîmpuri gravifice relativ slabe şi viteze relativ mici, iar dincolo de anumite limite spaţio-temporale, cîmpul de acceleraţie nu mai e echivalent unui cîmp gravific fizic, ci unuia pur geometric (neverificînd condiţiile de limită). Echivalenţa e deci pur cantitativă, locală, aproximativă în domenii finite ; pe această bază cele două cîmpuri sînt discernabile calitativ şi global.

În particular, sînt echivalente : α) un S.C. uniform accelerat şi cîmpul gravific constant (omogen) ; β) un S.C. neuniform accelerat în mişcarea rectilinie şi un cîmp gravific variabil în timp şi constant în spaţiu ; γ) un S.C. în rotaţie uniformă şi un cîmp gravific variabil în spaţiu şi constant în timp.

În teoria restrînsă a relativităţii o particulă supusă unei forţe constante se mişcă pe o hiperbolă echilateră în spaţiul-timp E_4 ; în S.C. propriu mobil rigid legat de particulă (altul în fiecare punct şi moment, în raport cu un S.C. fix) acceleraţia cvadridimensională cosmică a^i (deci şi cîmpul gravific) sînt constante în spaţiu şi timp. Teoria sistemelor uniform accelerate (deci a cîmpului gravific omogen) e echivalentă teoriei relativiste conform euclidiene în H_4.

3. În limitele valabilității ei, echivalența dintre accelerație și gravitație permite pe de o parte reducerea problemei fizice (dinamice) a influenței cîmpului gravific asupra fenomenelor fizice la problema geometrică (cinematică) a mișcării unui sistem neinerțial în absența cîmpului gravific. Invers, această din urmă problemă geometrică (cinematică) are un conținut fizic (dinamic), concret. Astfel, în concordanță cu experiența, accelerația unei astronave (S.C. neinerțiale) față de un S.C. fix (C) este echivalentă unui cîmp gravific suplimentar și deci (conform teoriei generale a relativității) creșterii inerției corpurilor și deci încetinirii fenomenelor fizice din interiorul astronavei (vezi și paradoxul ceasornicelor), accelerația fiind absolută în domenii finite, nenule.

4. Teorema echivalenței în V_4 cu accelerația a^i nu e valabilă pentru cîmpurile negravifice, de pildă electromagnetice. Ecuația newtoniană a mișcării particulei de masă proprie inertă m' și de sarcină electrică e_0 în cîmpul electric exterior $\overline{E}$ este

$$m'\overline{a} = e_0\overline{E}. \qquad (IV.31)$$

Masa inertă (grea) m' fiind distinctă de sarcina electrică e_0, accelerația particulei nu este egală cu cîmpul electric exterior $\overline{E}$, mai general, în cîmpul electromagnetic corpurile nu cad deci cu aceeași accelerație : pentru un cîmp electromagnetic exterior dat, accelerația lor este invers proporțională masei m'. Concluzii analoge sînt valabile în teoria restrînsă și generală a relativității.

Doar în cazul cîmpului gravific, cele două contrarii : masa grea și masa inertă (deci și forțele de inerție și cele gravifice) variază proporțional. Rezultatul luptei contrariilor — accelerația gravifică — este atunci constantă, independentă de masa corpului.

În teoria relativistă a lui V_n riemannian sau C_n conform riemannian (în particular în V_6 sau C_6), conexiunea Γ^a_{bc} $(a, b, c = 1, ..., 6)$ reprezintă cîmpurile de spin maxim 2 unificate (cîmpurile mezonice „tensoriale”, vectoriale și pseudoscalare, corespunzătoare respectiv stărilor de spin 2, 1, 0, pentru particulele de mase de repaus nule : gravitonul, fotonul și particula χ) [1], [3], [15], [21]. Ecuația geodezicii generale de tipul (II.26) sau

$$\alpha^a + \Gamma^a_{bc}\, u^b u^c = 0 \text{ sau } \alpha^a = -\Gamma^a_{bc}\, u^b u^c \qquad (IV.32)$$

exprimă egalitatea (locală) a accelerației cosmice generalizate $\alpha^a \equiv G^{ab}\alpha_b$ și a „cîmpului” (de sens schimbat) $\Gamma^a_{bc}\, u^b\, u^c$ (chiar pentru indicele $a = i = 1, 2, 3, 4$ componenta α^i din (IV.32) și componenta a^i din (IV.26) sînt distincte). Transformarea ducînd la un S.C. geodezic „local” în V_n deci la anularea locală a cîmpului total Γ^a_{bc} sau accelerației α^a implică însă nu numai transformarea coordonatelor cosmice spațio-temporale x^i, ci și transformarea coordonatelor proprii x^λ (lungime și durată de repaus) deci a impulsurilor canonic conjugate p_λ corespunzătoare maselor de repaus ; această anulare nu implică doar o variație a poziției (mișcării) ci și a stării (interacțiunii), deci o interacțiune *dinamică* efectivă.

b. *Anularea locală a accelerației.* 1. După cum s-a văzut, în orice varietate afină $\mathcal{A}_n$ (în particular în spațiul-timp riemannian V_4), există în fiecare domeniu spațio-temporal infinitezimal D un reper local olonom C' („geodezic") față de care conexiunea Γ^i_{kl} ($=$ cîmpul gravific $=$ inerțial în V_4) — și în consecință forțele gravifice și influența gravitației asupra tuturor fenomenelor fizice — se anulează. În acest domeniu D există deci un spațiu-timp pseudoeuclidian tangent local și momentan E_4, în care este valabilă teoria restrînsă a relativității. Teorema se generalizează de-a lungul unei curbe oarecare în V_4.

În fizica clasică, cîmpurile și forțele inerțiale (centrifugă și Coriolis) se anulează chiar în domenii spațio-temporale de extindere finită, nenulă. În teoria generală a relativității, dimpotrivă, nu numai cîmpul gravific, ci și cîmpul inerțial (de aceeași natură cu cel gravific) — și forțele corespunzătoare — se anulează în S.C. geodezic C' local și momentan (deci în *domenii infinitezimale*) cît și de-a lungul unei *curbe* date. Doar în cazul cîmpului gravific (inerțial) omogen ($=$ constant într-un domeniu D' spațio-temporal *finit nenul*) cîmpul și forța gravifică (inerțială) se anulează în acest domeniu.

2. În consecință, în orice varietate afină (în particular în V_n riemannian), transportul paralel infinitezimal al vitezei de-a lungul curbei autoparalele (în V_n geodezică) într-un S.C. *oarecare* dat de ecuația (IV.26) este echivalent următoarei proprietăți : în orice punct-moment P al curbei autoparalele (în V_n, linie geodezică) există un S.C. local C' „geodezic" în care componentele vitezei rămîn neschimbate în mărime, direcție și sens în decursul mișcării de la punctul P la punctul infinit vecin P' al curbei autoparalele (geodezică în V_n). În C' mișcarea particulei neutre (supusă numai cîmpului gravific exterior nul în C' se reduce deci la o translație uniformă pe un segment de dreaptă local. În C' accelerația cosmică a' locală și momentană este deci nulă :

$$a'^i = 0 \text{ sau } \mathrm{d}u'^i/\mathrm{d}\lambda = 0 \text{ sau } \mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}\lambda^2 = 0. \qquad \text{(IV.33)}$$

O dată cu cîmpul gravific Γ'^i_{kl} se anulează deci în C' și cîmpul accelerației cosmice a'^i. Reciproc, anularea cîmpului accelerației cosmice a^i pentru viteze *arbitrare* u^i implică $\Gamma'^i_{kl} = 0$ (anularea cîmpului gravific). Teorema directă și reciprocă — consecințe ale ecuațiilor mișcării particulei pe geodezică și deci a ecuațiilor gravifice ($=$ deci ale echivalenței dintre cîmpul gravific și de accelerație) —, iar sub o formă mai puțin precisă — consecințe ale caracterului riemannian al metricii — se generalizează de-a lungul geodezicii în întregime. (Analog în teoria restrînsă și generală a relativității ca și în fizica clasică există cîte un S.C. față de care viteza spațială a oricărui corp A se anulează. S.C. respectiv este rigid legat de corpul A.)

Presupunînd valabilă în E_4 local relativist-restrîns legea mișcării particulei neutre : *a*) fiind de forma (IV.33) și *b*) independentă de derivatele de ordinul doi ale tensorului metric g_{ik}, forma general covariantă a ecuației (IV.33) e tocmai ecuația (IV.26) a geodezicii. Termenii $\Gamma^i_{kl}\, u^k\, u^l$

proporţionali cu cîmpurile gravifice Γ^i_{kl} (în ecuaţia (IV.26) nuli în tot spaţiul-timp E_4 al teoriei restrînse a relativităţii) măsoară abaterea locală a geodezicii (IV.26) de la ,,linia dreaptă'' (IV.33).

c. *Experienţa ascensorului.* 1. Egalitatea masei inerte şi grele şi echivalenţa cîmpului gravific şi a cîmpului de acceleraţie sînt ilustrate de experienţa imaginată a ascensorului einsteinian. În opoziţie cu interpretările empiriste de tip ,,instrumentalist'', o experienţă imaginată nu poate constitui o demonstraţie a teoriei, ci doar o verificare (la limită).

Fie un ascensor A nedeformabil, suficient de mic şi considerat într-un interval de timp suficient de mic. În aproximaţia dată, cîmpul gravific propriu al ascensorului este atunci nul, iar în interiorul său cîmpul gravific terestru e omogen (constant în timp şi spaţiu). Pentru acceleraţii suficient de mici şi deformările lui A şi ale corpurilor din interior sînt într-adevăr neglijabile.

2. Într-o primă experienţă (I), ascensorul este suspendat în cîmpul gravific terestru ; toate corpurile libere din interiorul ascensorului cad spre podea cu aceeaşi acceleraţie gravifică spaţială $\vec{a}$. Presupunînd, dimpotrivă, într-o a doua experienţă (II), inexistenţa cîmpului gravific terestru şi mişcarea accelerată a ascensorului în sens contrar (cu acceleraţia $-\vec{a}$), în virtutea inerţiei toate corpurile din interior vor rămîne pe loc,podeaua apropiindu-se de ele cu acceleraţia $-\vec{a}$. De asemenea, obiectele suspendate din interiorul ascensorului sau sprijinite de podea exercită o tensiune (respectiv presiune) datorită, în experienţa (I) gravitaţiei, iar în experienţa (II) inerţiei. În experienţa (I) (în prezenţa cîmpului gravific), fenomenele fizice decurg în interiorul ascensorului exact ca şi în experienţa (II) (cazul inexistenţei cîmpului gravific, înlocuit printr-o acceleraţie $-\vec{a}$ de sens contrar). În experienţa (I) se manifestă masele grele din ascensor în raport cu pămîntul; în experienţa (II) — masele lor inerte; în experienţa (I) se manifestă cîmpul gravific ; în experienţa (II) — cîmpul de acceleraţie (un S.C. inerţial în cîmp gravific este echivalent unui S.C. neinerţial în absenţa cîmpului gravific).

3. Într-o variantă (I') a experienţei (I), ascensorul (S.C. ,,accelerat'') şi toate corpurile din interior cad cu acceleraţia spaţială g în cîmpul gravific terestru (pămîntul fiind în cazul de faţă un S.C. inerţial sau cvasi-inerţial). Într-o variantă (II') a experienţei (II), în absenţa cîmpului gravific, ascensorul şi toate corpurile din interior sînt mişcate în sens contrar experienţei (I'), cu acceleraţia $-\vec{a}$. În ambele cazuri, în intervalul spaţio-temporal D dat (interiorul ascensorului foarte mic într-un interval de timp foarte scurt), variaţia cîmpului gravific (sau inerţial sau de acceleraţie) este neglijabilă. În domeniul D, acceleraţiile faţă de pămînt ale ascensorului şi ale tuturor obiectelor din domeniul D sînt deci într-adevăr egale. Faţă de ascensor, cîmpul gravific sau inerţial sau de acceleraţie se anulează. În domeniul D, în ambele experienţe nu se schimbă deci nimic. Toate fenomenele se desfăşoară în domeniul D ca şi în cazul absenţei gravitaţiei (sau inerţiei sau acceleraţiei). Ascensorul cvasipunctual A constituie el însuşi — în fiecare punct şi moment aparte — un S.C. geodezic local şi momentan ; în domeniul D este deci valabilă teoria restrînsă a relativităţii.

d. *Elementele absolute și relative ale gravitației* (*inerției*). 1. În fizica clasică, ca și în teoria generală a relativității, pe baza anulării cîmpului gravific, inerțial și de accelerație în anumite S.C., s-a proclamat adesea : 1° caracterul pur aparent (subiectiv), pur geometric și pur relativ al cîmpului gravific și inerțial, al inerției și masei ; 2° caracterul pur relativ al accelerației ca atare (de unde definiția ei de către Mach ca „accelerație față de toate masele universului" — tot atît de lipsită de sens ca și definiția ei newtoniană ca „accelerație față de spațiul absolut"), deci caracterul pur relativ al mișcării și echivalența deplină a tuturor S.C. și caracterul pur convențional al oricărui S.C. (inexistența S.C. preferențiale, inclusiv a celor inerțiale — în particular echivalența sistemelor lui Copernic și Ptolemeu, opoziția lor doar convențională). Ambele teze au fost formulate în fizica clasică de către Mach, iar ultima, sub influența acestuia, în cadrul teoriei generale a relativității și de către Einstein.

2. În realitate : α) Elementele relative sînt tot atît de obiective ca și cele absolute, după cum a subliniat și A. D. Aleksandrov [53] și G. Naan [54].

β) Cîmpul gravific și inerțial nu sînt determinate doar de S. C. ci și de structura și mișcarea obiectivă a materiei ; ele se manifestă la rîndul lor prin efecte fizice concrete, avînd deci un sens fizic efectiv și nu doar geometric. „Contradicția dintre relativitatea mișcării și existența forțelor inerțiale există doar considerînd lumea ca o multiplicitate fără structură. Dacă cîmpul inerțial (Führungsfeld) se dezvăluie în fenomenele mecanice cu o forță mecanică uneori violentă, aflată în lupta cu forțele (neinerțiale — n.a.), acest cîmp trebuie considerat ca ceva real" (H. Weyl [50]). Nu doar perturbațiile gravifice neomogene ale cîmpului inerțial galilean omogen sînt condiționate de materie, ci cîmpul inerțial galilean însuși ; ambele constituie, după cum subliniază Weyl, o unitate indisolubilă.

γ) După cum a subliniat V. A. Fok, fiecare S.C. geodezic fiind local (sau valabil de-a lungul unei curbe), echivalența dintre cîmpul gravific și cîmpul de accelerație este limitată doar la domenii infinitezimale în spațiu-timp ; doar în asemenea domenii cîmpul gravific poate fi considerat în primă aproximație constant. Posibilitatea de anulare a forțelor gravifice și inerțiale și a accelerației nu este deci în general posibilă în domenii finite.

Mai mult, în teoria nelocală (nepunctuală) a cîmpului (în particular în geometria discontinuă = cuantică a spațiului-timpului), domeniile infinitezimale sînt lipsite de sens fizic ; mărimile cîmpului trebuie localizate în domenii spațio-temporale finite, în particular în geometria discontinuă, — aceste domenii constituie multipli întregi ai unor domenii minime, relativ indivizibile.

δ) *Legile* gravitației (inerției) sînt determinate de materie și covariante, deci independente de S.C. În raport cu *fenomenele* gravifice (inerțiale) concrete însă, diversele S.C. deși *echivalente* din punct de vedere *cinematic* (*geometric*), nu sînt *absolut echivalente* din punct de vedere *fizic* (*dinamic*) ; cu toată anularea forțelor inerțiale terestre, în raport cu un anumit S.C. (preferențial), ele nu se anulează în alt S.C.

e. *Elementele absolute și relative ale accelerației.* 1. În fizica clasică și în teoria relativist-restrînsă (ca și în cea generală) poziția și viteza sînt relative : mișcarea (sau repausul) unui *singur corp* nu au sens absolut, fiind condiționate de S.C. În teoria generală a relativității, pe baza anulării într-un anumit S.C. local și momentan a cîmpului gravific (sau inerțial, sau de accelerație), în orice domeniu spațio-temporal infinitezimal, nici mișcarea (poziția, viteza și accelerația) cvadridimensională reciprocă a *două corpuri* nu au sens absolut. Oricare ar fi mișcarea (poziția, viteza și accelerația) relativă a celor două corpuri, presupuse vecine în domeniul infinitezimal cvadridimensional D, există în D un S.C. local față de care ambele sînt în repaus (de viteză nulă) și de accelerație relativă nulă. În teoria generală a relativității, pe toate trei treptele diferențiale, în domenii infinitezimale, componentele vectorilor descriind mișcarea sînt deci relative.

2. Problema caracterelor absolute și relative ale mișcării și a diverselor S.C. a fost tratată mai sus. Nici din caracterele relative ale accelerației în domenii infinitezimale nu rezultă însă concluziile idealiste expuse mai sus ale relativității totale a accelerației, deci a mișcării și ale echivalenței depline a tuturor S.C. în raport cu un fenomen dat.

a) Pe planul unității dintre esență (lege) și fenomen, în analogie cu gravitația (inerția), caracterul relativ al accelerației e valabil doar în domenii infinitezimale. În domenii finite, după cum a subliniat V. Fok [49], accelerația implică și elemente absolute ; în domenii finite, diversele S.C. echivalente la nivelul legii sînt deci *neechivalente*, în mod absolut (în raport cu fiecare *fenomen* concret).

b) Pe planul fenomenului (individ-colectiv) reducerea problemei mișcării la mișcarea relativă a două corpuri A și B constituie o abstracțiune. Astfel aberația stelelor reflectă mișcarea (diurnă, anuală, seculară etc.) a pămîntului respectiv a sistemului solar față de centrul de masă al pămîntului, sistemului solar, al maselor galactice etc., deci față de colective de stele de ordin crescător (mai precis față de centrele maselor unor sisteme de ordin tot mai înalt). Din teoria relativității rezultă și din acest punct de vedere neechivalența S.C. copernican și ptolemeic. Din depășirea problemei celor două corpuri, din încadrarea sistemului individual într-un colectiv de corpuri, rezultă deci din nou existența unor elemente absolute ale mișcării.

c) Pe planul esenței (conținut-formă) în opoziție cu Mach, rotația și repausul spațial ale unei sfere nu sînt echivalente. Din punct de vedere *cinematic* (*geometric*), liniile geodezice cvadridimensionale descrise de punctele sferei în cele două cazuri sînt diferite (H. Weyl). Din punct de vedere *dinamic* (*fizic*), încă Newton încercase stabilirea unui criteriu al existenței unor elemente absolute ale mișcării de rotație (existența forței centrifuge față de spațiul absolut). În teoria generală a relativității, caracterul într-un anumit sens relativ al forțelor inerțiale = gravifice — de pildă centrifuge, constituie o consecință fundamentală a ecuațiilor gravifice einsteiniene liniarizate (H. Thirring [36]). Într-adevăr, după cum arată calculul asupra unei sfere C aflată în repaus inițial în interiorul unei sfere vide S în rotaţie (de masă $m_0 \equiv m/\varkappa$ şi de rază R) acţionează forţe inerţiale (centrifuge şi Coriolis) de tipul celor corespunzătoare rotaţiei sferei C faţă de sfera exterioară S aflată în repaus ; în acest sens calitativ, forţa inerţială are într-adevăr caracter relativ. În opoziţie cu teza lui Mach, cele două cazuri — (I) sfera exterioară S în rotaţie, cea interioară C în repaus ; (II) sfera exterioară S în repaus, cea interioară C în rotaţie — nu sînt deci echivalente [36], din punct de vedere *cantitativ* raportul forţelor inerţiale corespunzătoare celor două cazuri fiind de ordinul m/R. Chiar pentru mase foarte mari, raportul m/R este foarte mic, deci verificarea experimentală (de tipul experienţelor lui Newton sau Friedländer, 1896) este astăzi exclusă. Abia pentru metagalaxie ($m \approx R \approx 10^{27}$ cm, $m_0 \approx 10^{54}$ g) raportul m/R este de ordinul unităţii ; dar ansamblul stelelor şi galaxiilor din metagalaxie nefiind unitar, nici în acest caz nu rezultă relativitatea totală a forţelor de inerţie şi a mişcării (acceleraţiei).

Contradicţia dintre caracterul relativ şi absolut al forţelor inerţiale se rezolvă pe planul cantităţii şi calităţii : ele sînt relative din punct de vedere calitativ şi absolute din punct de vedere cantitativ.

Forţa inerţială (gravifică) şi deci acceleraţia (mişcarea) prezintă deci totodată anumite elemente absolute. În consecinţă, sistemele copernican şi ptolemeic nu sînt echivalente. Acceleraţia (deci şi mişcarea) pămîntului în jurul Soarelui are în regiuni finite nu doar un sens relativ, ci şi unul într-un anumit grad absolut. În teoria generală a relativităţii, concepţia lui Copernic, Galilei şi Giordano Bruno nu este zdruncinată ci, dimpotrivă, mai adînc fundată.

Primită la redacţie la 20 noiembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

A. *MEMORII DE SPECIALITATE*

1. A. Popovici, Revue de math. pures et appl., **V**, *2*, 411 (1960) ; Revista Universităţii „C. I. Parhon", *3*, 78 (1953) ; Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matem. şi fizice, *6*, 65 (1954) ; Bull. Pol. Iassy, *3*. 543 (1948) ; Bul. Acad. R.P.R., **8**, *1*, 121 (1956).

2. А. Попович, ДАН СССР, **111**, *1*, 74 (1956); ЖЭТФ, **32**, *4*, 781 (1957).

3. A. Popovici, Comptes rendus, Acad. Sci. Paris, **248**, 528 (1959) ; A. Popovici, I. Teodorescu, G. Mărgulescu, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, **248**, 1610 (1959) ; A. Popovici, Comunicările Acad. R.P.R., **8**, *9*, 877 (1958) ; A. Popovici, I. Teodorescu, G. Mărgulescu, Bull. Math. Bucarest., **1**, *2*, 3 (1959) ; A. Popovici, A. Hristev, I. Popovici, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, **257**, 3120 (1963) ; I. Popovici, Revue de math. pures et appl., **IX** (1964).

4. F. Hund, Zs. f. Phys., **124**, 742 (1948).

5. W. Pauli, M. Fierz, Proc. London, A, **211**, 173 (1939).

6. M. Born, Proc. London, **165**, 291 (1937) ; Proc. Eddinburg., **59**, 219 (1939) ; M. Born, K. Fuchs, Proc. Eddinburg, **60**, 141, 147 (1940) ; Ж. Райский, ЖЭТФ, *2* (1952) ; R. Ingraham, Nuovo Cimento 12, 825 (1954).

7. M. Born, Proc. London, **143**, 420 (1934) ; Ann. Inst. Poincaré, **7** (1937) ; M. Born, L. Infeld, Proc. London, **144**, 425 (1934).

8. W. Heisenberg, W. Pauli, *On the isospin group in the Theory of Elementary particles*, Preprint, 1958: P. Dürr, W. Heisenberg, H. Mitter, S. Schlieder, K. Yamazaki, Zs. f. Natf., **14** a, 441 (1959).

9. L. De Broglie, *Théorie générale des particules à spin*. IIe éd., Paris, 1954; G. Petiau, Disq. Math. Phys., Bucarest, **6**, *1–4*, 235 (1948); H. Hönl , H. Boerner, Zs. f. Naturfosch., **50**, 353 (1956); M. A. Tonnelat, C. R. Acad. Sci. Paris, **212**, 187, 263, 384, 430, 687 (1941); J. Van Isaker, C. R. Acad. Sci. Paris, 219, 51 (1944). G. Rainich, Trans. Amer. Math. Soc., **27**, 106 (1925); J. Wheeler, G. Rainich, Ann. de Phys., *2*, 525 (1957).

10. F. Bopp, Zs. f. Naturforsch., **1**, 53 (1946).

11. L. De Broglie, *La théorie de la double solution*, Paris, 1957; J. P. Vigier, *La structure des microobjets dans l'interprétation causale de la théorie des quanta*, Paris, 1956; P. Févrrier, *L'interprétation physique de la mécanique ondulatoire et des théories quantiques*, Paris, 1955; L. De Broglie., J. de Phys., **8**, 225 (1927); D. Bohm, Phys. Rev., **1** (1952).

12. M. Tetrode, Zs. f. Phys., **50** (1928); V. Ambartumian, Zs. f. Phys., **55** (1929); V. Fok, D. Ivanenko, Zs. f. Phys., **54** (1929); H. Flint, Phil. Mag., **5** (1940).

13. I. Mimura, Jap. Phys., **14**, 17 (1942); H. Snyder, Phys. Rev., **71** (1947); **72** (1948); A. A. Markov, Phys, Zs. der Sowjetunion, *1–4*, 1932; V. Ambartumian, D. Ivanenko, Zs. f. Phys., **64**, 563 (1930); Авербух, Б. В. Медведев, ДАН, СССР, **441** (1949); A. March, Zs. f. Phys., **73** (1931–32).

14. М.А.Марков, ЖЭТФ, **10**, **12**, 11 (1940); Н. Н. Боголюбов, В. У. Бонч-Бруевич, Б. В. Медведев, ДАН, СССР, **24**, 4 (1950); Б. У. Бонч-Бруевич, Б. В. Медведев, ЖЭТФ, **22**, 4 (1952); J. Rayski, Acta Phys. Pol., **10**, 1 (1950); P. Sen. Nuovo Cimento, **10**, *8*, 407 (1958).

15. T. Kaluza, Berl. Ber., 966 (1921); O. Klein, Zs. f. Phys., **37**, 829 (1926); V. A. Fok, Zs. f. Phys., **39** (1926),; W. Pauli, Ann. de Phys., **18**, 305, 377 (1933); O. Weblen, B. Hoffmann, Phys. Rev., **36**, 820 (1930); G. Ludwig, Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie; A. Pais, Physica, *9* (1922); H. Flint, Phil. Mag., 1940, 1943.

16. N. S. Kalitzin, Wiss. Zs. Humboldt Univ., **7**, *2*, 207 (1957–58).

17. G. Vrănceanu, C. R. de l'Académie des Sciences, Paris, **183**, 852 (1926); J. de Phys., **7**, 514 (1937); K. Yano, Proc. Mat. Phys. Soc. Japan, **10**, 867 (1937); **11**, 945 (1937); J. Podolanski, Proc. London, **201**, 234 (1950).

18. H. Bateman, E. Cunningham, Proc. Lond. Math. Soc., **8**, *77*, 233, 469 (1910).

19. J. Lubanski, R. Rosenfeld, Physica, **9**, 116 (1942); H. Pais, Physica, **9**, 267 (1942); B. Hoffmann, Phys. Rev., **72**, 458 (1947); **73**, 30 (1948); J. Schouten, Rev. of Mod. Phys., **21**, (1949); J. Petzold, Zs. f. Phys., **198**, 192–208 (1957); K. Case, Phys. Rev., **101**, 1 (1956).

20. K. V. Nikolski, Zs. f. Phys., **83** (1933); J. Schouten, J. Haantjes, Annali Pisa, **62** (1933); J. Schouten, Rev. of Mod. Phys., **21** (1949); J. Schouten, J. Haantjes, Proc. Amsterdam, **39**, 1059 (1936); J. A. Mc Lennan, Nuovo Cimento, **6**, 1360 (1956); **7**, 640 (1957); F. Gürsey, Nuovo Cimento, **5**, 154 (1956); **6**, 988 (1956); S. Bladman, Phys. Rev., **107**, 1163 (1957); H. Buchdahl, Nuovo Cimento, **11**, 496 (1959); H. Mandel, Zs. f. Phys., **54** (1929); P. Dirac, Ann. Math., **37**, 429 (1936); F. Bopp, F. Bauer, Zs. f. Natf., **4a**, 611 (1949); Y. Murai, Progr. Theor. Phys., **19**, 1947 (1953).

21. R. Ingraham, Proc. Nat. Acad. USA, **38**, 921 (1952); **41**, *3*, 165 (1955); Nuovo Cimento (9), **12**, 886 (1952); G. Stephenson, Nuovo Cimento, 263 (1958); P. Higgs, Nuovo Cimento, 816 (1959); H. Steudel, Ann. de Phys., **10**, *1–2*, 102 (1952); E. Reichenbächer, Zs. f. Physik, **45**, 663 (1929); H. Buchdahl, Proc. Edinb. Math. Soc., **8**, 89 (1948); A. Einstein, Berl. Ber., 261 (1921); R. Bach, Math. Zs., **9**, 110 (1921).

22. L. Hill, Phys. Rev., **67**, 358 (1945); **68**, 232 (1945); **72**, 143 (1947); H. Kastrup, Ann. d. Phys., **9**, *1–2*, 388 (1962).

23. H. Weyl, Math. Zs., **12**, 114 (1922); E. Cartan, C. R. Acad. Sci. Paris.

24. *50 Jahre Relativitätstheorie*, Basel, 1956.

25. H. Mandel, Zs. f. Phys., **54**, *7–8* (1929); I. B. Rumer, Zs. f. Phys., **58**, 90(1929); Gött. Nachr. **12** (1929).
26. M. Georgescu, Com Acad. R.P.R., **11**, 1291 (1961).
27. H. C. Lewinson, E. B. Zeisler, *The Law of gravitation in relativity*, Chicago, 1929.
28. V. A. Fok, Zs. f. Phys., **57** (1929); **52** (1949).
29. M. Kobler, Phys. Rev. **68** (1946).
30. R. Blum, Bull. Math. Soc. Sci. Bucarest, **74**, *1–2* (1946).
31. J. Eiesland, Trans. Math. Amer. Soc., **27**, 213 (1925).
32. E. Noether, Gött. Nachr., 235 (1918); D. Hilbert, Math. Annalen, **92**, 1 (1924); M. A. Markov, Phys. Zs. Sowjetunion, **10**, 773 (1936); E. Bessel-Hagen, Math. Ann., **84**, 258 (1921).
33. Vermeil, Gött. Nachr., **334** (1927).
34. D. Hilbert, Gött. Nachr., 1915, 1917.
35. A. Popovici, Com. Acad. R.P.R., **XII**, 4 (1962).
36. H. Thirring, Phys. Zs., **19**, 33 (1928); **22**, 29 (1921).
37. R. Serini, Rend. Lincei, (5), *27*, 235 (1928).
38. G. Dautcourt, Ann. de Phys., **VII**, *8*, 309 (1961).
39. J. Goldberg, Phys. Rev., **111**, 315 (1958).
40. T. Lee, C. Yang, Phys. Rev., **204**, 254 (1956); C. S. Wu ş.a., Phys. Rev., **105**, 1413 (1957); **106**, 1361 (1957).
41. A. Einstein, J. Grommer, Berl. Ber., 1927; I. Schild, L. Infeld, Rev. Mod. Phys, **31**, 408 (1949); G. Darmois, Mem. sc. Mat., **25** (1927).
42. V. A. Fok, J. Phys., U.R.S.S., **1**, 81 (1939); Н. М. Петрова, *Об уравнении движения и тензоре материи для системы конечных масс б общей теории относительности.* (Disertaţie de candidat, 1940) ЖЭТФ, **19**, (1949); В. А. Фок. *Об интегралах движения центра инерции двух конечных масс в общей теории относительности.* ДАН СССР, **32**, 28 (1941); В.П. Кашкаров, *Об уравнениях движения системы конечных масс в теории тяготения Эйнштейна.* ЖЭТФ, **27**, 563 (1954); В.Г. Фихтенгольц, *Лагранжева форма уравнений движения во втором приближении теории тяготения Эйнштейна* ЖЭТФ, **20**, 233 (1950); ДАН, **64**, 325 (1949); A. Papapetrou, *Equations of motion in general relativity.* Proc. Phys. Soc., **64**, 57 (1951); H. Meister, *Die Bewegungsgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie.* Annalen der Physik, seria 6, **19**, 268 (1957).
43. A. Papapetrou, Proc. London, **64**, 302 (1951).

B. *LUCRĂRI DE SINTEZĂ*

44. G. Vrânceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*, vol. I, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952.
45. W. Pauli, *Relativitätstheorie.* Enz. d. Math. Wiss., Berlin, 1921.
46. A. Einstein, *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie.* Leipzig, 1916.
47. Д. Иваненко, А. Соколов, *Классическая теория поля.* М.–Л. 1949; *Квантовая теория поля.* М.–Л., 1952.
48. A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme.* Paris.
49. V. A. Fok, În culegerea ,,Николай Коперник'', Изд,. АН СССР, 1947.
50. H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, ed. V, Berlin, 1923.
51. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля.* Гостехиздат. 1948.
52. G. Vrânceanu, A. Popovici, în volumul *Probleme filozofice ale ştiinţelor naturii.* (Lucrările Consfătuirii romîno-sovietice din 25–27 iunie 1959), Ed. Acad. R.P.R., Inst. de St. Romîno-Sovietice, Bucureşti, 1960.
53. A. D. Alexandrov, Voprosî filosofii, *1* (1959); Vestnik Leningradskogo Universiteta, *11* (1953).
54. G. I. Naan, Voprosî filosofii, *1* (1951).
55. S. I. Vavilov, Vestnik Ak. Nauk SSSR, *6* (1949).
56. D. I. Blohintev, UFN, **42** (1950); D. I. Blohintev, UFN, **XLIV**, *1*.
57. ⁂ *Dialectica marxistă şi ştiinţele moderne*, vol. II, 1960 Editura Politică, Bucureşti.
58. M. F. Şirkov, Voprosî filosofii, *3* (1952).
59. F. Engels, *Dialectica naturii.*

ASUPRA UNUI SISTEM FORMAL. II[1]

DE

T. RUS

În această lucrare vom construi cîțiva algoritmi care să decidă asupra compatibilității cuvintelor în sistemul formal construit în [5].

În primul rînd vom considera cazul cînd în cuvîntul P dat în sistemul formal nu există intrări ale simbolurilor din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$. În acest caz se poate ușor vedea că algoritmul nominal $\mathfrak{A}_1$ cu schema

$$\mathfrak{A}_1 \left\{ \begin{array}{ll} \alpha\xi_1\xi_2 \rightarrow \cdot\, \alpha\xi_1\xi_2 & (\xi_1 \in \mathfrak{C},\ \xi_2 \in \mathfrak{X}) \\ \alpha\xi_1\xi_2 \rightarrow \cdot\, \alpha\xi_1\xi_2 & (\xi_1 \in \mathfrak{X},\ \xi_2 \in \mathfrak{C}) \\ \alpha\xi \rightarrow \alpha & (\xi \in \mathfrak{C} \cup \mathfrak{X}) \\ \alpha \rightarrow \cdot & \\ \rightarrow \alpha & (\xi \,\rceil \in \mathcal{A}) \end{array} \right.$$

în alfabetul $\mathcal{A} \cup \{\alpha\}$ aplicat la oricare cuvînt P în alfabetul $\mathcal{A}$ transformă acest cuvînt în cuvîntul vid dacă el este compatibil în $\mathcal{A}$ și nu conține intrări ale simbolurilor din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ și într-un cuvînt R diferit de cuvîntul vid în caz contrar.

Pentru demonstrarea acestei afirmații este suficient să observăm că dacă în cuvîntul P nu avem intrări ale simbolurilor din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$, el este compatibil dacă și numai dacă este sau un cuvînt în $\mathfrak{C}$ sau un simbol în alfabetul $\mathfrak{C} \cup \mathfrak{X}$.

Prima formulă care se aplică cuvîntului P este formula $\rightarrow \alpha$ care transformă cuvîntul P în cuvîntul αP. Pe urmă simbolul α se „trage" prin cuvîntul P ștergînd succesiv fiecare simbol (literă) al alfabetului $\mathfrak{C}$ care apare în P, dacă nu există intrări ale altor simboluri din alfabetul $\mathcal{A}$ în P. Dacă cuvîntul P conține intrări ale altor simboluri din $\mathcal{A}$, diferite de literele alfabetului $\mathfrak{C}$, atunci pentru a fi compatibil el trebuie să conțină un singur simbol din $\mathfrak{X}$ care se șterge cu ajutorul formulei $\alpha\xi \rightarrow \alpha$. Algoritmul se oprește fie semnalizînd apariția în P a simbolurilor din $\mathcal{C}$ și din $\mathfrak{X}$ fără nici un simbol de legătură între ele, fie semnalizînd că în P apar simboluri diferite de simbolurile alfabetului $\mathcal{C} \cup \mathfrak{X}$. Dacă algoritmul se oprește în acest de-al doilea caz (ceea ce se recunoaște după faptul că în cuvîntul obținut nu intră simbolul α) și este diferit de avîntul vid, se va aplica de la început algoritmul $\mathfrak{A}_2$ care va transfoma cuvîntul P în cuvîntul vid dacă el este compatibil și conține intrări de simboluri diferite de simbolurile alfabetului $\mathcal{C} \cup \mathfrak{X}$ sau într-un cuvînt diferit de cuvîntul vid în caz contrar.

---

[1] Lucrare prezentată la Colectivul de aproximare a funcțiilor cu aplicații la calculul numeric din 15–19 noiembrie 1963, Cluj.

Schema algoritmului normal $\mathfrak{A}_2$ în alfabetul $\mathcal{A} \cup \{\alpha\} \cup \{\beta\}$ este următoarea :

$$\mathfrak{A}_2 \begin{cases} \alpha((\rightarrow (\alpha(& \\ \alpha\,(Q) \rightarrow \alpha & \left(\begin{array}{ll} Q \,\bar{\underline{\circ}}\, \xi_0\xi_1 \ldots \xi_K, & \xi_i \in \mathcal{C} \text{ dacă } K > 0 \\ \text{sau } Q \,\bar{\underline{\circ}}\, \xi, & \xi \in \mathcal{C} \cup \mathfrak{X} \text{ dacă } K = 0 \end{array}\right) \\ \alpha\xi \rightarrow \xi\alpha & (\xi\urcorner \in \mathcal{O} \cup \mathfrak{R}) \\ \alpha\xi \rightarrow \beta\alpha & (\xi \in \mathcal{O} \cup \mathfrak{R}) \\ (\beta) \rightarrow & (\beta \not\subset \alpha, \qquad \beta,\ \alpha\urcorner \in \mathcal{A}) \\ \alpha \rightarrow & \\ \beta \rightarrow \cdot & \\ \rightarrow \alpha & \end{cases}$$

Să demonstrăm că are loc una din egalitățile :

$$\mathfrak{A}_2 \llcorner P \lrcorner \,\bar{\underline{\circ}}\, \begin{cases} \Lambda & \text{dacă } P \text{ este compatibil în } \mathcal{A} \text{ și conține intrări de} \\ & \text{simboluri diferite de simbolurile alfabetului lui } \mathcal{C} \cup \mathfrak{X} \\ R \not\subset \Lambda & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Fie deci cuvîntul P compatibil în alfabetul $\mathcal{A}$ și conținînd și simboluri diferite de simbolurile alfabetului $\mathcal{C} \cup \mathfrak{X}$. Să arătăm atunci că $\mathfrak{A}_2 \llcorner P \lrcorner \,\bar{\underline{\circ}}\, \Lambda$.

Prima formulă a algoritmului normal $\mathfrak{A}_2$ care se va aplica cuvîntului P va fi formula $\rightarrow \alpha$. După aceea prima formulă a algoritmului $\mathfrak{A}_2$ se va aplica de atîtea ori pînă ce se va găsi primul element de bază care intră în cuvîntul P. Deoarece cuvîntul P este compatibil, acest element de bază intră în cuvîntul P sub forma (Q), în condițiile noastre. Se va aplica apoi formula a doua care va înlocui cuvîntul (Q) cu simbolul α și se trece la căutarea altor elemente de bază care intră în cuvîntul P.

nÎ felul acesta, după un număr finit de pași, se vor scoate toate elementele de bază care intră în cuvîntul P, iar după formula a patra toate simbolurile din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care intră în cuvîntul P se vor înlocui cu simbolul β. Formula a cincea va înlocui apoi toate cuvintele de forma (β) cu cuvinte vid, ceea ce este echivalent cu ștergerea tuturor simbolurilor din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care aparțin domeniului de acțiune al altor simboluri din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care intră în P. Deoarece cuvîntul P este compatibil, înseamnă că există un singur simbol din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care nu aparține domeniului de acțiune al nici unui alt simbol din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care intră în cuvîntul P. Prin urmare dacă primele cinci formule nu se mai aplică, atunci formula a șasea $\alpha \rightarrow$ va scoate unicul simbol α care apare în cuvîntul P transformat iar formula a șaptea $\beta \rightarrow \cdot$ va înlocui simbolul din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care nu aparține domeniului de acțiune al nici unui alt simbol din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care intră în P cu cuvîntul vid, final, obținînd în felul acesta cuvîntul vid.

Să arătăm acum că dacă cuvîntul P nu este compatibil, are loc egalitatea $\mathfrak{A}_2 \llcorner P \lrcorner \overline{\underline{\circ}} R, \quad R \not\overline{\underline{\circ}} \Lambda$.

Această egalitate rezultă din faptul că dacă în cuvîntul P nu există intrări ale simbolurilor din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$, atunci deoarece cuvîntul conține intrări de simboluri diferite de simbolurile din $\mathcal{C} \cup \mathfrak{X}$, după un număr finit de pași se va aplica de un număr infinit de ori ultima formă, ceea ce înseamnă că la un astfel de cuvînt algoritmul nu se aplică. Dacă însă în cuvîntul P există intrări ale simbolurilor din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$, atunci oricare ar fi cauza incompatibilității algoritmul se oprește după aplicarea formulei $\beta \rightarrow \cdot$, semnalînd această incompatibilitate prin faptul că cuvîntul obținut este un cuvînt diferit de cuvîntul vid.

Cuvîntul R, obținut în acest fel, poate fi sau un cuvînt în alfabetul $\{\beta\}$ și atunci sîntem în cazul în care există mai multe simboluri din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care intră în P și care nu aparțin domeniului de acțiune al nici unui alt simbol din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care intră în P, sau poate fi un cuvînt în alfabetul $\mathcal{A}$ ceea ce înseamnă că există simboluri diferite de simbolurile din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care nu intră în domeniul de acțiune al nici unui simbol din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care intră în P, sau poate fi un cuvînt în alfabetul $\mathcal{A} \cup \{\beta\}$ ceea ce înseamnă că au loc ambele incompatibilități semnalate mai sus. În oricare din cazurile analizate mai sus, P nu este un cuvînt compatibil.

Să construim acum un algoritm normal care va decide dacă într-un cuvînt dat în alfabetul $\mathcal{A}$ intră sau nu intră simboluri din alfabetul $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$. Dacă notăm cu $\mathfrak{A}_3$ acest algoritm, atunci schema lui este

$$\mathfrak{A}_3 \begin{cases} \alpha\xi \rightarrow \alpha & (\xi \rceil \in \mathcal{O} \cup \mathfrak{R}), \\ \alpha \rightarrow \cdot & \\ \quad \rightarrow \alpha & (\alpha \rceil \in \mathcal{A}). \end{cases}$$

Se vede imediat că au loc egalitățile

$$\mathfrak{A}_3 \llcorner P \lrcorner \overline{\underline{\circ}} \begin{cases} \Lambda \text{ dacă în } P \text{ nu există intrări ale simbolurilor din } \mathcal{O} \cup \mathfrak{R}, \\ \not\overline{\underline{\circ}}\, \Lambda \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Algoritmul care decide dacă un cuvînt arbitrar P în alfabetul $\mathcal{A}$ este compatibil sau nu în acest alfabet, este atunci algoritmul normal $\mathfrak{A}$ construit astfel ca

$$\mathfrak{A} \llcorner P \lrcorner \,\underline{\bar{o}}\, \begin{cases} \mathfrak{A}_1 \llcorner P \lrcorner & \text{dacă } \mathfrak{A}_3 \llcorner P \lrcorner \,\underline{\bar{o}}\, \Lambda, \\ \mathfrak{A}_2 \llcorner P \lrcorner & \text{dacă } \mathfrak{A}_3 \llcorner P \lrcorner \,\not\underline{\bar{o}}\, \Lambda. \end{cases}$$

Se poate demonstra ușor că

$$\mathfrak{A} \llcorner P \lrcorner \,\underline{\bar{o}}\, \begin{cases} \Lambda \text{ dacă } P \text{ este un cuvînt compatibil în } \mathcal{A}, \\ R \,\not\underline{\bar{o}}\, \Lambda \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Vom construi în cele ce urmează un algoritm normal care ne va pune în evidență într-un cuvînt compatibil simbolul $s \in \mathcal{O} \bigcup \mathfrak{R}$ care nu aparține domeniului de acțiune al nici unui alt simbol din $\mathcal{O} \bigcup \mathfrak{R}$ care intră în cuvîntul compatibil dat. Pentru aceasta este suficient să observăm că în schema algoritmului normal $\mathfrak{A}_2$ formula de oprire $\beta \to \cdot$ scoate cu oprire chiar acest simbol din cuvîntul compatibil dat. Prin urmare algoritmul căutat în alfabetul $\mathcal{A} \bigcup \{\alpha\}$ va avea schema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha((\to (\alpha(& \\ \alpha(Q) \to \alpha & (Q - \text{același ca și în cazul algoritmului } \mathfrak{A}_2) \\ \alpha\xi \to \xi\alpha & (\xi \in \mathcal{A}) \\ (s) \to & (s \in \mathcal{O} \bigcup \mathfrak{R}) \\ \alpha \to \cdot & \\ \to \alpha & (\alpha \urcorner \in \mathcal{A}) \end{array} \right.$$

Dacă notăm cu $\mathfrak{B}_1$, acest algoritm, atunci din cele de mai sus avem

$$\mathfrak{B}_1 \llcorner P \lrcorner \,\underline{\bar{o}}\, \begin{cases} s, & \text{unde } s \text{ este simbolul din } \mathcal{O} \bigcup \mathfrak{R} \text{ care nu aparține domeniului de acțiune al nici unui alt simbol din } \mathcal{O} \bigcup \mathfrak{R} \text{ care intră în } P, \text{ dacă } P \text{ este compatibil,} \\ R \,\not\underline{\bar{o}}\, s & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Deoarece însă în cuvîntul P există în general intrări ale aceluiași simbol s în mai multe locuri, evident că pentru a preciza acest simbol avem nevoie de aripa dreapta, respectiv stîngă a intrării lui în P, adică trebuie să cunoaștem cuvintele P_1 și P_2 astfel ca

$$P \,\underline{\bar{o}}\, P_1 s P_2, \quad P_1 \,\underline{\bar{o}}\, (P_1'), \quad P_2 \,\underline{\bar{o}}\, (P_2').$$

Pentru determinarea cuvintelor P_1 și P_2 ne vom folosi de noțiunea de lungime a unui cuvînt. Prin lungimea unui cuvînt vom înțelege numărul simbolurilor (literelor) care compun cuvîntul respectiv. Astfel dacă notăm cu $l \llcorner P \lrcorner$ lungimea cuvîntului P, avem

$$l \llcorner \Lambda \lrcorner \,\underline{\bar{o}}\, 0,$$

$$l \llcorner \xi_1 \ldots . \xi_K \lrcorner \,\underline{\bar{o}}\, K$$

unde 0 și K sînt scrierile numărului zero respectiv K_2.

Vom construi în cele ce urmează algoritmul normal $\mathfrak{B}_2$ astfel ca:

$$\mathfrak{B}_2 \llcorner P \lrcorner \mathrel{\underline{\circ}} Q_1 \, s \, Q_2$$

unde

$$l \llcorner Q_1 \lrcorner \mathrel{\underline{\circ}} l \llcorner P_1 \lrcorner, \; l \llcorner Q_2 \lrcorner \mathrel{\underline{\circ}} l \llcorner Q_2 \lrcorner$$

iar Q_1 și Q_2 sînt cuvinte în alfabetul $\{|\}$.

Schema algoritmului normal $\mathfrak{B}_2$ în alfabetul $\mathcal{A} \cup \{\alpha\} \cup \{|\}$ este atunci următoarea:

$$\mathfrak{B}_2 \left\{ \begin{array}{ll} \alpha((\to (\alpha(, & \\ \alpha(Q) \to |Q'|\alpha & \left(\begin{array}{l} Q' - \text{cuvînt în } \{|\} \text{ și } l \llcorner Q' \lrcorner \mathrel{\underline{\circ}} l \llcorner Q \lrcorner \\ Q \text{ fiind același ca și în algoritmul } \mathfrak{B}_1 \end{array} \right), \\ \alpha\xi \to \xi\alpha & (\xi \in \mathcal{A}), \\ (| \to |(& (| \urcorner \in \mathcal{A}), \\ |) \to)| & \\ (\xi) \to ||| & (\xi \in \mathcal{O} \cup \mathscr{R}), \\ \alpha \to \cdot & \\ \to \alpha & \alpha \urcorner \in \mathcal{A} \cup \{|\}. \end{array} \right.$$

Se poate vedea simplu că algoritmul normal $\mathfrak{B}_2$ astfel construit satisface condițiile cerute.

Cuvintele Q_1 și Q_2 în alfabetul $\{|\}$ ne vor servi în cele ce urmează pentru a pune în evidență cuvintele P_1 și P_2 aripa stînga, respectiv dreapta a sombolului s din cuvîntul P.

Pentru aceasta vom construi algoritmi normali $\mathfrak{R}_1$ și $\mathfrak{R}_2$ cu proprietatea că

$$\mathfrak{R}_1 \llcorner |Q_1 * P \lrcorner \mathrel{\underline{\circ}} P_2,$$

$$\mathfrak{R}_2 \llcorner |Q_2 * P \lrcorner \mathrel{\underline{\circ}} P_1.$$

Fie $A = \mathcal{A} \cup \{\alpha\}$ alfabetul obținut prin adăugarea la alfabetul $\mathcal{A}$ al sistemului formal a simbolului α. Presupunem că $* \in \mathcal{S}$ și deci $* \in \mathcal{A}$. Vom considera alfabetul $B \mathrel{\underline{\circ}} A \cup \{|\}$ și vom construi în acest alfabet algoritmii normali [3]

$$\mathfrak{L} \left\{ \begin{array}{ll} \alpha| \to \cdot & \\ \alpha * \xi \to \alpha * & (\xi \in \mathcal{A}) \\ \alpha * \to & \\ \to \alpha & \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{E} \left\{ \begin{array}{l} \alpha| \to \alpha \\ \alpha * \to \cdot \\ \to \alpha \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{D}\begin{cases} * \xi \to * \\ \quad * \to \end{cases}$$

$$\mathfrak{F}\{ \quad | \to \cdot$$

$$\mathfrak{G}\{ \; * \to \cdot$$

Construim pe urmă compozițiile normale $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{D}$ și $\mathfrak{A}_1 \circ \mathfrak{E}$ respectiv $\mathfrak{A}_2 \circ \mathfrak{E}$ unde algoritmii normali $\mathfrak{A}_1$ și $\mathfrak{A}_2$ sînt dați de schemele

$$\mathfrak{A}_1\{ \;\; \xi \to \cdot \qquad (\xi \in \mathcal{A})$$

$$\mathfrak{A}_2\begin{cases} \beta\xi \to \xi\beta & (\xi \in \mathcal{A},\ \beta \urcorner \in \mathcal{A}) \\ \xi\beta \to \cdot & \\ \quad\; \to \beta & \end{cases}$$

Construim în continuare algoritmii normali $\mathfrak{H}_1$ și $\mathfrak{H}_2$ după teorema reuniunii [3] astfel ca :

$$\mathfrak{H}_1 \llcorner R \lrcorner \simeq \llcorner \mathfrak{F} \circ \mathfrak{D} \lrcorner \llcorner R \lrcorner * \llcorner \mathfrak{A}_1 \circ \mathfrak{E} \lrcorner \llcorner R \lrcorner$$

$$\mathfrak{H}_2 \llcorner R \lrcorner \simeq \llcorner \mathfrak{F} \circ \mathfrak{D} \lrcorner \llcorner R \lrcorner * \llcorner \mathfrak{A}_2 \circ \mathfrak{E} \lrcorner \llcorner R \lrcorner$$

unde simbolurile $\simeq$ și $\circ$ nu fac parte din alfabetul $\mathcal{A}$, ele avînd sensul precizat în [3].

Vom construi apoi algoritmii normali $\mathfrak{R}_1$ și $\mathfrak{R}_2$ peste alfabetul algoritmilor $\mathfrak{H}_1$ și $\mathfrak{H}_2$ în așa fel ca $\mathfrak{R}_1$ și $\mathfrak{R}_2$ să posede următoarele proprietăți :

$\mathfrak{R}_1$ respectiv $\mathfrak{R}_2$ atunci și numai atunci prelucrează cuvîntul R în cuvîntul S cînd există șirul cuvintelor $R_0, R_1, \ldots, R_n$ $(n \geqslant 0)$ care satisfac condițiile

$$R_0 \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} R,$$

$$R_i \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} \mathfrak{H}_1 \llcorner R_{i-1} \lrcorner \text{ respectiv } R_i \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} \mathfrak{H}_2 \llcorner R_{i-1} \lrcorner ,$$

$$R_n \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} S,$$

$$\mathfrak{L} \llcorner R_i \lrcorner \not\supset \Lambda \quad (0 \leqq i < n),$$

$$\mathfrak{L} \llcorner R_n \lrcorner \not\supset \Lambda.$$

Algoritmii $\mathfrak{R}_1$ și $\mathfrak{R}_2$ vor fi atunci dați de compozițiile normale $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{R}_1$ și respectiv $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{R}_2$ și prin urmare

$$\mathfrak{R}_1 \simeq \mathfrak{G} \circ \mathfrak{R}_1,$$

$$\mathfrak{R}_2 \simeq \mathfrak{G} \circ \mathfrak{R}_2.$$

Să demonstrăm acum că au loc următoarele egalități

$$\mathfrak{R}_1 \llcorner | Q_1 * P \lrcorner \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} P_2$$

$$\mathfrak{R}_2 \llcorner | Q_2 * P \lrcorner \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} P_1$$

astfel ca $P = P_1 s P_2$, s fiind simbolul care nu aparține domeniului de acțiune al nici unui alt simbol din $\mathcal{O} \bigcup \mathcal{R}$ care intră în P, P fiind un cuvînt compatibil în alfabetul $\mathcal{A}$.

Pentru demonstrarea acestor egalități să observăm că cuvintele $|Q_1$ și $|Q_2$ pot fi privite ca numere naturale scrise în alfabetul $\{|\}$ pe care în continuare le putem nota prin n respectiv m.

Atunci se vede direct din schemele algoritmilor că

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L} \llcorner n * P \lrcorner \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \llcorner n-1 \lrcorner * P,\\
&\mathfrak{L} \llcorner * P \lrcorner \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \Lambda,\\
&\mathfrak{D} \llcorner n * P \lrcorner \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} n,\\
&\mathfrak{E} \llcorner n * P \lrcorner \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} P,\\
&\mathfrak{F} \llcorner n \lrcorner \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \llcorner n-1 \lrcorner,\\
&\mathfrak{G} \llcorner * P \lrcorner \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} P.
\end{aligned}$$

De asemenea se vede ușor că:

$$\mathfrak{H}_1 \llcorner n * P \lrcorner \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \mathfrak{F} \llcorner \mathfrak{D} \llcorner n * P \lrcorner \lrcorner * \mathfrak{A}_1 \llcorner \mathfrak{E} \llcorner n * P \lrcorner \lrcorner \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \llcorner n-1 \lrcorner * \mathfrak{A}_1 \llcorner P \lrcorner$$

și în mod analog

$$\mathfrak{H}_2 \llcorner m * P \lrcorner \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \llcorner m-1 \lrcorner * \mathfrak{A}_2 \llcorner P \lrcorner,$$

unde $m-1$ și respectiv $n-1$ înseamnă numărul natural cu o unitate mai mic decît m respectiv n sau cuvinte în alfabetul $\{|\}$ a căror lungime sînt cu o unitate mai mică ca a cuvintelor de lungime m respectiv n.

Considerînd acum în calitate de cuvinte R_i necesare în definiția algoritmilor $\mathfrak{R}_1$ respectiv $\mathfrak{R}_2$ cuvintele

$$R_i \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \llcorner n-1 \lrcorner * P_i \ (0 \leqq i < n) \text{ pentru } \mathfrak{R}_1$$

și

$$R_i \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \llcorner m-1 \lrcorner * P_i \ (0 \leqq i < m) \text{ pentru } \mathfrak{R}_2,$$

unde prin P_i am notat cuvîntul obținut după a i-a aplicare a algoritmurilor $\mathfrak{A}_1$ respectiv $\mathfrak{A}_2$ și atunci

$$R_0 \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} n * P \text{ sau } R_0 \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} |Q_1 * P$$

$$R_n \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} * P_2$$

pentru algoritmul $\mathfrak{R}_1$ și

$$R_0 \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} m * P \text{ sau } R_0 \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} |Q_2 * P$$

$$R_n \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} P_1 *$$

pentru algoritmul $\mathfrak{R}_2$. Aceasta deoarece $\mathfrak{A}_1 \llcorner \xi P \lrcorner \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} P$ iar $\mathfrak{A}_2 \llcorner P \xi \lrcorner \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} P$, unde ξP respectiv $P \xi$ sînt cuvinte în $\mathcal{A}$.

Se vede imediat că

$$\mathfrak{R}_1 \llcorner |Q_1 * P \lrcorner \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} * P_2$$

și

$$\mathfrak{R}_2 \llcorner |Q_2 * P \lrcorner \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} P_1 *$$

şi deci

$$\mathfrak{R}_1 \llcorner |Q_1 * P \lrcorner \simeq \mathfrak{G} \llcorner \mathfrak{R}_1 \llcorner |Q_1 * P \lrcorner \lrcorner \simeq \mathfrak{G} \llcorner * P_2 \lrcorner \ \bar{\underline{o}}\ P_2,$$

$$\mathfrak{R}_2 \llcorner |Q_2 * P \lrcorner \simeq \mathfrak{G} \llcorner \mathfrak{R}_2 \llcorner |Q_2 * P \lrcorner \lrcorner \simeq \mathfrak{G} \llcorner P_1 * \lrcorner \ \bar{\underline{o}}\ P_1.$$

Cuvintele P_1 şi P_2 sînt însă astfel că $P_1 \ \bar{\underline{o}}\ (P'_1)$ iar $P_2 \ \bar{\underline{o}}\ (P'_2)$ după cum am observat mai sus. Dacă asupra cuvintelor P_1 şi P_2 ne-am pune aceeaşi problemă ca şi asupra cuvîntului P, atunci pentru noi ar fi important de cunoscut de fapt cuvintele P'_1 şi P'_2. Pentru a obţine aceste cuvinte noi putem construi algoritmul normal $\mathfrak{S}$ care şterge prima şi ultima literă a unui cuvînt. Schema acestui algoritm normal în alfabetul $\mathcal{A} \cup \{\alpha\} \cup \cup \{\beta\}$ este :

$$\mathfrak{S}\begin{cases} \alpha\xi \to \xi\alpha & (\xi \in \mathcal{A}), \\ \xi\alpha \to \beta, & \\ \xi\beta \to \beta\xi, & \\ \beta\xi \to \cdot, & \\ \quad \to \alpha. & \end{cases}$$

Construind acum compoziţia normală a algoritmurilor $\mathfrak{S}$ şi $\mathfrak{R}_1$ respectiv $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{S} \circ \mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{S} \circ \mathfrak{R}_2$ şi notînd aceşti algoritmi normali (compoziţiile) prin $\mathfrak{R}'_1$ respectiv $\mathfrak{R}'_2$ vom avea :

$$\mathfrak{R}'_1 \llcorner |Q_1 * P \lrcorner \simeq \gamma \llcorner \mathfrak{R}_1 \llcorner |Q_1 * P \lrcorner \lrcorner \ \bar{\underline{o}}\ P'_2,$$

$$\mathfrak{R}'_2 \llcorner |Q_2 * P \lrcorner \simeq \mathfrak{S} \llcorner \mathfrak{R}_2 \llcorner |Q_2 * P \lrcorner \lrcorner \ \bar{\underline{o}}\ P'_1.$$

Pentru a rezolva însă complet problema găsirii cuvintelor P_1 şi P'_2 trebuie să mai construim o serie de algoritmi care să ne ducă de la cuvîntul P la cuvîntul $|Q_1 * P$ şi respectiv $|Q_2 * P$.

Pentru aceasta este suficient să observăm că algoritmul $\mathfrak{B}_2$ are proprietatea că $\mathfrak{B}_2 \llcorner P \lrcorner \ \bar{\underline{o}}\ Q_1 s Q_2$.

Construind algoritmii $\mathfrak{B}_3$ şi $\mathfrak{B}_4$ în alfabetul $\mathcal{A} \cup \{|\} \cup \{\alpha\}$ cu schemele :

$$\mathfrak{B}_3\begin{cases} \alpha| \to |\alpha \\ \alpha s \to |s \\ s| \to s \\ s \to \cdot \\ \quad \to \alpha \end{cases}$$

$$\mathfrak{B}_4\begin{cases} \alpha| \to \alpha \\ \alpha s \to \cdot | \\ \quad \to \alpha \end{cases}$$

Se vede imediat că

$$\mathfrak{B}_3 \llcorner Q_1 s Q_2 \lrcorner \ \bar{\underline{o}}\ |Q_1$$

iar

$$\mathfrak{B}_4 \llcorner Q_1 s Q_2 \lrcorner \ \bar{\underline{o}}\ |Q_2.$$

Compozițiile normale $\mathfrak{B}_3 \circ \mathfrak{B}_2$ și $\mathfrak{B}_4 \circ \mathfrak{B}_2$ aplicate la cuvîntul P nu vor duce prin urmare la cuvintele $|Q_1$ și respectiv $|Q_2$. Dacă construim acum după teorema reuniunii [3] algoritmii $\mathfrak{B}_6$ și $\mathfrak{B}_7$ astfel ca

$$\mathfrak{B}_6 \llcorner P \lrcorner \simeq \llcorner \mathfrak{B}_3 \circ \mathfrak{B}_2 \lrcorner \llcorner P \lrcorner * \mathfrak{B}_5 \llcorner P \lrcorner ,$$

$$\mathfrak{B}_7 \llcorner P \lrcorner \simeq \llcorner \mathfrak{B}_4 \circ \mathfrak{B}_2 \lrcorner \llcorner P \lrcorner * \mathfrak{B}_5 \llcorner P \lrcorner ,$$

unde $\mathfrak{B}_5$ este algoritmul identic, atunci se vede că algoritmii normali

$$\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{B}_6 \text{ și } \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{B}_7$$

au proprietatea că

$$\llcorner \mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{B}_6 \lrcorner \llcorner P \lrcorner \underline{\bar{o}} P_1, \ P_1 \underline{\bar{o}} (P_1'),$$

$$\llcorner \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{B}_7 \lrcorner \llcorner P \lrcorner \underline{\bar{o}} P_2, \ P_2 \underline{\bar{o}} (P_2'),$$

unde $P \underline{\bar{o}} P_1 s P_2$ sau folosindu-se de algoritmii $\mathfrak{R}_1'$ și $\mathfrak{R}_2'$ avem

$$\llcorner \mathfrak{R}_1' \circ \mathfrak{B}_6 \lrcorner \ \llcorner P \lrcorner \underline{\bar{o}} P_1',$$

$$\llcorner \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{B}_7 \lrcorner \ \llcorner P \lrcorner \underline{\bar{o}} P_2'.$$

Vom nota în cele ce urmează algoritmii $\llcorner \mathfrak{R}_1' \circ \mathfrak{B}_6 \lrcorner$ și $\mathfrak{R}_2' \circ \mathfrak{B}_7$ respectiv cu $\mathfrak{M}_1$ și $\mathfrak{M}_2$.

Construind apoi algoritmul normal $\mathfrak{P}$ după teorema reuniunii astfel ca

$$\mathfrak{P} \simeq \mathfrak{B}_1 \beta \mathfrak{M}_1 \alpha \mathfrak{M}_2 .$$

După cum se vede din definiția algoritmului $\mathfrak{P}$ avem

$$\mathfrak{P} \llcorner P \lrcorner \underline{\bar{o}} s \beta P_1 \alpha P_2 .$$

Să notăm cu $\mathfrak{Q}^{P}_{\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}}$ proiecția cuvîntului P pe alfabetul $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$. Dacă avem

$$l \llcorner \mathfrak{Q}^{\mathfrak{M}_1 \llcorner P_1 \lrcorner}_{\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}} \lrcorner \leqq l \llcorner \mathfrak{Q}^{\mathfrak{M}_2 \llcorner P \lrcorner}_{\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}} \lrcorner ,$$

atunci

$$\mathfrak{P} \simeq \mathfrak{B}_1 \beta \mathfrak{M}_1 \alpha \mathfrak{M}_2 \text{ (a)}$$

iar dacă

$$l \llcorner \mathfrak{Q}^{\mathfrak{M}_1 \llcorner P \lrcorner}_{\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}} \lrcorner > l \llcorner \mathfrak{Q}^{\mathfrak{M}_2 \llcorner P \lrcorner}_{\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}} \lrcorner$$

atunci

$$\mathfrak{P} \simeq \mathfrak{B}_1 \sigma \alpha \mathfrak{M}_2 \beta \mathfrak{M}_1$$

$$\sigma \urcorner \in \mathcal{A}, \ \sigma \not\subset \alpha, \beta, \delta, \gamma, \rho. \text{ (b)}$$

Se vede deci că avem

$$\mathfrak{P} \llcorner P \lrcorner \underline{\bar{o}} s \beta P_1' \alpha P_2'$$

în primul caz și

$$\mathfrak{P}\llcorner P\lrcorner \mathrel{\underline{\bar{\circ}}} s\sigma\alpha P_2'\beta P_1',$$

în al doilea caz.

Admitem în cele ce urmează că avem de-a face numai cu cazul în care algoritmul $\mathfrak{P}$ este definit de echivalența (a). Dacă el este definit de echivalența (b), atunci pentru a nu complica metasimbolismul schimbăm notațiile algoritmurilor $\mathfrak{M}_1$ și $\mathfrak{M}_2$ respectivi, adică pe $\mathfrak{M}_1$ îl notăm cu $\mathfrak{M}_2$ iar pe $\mathfrak{M}_2$ îl notăm cu $\mathfrak{M}_1$. De aceste precizări vom ține seama de asemenea mai jos și în definirea algoritmurilor $\mathfrak{P}_j^i$.

Se vede că $\mathfrak{P}\llcorner P\lrcorner \mathrel{\underline{\bar{\circ}}} s\beta P_1'\alpha P_2'$ sau $\mathfrak{P}\llcorner P\lrcorner = s\sigma\alpha P_2'\beta P'$, unde $s \in \mathcal{O}\bigcup\mathfrak{R}$, $s\urcorner \in D_{s_i}$, s_i fiind toate celelalte simboluri din $\mathcal{O}\bigcup\mathfrak{R}$ care intră în cuvîntul P iar P_1' și P_2' sînt astfel ca

$$P \mathrel{\underline{\bar{\circ}}} P_1 s P_2,\quad P_1 \mathrel{\underline{\bar{\circ}}} (P_1')_1,\quad P_2 \mathrel{\underline{\bar{\circ}}} (P_2').$$

Simbolul s astfel obținut îl vom numi simbol de ordinul întîi, și-l vom nota cu s_1'. De asemenea cuvintele P_1' și P_2' vor fi numite cuvinte de ordinul întîi. Se știe [5] că într-un cuvînt compatibil există unul și numai un simbol de ordinul întîi. Aplicînd din nou algoritmul $\mathfrak{P}$ cuvintelor P_1' și P_2' respectiv, vom obține

$$\mathfrak{P}\llcorner P_1'\lrcorner \mathrel{\underline{\bar{\circ}}} s\beta P_1''\alpha P_2'',$$

$$\mathfrak{P}\llcorner P_2'\lrcorner \mathrel{\underline{\bar{\circ}}} s\beta P_3''\alpha P_4''.$$

Simbolurile s obținute în felul acesta se vor numi simboluri de ordinul doi și se vor nota respectiv cu s_1^2 și s_2^2. Dacă algoritmul $\mathfrak{P}$ nu se aplică la unul din cuvintele P_1' sau P_2', atunci acesta este un element de bază al sistemului formal, adică un cuvînt în $\mathfrak{C}$ sau un simbol în $\mathfrak{C}\bigcup\mathfrak{X}$ iar unul din simbolurile s_i^2 pot lipsi. (Se poate vedea simplu că ambele simboluri s_i^2 pot lipsi, ceea ce este echivalent cu faptul că ambele cuvinte P_1' și P_1' sînt elemente de bază.)

Pentru a decide dacă cuvintele P_1' respectiv P_2' sînt sau nu elemente de bază vom aplica acestor cuvinte algoritmul $\mathfrak{B}$ în alfabetul $\mathcal{A}$ care are schema

$$\mathfrak{B}\begin{cases} \xi \to (\xi\urcorner \in \mathcal{O}\bigcup\mathfrak{R},\ \xi \in \mathcal{A}),\\ \xi \to\cdot\ \xi(\xi \in \mathcal{O}\bigcup\mathfrak{R}).\end{cases}$$

Putem acum construi algoritmii $\mathfrak{P}_1'$ respectiv $\mathfrak{P}_2'$ echivalenți cu algoritmii $\mathfrak{P}\llcorner P_1'\lrcorner$ respectiv $\mathfrak{P}\llcorner P_2'\lrcorner$ dacă avem

$$\mathfrak{B}\llcorner P_1'\lrcorner \not\mathrel{\underline{\bar{\circ}}} \Lambda,\quad \mathfrak{B}\llcorner P_2'\lrcorner \not\mathrel{\underline{\bar{\circ}}} \Lambda$$

cu ajutorul compunerii algoritmurilor $\mathfrak{P}$ și $\mathfrak{M}_1$ respectiv $\mathfrak{M}_2$ și echivalenți cu algoritmul identic $\mathfrak{B}_5$ în caz contrar.

Vom avea deci

$$\mathfrak{P}_1^1 \llcorner P \lrcorner \simeq \begin{cases} \mathfrak{P} \llcorner \mathfrak{M}_1 \llcorner P \lrcorner \lrcorner & \text{dacă } \mathfrak{B} \llcorner \mathfrak{M}_1 \llcorner P \lrcorner \lrcorner \not\subset \Lambda \\ \mathfrak{B}_5 \llcorner \mathfrak{M}_1 \llcorner P \lrcorner \lrcorner & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

$$\mathfrak{P}_2^1 \llcorner P \lrcorner \simeq \begin{cases} \mathfrak{P} \llcorner \mathfrak{M}_2 \llcorner P \lrcorner \lrcorner & \text{dacă } \mathfrak{B} \llcorner \mathfrak{M}_2 \llcorner P \lrcorner \lrcorner \not\subset \Lambda, \\ \mathfrak{B}_5 \llcorner \mathfrak{M}_2 \llcorner P \lrcorner \lrcorner & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

În mod absolut analog se construiesc apoi algoritmii $\mathfrak{P}_1^2$, $\mathfrak{P}_2^2$, $\mathfrak{P}_3^2$, $\mathfrak{P}_4^2$ astfel ca :

$$\mathfrak{P}_i^2 \llcorner P \lrcorner \simeq \begin{cases} \mathfrak{P} \llcorner \mathfrak{M}_k \llcorner \mathfrak{M}_j \llcorner P \lrcorner \lrcorner \lrcorner & \text{dacă } \mathfrak{B} \llcorner \mathfrak{M}_k \llcorner \mathfrak{M}_j \llcorner P \lrcorner \lrcorner \lrcorner \not\subset \Lambda \\ \mathfrak{B} \llcorner \mathfrak{M}_k \llcorner \mathfrak{M}_j \llcorner P \lrcorner \lrcorner \lrcorner & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

$$i = 1,2,3,4 \,;\; k = 1,2 \,;\; j = 1,2.$$

Se vede ușor că dacă notăm cu p un ordin oarecare al simbolurilor s obținute, respective al algoritmurilor $\mathfrak{P}_i^p$, atunci numărul maxim de asemenea simboluri, respectiv numărul maxim de algoritmi $\mathfrak{P}_i^p$ diferiți de algoritmii identici va fi cel mult 2^p.

Deoarece cuvîntul P inițial conține un număr finit de simboluri și deci nu număr finit de intrări ale simbolurilor din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ după un număr finit de pași, ceea ce echivalează cu construirea unui număr finit de algoritmi de forma $\mathfrak{P}_i^p$ diferiți de algoritmul identic $\mathfrak{B}_5$, toate cuvintele de acel ordin vor fi elemente de bază ale sistemului formal. Să notăm cu μ ordinul acestor cuvinte. Atunci evident că șirul algoritmurilor $\{\mathfrak{P}_i^p\}$, $\max\ i = 2^p$ iar $p = 0, 1, 2, \ldots, \mu$, $\mathfrak{P}_0^0 \mathrel{\underline{\circ}} \mathfrak{P}$, va transforma cuvîntul inițial P într-un șir de cuvinte de forma $s\beta Q \alpha S$, unde fiecare dintre cuvintele Q și S sînt sau cuvinte compatibile în sistemul formal care conține intrări de simboluri din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ sau sînt elemente de bază ale sistemului formal, după cum algoritmii $\mathfrak{P}_i^j$ care se aplică la aceste cuvinte sînt diferiți de algoritmul identic $\mathfrak{B}_5$ sau sînt chiar algoritmul identic $\mathfrak{B}_5$. Se poate acum construi algoritmul $\mathfrak{U}$ pentru alfabetele tuturor algoritmurilor $\mathfrak{P}_i^j$ astfel ca

$$\mathfrak{U} \simeq \mathfrak{P} * \mathfrak{P}_1^1 \mathfrak{P}_2^1 * \ldots * \mathfrak{P}_1^p \, \mathfrak{P}_2^p \ldots \mathfrak{P}_{2^p}^p * \ldots * \mathfrak{P}_1^{\mu} \ldots \mathfrak{P}_{2^{\mu}}^{\mu}.$$

Se vede ușor că

$$\mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner \mathrel{\underline{\circ}} s_1^1 \beta P_1' \alpha P_2' * \ldots * s_1^{\mu} \beta P_1^{\mu} \alpha P_2^{\mu} \ldots s_{2^{\mu}}^{\mu} \beta P_{2^{\mu}-1}^{\mu} \alpha P_{2^{\mu}}^{\mu},$$

unde P_i^{μ} sînt toate elementele de bază. Dacă unul dintre $s_i^j \in \mathcal{O}_1$, atunci cuvîntul

$$s_i^j \beta P_l^j P_{l+1}^j$$

este astfel că

$$s_i^j \beta P_l^j \alpha P_{l+1}^j \mathrel{\underline{\circ}} s_i^j \beta P_l^j \alpha \wedge .$$

Bineînțeles că printre cuvintele P_i^j, $j < \mu$ pot să existe cuvinte care sînt elemente de bază ale sistemului formal.

Din cele de mai sus rezultă că are loc următoarea afirmație pentru cuvintele compatibile în sistemul formal.

Oricare ar fi cuvîntul compatibil P în alfabetul $\mathcal{A}$, există un algoritm normal $\mathfrak{U}$ care transformă cuvîntul D într-un șir de sisteme de cuvinte astfel ca:

1) cuvîntul P se numește cuvînt de ordinul zero;

2) Cuvintele de ordin maxim ale sistemului sînt elemente de bază ale sistemului formal;

3) Oricare ar fi cuvîntul R de ordin ν, $(0 \leqslant \nu < \mu)$, el se obține cel mult din două cuvinte de ordinul $\nu + 1$ cu ajutorul uneia din regulile de formare [5] și cu ajutorul unui simbol $s \in \mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ de ordinul ν.

Prin urmare, oricărui cuvînt compatibil P în alfabetul $\mathcal{A}$ i se poate atașa în mod unic un arbore A [6] cu următoarele proprietăți:

1° Toate nodurile arborelui A sînt simboluri ale alfabetului $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$.

2° Toate muchiile arborelui A sînt cuvinte compatibile în alfabetul $\mathcal{A}$.

3° Toate vîrfurile arborelui A sînt elemente de bază ale alfabetului $\mathcal{A}$.

4° Toate nodurile corespunzătoare simbolurilor din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ de același ordin se găsesc pe o dreaptă.

Dacă notăm cu d_i dreapta nodurilor corespunzătoare simbolurilor de ordin i și $_j$ a celor de ordin j, atunci d_i și d_j sînt paralele.

Arborele A corespunzător cuvîntului compatibil P într-o scriere liniară simbolică nu este altceva decît rezultatul aplicării algoritmului $\mathfrak{U}$ la cuvîntul P dacă în fața acestui rezultat punem cuvîntul P_0^0, unde $P_0^0 \,\underline{\bar{o}}\, P*$, și dacă în definiția lui $\mathfrak{U}$ nu intră decît algoritmi diferiți de $\mathfrak{B}_5$.

Separatorii $*$ care apar în acest rezultat marchează ordinul nodurilor arborelui respectiv, iar separatorii α și β indică respectiv muchia dreapta și stînga care pleacă din nodul din stînga simbolului β. Se observă simplu că din fiecare nod al arborelui A pleacă cel mult trei muchii.

Unicitatea arborelui A corespunzător cuvîntului compatibil P rezultă din faptul că oricare ar fi algoritmul normal $\mathfrak{U}_1 \simeq \mathfrak{U}$ peste alfabetul $\mathcal{A}$, $\mathfrak{U}_1 \llcorner P \lrcorner \,\underline{\bar{o}}\, \mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner$ egalitatea înțelegîndu-se în sensul grafic introdus în [3].

Dacă ne folosim de un metasimbolism special, care nu păstrează forma liniară a cuvintelor despre care se raționează cu el, atunci cu ajutorul acestui metasimbolism, arborele A corespunzător cuvîntului compatibil P se poate reprezenta sub forma dată în figură, unde liniile orizontale punctate marchează ordinele simbolurilor s care se găsesc pe acestea, iar $\max k_\mu = 2^\mu$.

DEFINIȚIE. Spunem că cuvîntul P este echivalent cu cuvîntul Q relativ la alfabetul $\mathcal{A}$ dacă sînt îndeplinite condițiile:

1) Dacă cuvîntul P nu conține intrări ale simbolurilor din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$, atunci nici Q nu conține intrări ale simbolurilor din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ și $P \,\underline{\bar{o}}\, Q$.

2) Dacă cuvîntul P conține intrări ale simbolurilor din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$, atunci și Q conține intrările unor astfel de simboluri în așa fel încît dacă $s \in \mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ intră în P, atunci s intră și în Q și reciproc.

3) Dacă s-au definit domeniile de acțiune ale simbolului s în cuvîntul P și în cuvîntul Q, notate prin D_s^P și respectiv D_s^Q, atunci oricare ar fi elementul de bază P_1, care intră în D_s^P, el intră și în D_s^Q și reciproc.

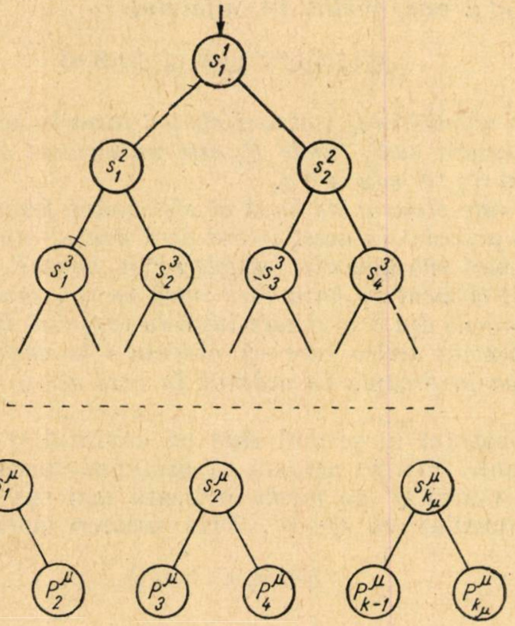


Fig. 1

4) Dacă cuvîntul P are un denotat, atunci și cuvîntul Q are un denotat și aceste denotate coincid.

Notînd cu $\sim$ simbolul echivalenței introduse, vom avea

$$P \sim P. \tag{a}$$

$$\text{Dacă } P \sim Q, \text{ atunci } Q \sim P. \tag{b}$$

$$\text{Dacă } P \sim Q \text{ și } Q \sim R, \text{ atunci } P \sim R. \tag{c}$$

TEOREMĂ. *Oricare ar fi cuvîntul compatibil P în alfabetul $\mathcal{A}$ există un singur cuvînt Q de forma*

$$Q \,\underline{\overline{\circ}}\, Q_1 * Q_2 * \cdots * Q_\mu$$

echivalent cu P, Q_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ fiind cuvinte în alfabetul

$$\mathfrak{C} \cup \mathfrak{X} \cup \mathcal{O} \cup \mathfrak{R} \cup \{\alpha, \beta, \sigma\}$$

α, β, σ sînt diferite între ele și α, β, $\sigma \rceil \in \mathcal{A}$ astfel ca:

1) *$\mathcal{O}_\mu$ este cuvînt în alfabetul $\mathfrak{C} \cup \mathfrak{X} \cup \mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ de forma*

$$Q_\mu \,\underline{\overline{\circ}}\, s_1 P_1 R_1 \ldots s_{K_\mu} P_{K_\mu} R_{K_\mu},$$

P_i și R_i $(i = 1, 2, \ldots, k_\mu)$ fiind elemente de bază ale sistemului formal astfel încît dacă $s_i \in \mathcal{O}_2 \cup \mathfrak{R}$, atunci $P_i, R_i \not\underline{\circ}\, \Lambda$ iar dacă $s_i \in O_1$, atunci $P_i \not\underline{\circ}\, \Lambda$ iar $R_i \underline{\circ}\, \Lambda$, acesta din urmă lipsind din Q_μ.

2) Q_i, $i < \mu$ este cuvînt în alfabetul

$$\mathcal{C} \cup \mathfrak{X} \cup \mathcal{O} \cup \mathfrak{R} \cup \{\alpha, \beta, \sigma\}$$

astfel ca:

Dacă β și α intră în Q_i, atunci ele pot intra în acest cuvînt numai sub forma $s\beta P_1$ respectiv $s\alpha P_1$, unde P_1 este un element de bază al sistemului formal iar $s \in \mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ sau $s \,\underline{\circ}\, \sigma$.

Dacă P_1 este element de bază al sistemului formal și intră în Q_i și dacă el nu este precedat în acest cuvînt de β sau α, atunci el poate intra în acest cuvînt numai sub una din formele sP_1R_1 sau sR_1P_1 dacă $s \in \mathcal{O}_2 \cup \mathfrak{R}$, R_1 fiind un alt element de bază care intră în Q_i, sau sP_1 dacă $s \in \mathcal{O}_1$.

3) Simbolurile din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care intră în cuvîntul Q_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ sînt acelea și numai acelea care au ordinul i în cuvîntul P și sînt așezate de la stînga la dreapta în ordinea în care apare în arborele A atașat cuvîntului P.

Să demonstrăm în primul rînd că cuvîntul Q precizat în această teoremă este unic. Pentru aceasta să presupunem că nu ar fi unic şi că ar exista şi cuvîntul Q' de forma indicată mai sus astfel ca $P \sim Q'$. Se vede atunci imediat că $Q \sim Q'$. Prin urmare dacă

$$Q \,\underline{\circ}\, Q_1 * \cdots * Q_\mu$$

şi

$$Q' \,\underline{\circ}\, Q'_1 * \cdots * Q'_{\mu'},$$

atunci din proprietățile cuvintelor Q_μ şi $Q'_{\mu'}$ rezultă că $Q_\mu \,\underline{\circ}\, Q'_{\mu'}$ iar din faptul că în cuvîntul P există un singur ordin cel mai înalt al simbolurilor din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care intră în el avem $\mu = \mu'$.

Suprimînd acum cuvintele Q_μ şi Q'_μ din cuvintele Q şi Q', obținem cuvintele Q^s_1 şi Q'^s_1 de forma:

$$Q^s_1 \,\underline{\circ}\, Q_1 * \cdots * Q_{\mu-1},$$

$$Q'^s_1 \,\underline{\circ}\, Q'_1 * \cdots * Q'_{\mu-1}.$$

Să arătăm că $Q^s_1 \sim Q'^s_1$ iar $Q_{\mu-1} \,\underline{\circ}\, Q'_{\mu-1}$.

Prima afirmație este evidentă deoarece $Q \sim Q'$, iar din aceste cuvinte pentru a obține cuvintele Q^s_1 şi Q'^s_1 am suprimat aceleaşi intrări de simboluri. Prin urmare rămîne de arătat că $Q_{\mu-1} \,\underline{\circ}\, Q'_{\mu-1}$.

Pentru aceasta să considerăm cuvintele

$$\mathfrak{P}^{Q_{\mu-1}}_{\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}}, \ \mathfrak{P}^{Q_{\mu-1}}_{\mathcal{C} \cup \mathfrak{X}}, \ \mathfrak{P}^{Q_{\mu-1}}_{\{\alpha, \beta, \sigma\}}$$

şi

$$\mathfrak{P}^{Q'_{\mu-1}}_{\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}}, \ \mathfrak{P}^{Q'_{\mu-1}}_{\mathcal{C} \cup \mathfrak{X}}, \ \mathfrak{P}^{Q'_{\mu-1}}_{\{\alpha, \beta, \sigma\}}.$$

Din cauza condiției (3) din teoremă și din faptul că ordinul unui simbol $s \in \mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care intră în P este unic determinat, rezultă imediat egalitatea

$$\mathfrak{Q}^{Q_{\mu-1}}_{\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}} \;\underline{\bar{o}}\; \mathfrak{Q}^{Q'_{\mu-1}}_{\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}}.$$

Să arătăm că avem de asemenea și

$$\mathfrak{Q}^{Q_{\mu-1}}_{\mathcal{C} \cup \mathfrak{X}} \;\underline{\bar{o}}\; \mathfrak{Q}^{Q'_{\mu-1}}_{\mathcal{C} \cup \mathfrak{X}}.$$

Să presupunem că nu ar fi așa. Atunci, evident, există cel puțin un element de bază al sistemului formal care intră în $Q_{\mu-1}$ și nu intră în $Q'_{\mu-1}$ sau invers. Să presupunem pentru precizarea ideilor că P_1 este elementul de bază respectiv și că el intră în $Q_{\mu-1}$ dar nu intră în $Q'_{\mu-1}$. El poate intra în cuvîntul $Q_{\mu-1}$ numai sub una din formele

$$s\,P_1 R_1,\ s\,R_1 P_1,\ s\,\beta\,P_1,\ s\,\alpha\,P_1,\ s\,P_1.$$

În oricare din aceste cazuri dacă $s \in \mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$, este de ordinul $\mu - 1$ în cuvîntul P. Prin urmare el intră și în cuvîntul $Q'_{\mu-1}$. Deoarece P_1 nu intră în cuvîntul $Q'_{\mu-1}$, rezultă că un simbol $s \in \mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ are în cuvîntul P pe de o parte o intrare de una din formele

$$(P_1)\ s(R_1),\ (R_1)\ s(P_1),\ s(P_1),\ (P_1)\ s(,)\ s(P_1)$$

după cum se vede din definiția lui D^P_s și aceeași intrare a simbolului s poate avea și o altă formă, deoarece $Q^s_1 \sim Q^{1s}_1$. De aici va rezulta că domeniul de acțiune al simbolului s nu este unic în cuvîntul P ceea ce este în contradicție cu faptul că P fiind compatibil este bine construit.

Prin urmare dacă P_1 intră în $Q_{\mu-1}$, el intră și în $Q'_{\mu-1}$ și reciproc, de unde avem $\mathfrak{Q}^{Q_{\mu-1}}_{\mathcal{C} \cup \mathfrak{X}} \,\underline{\bar{o}}\, \mathfrak{Q}^{Q'_{\mu-1}}_{\mathcal{C} \cup \mathfrak{X}}$. În mod analog va rezulta că $\mathfrak{Q}^{Q_{\mu-1}}_{\{\alpha,\beta,\sigma\}} \,\underline{\bar{o}}\, \mathfrak{Q}^{Q'_{\mu-1}}_{\{\alpha,\beta,\sigma\}}$. Ținînd acum seama de-a doua parte a condiției 3) a teoremei rezultă imediat că $Q_{\mu-1} \,\underline{\bar{o}}\, Q'_{\mu-1}$.

Procedînd acum cu cuvintele Q^s_1 și Q'^s_1 ca și cu cuvintele Q și respectiv Q^1, vom ajunge, după un număr μ de pași, la egalitatea $Q_1 \,\underline{\bar{o}}\, Q^1_1$, de unde va rezulta că $Q \,\underline{\bar{o}}\, Q^1$, ceea ce demonstrează unicitatea cuvîntului Q.

Pentru demonstrarea existenței cuvîntului Q să facem în prealabil cîteva observații.

Observația 1. După cum se vede din definiția echivalenței, dacă cuvîntul P este un element de bază al sistemului formal, atunci Q este și el un element de bază al sistemului formal și avem $P \,\underline{\bar{o}}\, Q$ în sensul introdus în [3].

Observația 2. Dacă cuvîntul P este de forma $(P_1)s(P_2)$ sau $s(P_1)$, unde P_1 și P_2 sau P_1, sînt element de bază ale sistemului formal, atunci rezultă evident din definiția echivalenței că cuvîntul Q în acest caz trebuie să conțină dintre elementele de bază ale sistemului formal numai elementele P_1 și P_2 sau P_1 iar dintre simbolurile din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ numai simbolul s, al cărui domeniu de acțiune în cuvîntul Q trebuie să conțină elementele

P_1 și P_2 sau P_1. Convenim ca domeniul de acțiune al simbolului s în cuvîntul Q să-l scriem sub forma $D_s^Q \,\overline{\underline{\circ}}\, P_1P_2$ în primul caz și $D_s^Q \,\overline{\underline{\circ}}\, P_1$, în al doilea caz. Dacă folosim simbolul $\sim$ pentru a nota echivalența introdusă, atunci avem

$$(P_1)\ s(P_2) \sim sP_1P_2 \qquad \text{sau} \qquad s(P_1) \sim sP_1.$$

Se vede acum ușor că oricare ar fi cuvintele P_1 și P_2 dacă $P_1 \sim Q_1$ și $P_2 \sim Q_2$, atunci și

$$(P_1)\ s(P_2) \sim sQ_1Q_2$$

sau

$$s(P_1) \sim sQ_1$$

Demonstrația existenței cuvîntului Q din teorema enunțată va consta acum în construirea unui algoritm normal care să transforme orice cuvînt compatibil P în sistemul formal în cuvîntul Q echivalent cu el.

Pentru aceasta să observăm că dacă șirul algoritmilor $\{\mathfrak{P}_i^j\}$ cu ajutorul cărora construim algoritmul $\mathfrak{U}$ se iau în așa fel ca printre ei să nu existe nici un algoritm identic cu $\mathfrak{B}_5$, atunci

$$\mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner \,\overline{\underline{\circ}}\, s_1'\, \beta P_1'\, \alpha P_2' * \ldots * s_1^\mu\, \beta P_1^\mu\, \alpha P_2^\mu \ldots s_{k_\mu}^\mu\, \beta P_{k_\mu - 1}^\mu\, \alpha P_{k_\mu}^\mu,$$

unde fiecare element de bază care apare în cuvîntul $\mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner$ apare sau printre cuvintele P_i^μ dacă elementul de bază respectiv aparține domeniului de acțiune al unui simbol de ordinul μ sau în cuvîntul P_i^j dacă el aparține domeniului de acțiune al unui simbol $s \in \mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ de ordin j mai mic ca μ și simbolul s nu conține în domeniul său de acțiune simboluri din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ de ordin μ care să aibă ca domeniu de acțiune simbolul de bază considerat.

Să considerăm acum algoritmul normal $\mathfrak{K}$ dat de schema:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{r} \beta(P) \to \beta \\ \alpha(P) \to \alpha \end{array}\right\} & \begin{array}{l} (P \text{ cuvînt în } \mathcal{A}) \\ (\beta \rceil \in \mathcal{A},\ \beta \not\subset \alpha) \end{array} \\
\beta) \to \beta & \\
\beta(\to \beta & \\
\alpha) \to \alpha & \\
\alpha(\to \alpha & \\
\beta s \to \beta & (s \in \mathcal{O} \cup \mathcal{R}) \\
\alpha s \xi \to \alpha \xi & (s \in \mathcal{O} \cup \mathcal{R},\ \xi \not\subset \beta) \\
\beta \alpha \xi \to \alpha \xi & (\xi \not\subset \Lambda,\ \xi \in \mathcal{A}) \\
\beta \xi \alpha \to \beta \xi & (\xi \not\subset \Lambda,\ \xi \in \mathcal{A}) \\
\beta \xi \alpha \eta \to \xi \eta & (\xi, \eta \in \mathcal{A}) \\
\beta \alpha \to & \\
\Lambda \to &
\end{array}\right.$$

Din schema acestui algoritm rezultă ușor egalitatea

$$\mathfrak{K} \llcorner \mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner \lrcorner \mathrel{\underline{\circ}} Q,$$

unde Q are forma

$$Q \mathrel{\underline{\circ}} Q_1 * Q_2 * \cdots * Q_i * \cdots * Q_\mu .$$

Cuvintele Q_1, $Q_2, \ldots, Q_\mu$ au următoarele proprietăți :

1. Cuvîntul Q_μ conține numai simboluri din $\mathcal{O} \bigcup \mathcal{R}$ împreună cu elementele de bază care formează domeniul lor de acțiune dispuse sub forma $s\xi\eta$ sau $s\xi$ după cum $s \in \mathcal{O}_2 \bigcup \mathcal{R}$ sau $s \in \mathcal{O}_1$.

2. Orice simbol s din $\mathcal{O} \bigcup \mathcal{R}$ care apare în cuvîntul $Q_{\mu-i}$, i fiind mai mare sau egal cu 1, are domeniul de acțiune sau sub forma $s\xi\eta$ sau $s\xi$ dacă el nu conține în domeniul său de acțiune simboluri din $\mathcal{O} \bigcup \mathcal{R}$ de ordin $\mu - i + 1$. Dacă în domeniul de acțiune al simbolului s în cuvîntul P intră simboluri din $\mathcal{O} \bigcup \mathcal{R}$ de ordinul $\mu - i + 1$, atunci are loc unul din cazurile :

$$a)\ Q_{\mu-i} \mathrel{\underline{\circ}} Q'_{\mu-i}\, s\, Q''_{\mu-i}, \quad Q''_{\mu-i} \mathrel{\underline{\circ}} s_1 Q'''_{\mu-i}, \quad s \in \mathcal{O} \bigcup \mathcal{R}.$$

În acest caz domeniul de acțiune al simbolului s conține simboluri s de ordin $\mu - i + 1$.

$$b)\ Q_{\mu-i} \mathrel{\underline{\circ}} Q'_{\mu-i}\, s Q''_{\mu-i}, \; Q''_{\mu-i} \mathrel{\underline{\circ}} \beta\xi Q'''_{\mu-i} \text{ sau } Q''_{\mu-i} \mathrel{\underline{\circ}} \alpha\xi Q'''_{\mu-i},$$

ξ fiind un element de bază al sistemului formal. În acest caz simbolul $s \in \mathcal{O} \bigcup \mathcal{R}$ și avem în primul subcaz $Q''_{\mu-i} \mathrel{\underline{\circ}} \beta\xi Q'''_{\mu-i}$, ξ primul element al domeniului de acțiune al simbolului s, în al doilea subcaz $Q''_{\mu-i} \mathrel{\underline{\circ}} \alpha\xi Q'''_{\mu-i}$, ξ fiind al doilea element al domeniului său de acțiune. Din aceste proprietăți și din definiția algoritmului $\mathfrak{U}$ rezultă imediat că cuvintele Q_1, $Q_2, \ldots, Q_\mu$ de mai sus posedă proprietățile enunțate în teoremă.

Să arătăm acum că $P \sim Q$. Pentru aceasta să arătăm că sînt îndeplinite condițiile din definiția echivalenței. Condiția 1) este evidentă, deoarece dacă P nu conține intrări ale simbolurilor din $\mathcal{O} \bigcup \mathcal{R}$, atunci $\mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner \mathrel{\underline{\circ}} P$, $\mathfrak{K} \llcorner \mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner \lrcorner \mathrel{\underline{\circ}} P$ ceea ce se vede simplu din definițiile algoritmurilor normali $\mathfrak{U}$ și $\mathfrak{K}$.

Să presupunem acum că simbolul $s \in \mathcal{O} \bigcup \mathcal{R}$ intră în cuvîntul P, și să arătăm atunci că el intră și în cuvîntul Q. Deoarece algoritmul $\mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner$ nu șterge nici un simbol din cuvîntul P (în afara unor simboluri din S), rezultă că simbolul s intră și în $\mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner$. Avem acum două cazuri posibile :

1) s intră într-un cuvînt P^j_i din cele care formează cuvîntul $\mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner$.

2) s intră în cuvîntul $\mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner$ sub forma $s\beta$ sau $s\sigma$. Să arătăm acum că toate simbolurile din $\mathcal{O} \bigcup \mathcal{R}$ care intră în P intră în cuvîntul $\mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner$ sub forma $s\beta$ sau $s\sigma$. Pentru aceasta este suficient să arătăm că primul caz semnalat mai sus se reduce la al doilea.

Dacă simbolul s intră în cuvîntul P^j_i și el nu aparține domeniului de acțiune al nici unui alt simbol din $\mathcal{O} \bigcup \mathcal{R}$ care intră în P^j_i, atunci $P^j_i \mathrel{\underline{\circ}} P^{j+1}_{i_1}\ sP^{j+1}_{i_1+1}$ și prin urmare s apare în cuvîntul $\mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner$ sub forma $s\beta$

sau $s\sigma$ într-un cuvînt de ordin superior ordinului j. Dacă s aparține domeniului de acțiune al altor simboluri din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care intră în P^j_i, atunci

$$P^j_i \,\overline{\underline{\circ}}\, P^{j+1}_{i_1} \; s_1 \; P^{j+1}_{i_1+1}$$

iar s intră fie în cuvîntul $P^{j+1}_{i_1}$ fie în cuvîntul $P^{j+1}_{i_1+1}$.

În oricare din aceste cazuri vom repeta raționamentul asupra cuvîntului respectiv. După un număr finit de pași vom ajunge la concluzia că s intră în cuvîntul $\mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner$ sub forma $s\beta$ sau $s\sigma$. Rezultă deci că orice simbol din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care intră în P intră și în $\mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner$ sub forma $s\beta$ sau $s\sigma$. Se poate arăta în mod analog că orice element de bază care intră în cuvîntul P, intră și în cuvîntul $\mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner$ fie sub forma $\beta\xi$ fie sub forma $\alpha\xi$, ξ fiind elementul de bază respectiv.

Examinînd acum șirul formulelor algoritmului $\mathfrak{K}$ observăm că printre aceste formule nu există nici o formulă care să șteargă din cuvîntul $\mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner$ cuvinte de forma $s\beta$, $\beta\xi$, $s\sigma$ sau $\alpha\xi$. Rezultă, prin urmare, că toate simbolurile din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care intră în P intră și în Q și analog pentru elementele de bază. Reciproca acestei afirmații are loc prin faptul că algoritmul $\mathfrak{K}$ nu atașează cuvîntului $\mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner$ nici un simbol nou, și scoate toate simbolurile alfabetului $\mathcal{A}$ care apar în $\mathfrak{U} \llcorner P \lrcorner$ și care nu au forma $s\beta$ dacă $s \in \mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ și $\beta\xi$ sau $\alpha\xi$ dacă ξ este un element de bază.

Să arătăm acum că oricare ar fi $s \in \mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care intră în cele două cuvinte P și Q, are loc și condiția 3) din definiția echivalenței.

Pentru aceasta să arătăm în primul rînd cum se determină domeniul de acțiune al unui simbol oarecare s care intră în cuvîntul Q.

Deoarece cuvîntul Q are forma

$$Q \,\overline{\underline{\circ}}\, Q_1 * Q_2 * \cdots * Q_i * \cdots * Q_\mu,$$

simbolul s intră într-unul din cuvintele Q_i, avînd ordinul i în cuvîntul P. Dacă s intră în Q_μ, atunci domeniul său de acțiune este format din elementele de bază care stau imediat în dreapta lui. Deoarece în acest caz s este de ordinul μ, rezultă că în cuvîntul P are forma $(P_1)\, s(P_2)$ sau $s(P_1)$, unde P_1 și P_2 sau P_1 sînt elemente de bază. Din observația 2) se vede atunci că pentru acest simbol are loc condiția 3).

Fie acum simbolul s, care intră în cuvîntul Q_i. Din observațiile de mai sus asupra cuvintelor Q_i punem prin definiție

$$D^Q_{s^i_j} \,\overline{\underline{\circ}}\, \begin{cases} s^{i+1}_{k_{i+1}} - r D^{Q_{i+1}}_{s_{k_{i+1}-r}} \; s^{i+1}_{k_{i+1}-r+1} D^Q_{s_{k_{i+1}-r+1}} & \text{dacă } s^i_j \in \mathcal{O}_2 \cup \mathfrak{R} \text{ și sîntem în cazul } a) \\ s^{i+1}_{k_{i+1}-r+1} \, D^Q_{s_{k_{i+1}-r+1}} & \text{dacă } s^i_j \in \mathcal{O}_1 \text{ și sîntem în cazul } a) \end{cases}$$

sau

$$D^Q_{s^i_j} \,\overline{\underline{\circ}}\, \begin{cases} \xi s^i_{k_{i+1}-r+1} \, D^Q_{s_{k_{i+1}-r+1}} & \text{în primul subcaz } b) \\ s^{i+1}_{k_{i+1}-r+1} \, D^Q_{s_{k_{i+1}-r+1}} \, \xi & \text{în al doilea subcaz } b). \end{cases}$$

Numărul r este astfel ales încît oricare dintre simbolurile $s^{i+1}_{k_{i+1}-l}$ care intră în cuvîntul Q_{i+1}, $l > r$ aparține domeniului de acțiune al unui simbol s^i_p, $p > j$.

Prin urmare vom avea

$$D^Q_{s^i_{k_i}} \overline{\underline{\circ}} \begin{cases} s^{i+1}_{k_{i+1}-1} D^Q_{s^{i+1}_{k_{i+1}-1}} \quad s^{i+1}_{k_{i+1}} D^Q_{s^{i+1}_{k_{i+1}}}, s^i_{k_i} \in \mathcal{O}_2 \cup \mathfrak{R} \text{ în cazul } a) \\ s^{i+1}_{k_{i+1}} D^Q_{s^{i+1}_{k_{i+1}}} \quad s^i_{k_i} \in \mathcal{O}_1 \text{ în cazul } a) \end{cases}$$

și

$$D^Q_{s^i_{k_i}} \overline{\underline{\circ}} \begin{cases} \xi s^{i+1}_{k_{i+1}} D^Q_{s^{i+1}_{k_{i+1}}} \text{ în primul subcaz } b), \\ s^{i+1}_{k_{i+1}} D^Q_{s^{i+1}_{k_{i+1}}} \xi \text{ în al doilea subcaz } b). \end{cases}$$

Deoarece însă

$$D^Q_{s^\mu_j} \overline{\underline{\circ}} \begin{cases} \xi\eta \text{ dacă } s^\mu_j \in \mathcal{O}_2 \cup \mathfrak{R}, \\ \xi \text{ dacă } s^\mu_j \in \mathcal{O}_1, \end{cases}$$

unde ξ și η sînt elemente de bază ale sistemului formal, rezultă clar că oricare ar fi simbolul s care intră în cuvîntul Q, D^Q_s conține numai intrări de simboluri din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ și elemente de bază. Se poate acum arăta simplu (recursiv) că dacă ξ, η intră în D^Q_s, atunci ξ, η intră și în D^P_s și reciproc. În mod analog se poate arăta că dacă $s_r \in \mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ intră în D^Q_s, atunci el intră și în D^P_s și reciproc.

Rezultă deci că condiția 3) din definiția echivalenței este îndeplinită pentru cuvintele P și Q.

Pentru a demonstra îndeplinirea celei de-a patra condiții din definiția echivalenței pentru cuvintele P și Q, vom construi un algoritm normal $\mathfrak{T}$ care pornind de la definiția domeniului de acțiune al unui simbol s oarecare din $\mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ care intră în Q va transforma acest cuvînt în cuvîntul compatibil P corespunzător lui astfel ca $P \sim Q$. Algoritmul $\mathfrak{T}$ dă de asemenea o cale de obținere a denotatului cuvîntului Q, care conduce la denotatul cuvîntului P.

Să construim acum un algoritm $\mathfrak{T}$ cu proprietatea că $\mathfrak{T} \llcorner Q \lrcorner \overline{\underline{\circ}} P$ iar $P \sim Q$ în sensul introdus mai sus. Pentru aceasta vom construi un șir de algoritm a cărui compoziție normală ne va da algoritmul căutat $\mathfrak{T}$.

Vom construi în primul rînd un algoritm $\mathfrak{T}_1$ care transformă toate intrările din cuvîntul Q de forma $s\xi\eta$ și $s\xi$ $s \in \mathcal{O} \cup \mathfrak{R}$ iar ξ și η fiind elemente de bază, în cuvintele echivalente cu ele, respectiv $(\xi)s(\eta)$ și $s(\xi)$. Schema acestui algoritm este

$$\mathfrak{T} \begin{cases} s\xi\eta \rightarrow (\xi)\, s(\eta) \quad (s \in O_2 \cup \mathfrak{R},\ \xi, \eta \text{ — elemente de bază}, \\ s\xi \rightarrow s(\xi) \quad (s \in O_1,\ \xi \text{ — element de bază}. \end{cases}$$

În cuvîntul rămas vom schimba toate intrările simbolului $*$ cu simbolul δ, $\delta \rceil \in \mathcal{A}$ $\delta \not\subset \alpha, \beta, \sigma$. Schema acestui algoritm, notat cu $\mathfrak{T}_2$, va fi atunci

$$\mathfrak{T}_2 \{ * \to \delta .$$

Cuvîntului obținut îi vom aplica algoritmul $\mathfrak{T}_3$ care schimbă ultima intrare a simbolului δ cu $*$.

Schema acestui algoritm este următoarea:

$$\mathfrak{T}_3 \left\{ \begin{array}{ll} \rho\xi \to \xi\rho & (\xi \in \mathcal{A} \cup \{\alpha,\beta,\delta\}, \rho \rceil \in \mathcal{A}, \ \rho \not\subset \alpha,\beta, \ \delta, \sigma) \\ \xi\rho \to \xi\tau & (\tau \not\subset \rho, \ \tau \rceil \in \mathcal{A}) \\ \xi\tau \to \tau\xi & (\xi \not\subset \delta) \\ \delta\tau \to \cdot * & \\ \quad \to \rho & \end{array} \right.$$

Cuvîntului obținut îi vom aplica algoritmul $\mathfrak{T}_4$ care va transforma pe rînd toate simbolurile s de ordin $\mu - i$ $(c = 1, 2, \ldots, \mu - 1)$ împreună cu domeniul lor de acțiune în cuvintele echivalente cu ele. Schema algoritmului $\mathfrak{T}_4$ este următoarea:

$$\mathfrak{T}_4 \left\{ \begin{array}{rl} s\sigma * P \to * \delta s\sigma P & (P - \text{cuvînt compatibil în } \mathcal{A}) \\ s\sigma P \to Ps\sigma & \sigma \not\subset \Lambda \text{ sau } \sigma \not\subset \Lambda, \ \sigma \rceil \in \mathcal{A}, \ \sigma \not\subset \alpha,\beta,\gamma,\delta \\ Ps\sigma \to \gamma s(P) & (s \in \mathcal{O}_1, \ \gamma \rceil \in \mathcal{A}, \ \gamma \not\subset \alpha,\beta,\delta) \\ QPs\sigma \to \gamma(Q)s(P) & (\text{dacă } \sigma \not\subset \Lambda) \\ QPs\sigma \to \gamma(P)s(Q) & (P,Q \text{ cuvinte compatibile în } \mathcal{A}) \\ s\alpha\xi * P \to * \delta s\alpha\xi P & (\text{dacă } \sigma \not\subset \Lambda) \\ s\alpha\xi P \to Ps\alpha\xi & \\ Ps\alpha\xi \to \gamma(P)s(\xi) & \\ s\beta\xi * P \to * \delta s\beta\xi P & \\ s\beta\xi P \to Ps\beta\xi & \\ Ps\beta\xi \to \gamma(\xi)s(P) & \\ P * \delta \to * \delta P & \\ * \delta \to * & \\ \gamma \to & \\ \delta * \to * & \\ * \to & \\ \delta \to & \end{array} \right.$$

Se vede acum simplu că algoritmul $\mathfrak{T} \simeq \mathfrak{T}_4 \circ \llcorner \mathfrak{T}_3 \circ \llcorner \mathfrak{T}_2 \circ \mathfrak{T}_1 \lrcorner \lrcorner$ are proprietatea că

$$\mathfrak{T} \llcorner Q \lrcorner \overline{\underline{\circ}} P, \quad P \sim Q$$

P fiind un cuvînt compatibil în sistemul formal, al cărui denotat este acelaşi cu al cuvîntului Q, dacă el există, după cum se vede simplu din definiţia denotatului [5].

Prin urmare între mulţimea $\{P\}$ a cuvintelor compatibile în sistemul formal construit în [5] şi mulţimea $\{Q\}$ a cuvintelor echivalente cu cuvintele mulţimii $\{P\}$ în sensul introdus mai sus, se poate stabili o corespondenţă biunivocă.

Scopul sistemului formal construit în lucrarea [5] şi a algoritmilor de decidere din această lucrare este de a arăta rezolvabilitatea cu ajutorul maşinilor de calcul a unor clase de probleme, care admit o reprezentare sub formă de cuvinte compatibile în sistemul formal construit. Aceste probleme pentru o interpretare corespunzătoare a sistemului formal constituie probleme obişnuite din matematică, cum ar fi de exemplu posibilitatea folosirii maşinii de calcul în cazul problemelor nearitmetice, construirea programelor interpretative la o maşină de calcul, mecanizarea demonstraţiei unor teoreme etc. Într-o lucrare ulterioară, vom preciza şi demonstra rezolvabilitatea acestor clase de probleme în sistemul formal construit.

Primită la radacţie la 25 ianuarie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Edmund C. Berkeley, *Symbolic Logic and Intelligent Machines*. Reinhold Publishing Corporation, New York, 1959.
2. Б. В. Гнеденко, *Элементы программирования.* Государственное изд. физ-матем. литературы, Москва, 1963.
3. А. А. Марков, *Теория алгарифмов.* Труды матем. инст. им. В. А. Стеклова, **XLII**, 1954.
4. Z. Pawlak, *Organization of addressless Computers Working in Parenthesis Notation.* Zeitschr. f. Math.-Logic und Grundlagen d. Math., **9** S. 243–250 (1963).
5. T. Rus. *Asupra unui sistem formal.* I. Studii şi cercetări matematice, **15**, *4* (1964).
6. C. Berge, *Theorie des Graphes et ses applications.* Dunod, Paris, 1958.

$\mathfrak{S}$-TOPOLOGII COMPATIBILE CU STRUCTURA DE SPAŢIU VECTORIAL

DE

MIHAI ŞABAC

Fie E şi F spaţii vectoriale topologice. Vom însemna prin $L(E,F)$ mulţimea aplicaţiilor u liniare şi continue definite pe E cu valori în F. Fie E un spaţiu vectorial şi F un spaţiu vectorial topologic. Vom însemna prin $\mathcal{L}(E,F)$ mulţimea aplicaţiilor u liniare definite pe E cu valori în F. Fie $\mathfrak{S}$ o familie de părţi ale lui E. $\mathfrak{S}$-topologia definită de $\mathfrak{S}$, este topologia definită de sistemul fundamental de vecinătăţi ale originii $O \in \mathcal{L}(E,F)$ de forma:

$$T_0(M,V) = \{u \in \mathcal{L}(E,F) \mid u(M) \subset V\},$$

unde V este o vecinătate a originii lui E, iar $M \in \mathfrak{S}$. Se ştie [1] că este necesar şi suficient pentru ca o $\mathfrak{S}$-topologie să fie compatibilă cu structura de spaţiu vectorial a lui $\mathcal{L}(E,F)$, ca $u(M)$ să fie mărginită în F pentru orice $M \in \mathfrak{S}$ şi $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

În cele ce urmează vom determina o condiţie necesară şi suficientă de compatibilitate în care vor interveni numai proprietăţi ale mulţimilor, din $\mathfrak{S}$ şi vom expune cîteva consecinţe imediate pentru $\mathfrak{S}$-topologii pe $L(E,F)$.

PROPOZIŢIA 1. *Fie E un spaţiu vectorial, F un spaţiu vectorial topologic, u o aplicaţie liniară definită pe E cu valori în F şi $M \subset E$. Necesar şi suficient ca $u(M)$ să fie mărginită în F este ca M să fie absorbită de mulţimile de forma $u^{-1}(V)$, V fiind vecinătate a originii în F.*

Demonstraţie. Condiţia este necesară, deoarece din faptul $u(M)$ mărginită rezultă: pentru orice V există $\lambda > 0$ astfel ca $\lambda u(M) \subset V$ sau $u(\lambda M) \subset V$. Dar $u^{-1}(u(\lambda M)) \supset \lambda M$. Deci $\lambda M \subset u^{-1}(V)$. Condiţia este şi suficientă, deoarece pentru orice V există $\lambda > 0$ astfel ca: $\lambda M \subset u^{-1}(V)$. Dar $u(u^{-1}(V)) \subset V$, iar $u(\lambda M) = \lambda u(M)$, deci $\lambda u(M) \subset V$.

CONSECINŢĂ. *Dacă $u \in L(E,F)$, atunci u este mărginită pe mulţimile mărginite din E.*

Demonstraţia este imediată căci $u^{-1}(V)$ este vecinătate a originii lui E pentru orice V vecinătate a originii lui F.

Propoziţia 1 ne permite să demonstrăm următoarea condiţie necesară şi suficientă de compatibilitate a unei $\mathfrak{S}$-topologii cu structura de spaţiu vectorial a lui $\mathcal{L}(E, F)$:

PROPOZIŢIA 2. *Fie* $\mathfrak{S}$ *o familie de părţi ale lui* E. *Necesar şi suficient ca* $\mathfrak{S}$*-topologia definită de* $\mathfrak{S}$ *să fie compatibilă cu structura de spaţiu vectorial a lui* $\mathcal{L}(E, F)$ *este ca mulţimile din* $\mathfrak{S}$ *să fie mărginite în topologia imagine reciprocă prin aplicaţiile* $u \in \mathcal{L}(E, F)$, *a topologiei lui* F.

Demonstraţie. Necesar şi suficient ca $\mathfrak{S}$-topologia să fie compatibilă cu structura de spaţiu vectorial a lui $\mathcal{L}(E, F)$ este ca $u(M)$ să fie mărginită în F pentru orice $u \in \mathcal{L}(E, F)$ şi orice $M \in \mathfrak{S}$. Din propoziţia 1 rezultă atunci propoziţia 2 demonstrată.

CONSECINŢA 1. *Dacă* E, F *sînt spaţii vectoriale topologice, atunci o* $\mathfrak{S}$*-topologie a lui* $L(E,F)$ *este compatibilă cu structura de spaţiu vectorial dacă şi numai dacă mulţimile din* $\mathfrak{S}$ *sînt mărginite în topologia imagine reciprocă a topologiei din* F *prin aplicaţiile* $u \in L(E,F)$.

CONSECINŢA 2. $\mathfrak{S}$*-topologia cea mai fină pe* $\mathcal{L}(E, F)$ (*respectiv pe* $L(E, F)$) *compatibilă cu structura de spaţiu vectorial se obţine luînd pentru* $\mathfrak{S}$ *familia tuturor părţilor lui* E *mărginite în topologia imagine reciprocă a topologiei din* F *prin aplicaţiile* $u \in \mathcal{L}(E, F)$ (*respectiv* $u \in L(E, F)$).

CONSECINŢA 3. $\mathfrak{S}$*-topologiile introduse pe* $L(E, F)$ *cînd mulţimile din* $\mathfrak{S}$ *sînt mărginite în* E, *sînt compatibile cu structura de spaţiu vectorial a lui* $L(E, F)$.

Următoarea propoziţie enunţată pentru $\mathfrak{S}$-topologii definite de o familie $\mathfrak{S}$ de părţi mărginite în E rămîne evident adevărată pentru $\mathfrak{S}$-topologii compatibile cu structura de spaţiu vectorial a lui $\mathcal{L}(E,F)$; în demonstraţie condiţia de mărginire a mulţimilor din $\mathfrak{S}$ intervine doar pentru a asigura compatibilitatea topologiei cu structura de spaţiu vectorial [1].

PROPOZIŢIA 3. *Pentru ca o mulţime* $H \subset \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E, F)$ *să fie mărginită este necesar şi suficient ca* $\bigcap\limits_{u \in H} u^{-1}(V)$ *să absoarbă toate mulţimile* $M \in \mathfrak{S}$ *pentru orice* V *vecinătate a originii lui* F, *unde* $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E, F)$ *este spaţiul vectorial* $\mathcal{L}(E, F)$ *înzestrat cu o* $\mathfrak{S}$*-topologie compatibilă cu structura de spaţiu vectorial.*

CONSECINŢA 1. *Orice mulţime finită* $H \subset \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E, F)$ *este mărginită căci condiţia de mai sus se transformă atunci în condiţia de compatibilitate a* $\mathfrak{S}$*-topologiei cu structura de spaţiu vectorial al lui* $\mathcal{L}(E, F)$.

CONSECINŢA 2. *Propoziţia 3 rămîne adevărată pentru* $H \subset L_{\mathfrak{S}}(E, F)$, *unde am notat cu* $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$ *spaţiul vectorial topologic obţinut cînd se înzestrează* $L(E, F)$ *cu o* $\mathfrak{S}$*-topologie compatibilă cu structura sa de spaţiu vectorial.*

Fie E un spaţiu vectorial şi F un spaţiu vectorial topologic. Înzestrînd pe E cu topologia cea mai puţin fină pentru care toate aplicaţiile $u \in \mathcal{L}(E, F)$ sînt continue, $\mathcal{L}(E, F)$ devine o mulţime de aplicaţii liniare şi continue pe care o vom nota cu $L^1(E, F)$.

PROPOZIŢIA 4. *Fie* $H \subset L^1(E, F)$ *o mulţime de aplicaţii egal-continue.* H *este mărginită în orice* $\mathfrak{S}$*-topologie compatibilă cu structura de spaţiu vectorial a lui* $L^1(E, F)$.

Demonstraţie. H fiind egal-continuă pentru orice vecinătate V a originii lui F, $\bigcap\limits_{u \in H} u^{-1}(V)$ este vecinătate a originii lui E. Deci $\bigcap\limits_{u \in H} u^{-1}(V)$ absoarbe toate mulţimile din $\mathfrak{S}$, acestea fiind mărginite în topologia cea mai puţin fină pentru care $u \in \mathfrak{L}(E, F)$ sînt continue.

În mod analog toate propoziţiile în care se enunţă proprietăţi ce au loc în $L(E,F)$ rămîn adevărate dacă înlocuim $L(E,F)$ cu $L^1(E, F)$.

Primită la redacţie la 5 februarie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques.* Ch. III, IV, V, Herman, Paris, 1955.

ASUPRA UNEI CLASE DE SPAŢII RIEMANNIENE PARŢIAL PROIECTIVE

DE

V. VODNEV

Un spaţiu A_n cu conexiune afină se numeşte parţial proiectiv de ordinul k şi se notează A_n^k, dacă printre ecuaţiile finite ale liniilor lui autoparalele

$$F_\alpha(x^1,\ldots,x^n;c^1,\ldots,c^{2n-2})=0,\ (\alpha=1,2,\ldots,\ n-1)$$

într-un sistem de coordonate convenabil ales, -k- sînt liniare în raport cu $x^1,\ldots,x^n$. Din acest punct de vedere spaţiile A_n^{n-1} sînt proiectiv euclidiene. Problema obţinerii unor astfel de spaţii în cazul general este dificilă şi nu este rezolvată nici pentru $k=n-2$, adică atunci cînd liniile autoparalele sînt situate în plane bidimensionale. Prof. G. Vrănceanu [1] şi P. Mocanu [2] au dat ecuaţiile diferenţiale pe care trebuie să le satisfacă coeficienţii conexiunii spaţiilor A_n^k, dar aceste ecuaţii fiind destul de complicate nu pot fi puse la baza clasificării spaţiilor parţial proiective. Tot atît de dificilă este şi problema determinării spaţiilor riemanniene parţial proiective V_n^k.

Clasa spaţiilor V_n^{n-2}, care au proprietatea că planele bidimensionale ale geodezicelor trec printr-un punct fix a fost considerată pentru prima dată de F. Schur [3]. Astfel de spaţii au fost cercetate detaliat de V. F. Kagan [4], denumite de el subproiective. Ele au fost cercetate apoi şi de alţi geometri.

În 1938, P. A. Şirokov [5] a găsit spaţiile simetrice conform euclidiene şi a arătat că ele sînt de două tipuri. Pentru cel de-al doilea tip, a dat următoarea formă a metricii :

$$\mathrm{d}s^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}[(\mathrm{d}x^{2i-1^2})-(\mathrm{d}x^{2i})^2]+\varepsilon_p(\mathrm{d}x^p)^2}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{m}[(x^{2i-1^2})-(x^{2i})^2]+\varepsilon_p\,(x^p)^2\right\}+\alpha_i(x^{2i-1}+x^{2i})^2},\ (p=2\,m+1,$$
$$2\,m+2,\ldots,2\,m+n=N;\ \varepsilon_p=\pm 1,\ \ \alpha_i-\text{const.}).\qquad(1)$$

Noi am arătat că grupul de mișcări ale acestor spații nu este semisimplu [6]. Acum vom observa că dacă efectuăm transformarea de coordonate

$$x^{2i-1} \to \frac{x^{2i-1}}{\Delta} + \frac{1}{2},$$

$$x^{2i} \to \frac{x^{2i}}{\Delta} - \frac{1}{2},$$

$$x^{p} \to \frac{x^{p}}{\Delta},$$

unde

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} [(x^{2i-1})^2 - (x^{2i})^2] + \varepsilon_p (x^p)^2$$

în noile coordonate metrica (1) are forma

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} [(\mathrm{d}x^{2i-1})^2 - (\mathrm{d}x^{2i})^2] + \varepsilon_p (\mathrm{d}x^p)^2}{\left[1 + \sum\limits_{i=1}^{m} (x^{2i-1} + x^{2i})\right]^2 + \alpha_i (x^{2i-1} + x^{2i})^2}.$$

În acest sistem de coordonate, ecuațiile diferențiale ale liniilor geodezice sînt

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{2i-1}}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{d}x^{2i-1}}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}\ln f}{\mathrm{d}s} + \varepsilon\, [\sigma + \alpha^i (x^{2i-1} + x^{2i})] = 0, \qquad (2_1)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{2i}}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{d}x^{2i}}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}\ln f}{\mathrm{d}s} - \varepsilon\, [\sigma + \alpha^i (x^{2i-1} + x^{2i})] = 0, \qquad (2_2)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{p}}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{d}x^{p}}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}\ln f}{\mathrm{d}s} = 0, \qquad (2_3)$$

unde

$$f = \left[1 + \sum_{i=1}^{m} (x^{2i-1} + x^{2i})\right]^2 + \alpha_i (x^{2i-1} + x^{2i})^2,$$

$$\sigma = 1 + \sum_{j=1}^{m} (x^{2i-1} + x^{2i}), \quad \alpha^i = \alpha_i,$$

$$\varepsilon = g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s} = \pm 1{,}0, \; (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N)$$

este vectorul tangentei.

Sumînd ecuaţiile (2_1) şi (2_2), vom obţine

$$\frac{\mathrm{d}^2 (x^{2i-1} + x^{2i})}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{d}(x^{2i-1} + x^{2i})}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d} \ln f}{\mathrm{d}s} = 0.$$

De aici, şi din ecuaţiile (2_3), vom obţine $n + m - 1$ integrale liniare de forma

$$\begin{aligned} &x^{2i-1} + x^{2i} = a^i x^{2m+1} + b^i, \\ &x^q = a^q x^{2m+1} + b^q, \ (q = 2m + 2, \ldots, 2 m + n). \end{aligned} \tag{3}$$

Efectuînd transformarea de coordonate

$$\begin{aligned} &x^{2i-1} + x^{2i} \to x^i, \\ &x^{2i-1} - x^{2i} \to x^{m+i}, \\ &x^p \to x^p, \end{aligned}$$

din (3) conchidem că aceste spaţii sînt spaţii subproiective generalizate în sensul prof. G. Vrănceanu [1]. Se numesc astfel spaţiile cu conexiune afină A_n, şi în particular spaţiile riemanniene V_n, care au geodezicele situate în varietăţi plane E_{k+1} $(1 \leqslant k \leqslant n - 2)$, trecînd printr-un plan fix E_{k-1}, situat la distanţa finită sau la infinit. În particular, în cazul considerat mai sus, pentru $m=1$, obţinem spaţiile simetrice subproiective. Din (2_i) rezultă, de asemenea, că geodezicele izotrope $(\varepsilon = 0)$ sînt drepte, pentru că în acest caz toate cele $N - 1$ integrale ale geodezicelor vor fi liniare.

În 1943, P. A. Şirokov ([7], articolul a fost publicat în 1954) a arătat că singurul spaţiu simetric ireductibil cu metrică nedefinită de clasă 1 este spaţiul avînd metrica

$$\mathrm{d}s^2 = 2 \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}x^i \, \mathrm{d}x^{m+i} + (\varepsilon_i \, x^i \, \mathrm{d}x^i)^2, \quad (\varepsilon_i = \pm 1). \tag{4}$$

Acest spaţiu este un spaţiu V_{2m}^{2m-2} [8] dar nu este subproiectiv. Spaţiile V_n^{n-2} care nu sînt subproiective, pe care le cunoaştem, sînt : cel considerat în 1949 de B. A. Rozenfeld [9] şi numit de el spaţiul perechilor nule ; spaţiile $V_{2m}(\lambda)$ obţinute în 1954 de prof. G. Vrănceanu [10] ; spaţiile lui E. Cartan V_{4p}^{*} (faptul că aceste spaţii sînt de acest tip a fost demonstrat de C. Teleman în 1955 [11]) ; spaţiile lui D. V. Vedeneapin [12], obţinute în acelaşi an ; spaţiul limită al spaţiului perechilor nule, considerat de A. S. Fedenko [13]

$$\mathrm{d}s^2 = 2 \sum_{\alpha=1}^{2m} \mathrm{d}x^\alpha \, \mathrm{d}x^{2m+\alpha} + \left[\sum_{i=1}^{m} (x^{2i-1} \, \mathrm{d}x^{2i} - x^{2i} \, \mathrm{d}x^{2i-1}) \right]^2. \tag{5}$$

În lucrarea [8] sînt considerate spaţiile limită ale spaţiilor riemanniene cu signatură nulă, a căror metrică are forma

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = 2 \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}x^i \, \mathrm{d}x^{m+i} + a_{ijkl} \, x^i \, x^j \, \mathrm{d}x^k \, \mathrm{d}x^l, \ (i, j, k, l = 1,2, \ldots, m ; \\ a_{ijkl} = \text{const.}). \end{aligned} \tag{6}$$

Spațiile (4) și (5) sînt cazuri particulare ale lor. Vom demonstra că pentru orice a_{ijkl} aceste spații sînt spații V_{2m}^{2m-3}. Componentele conexiunii diferite de zero ale metricii (6) au forma

$$\left|\begin{matrix} m+i \\ j\,k \end{matrix}\right| = (a_{lkij} + a_{ljik} - a_{lijk})\, x^l .$$

Deoarece $\left|\begin{matrix} i \\ \alpha\,\beta \end{matrix}\right| = 0$ $(\alpha, \beta = 1,2,\ldots, 2m)$, din ecuațiile diferențiale pentru determinarea geodezicelor

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}s^2} + \left|\begin{matrix} \alpha \\ \beta\,\gamma \end{matrix}\right| \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}s} = 0$$

va rezulta că

$$x^i = a^i s + b^i, \tag{7}$$

de unde rezultă că restul ecuațiilor vor fi de forma

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{m+i}}{\mathrm{d}s^2} = p^i s + q^i,$$

unde constantele p^i, q^i depind de a_{ijkl}, a^i, b^i. Eliminînd din ultimele ecuații pe s, obținem relații de forma

$$\lambda^t \frac{\mathrm{d}^2 x^{m+t}}{\mathrm{d}s^2} - \lambda^1 \frac{\mathrm{d}^2 x^{m+1}}{\mathrm{d}s^2} = \mu^t, \quad (t = 2,\ldots, m),$$

sau încă

$$\mu^2 \left(\lambda r \frac{\mathrm{d}^2 x^{m+r}}{\mathrm{d}s^2} - \lambda^1 \frac{\mathrm{d}^2 x^{m+1}}{\mathrm{d}s^2}\right) = \mu r \left(\lambda^2 \frac{\mathrm{d}^2 x^{m+2}}{\mathrm{d}s^2} - \right.$$
$$\left. - \lambda^1 \frac{\mathrm{d}^2 x^{m+1}}{\mathrm{d}s^2}\right) \quad (r = 3,\ldots, m).$$

Integrînd aceste relații, obținem

$$\mu^2 (\lambda^r x^{m+r} - \lambda^1 x^{m+1}) = \mu^r (\lambda^2 x^{m+2} - \lambda^1 x^{m+1}) + c^r s + d^r. \tag{8}$$

Eliminînd din (7) și (8) pe s, vom obține $2m-3$ integrale liniare.

În 1960, prof. G. Vrănceanu [14] a considerat problema determinării metricii spațiilor subproiective generalizate. Vom observa că unele din aceste rezultate au fost obținute de el încă din anul 1947 [1], și de asemenea, din alt punct de vedere, de către, Ia. L. Șapiro [15].

Spațiile V_{2m} subproiective generalizate care au varietăți nule de ordin maxim se împart în două clase, metrica spațiilor din una din aceste clase poate fi adusă la forma :

$$\mathrm{d}s^2 = 2 \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^{m+i} + \varphi \left(\sum_{i=1}^{m} x^{m+i}\, \mathrm{d}x^i\right)^2 + b_{jk}\, \mathrm{d}x^j\, \mathrm{d}x^k, \tag{9}$$

unde $j, k = 1, 2, \ldots, m$, φ, b_{jk} sînt funcţii de x^i (am schimbat rolul variabilelor x^i şi x^{m-i} în comparaţie cu lucrarea [14]). Pentru orice φ şi b_{jk} aceste spaţii sînt spaţii V_{2m}^{m-1}. Impunînd funcţiilor φ, b_{jk} anumite condiţii, se poate obţine un număr suplimentar de integrale liniare şi, în general vorbind, spaţiile vor înceta să fie subproiective generalizate. Este evident, că pentru $\varphi = 0$ şi b_{jk}, polinoame de gradul doi, se obţin spaţiile (4), (5), (6). Este uşor de arătat că dacă b_{jk} sînt polinoame de gradul p, $(1 < p < m)$, atunci spaţiile vor fi de tipul V_{2m}^{m-p-1} (pentru $p=1$ vom obţine spaţiul euclidian).

În lucrarea [16] se consideră spaţiul V_{2m}^{2m-3} avînd metrica

$$ds^2 = 2\sum_{p=1}^{2m} dx^p\, dx^{2m+p} + (\varepsilon_p\, x^p\, dx^p)^2 + \left[\sum_{i=1}^{m} (x^{2i-1}\, dx^{2i} - x^{2i}\, dx^{2i-1})\right]^2, \quad (10)$$

şi care este simetric, şi aparţine clasei de spaţii (9). Grupul lui de mişcări nu este semisimplu. Componenta simplă este izomorfă :

1) pentru $\varepsilon_p = 1$ cu grupul matricilor unitare de ordinul m ;

2) pentru $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_{2k} = 1$, $\varepsilon_{2k+1} = \ldots = \varepsilon_{2m} = -1$ cu grupul matricilor pseudounitare de indice k de ordinul m ;

3) pentru $\varepsilon_{2i-1} = 1$, $\varepsilon_{2i} = -1$ cu grupul matricelor reale unimodulare de ordinul m.

Vom considera acum cazul $b_{jk} = 0$. Ecuaţiile geodezicelor vor fi :

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + A x^i = 0, \quad (11_1)$$

$$\frac{d^2 x^{m+i}}{ds^2} + B\,\frac{dx^{m+i}}{ds} + C\, x^{m+i} + D^i = 0, \quad (11_2)$$

în care A, B, C, D^i au forma

$$A = \varphi p, \quad B = \varphi q, \quad C = \varphi r + \varphi^2 q^2 + q\,\frac{d\varphi}{ds},$$

$$D^i = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\, q^2,$$

unde

$$p = -\sum_{k=1}^{m} x^{m+k}\,\frac{dx^{m+k}}{ds}, \quad q = \sum_{k=1}^{m} x^{m+k}\,\frac{dx^k}{ds}, \quad r = \sum_{k=1}^{m} \frac{dx^k}{ds}\cdot\frac{dx^{m+k}}{ds}.$$

Luînd în (11_1) o anumită ecuaţie, de exemplu ecuaţia pentru $i = 1$, şi eliminînd din ea şi din ecuaţia ce corespunde indicilor l, $(l = 2, \ldots, m)$, pe A, vom obţine

$$\frac{d \ln \frac{dx^l}{ds}}{ds} = \frac{d \ln \frac{dx^1}{ds}}{ds}.$$

Integrînd aceste ecuații, avem relațiile

$$x^l = a^l\, x^1 + b^l, \tag{12}$$

care ne dau $m-1$ integrale liniare ale geodezicelor. Numărul maxim de integrale liniare din (11_2), după cum este ușor de văzut, se obține dacă luăm toți $D^i = 0$, ceea ce este echivalent cu faptul că $\varphi = a$ — const. (a este o constantă neesențială care poate fi luată egală cu unitatea). Folosind ecuațiile corespunzătoare indicilor $i = 1$ și $i = 2$ și eliminînd cantitățile B, C, vom obține

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}^2\, x^{m+l}}{\mathrm{d}s^2} & \dfrac{\mathrm{d}x^{m+l}}{\mathrm{d}s} & x^{m+l} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\, x^{m+1}}{\mathrm{d}s^2} & \dfrac{\mathrm{d}x^{m+1}}{\mathrm{d}s} & x^{m+1} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\, x^{m+2}}{\mathrm{d}s^2} & \dfrac{\mathrm{d}x^{m+2}}{\mathrm{d}s} & x^{m+2} \end{vmatrix} = 0, \quad (l = 3, 4, \ldots, m),$$

de unde rezultă

$$x^{m+l} = a^{m+l}\, x^{m+1} + b^{m+l}\, x^{m+2},$$

unde a^{m+l}, b^{m+l} sînt constante. Împreună cu (12), ecuația precedentă ne va da $2m-3$ integrale liniare.

Să căutăm grupul de mișcări ale spațiului cu metrica

$$\mathrm{d}s^2 = 2 \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^{m+i} + \left(\sum_{i=1}^{m} x^{m+i}\, \mathrm{d}x^i\right)^2 \tag{13}$$

Ecuațiile lui Killing

$$\xi^\gamma \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + g_{\alpha\gamma} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\beta} + g_{\beta\gamma} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\alpha} = 0$$

vor fi în cazul nostru

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^{m+j}} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^{m+i}} = 0, \tag{14_1}$$

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^{m+j}}{\partial x^{m+i}} + x^{m+j} \sum_{k=1}^{m} x^{m+k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^{m+i}} = 0, \tag{14_2}$$

$$x^{m+j}\, \xi^{m+i} + x^{m+i}\, \xi^{m+j} + \frac{\partial \xi^{m+i}}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^{m+j}}{\partial x^i} +$$

$$+ x^{m+i} \sum_{k=1}^{m} x^{m+k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + x^{m+j} \sum_{k=1}^{m} x^{m+k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = 0. \tag{14_3}$$

Din (14_1) avem

$$\xi^i = \varphi^i_j (x^k)\, x^{m+j} + \varphi^i (x^k), \tag{15}$$

unde

$$\varphi^i_j (x^k) = - \varphi^j_i (x^k). \tag{16}$$

Introducînd pe (15) în (14_2), folosind (16) şi condiţiile

$$\frac{\partial^2 \xi^{m+i}}{\partial x^{m+j}\, \partial x^{m+k}} = \frac{\partial^2 \xi^{m+i}}{\partial x^{m+k}\, \partial x^{m+j}}$$

vom găsi că

$$\varphi^i_j (x^k) = 0,$$

adică

$$\xi^i = \varphi^i (x^k).$$

Atunci din (14_2) avem

$$\xi^{m+i} = - \frac{\partial \varphi_i (x^k)}{\partial x^i}\, x^{m+j} + \psi^i (x^k)\,,\ (\varphi_j = \varphi^j).$$

Înlocuind această relaţie în (14_3), trebuie să avem identitatea

$$x^{m+i} \psi^j (x^k) + x^{m+j} \psi^i (x^k) - 2\, \frac{\partial^2 \varphi_l (x^k)}{\partial x^i\, \partial x^j}\, x^{m+l} + \frac{\partial \psi^i (x^k)}{\partial x^j} + \frac{\partial \psi^j (x^k)}{\partial x^i} \equiv 0,$$

de unde conchidem că

$$\frac{\partial \psi^i (x^k)}{\partial x^j} + \frac{\partial \psi^j (x^k)}{\partial x^i} = 0, \quad (i,\ j - \text{oricare}),$$

$$2\, \frac{\partial^2 \varphi^i (x^k)}{\partial x^i\, \partial x^j} - \psi^j (x^k) = 0, \quad (i \neq j),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^i (x^k)}{(\partial x^i)^2} - \psi^i (x^k) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^l (x^k)}{\partial x^i\, \partial x^j} = 0, \ (\text{pentru } l \neq i,\ j).$$

Folosind aceste relaţii, obţinem pentru ξ^α următoarele expresii :

$$\xi^i = \frac{1}{2}\, x^i\, c_j\, x^j + d^i_j\, x^j + a^i,\ (c_j = c^j),$$

$$\xi^{m+i} = - \frac{1}{2}\, x^{m+i}\, c_j\, x^j - \frac{1}{2}\, c^i \sum_{j=1}^{m} x^j\, x^{m+j} - \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}^j_i\, x^{m+j} + c^i.$$

Atunci operatorii transformărilor infinitezimale vor fi:

$$X_i = p_i, X_{ij} = x^j p_i - x^{m+i} p_{m+j},$$

$$X_{m+i} = \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} x^k x^{m+k}\right) p_{m+i} - \frac{1}{2} x^i x^{m+k} p_{m+k} + \frac{1}{2} x^i x^k p_k,$$

unde

$$p_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Aşadar, obţinem un grup tranzitiv de ordinul $r = m^2 + 2m$. Vom cerceta structura acestui grup. Avem:

$$[X_i X_j] = 0, \ [X_i X_{m+j}] = \frac{1}{2} X_{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_{k=1}^{m} X_{kk},$$

$$[X_i X_{jk}] = \delta_{ik} X_j, \quad [X_{m+i} X_{m+j}] = 0,$$

$$[X_{m+i} X_{jk}] = - \delta_{ij} X_{m+k}, \ [X_{ij} X_{kl}] = \delta_{li} X_{kj} - \delta_{kj} X_{il}.$$

Deci, grupul este nerezolubil. Cum reiese din rezultatele lui A. S. Fedenko [17], acest grup este simplu, iar spaţiul însăşi se identifică cu spaţiul perechilor nule.

Vom considera încă spaţiile din clasa spaţiilor (9) care admit un număr suplimentar de integrale liniare şi anume

$$ds^2 = 2 \sum_{i=1}^{m} dx^i dx^{m+i} + f(x^{l+1}, \ldots, x^m) \varepsilon_p (dx^p)^2, \ (p=1, 2, \ldots, l \leqslant \leqslant m-1, \ \varepsilon_p = \pm 1). \tag{17}$$

În acest caz vom obţine $m + l - 1$ integrale liniare în comparaţie cu $m-1$ în cazul general (9). Un interes mai mare reprezintă cazul $l = m-1$. Atunci avem spaţiile cu geodezicele plane.

Aşadar, vom considera spaţiile

$$ds^2 = 2 \sum_{i=1}^{m} dx^i dx^{m+i} + f(x^m) \varepsilon_p (dx^p)^2, (p = 1, 2, \ldots, m-1), \tag{18}$$

şi vom studia grupul de mişcări ale acestor spaţii. Putem presupune că $f(x^m)$ nu conţine termeni de gradul întîi şi zero. Într-adevăr, fie

$$f(x^m) = f^* (x^m) + a x^m + b,$$

unde $f^{*}(x^{m})$ nu conţine termeni de gradul întîi şi zero. Atunci efectuînd transformarea de coordonate

$$x^{m+p} \rightarrow x^{m+p} - \frac{1}{2} b\, \varepsilon^{p} x^{p} - \frac{1}{2} a\, x^{m} \varepsilon^{p} x^{p}.$$

$$x^{2m} \rightarrow x^{2m} + \frac{a}{4} \varepsilon_{p} (x^{p})^{2},$$

$$x^{i} \rightarrow x^{i},$$

vom obţine

$$ds^{2} = 2 \sum_{i=1}^{m} dx^{i}\, dx^{m+i} + f^{*}(x^{m}) \varepsilon_{p} (dx^{p})^{2}.$$

Ecuaţiile lui Killing au forma

$$\delta_{pq}\, \varepsilon_{p} f'(x^{m})\, \xi^{m} + f(x^{m}) \left[\varepsilon^{p} \frac{\delta \xi^{p}}{\partial x^{q}} + \varepsilon^{q} \frac{\partial \xi^{q}}{\partial x^{p}} \right] + \frac{\partial \xi^{m+p}}{\partial x^{q}} + \frac{\partial \xi^{m+q}}{\partial x^{p}} = 0, \qquad (19_{1})$$

$$f(x^{m})\, \varepsilon^{p} \frac{\partial \xi^{p}}{\partial x^{m}} + \frac{\partial \xi^{m+p}}{\partial x^{m}} + \frac{\partial \xi^{2m}}{\partial x^{p}} = 0, \qquad (19_{2})$$

$$f(x^{m})\, \varepsilon^{p} \frac{\partial \xi^{p}}{\partial x^{m+i}} + \frac{\partial \xi^{m+p}}{\partial x^{m+i}} + \frac{\partial \xi^{i}}{\partial x^{p}} = 0, \qquad (19_{3})$$

$$\frac{\partial \xi^{2m}}{\partial x^{m+i}} + \frac{\partial \xi^{i}}{\partial x^{m}} = 0, \qquad (19_{4})$$

$$\frac{\partial \xi^{2m}}{\partial x^{m}} = 0, \qquad (19_{5})$$

$$\frac{\partial \xi^{i}}{\partial x^{m+j}} + \frac{\partial \xi^{j}}{\partial x^{m+i}} = 0, \qquad \begin{matrix} (i,\ j,\ k,\ l = 1,\ 2, \ldots, m; \\ p,\ q,\ r = 1,\ 2, \ldots, m-1). \end{matrix} \qquad (19_{6})$$

Din (19_{6}) şi (19_{5}) rezultă

$$\xi^{i} = \varphi_{j}^{i}(x^{k})\, x^{m+j} + \varphi^{i}(x^{k}), \qquad (20)$$

$$\varphi_{j}^{i}(x^{k}) = - \varphi_{j}^{i}(x^{k}), \qquad (21)$$

$$\xi^{2m} = \xi^{2m}(x^{p}, x^{m+i}). \qquad (22)$$

Derivînd ecuaţiile (19_{4})în raport cu x^{m} şi introducînd rezultatul în (20), obţinem

$$\frac{\partial \varphi_{j}^{i}(x^{k})}{(\partial x^{m})^{2}} x^{m+j} + \frac{\partial \varphi^{i}(x^{k})}{(\partial x^{m})^{2}} \equiv 0,$$

de unde rezultă că

$$\frac{\partial \varphi_j^i (x^k)}{(\partial x^m)^2} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi^i (x^k)}{(\partial x^m)^2} = 0,$$

adică

$$\varphi_j^i (x^k) = \psi_j^i (x^p)\, x^m + \chi_j^i (x^p),$$

$$\varphi^i (x^k) = \psi^i (x^p)\, x^m + \chi^i (x^p).$$

Din (19_4), folosind aceste condiții, avem

$$\frac{\partial \xi^{2m}}{\partial x^{m+i}} = - \psi_j^i (x^p)\, x^{m+j} - \psi^i (x^p). \tag{23}$$

Derivînd în raport cu x^{m+k}, avînd în vedere că

$$\frac{\partial^2 \xi^{2m}}{\partial x^{m+i}\, \partial x^{m+k}} = \frac{\partial^2 \xi^{2m}}{\partial x^{m+k}\, \partial x^{m+i}}$$

şi utilizînd condițiile (21), obținem

$$\psi_j^i (x^p) = 0.$$

În acest mod vom avea

$$\xi^i = \chi_j^i (x^p)\, x^{m+j} + \psi^i (x^p)\, x^m + \chi^i (x^p),$$

iar integrînd (23) obținem

$$\xi^{2m} = - \psi_k (x^p)\, x^{m+k} + \varphi^{2m} (x^p).$$

Analog, din (19_3) se poate arăta că $\chi_j^i = c_j^i$ — const. şi se poate exprima ξ^{m+p} în felul următor :

$$\xi^{m+p} = - f(x^m)\, \varepsilon^p\, c_k^p\, x^{m+k} - \frac{\partial \psi_k (x^q)}{\partial x^p}\, x^{m+k} x^m -$$

$$- \frac{\partial \chi_k (x^q)}{\partial x^p}\, x^{m+k} + \varphi^{m+p} (x^k).$$

Folosind acum (19_2) şi presupunînd că $f'(x^m) \neq 0$, deci excluzînd cazul euclidian, este uşor de arătat că

$$\psi^k (x^q) = c^k = \text{const.},\ c_j^i = 0.$$

Aşadar, avem, înaintea folosirii ecuațiilor (19_1) :

$$\begin{aligned} &\xi^i = c^i\, x^m + \chi^i (x^q), \\ &\xi^{m+p} = - \frac{\partial \chi_k (x^q)}{\partial x^p}\, x^{m+k} - \varepsilon^p\, c^p \int f (x^m)\, \mathrm{d}x^m - \frac{\partial \varphi^{2m}(x^q)}{\partial x^p}\, x^m + \psi^{m+p} (x^q), \\ &\xi^{2m} = - c_k\, x^{m+k} + \varphi^{2m} (x^q). \end{aligned} \tag{24}$$

Vom considera în prealabil spaţiile (18) care sînt simetrice. Le vom obţine dacă presupunem că $f(x^m)$ este un polinom de gradul doi în x^m şi numai în acest caz. Aşa că putem considera că $f(x^m) = (x^m)^2$ (coeficientul lui x^m nu este esenţial şi-l vom lua egal cu unitatea).

Introducînd (24) în (19_1), separat pentru cazul $p \neq q$ şi $p = q$, vom obţine

$$(x^m)^2 \left[\varepsilon^p \frac{\partial \chi^p (x^r)}{\partial x^q} + \varepsilon^q \frac{\partial \chi^q (x^r)}{\partial x^p} \right] - 2 \frac{\partial^2 \chi_k (x^r)}{\partial x^p \, \partial x^q} x^{m+k} - \tag{25_1}$$

$$- 2 \frac{\partial^2 \varphi^{2m} (x^r)}{\partial x^p \, \partial x^q} x^m + \frac{\partial \psi^{m+p} (x^r)}{\partial x^q} + \frac{\partial \psi^{m+q} (x^r)}{\partial x^p} = 0,$$

$$x^m [c^m x^m + \chi^m (x^r)] + (x^m)^2 \frac{\partial \chi^p (x^r)}{\partial x^p} - \varepsilon^p \frac{\partial^2 \chi_k (x^r)}{(\partial x^p)^2} x^{m+k} - \tag{25_2}$$

$$- \varepsilon^p \frac{\partial^2 \varphi^{2m} (x^r)}{(\partial x^p)^2} x^m + \varepsilon^p \frac{\partial \psi^{m+p} (x^r)}{\partial x^p} = 0.$$

Din aceste formule rezultă imediat :

1) $$\frac{\partial^2 \chi^k (x^r)}{\partial x^p \, \partial x^q} = 0, \quad (p,\ q - \text{oarecare}), \quad \varepsilon^p \frac{\partial \chi^p (x^r)}{\partial x^q} +$$

$$+ \varepsilon^q \frac{\partial \chi^q (x^r)}{\partial x^p} = 0, \, (p \neq q)$$

adică

$$\chi^k (x^r) = \alpha^k_p x^p + \alpha^k, \tag{26}$$

unde constantele α^p_q satisfac relaţiile

$$\varepsilon^p \alpha^p_q + \varepsilon^q \alpha^q_p = 0, \quad (p \neq q), \tag{27}$$

2) $$\frac{\partial \psi^{m+p} (x^r)}{\partial x^q} + \frac{\partial \psi^{m+q} (x^r)}{\partial x^p} = 0, \, (p,\ q - \text{oarecare}),$$

deci

$$\psi^{m+p} (x^r) = a^p_q x^q + b^p, \tag{28}$$

unde constantele a^p_q satisfac relaţiile

$$a^p_q = - a^q_p, \, (p \neq q), \; a^p_p = 0, \tag{29}$$

3) $$\frac{\partial^2 \varphi^{2m} (x^r)}{\partial x^p \, \partial x^q} = 0, \quad (p \neq q),$$

adică

$$\varphi^{2m} (x^r) = \sum_{p=1}^{m-1} t^p (x^p), \tag{30}$$

unde prin $t^p (x^p)$ înţelegem că t^p depinde doar de x^p.

Ţinînd seama de acestea, ecuaţiile (25_2) vor căpăta forma

$$c^m (x^m)^2 + x^m (\alpha_q^m x^q + \alpha^m) + (x^m)^2 \alpha_p^p - \varepsilon^p \frac{d^2 t^p (x^p)}{(dx^p)^2} x^+ \equiv 0, \tag{31}$$

de unde rezultă că

$$\alpha_p^m = 0, \text{ toţi } \alpha_p^p = - c^m$$

şi

$$t^p (x^p) = \frac{1}{2} \alpha^m \varepsilon^p (x^p)^2 + n^p x^p + v^p.$$

Folosind (26) — (31), expresiile (24) vor căpăta următoarea expresie finală:

$$\begin{aligned} \xi^p &= c^p x^m + \alpha_q^p x^q - c^m x^p + \alpha^p, \\ \xi^m &= c^m x^m + \alpha^m, \\ \xi^{m+p} &= \varepsilon^p \varepsilon_q \alpha_q^p x^{m+q} + c^m x^{m+p} - \frac{1}{3} c^p \varepsilon^p (x^m)^3 - \\ &\quad - \varepsilon^p \alpha^m x^p x^m - n^p x^m + a_q^p x^q + b^p, \\ \xi^{2m} &= - c_k x^{m+k} + \frac{1}{2} \alpha^m \varepsilon_p (x^p)^2 + n_p x^p + k, \end{aligned}$$

unde

$$k = \sum_{p=1}^{m-1} v^p, \quad n_p = n^p.$$

Operatorii corespunzători vor fi:

$$\begin{aligned} X_q &= p_q, \quad X_{m+i} = p_{m+i}, \\ X_m &= p_m + \frac{1}{2} \varepsilon_p (x^p)^2 p_{2m} - x^m \varepsilon_q x^q p_{m+q}, \\ X_{rq} &= x_q p_r - \varepsilon^r \varepsilon_q x^r p_q + \varepsilon^q \varepsilon_r x^{m+q} p_{m+r} - x^{m+r} p_{m+q}, \\ Y_q &= x^m p_q - x^{m+q} p_{2m} - \frac{1}{3} \varepsilon_q (x^m)^3 p_{m+q}, \\ Y_m &= - x^q p_q + x^m p_m - x^{2m} p_{2m} + x^{m+q} p_{m+q}, \\ Z_q &= x^q p_{2m} - x^m p_{m+q}, \quad Z_{rq} = x^q p_{m+r} - x^r p_{m+q}. \end{aligned} \tag{32}$$

Deci, obţinem un grup tranzitiv de ordinul $r = m^2 + m + 1$. Observăm că atunci cînd am folosit (19_1), am considerat $m > 2$. Pentru $m = 2$ obţinem $r = 8$. Acest caz este studiat în lucrarea [12].

Vom cerceta structura grupului. Operatorii diferiți de zero vor fi :

$$[X_p X_m] = \varepsilon_p Z_p, \ [X_p X_{rq}] = \delta_{pq} X_r - \varepsilon_r \varepsilon_q \delta_{pr} X_q,$$

$$[X_p Y_m] = - X_p, \ [X_p Z_q] = \delta_{pq} X_{2m}, \ [X_m Y_p] = X_p,$$

$$[X_p Z_{rq}] = \delta_{pq} X_{m+r} - \delta_{pr} X_{m+q}, \ [X_m Y_m] = X_m,$$

$$[X_m Z_p] = - X_{m+p}, \ [X_{m+p} Y_m] = X_{m+p}, \ [X_{m+p} Y_q] = - \delta_{pq} X_{2m},$$

$$[X_{m+p} X_{rq}] = \varepsilon_r \varepsilon_q \delta_{pq} X_{m+r} - \delta_{pr} X_{m+q}, \ [X_{2m} Y_m] = - X_{2m},$$

$$[X_{pq} Y_r] = \delta_{pr} \varepsilon_p \varepsilon_q Y_q - \delta_{qr} Y_p, \ [Y_p Y_m] = - 2Y_p,$$

$$[X_{pq} Z_r] = \delta_{pr} Z_q - \varepsilon_p \varepsilon_q \delta_{qr} Z_p, \ [Y_p Z_{rq}] = \delta_{pr} Z_q - \delta_{pq} Z_r,$$

$$[X_{pq} Z_{rs}] = \delta_{ps} Z_{rq} + \delta_{pr} Z_{qs} + \varepsilon_p \varepsilon_q \delta_{sq} Z_{pr} + \varepsilon_p \varepsilon_q \delta_{qr} Z_{sp},$$

$$[X_{pq} X_{rs}] = \delta_{ps} X_{rq} - \delta_{qr} X_{ps} + \varepsilon_p \varepsilon_q \delta_{pr} X_{qs} - \varepsilon_p \varepsilon_q \delta_{qs} X_{rp},$$

$$[Y_m Z_{pq}] = - 2Z_{pq}.$$

De aici rezultă că grupul nu este nici rezolubil (pentru $m > 3$), nici semisimplu. O descompunere a lui după schema Levi-Malțev este : operatorii X_{pq} dau operatorii subgrupului simplu, care este izomorf cu grupul de matrici pseudoortogonale, iar ceilalți operatori formează algebra Lie a divizorului normal rezolubil maximal.

Dacă se consideră că $f(x^m)$ e o funcție arbitrară, atunci din (24) şi (19_1) găsim că grupul de mişcări va fi intranzitiv de ordinul $r = m^2 + m - 1$. Operatorii transformărilor infinitezimale se obțin din (32) scoțînd operatorii X_m şi Y_m, iar în loc de Y_q luînd

$$Y_q = x^m p_q - x^{m+q} p_{2m} - \varepsilon_q \int f(x^m) \, \mathrm{d}x^m \, p_{m+q}.$$

Punînd

$$f(x^m) = \mathrm{e}^{x^m},$$

obținem un exemplu de spațiu (18) care are un grup tranzitiv de mişcări de ordinul $r = m^2 + m$.

Aşadar prezintă un interes deosebit studiul mai aprofundat al spațiilor obținute de prof. G. Vrănceanu din punctul de vedere al grupurilor de mişcări şi al numărului de integrale prime liniare.

Primită la redacție la 13 februarie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. G. VRĂNCEANU, *Sur les espaces partiellement projectifs*. Bull. Math. Soc. Roum. Sci., **48**, *1–2*, 43–64.
2. P. MOCANU, *Spații parțial proiective*. Studii şi cercetări matematice, **VI**, *3–4* (1955).
3. F. SCHUR, *Über den Zusammenhang der Räume constanten Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen*. Math. Ann., **37**, 537–567 (1886).

4. V. F. KAGAN, *Über eine Eiweiterung des Begriffes von projektiven Räumen un dem zugenhörigen Absolut.* Труды семинара по векторному и тензорному анализу, Москва, 1933, выпуск I, 12—101.

5. П.А. ШИРОКОВ, *Конформно-евклидовы симметрические пространства.* Известия Казанского Физико-математического общества, 3 серия, **II** (1938).

6. А. С. ФЕДЕНКО, В. Т. ВОДНЕВ, *Группы движений конформно-евклидовых симметрических пространств.* Доклады АН БССР, **III**, *6*, 233—236.

7. П.А. ШИРОКОВ, *Симметрические пространства I класса.* Ученые записки Казанского университета, **114**, 8 (1954).

8. А.С. ФЕДЕНКО, *Метод предельного перехода в теории римановых пространств.* Известия АН БССР, *2*, 1958, серия физико-математических наук, 17—25 (на белорусском языке).

9. Б.А. РОЗЕНФЕЛЬД, *Об унитарных и расслоенных пространствах*, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, выпуск VII, 1949.

10. C. VRĂNCEANU, *Asupra unei clase de spaţii riemanniene omogene.* Studii şi cercetări matematice, **V**, *1—2*, 173—223 (1954).

11. C. TELEMAN, *Asupra unor spaţii simetrice.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, **VII**, *4* (1955).

12. Д.В. ВЕДЕНЯПИН, *О некоторых (n-2)-кратно проективных пространствах.* Кандидатская диссертация, МГУ, 1955; Научные доклады высшей школы, физико-математические науки, *6*, 119—126 (1958).

13. А.С. ФЕДЕНКО, *Предельные пространства.* Успехи математических наук, **XII**, выпуск 3 (75), 235—240 (1957).

14. Г. ВРЭНЧАНУ, *Метрика частично-проективных римановых пространств.* Rev. de de math. pures et applig., **5, 2,** 311—227 (1960).

15. Я. Л. ШАПИРО, *Геодезические поля направлений и проективные системы путей.* Математический сборник, **36(78)**: *1*, 123—148(1955).

16. В.Т. ВОДНЕВ, А.С. ФЕДЕНКО, *О некоторых симметрических частично-проективных пространствах.* Доклады АН БССР (в печати).

17. А.С. ФЕДЕНКО, *Некоторые классы симметрических пространств.* Кандидатская диссертация, МГУ, 1955.

ASUPRA SOLUȚIEI PROBLEMEI MIȘCĂRILOR DE TIP POISEUILLE, ÎN ANUMITE CAZURI PARTICULARE

DE

ANA DUCARU

1. Se știe [1] că în cadrul mișcărilor de tip Poiseuille, se consideră problema scurgerii staționare a unui fluid vîscos incompresibil printr-un tub cilindric, în absența forțelor masice. Sistemul de ecuații al lui Navier-Stokes se reduce în acest caz la o ecuație de tip Poisson, prin care sîntem conduși la o problemă Dirichlet cu date pe frontiera secțiunii transversale a tubului.

Vom considera cazul în care secțiunea transversală a tubului cilindric se reprezintă conform printr-o funcție rațională pe interiorul unui cerc.

Vom utiliza astfel metoda elaborată de Caius Iacob [2] în rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru cerc în cazul datelor raționale.

2. Să studiem mișcarea de tip Poiseuille într-un tub cilindric cu generatoarele paralele cu axa Oz, C fiind frontiera secțiunii sale transversale și $w(x, y)$ componenta vitezei fluidului vîscos după axa Oz. Funcția $w(x, y)$ satisface ecuația de tip Poisson:

$$\Delta w = \frac{k}{\mu} \text{ iar pe frontiera } C \text{ condiția :} \tag{1}$$

$$w|C = 0$$

Am notat : $k = -\frac{p_0 - p_1}{l} < 0$, p_0 fiind presiunea în secțiunea $z = 0$ a tubului, p_1 presiunea în secțiunea $z = l > 0$, l lungimea tubului considerat, iar μ o constantă specifică fluidului.

Soluția ecuației (1) poate fi scrisă sub forma :

$$w(x, y) = \frac{k}{4\mu}(x^2 + y^2) + w_1(x, y),$$

unde $\frac{k}{4\mu}(x^2 + y^2) = w_0(x, y)$ este o soluție particulară a ecuației (1), iar $w_1(x, y)$ este soluția problemei lui Dirichlet :

$$\Delta w_1 = 0$$

$$w_1|_C = -\frac{k}{4\mu}(x^2 + y^2) = -\frac{k}{4\mu} z\bar{z}, \text{ cu } z = x + iy. \tag{2}$$

Debitul de fluid prin secțiunea Ω după cum se știe [1] este dat de relația :

$$Q = -\frac{k\rho}{4\mu}\iint_{\Omega}(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\rho}{4}\int_C (x^2 + y^2)\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s. \tag{3}$$

3. Să rezolvăm problema pusă mai sus prin metoda amintită.

Fie $z = \omega(Z)$ reprezentarea conformă rațională a domeniului Ω de frontieră C pe domeniul $\Delta(|Z|<a)$ de frontieră $\Gamma\,(|Z| = a)$, $Z = X + iY$.

Dacă $t_1(x, y)$ este o funcție armonic conjugată a funcției $w_1(x, y)$, atunci $g(z) = w_1(x, y) + it_1(x, y)$ va fi o funcție olomorfă în domeniul Ω, iar $g[\omega(Z)] = G(Z) = W(X, Y) + iT(X, Y)$ va fi olomorfă în domeniul Δ.

Problema (2) devine :

$$\Delta W = 0 \tag{4}$$

$$W|_\Gamma = -\frac{k}{4\mu}\,\omega(Z)\,\overline{\omega(a^2\bar{Z}^{-1})}\Big|_\Gamma = -\frac{k}{4\mu}M(Z)\Big|_\Gamma,$$

unde $M(Z) = \omega(Z)\,\overline{\omega(a^2\bar{Z}^{-1})}$ este o funcție rațională de Z, reală pe frontiera Γ.

Notînd cu $P(Z)$ partea principală a funcției $M(Z)$ relativă la singularitățile sale polare din Δ, putem scrie [2] :

$$M(Z) = P(Z) + \overline{P(a^2\bar{Z}^{-1})} + k'$$

Atunci, [2], funcția olomorfă $G(Z)$ este dată de relația :

$$G(Z) = -\frac{k}{2\mu}\overline{P(a^2\bar{Z}^{-1})} + k' + ik''$$

k' fiind o constantă reală ce se determină ușor, iar k'' o constantă reală arbitrară.

Rezultă :

$$W = \mathrm{Re}\,G(Z) = \mathrm{Re}\left\{-\frac{k}{2\mu}\overline{P(a^2\bar{Z}^{-1})} + k'\right\}. \tag{5}$$

Folosind observațiile din [3] și [4] vom transforma și expresia debitului. Relația (3) poate fi scrisă și sub forma :

$$Q = -\frac{k\rho}{4\mu}\iint_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\rho}{4}\int_{C}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}t_1.$$

Avînd în vedere transformările făcute se obține :

$$Q = -\frac{k\rho}{4\mu}\cdot\frac{1}{8i}\int_{\Gamma}\varpi^2(a^2\bar{Z}^{-1})\,\mathrm{d}\,\omega^2(Z) + \frac{\rho}{4}\,\mathrm{Im}\int_{\Gamma}M(Z)\,G'(Z)\,\mathrm{d}Z.$$

Ținînd seama de olomorfia anumitor termeni și integrînd prin părți a doua integrală, relația debitului devine, în sfîrșit :

$$Q = -\frac{k\rho}{4\mu}\cdot\frac{1}{8i}\int_{\Gamma}\varpi^2(a^2\bar{Z}^{-1})\,\mathrm{d}\,\omega^2(Z) + \frac{k\rho}{4\mu}\,\mathrm{Im}\int_{\Gamma}\overline{P(a^2\bar{Z}^{-1})}\,P'(Z)\,\mathrm{d}Z. \qquad (6)$$

Se observă în formula (6) pentru calculul debitului aceeași simplificare esențială ca și în calculul rigidității la torsiune [3], anume exprimarea debitului numai cu ajutorul funcțiilor $\omega(Z)$ și $P(Z)$.

4. Vom aplica rezultatele la următorul exemplu :

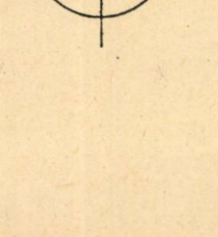
Să considerăm mișcarea de tip Poiseuille a unui fluid vîscos, într-un tub cilindric de lungime l, avînd drept secțiune transversală Ω domeniul mărginit de lemniscata lui Booth.

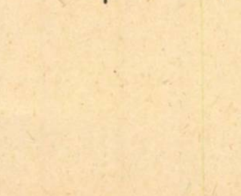
Se știe, (5), că curba respectivă se obține prin inversarea unei elipse cu respectarea centrului.

Funcția :

$$z = \frac{2\,c\,\mathrm{e}^{k}Z}{Z^2 + c\,\mathrm{e}^{2k}} \quad \text{cu} \quad c = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} > 0, \qquad (7)$$

a și b fiind semiaxele elipsei iar k dat de relația $\operatorname{th} k = \frac{b}{a}$, $k > 0$, transformă domeniul Ω pe interiorul cercului unitate (figură).





Pentru $k \to 0$ secțiunea Ω diferă foarte puțin de figura formată de două cercuri tangente.

Vom scrie (7) sub forma :

$$z = \omega(Z) = \frac{nZ}{Z^2 + m}, \quad m > 1, \; n > 0. \tag{8}$$

În acest caz, calculele dau următoarele rezultate :

$$M(Z) = \frac{n^2 Z^2}{(1 + mZ^2)(Z^2 + m^2)}$$

$$P(Z) = -\frac{n^2}{m(m^2-1)\left(Z^2 + \dfrac{1}{m}\right)}, \quad \overline{P(\overline{Z})^{-1}} = -$$

$$-\frac{n^2 Z^2}{(m^2-1)(m+Z^2)}, \quad k' = \frac{n^2}{m^2-1}.$$

Prin urmare

$$G(Z) = \frac{k}{2\mu} \frac{n^2 Z^2}{(m^2-1)(Z^2+m)} + \frac{n^2}{m^2-1} + ik''.$$

Conform relației (6) pentru debit obținem :

$$Q = \frac{(p_0 - p_1)\,\rho n^4 \pi}{16\, l\, \mu} \cdot \frac{m(20\, m^2 + 2 - m^4)}{(m^2-1)^4}.$$

Primită la redacție la 25 februarie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. CAIUS IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides.* Bucarest-Paris, 1959.
2. CAIUS IACOB, *Rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru cerc în unele cazuri particulare.* Com. Acad. R.P.R., **12**, *4*, 381–385 (1962).
3. CAIUS IACOB, *Asupra problemei plane a lui Dirichlet pentru o clasă particulară de domenii. Aplicație la problema lui Saint-Venant.* Com. Acad. R.P.R., **12**, *10*, 1071–1075 (1962).
4. N. MUSHELIȘVILI, *Cîteva probleme fundamentale ale teoriei mat. a elasticității.* I.S.R.S., 1956, vol. III.
5. I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity.* 1956, p. 157.

DESPRE APROXIMAREA UNOR MIŞCĂRI PLANE PE SUB BARAJE

DE

ELENA UNGUREANU

1. Studiul mişcării staţionare plane a apelor subterane pe sub baraje ocupă un loc important în hidrodinamica subterană. Pentru rezolvarea diverselor probleme au fost date o serie de metode de aproximaţie dintre care amintim metoda fragmentelor a lui Pavlovski (citat de [1], pag. 128), metoda reprezentărilor conforme succesive [2], metoda domeniilor majorante a lui Polojii [3].

O altă metodă aplicată de asemenea în cazul mişcării pe sub baraje [4], şi care poate fi folosită pentru oricare alte tipuri de probleme plane, este metoda semiinversă [5]. În lucrarea de faţă vom aplica această metodă pentru cîteva mişcări pe sub baraje, urmărind în special calculul debitului, care va fi comparat cu debitul obţinut în cazul frontierelor neperturbate. Cazuri asemănătoare se pot trata în acelaşi mod.

2. Să considerăm o secţiune verticală printr-o construcţie hidrotehnică de lăţime $2\,l$, cu diferenţa de nivele între amonte şi aval egală cu H (fig. 1).

Mediul poros omogen caracterizat prin coeficientul de filtraţie k, ocupă un domeniu $\mathfrak{D}$ mărginit de frontierele impermeabile Γ şi $BC\,\gamma_1 DE$ şi de frontierele de alimentare AB şi $E\gamma_2 FG$.

Mişcarea apei pe sub baraj şi debitul Q se determină prin rezolvarea următoarei probleme la limită : să se găsească potenţialul complex $f(z) = \varphi + i\psi$ al mişcării, ştiind că

$$\begin{aligned} \psi &= -Q \text{ pe } \Gamma, \\ \varphi &= -kH \text{ pe } AB, \\ \psi &= 0 \text{ pe } BC\gamma_1 DE, \\ \varphi &= 0 \text{ pe } E\gamma_2 FG, \end{aligned} \tag{1}$$

Domeniului $\mathcal{D}$ din planul fizic $z = x + iy$ îi corespunde în planul potențialului complex un dreptunghi de laturi kH și Q care, prin transformarea

$$f = \frac{kH}{2K} F(\arcsin \zeta,\ \varkappa) - \frac{kH}{2}, \tag{2}$$

este reprezentat conform pe semiplanul inferior al planului complex ζ în care punctele A, B, E, G au abscisele $-1/\varkappa,\ -1,\ 1,\ 1/\varkappa$ ([1], pag. 91).

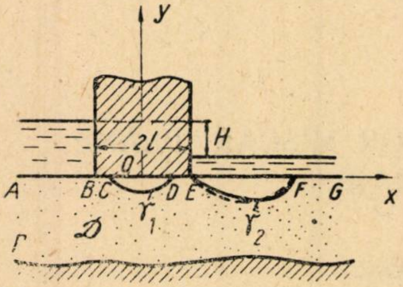


Fig. 1

Pentru debit se găsește expresia

$$Q = \frac{kH}{2} \frac{K'}{K}, \tag{3}$$

unde K și K' sînt integralele eliptice de specia I de module $\varkappa$ și $\varkappa'$ $(= \sqrt{1 - \varkappa^2})$, care depind de forma geometrică a domeniului $\mathcal{D}$ din planul z.

Vom căuta ca pe același semiplan să reprezentăm conform și domeniul din planul fizic z, folosind metoda semiinversă.

3. Mai întîi fie arcul Γ o dreaptă, arcul γ_1 segmentul de dreaptă CD și γ_2 de o formă încă nedeterminată. Fără să ținem seama deocamdată de arcul γ_2, vom reprezenta banda întreagă pe semiplanul inferior al planului complex t_1 prin transformarea

$$z = \frac{T}{\pi} \ln \frac{1 + \varkappa^* t_1}{1 - \varkappa^* t_1}, \qquad \left(\varkappa^* = \operatorname{th} \frac{\pi l}{2T} \right), \tag{4}$$

unde T este grosimea benzii. În planul t_1 presupunem că arcul γ_2 s-a transformat într-o semielipsă de semiaxe a și b. Forma lui în planul z se găsește cu ajutorul lui (4).

Din planul t_1 trecem la un plan t_2 în care γ_2 devine o semicircumferință și apoi trecem la semiplanul inferior din planul ζ cu ajutorul transformărilor

$$\begin{gathered} t_1 = 1 + a + a t_2 + b \sqrt{t_2^2 - 1}\,, \\ t_2 = \frac{\alpha \zeta + \beta}{\zeta + \gamma}, \end{gathered} \tag{5}$$

unde

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \frac{(1 + b_1)(a_1 + g_1) - (1 - b_1)(g_1 - a_1)\varkappa}{(g_1 - a_1)\varkappa + (1 + b_1)}, \\ \beta &= \frac{1}{2} \frac{(a_1 + g_1)(1 - b_1) - 4b_1 - (1 + b_1)(g_1 - a_1)\varkappa}{(g_1 - a_1)\varkappa + (1 + b_1)}, \\ \gamma &= - \frac{1 + a_1 + g_1 - b_1}{(g_1 - a_1)\varkappa + (1 + b_1)}; \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

$$\varkappa = \frac{\left[\sqrt{(1+g_1)(b_1-a_1)} - \sqrt{(-a_1-1)(g_1-b_1)}\right]^2}{(g_1-a_1)(-1-b_1)} \tag{7}$$

cu a_1, b_1, g_1 abscisele punctelor A, B, G din planul t_2 şi egale cu

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-a\left(\frac{1}{\varkappa^*}+1+a\right)+b\sqrt{\left(\frac{1}{\varkappa^*}+1+a\right)^2-a^2+b^2}}{a^2-b^2}, \\ b_1 &= \frac{-a(2+a)+b\sqrt{(2+a)^2-a^2+b^2}}{a^2-b^2}, \\ g_1 &= \frac{a\left(\frac{1}{\varkappa^*}-1-a\right)-b\sqrt{\left(\frac{1}{\varkappa^*}-1-a\right)^2-a^2+b^2}}{a^2-b^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Astfel cu (2), (4) şi (5) avem soluţia problemei sub formă parametrică. Debitul Q dat de (3) în care modulul $\varkappa$ este dat de (7), depinde de forma geometrică a domeniului din planul fizic şi anume de l, T, a, b.

Ne vom fixa asupra cazului cînd $a = 1$, $\varkappa^* = 0{,}20$, ceea ce revine că în planul fizic $\frac{l}{T} \approx \frac{1}{8}$. Pentru diferite valori ale raportului $\frac{b}{l}$ s-a trasat graficul pentru debitul Q (fig. 2).

Se verifică şi aici că dacă mărim frontiera de alimentare prin introducerea arcului γ_2, debitul creşte.

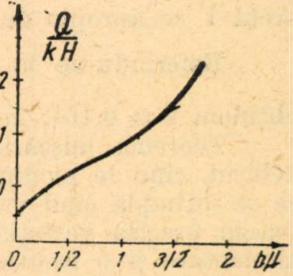


Fig. 2

Forma arcului γ_2 este chiar cea trasată în figura 1, care diferă foarte puţin de o semielipsă.

Calculînd viteza, se obţine în punctul E o valoare finită $\left(= 1{,}94\,\frac{k\pi H}{T}\right)$, spre deosebire de cazul benzii întregi.

4. Luăm acum un caz asemănător celui din paragraful precedent şi anume cînd γ_1 se reduce tot la segmentul de dreaptă CD, arcul γ_2 este o semielipsă de semiaxe a şi b şi arcul Γ are o formă nedeterminată.

Pentru a putea face reprezentarea conformă pe semiplanul $\operatorname{Im} \zeta < 0$, vom reprezenta mai întîi domeniul mărginit de axa reală şi arcul γ_2 pe semiplanul inferior al planului complex ajutător t_1 prin formula

$$z = l + a + at_1 + b\sqrt{t_1^2 - 1}. \tag{9}$$

Să presupunem că, în planul t_1, arcul Γ s-a transformat într-o dreaptă paralelă cu axa reală, astfel încît domeniul nostru ocupă în acest plan o bandă de grosime T'.

La planul ζ vom trece prin transformările

$$t_1 = \frac{T'}{\pi} \ln \frac{1 + \varkappa^{**} t_2}{1 - \varkappa^{**} t_2}, \quad \left(\varkappa^{**} = \operatorname{th} \frac{\pi}{2T'} \right)$$
$$t_2 = \frac{\alpha \zeta + \beta}{\zeta + \gamma}, \tag{10}$$

unde α, β, γ, $\varkappa$ au aceleași expresii din (6), (7), dar cu

$$a_1 = -\frac{1}{\varkappa^{**}}, \ b_1 = \frac{1}{\varkappa^{**}} \operatorname{th} \left[\frac{\pi}{2T'} \cdot \frac{-a(2l + a) + b\sqrt{(2l+a)^2 - a^2 + b^2}}{a^2 - b^2} \right],$$
$$g_1 = \frac{1}{\varkappa^{**}}. \tag{11}$$

În planul z, Γ este curbat în jos în dreptul arcului γ_2, distanța maximă de axa reală fiind egală cu $aT' + b\sqrt{T'^2 + 1}$, iar la infinit cu $T_\infty = T'(a + b)$. Se observă că cele două distanțe diferă puțin între ele dacă b este mic sau T' foarte mare și deci aproximarea făcută pentru arcul Γ se apropie de cazul cînd el ar fi o dreaptă.

Referindu-ne la același raport $\frac{l}{T} \approx \frac{1}{8}$ și pentru $a = l$, $b = \frac{l}{2}$, obținem $\varkappa = 0{,}161$, iar $Q = 1{,}03\ kH$.

Teorema mișcării punctelor frontieră [3] ne spune cum variază debitul, cînd se modifică un arc al frontierei, însă nu ne poate preciza ce se întîmplă cînd variază mai multe arce. Aici, prin metoda folosită, putem preciza variația lui Q cînd se modifică simultan o frontieră de alimentare și o frontieră impermeabilă.

5. Un caz mai interesant este acela în care talpa barajului nu mai este o dreaptă, deoarece permite aplicarea mai largă a metodei domeniilor majorante.

Să luăm arcul γ_1 simetric față de axa Oy, unde $\gamma_D = -\gamma_C = a$ și $\gamma|_{x=0} = -ib$, arcul γ_2 segmentul de dreaptă EF, iar Γ o dreaptă la distanța T de axa reală.

Cu transformarea (4) trecem la planul t_1 în care banda corespunde semiplanului inferior. Arcul γ_1 e presupus a fi o semielipsă de semiaxe a' și b'. De aici trecem la domeniul din planul ζ prin

$$t_1 = a' g_1 \zeta + b' \sqrt{g_1^2 \zeta^2 - 1}, \tag{12}$$

cu $\varkappa = \frac{g_1}{a_1}$, unde

$$g_1 = \frac{a' - b'\sqrt{1 - a'^2 + b'^2}}{a'^2 - b'^2}, \quad a_1 = \frac{a' - b'\sqrt{1 - a'^2 \varkappa^{*2} + b' \varkappa^{*2}}}{(a'^2 - b'^2)\varkappa^{*}},$$

$\varkappa^*$ fiind cel dat de (4).

Pentru cazul $\frac{l}{T_\infty} = \frac{1}{8}$, $a = l\,(a' = 1)$, s-a trasat un grafic pentru debit în funcţie de diferite valori ale raportului $\frac{b}{l}$ (fig. 3).

Se observă că debitul scade cu cît frontiera impermeabilă formată de talpa barajului se măreşte şi înaintează în mediul poros.

În planul fizic, arcul γ_1 este foarte apropiat de o semielipsă puţin turtită.

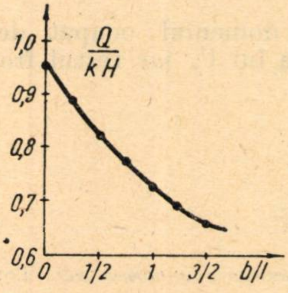


Fig. 3

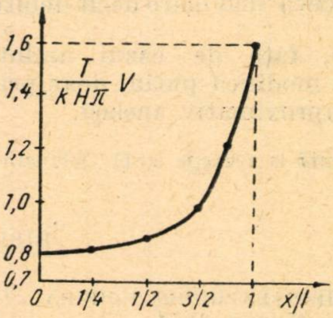


Fig. 4

În figura 4 s-a trasat graficul pentru modulul vitezei pe conturul γ_1 în funcţie de abscisele punctelor de pe acest contur, pentru valoarea $b = \frac{l}{2}$. În punctele B şi E s-a obţinut o valoare finită.

Este important a şti pentru ce grosime a stratului, forma tălpii barajului influenţează puţin asupra debitului. Cînd talpa barajului este o semielipsă cu semiaxele l şi $\frac{l}{2}$, pentru raportul $\frac{2l}{T} = \frac{1}{50}$, debitul diferă cu 7,3 % faţă de cel din cazul clasic al benzii întregi.

6. Cazul tratat în paragraful 5 poate fi considerat puţin modificat şi anume arcul γ_1 din planul fizic are de la început o formă bine determinată — o semielipsă cu semiaxe a şi b — şi frontiera Γ o formă oarecare, apropiată de cea a unei drepte. Vom urma acelaşi procedeu ca în paragraful 4. Formulele care ne duc la semiplanul $\operatorname{Im} \zeta < 0$ sînt

$$z = a a_1 t_1 + b \sqrt{a_1^2 t_1^2 - 1},$$

$$t_1 = \frac{\pi}{T'} \ln \frac{1 + \varkappa \zeta}{1 - \varkappa \zeta}, \quad \left(\varkappa = \operatorname{th} \frac{\pi}{2T'}\right) \tag{13}$$

cu $a_1 = \frac{al - b\sqrt{l^2 - a^2 + b^2}}{a^2 - b^2}$.

Revenind la planul z, găsim forma lui Γ, care se apropie de o dreaptă $T_{\max} = T|_{x=0} = aT' + b\sqrt{T'^2 + 1}$, iar $T_{\min} = T|_{x\to\infty} = T'\ (a + b)$.

Pentru a ilustra cum se schimbă debitul, vom lua ca şi pînă acum $\frac{l}{T_\infty} = \frac{1}{8}$, $a = l$, $b = \frac{l}{2}$ şi obţinem

$$Q = 0{,}83\ kH,$$

valoare ceva mai mare decît debitul din cazul precedent tot pentru $b = \frac{l}{2}$, deoarece, faţă de cazul amintit, aici domeniul ocupat de mediul poros se modifică puţin, doar prin variaţia lui Γ, iar restul frontierelor rămîne aproximativ acelaşi.

Primită la redacţie la 11 februarie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. П. Я. Полубаринова-Кочина, *Теория движения грунтовых вод.* Гостехиздат, Москва, 1952.
2. П.Ф. Фильчаков, *Метод последовательного отображения спунтов.* ДАН СССР, **78**, *3*, 413 (1951).
3. Г.Н. Положий, *Метод движения граничных точек и мажорантных областей в теории фильтрации.* Украинский Математический Журнал, **V**, *4*, 380 (1953).
4. Шт. И. Георгицэ, *Применение одного полуобратного метода при решении задачи фильтрации под гидротехническими сооружениями.* Украинский Математический Журнал, **XIV**, *4*, 362 (1962).
5. St. I. Gheorghitza, *A semi-inverse method in plane hidrodynamics.* Archiwum Mechaniki Stosowanej, **XI**, 681 (1959).

ASUPRA q-DERIVABILITĂŢII ŞI q-INTEGRABILITĂŢII FUNCŢIILOR ALEATOARE

DE

I. SĂCUIU

În această notă introducem noţiunile de q-derivabilitate şi q-integrabilitate cu ajutorul q-convergenţei introduse în [1] şi dăm unele teoreme referitoare la funcţiile aleatoare oarecare q-derivabile şi q-integrabile.

1. Fie $\{\Omega, K, P\}$ un cîmp borelian de probabilitate iar ξ o variabilă aleatoare definită pe acest cîmp. Pentru fiecare $k \in N^* = \{1, 2, \ldots\}$ vom folosi următoarele notaţii : dacă $\xi \geqslant 0$, punem

$$[\xi]_k(\omega) = \begin{cases} \xi(\omega) & \text{dacă } \xi(\omega) \leqslant k \\ k & \text{dacă } \xi(\omega) > k \end{cases}$$

dacă ξ este o variabilă aleatoare oarecare, punem

$$[\xi]_k = [\xi^+]_k - [\xi^-]_k,$$

unde ξ^+ şi ξ^- au semnificaţia obişnuită ; dacă $\xi = \xi_1 + i\,\xi_2$ este o variabilă aleatoare complexă, punem

$$[\xi]_k = [\xi_1]_k + i\,[\xi_2]_k.$$

În [1] s-au introdus următoarele definiţii :

DEFINIŢIA 1. *Şirul de variabile aleatoare* $(\xi_n)_{n \in N^*}$ *q-converge către variabila aleatoare* ξ *dacă*

$$\lim_{n \to \infty} \| [\xi_n]_k - [\xi]_k \| = 0\ ^{1)}, \quad k \in N^*$$

şi scriem $q - \lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = \xi$.

---

[1] Norma este cea din $L^2\ (\Omega,\ K,\ P)$.

DEFINIŢIA 2. *Funcţia aleatoare* $\xi(t)$[2] *este q-continuă în punctul* $t_0 \in T$ *dacă*

$$\lim_{t\to t_0} \| [\xi(t)]_k - [\xi(t_0)]_k \| = 0, \quad k \in N^*,$$

şi scriem

$$q - \lim_{t\to t_0} \xi(t) = \xi(t_0).$$

Între convergenţa în probabilitate şi q-convergenţa introdusă în [1] există o strînsă legătură. Ea este dată de

TEOREMA 1. *Şirul de variabile aleatoare* $(\xi_n)_{n\in N^*}$ *q-converge dacă şi numai dacă converge în probabilitate*[3].

Demonstraţie. Vom presupune că şirul de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n\in N^*}$ este format din variabile aleatoare pozitive; cazul general se demonstrează analog.

Fie $\varepsilon > 0$; constatăm imediat că are loc incluziunea

$$\{\omega : \xi(\omega) < k - \varepsilon\} \cap \{\omega : |[\xi_n]_k(\omega) - [\xi]_k(\omega)| < \varepsilon\} \subset \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\},$$

sau încă

$$\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\} \subset \{\omega : |[\xi_n]_k(\omega) - [\xi]_k(\omega)| \geqslant \varepsilon\} \cup \{\omega : \xi(\omega) \geqslant k - \varepsilon\}.$$

În virtutea proprietăţii de monotonie a probabilităţii, obţinem

$$P(\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant P(\{\omega : |[\xi_n]_k(\omega) -$$
$$- [\xi]_k(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) + P(\{\omega : \xi(\omega) \geqslant k - \varepsilon\}).$$

Să alegem un $\delta > 0$ astfel încît

$$P(\{\omega : |[\xi_n]_k(\omega) - [\xi]_k(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{M_2(|[\xi_n]_k - [\xi]_k|)}{\varepsilon^2} < \frac{\delta}{2};$$

pentru acelaşi $\delta > 0$, fie $k_0 \in N^*$ astfel încît

$$P(\{\omega : \xi(\omega) \geqslant k_0 - \varepsilon\}) < \frac{\delta}{2}.$$

Aşadar, pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $\delta > 0$, există $N(\varepsilon, \delta, k_0)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon, \delta, k_0)$ să avem

$$P(\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) < \delta$$

adică şirul $(\xi_n)_{n\in N^*}$ converge în probabilitate către ξ.

---

[2] Aici este vorba despre funcţii aleatoare definite pe intervalul $T = [a, b] \subset R$; pentru simplificarea scrierii omitem argumentul $\omega \in \Omega$.

[3] Acest rezultat a fost enunţat fără demonstraţie într-o notă de subsol în [1], p. 1098; demonstraţia care urmează ne-a fost sugerată de R. Cristescu.

Reciproc, să presupunem că pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $\delta > 0$ există $N(\varepsilon, \delta)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon, \delta)$ să avem

$$P(\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) < \delta.$$

Pentru orice $k \in N^*$ avem

$$\| [\xi_n]_k - [\xi]_k \|^2 = \int_{\Omega} |[\xi_n]_k(\omega) - [\xi]_k(\omega)| \, \mathrm{d}P(\omega) = \int_{\{\omega : |[\xi_n]_k(\omega) - [\xi]_k(\omega)| < \varepsilon} |[\xi_n]_k(\omega) -$$

$$- [\xi]_k(\omega)| \, \mathrm{d}P(\omega) + \int_{\{\omega : |[\xi_n]_k(\omega) - [\xi]_k(\omega)| \geqslant \varepsilon\}} |[\xi_n]_k(\omega) - [\xi]_k(\omega)| \, \mathrm{d}P(\omega) \leqslant \varepsilon^2 + 4k^2 \int_{\{\omega : |[\xi_n]_k - [\xi]_k| \geqslant \varepsilon\}} \mathrm{d}P(\omega) =$$

$$= \varepsilon^2 + 4k^2 P(\{\omega : |[\xi_n]_k(\omega) - [\xi]_k|(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \varepsilon^2 +$$

$$+ 4k^2 P(\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\})$$

deoarece

$$|[\xi_n]_k(\omega) - [\xi]_k(\omega)|^2 \leqslant 4k^2$$

şi

$$\{\omega : |[\xi_n]_k(\omega) - [\xi]_k(\omega)| \geqslant \varepsilon\} \subset \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}, \quad k \in N^*.$$

Deci pentru orice $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ există $N(\varepsilon, \delta)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon, \delta)$ să avem

$$\| [\xi_n]_k - [\xi]_k \|^2 \leqslant \varepsilon^2 + 4k^2 \delta, \quad k \in N^*$$

adică şirul $(\xi_n)_{n \in N^*}$ q-converge.

2. Cu ajutorul q-convergenţei, vom introduce acum noţiunea de q-derivată a unei funcţii aleatoare.

DEFINIŢIA 3. *Funcţia aleatoare* $\xi(t)$ *este* q-derivabilă *în punctul* $t_0 \in T$ *dacă există o variabilă aleatoare notată* $\xi'(t_0)$ *astfel încît*

$$\lim_{t \to t_0} \left\| \frac{[\xi(t)]_k - [\xi(t_0)]_k}{t - t_0} - [\xi'(t_0)]_k \right\| = 0, \quad k \in N^*$$

variabila aleatoare $\xi'(t_0)$ *o vom numi* q-derivata *funcţiei aleatoare* $\xi(t)$ *în punctul* t_0 *şi o vom nota cu* $\dfrac{\mathrm{d}_q \xi(t)}{\mathrm{d}t}$.

Dacă $\xi(t)$ este q-derivabilă în orice punct $t \in T$, atunci $\xi'(t)$ este o nouă funcţie aleatoare definită pe T.

Se ştie [2] că derivabilitatea în medie de orice ordin a unei funcţii aleatoare, atrage după sine derivabilitatea în probabilitate a funcţiei aleatoare considerate.

Pentru derivabilitatea în probabilitate au loc următoarele afirmaţii [3].

PROPOZIŢIA 1. *Dacă* ξ'_1 *și* ξ'_2 *sînt derivate în probabilitate ale funcției aleatoare* $\xi(t)$ *în punctul* t_0 *atunci*

$$P(\{\omega : \xi'_1(t_0, \omega) \neq \xi'_2(t_0, \omega)\}) = 0.$$

TEOREMA 2. *Dacă funcția aleatoare* $\xi(t)$ *este derivabilă în probabilitate în punctul* $t_0 \in T$, *atunci* $\xi(t)$ *este continuă în probabilitate în punctul* $t_0 \in T$.

Propoziția 1 și teorema 2 de mai sus, enunțate în mod corespunzător cu ajutorul q-derivabilității, se demonstrează destul de ușor și nu insistăm asupra lor.

Fie acum ξ și η două variabile aleatoare și

$$C_{kl}^{\xi\eta} = M([\xi]_k \overline{[\eta]_l}),\ k, l \in N^*$$

corelațiile introduse în [1]; în mod analog, dacă $\xi(t)$ și $\eta(t)$ sînt două funcții aleatoare, fie

$$C_{kl}^{\xi\eta}(s, t) = M([\xi(s)]_k \overline{[\eta(t)]_l}),\ k,\ l \in N^*$$

funcțiile de corelație introduse în [1].

Cu ajutorul funcțiilor de corelație $C_{kl}^{\xi\xi}(s, t), k, l, \in N^*$ ale funcției aleatoare $\xi(t)$ putem da o condiție necesară și suficientă pentru existența q-derivatei funcției aleatoare în punctul $t_0 \in T$.

Înainte de aceasta să enunțăm și să demonstrăm adecvat q-convergenței o propoziție bine cunoscută în cazul convergenței în medie de ordinul doi, anume

PROPOZIŢIA 2. *Condiția necesară și suficientă ca* $\xi_{\lambda,k}(t)$ *să conveargă în medie de ordinul doi către* $\xi_k(t)$ *pentru fiecare* $k \in N^*$, *este ca să existe* $\lim\limits_{\lambda,\lambda' \to 0} M(\xi_{\lambda,k}(t) \overline{\xi_{\lambda',l}(t)})$ *pentru fiecare* $k, l \in N^*$, *în plus dacă există limita de mai sus, atunci*

$$\lim_{\lambda,\lambda' \to 0} M(\xi_{\lambda,k}(t) \overline{\xi_{\lambda',l}(t)}) = M(\xi_k(t) \overline{\xi_k(t)}).$$

Demonstrație. Nu diferă cu nimic de demonstrația cunoscută în cazul clasic [2]; necesitatea rezultă din următoarea inegalitate:

$$|M(\xi_{\lambda,k}(t) \overline{\xi_{\lambda',l}(t)}) - M(\xi_k(t) \overline{\xi_l(t)})| \leqslant$$
$$\leqslant \| \xi_{\lambda,k}(t) - \xi_k(t) \| \cdot \| \xi_{\lambda',l}(t) - \xi_l(t) \| + \| \xi_k(t) \| \cdot \| \xi_{\lambda',l}(t) - \xi_l(t) \| +$$
$$+ \| \xi_{\lambda,k}(t) - \xi_k(t) \| \cdot \| \xi_l(t) \|,\ k, l \in N^*.$$

Pentru a demonstra suficiența pornim de la egalitatea

$$M_2(\xi_{\lambda,k}(t) - \xi_{\lambda',k}(t)) = M(\xi_{\lambda,k}(t) \overline{\xi_{\lambda,k}(t)}) - M(\xi_{\lambda,k}(t) \overline{\xi_{\lambda',k}(t)}) -$$
$$- M(\xi_{\lambda',k}(t) \overline{\xi_{\lambda,k}(t)}) + M(\xi_{\lambda',k}(t) \overline{\xi_{\lambda',k}(t)}),\ k \in N^*.$$

Trecînd la limită pentru $\lambda, \lambda' \to 0$, membrul al doilea tinde la zero; deoarece $L_2(\Omega, K, P)$ este un spaţiu metric complet, rezultă suficienţa şi cu aceasta propoziţia 2 este demonstrată.

Se ştie [3] că pentru funcţia reală h definită pe $R \times R$ derivata a doua generalizată în punctul (s_0, t_0) este dată de expresia

$$D_2\, h\,(s_0, t_0) = \lim_{\substack{s \to s_0 \\ t \to t_0}} \frac{h\,(s, t) - h(s_0, t) - h(s, t_0) + h\,(s_0, t_0)}{(s - s_0)\,(t - t_0)}$$

dacă această limită există.

Putem da acum o condiţie necesară şi suficientă de existenţă a q-derivatei unei funcţii aleatoare, care diferă de cele clasice [2], [3].

TEOREMA 3. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca q-derivata funcţiei aleatoare $\xi(t)$ să existe în punctul $t_0 \in T$ este ca derivata a doua generalizată a funcţiilor de corelaţie $C_{kl}^{\xi\xi}(s, t)$ să existe în punctul (t_0, t_0), oricare ar fi $k, l \in N^\star$.*

Demonstraţie. Pornim de la egalitatea

$$M\left(\frac{[\xi(s)]_k - [\xi(t_0)]_k}{s - t_0} \cdot \frac{\overline{[\xi(t)]_l} - \overline{[\xi(t_0)]_l}}{t - t_0}\right) =$$

$$= \frac{C_{kl}^{\xi\xi}(s, t) - C_{kl}^{\xi\xi}(t_0, t) - C_{kl}^{\xi\xi}(s, t_0) + C_{kl}^{\xi\xi}(t_0, t_0)}{(s - t_0)\,(t - t_0)}, \quad k, l \in N^\star .$$

De aici rezultă că limita

$$\lim_{s, t \to t_0} M\left(\frac{[\xi(s)]_k - [\xi\,(t_0)]_k}{s - t_0} \cdot \frac{\overline{[\xi\,(t)]_l} - \overline{[\xi\,(t_0)]_l}}{t - t_0}\right), \quad k, l \in N^\star$$

există dacă şi numai dacă $D_2\, C_{kl}^{\xi\xi}(t_0, t_0)$, $k, l \in N^\star$ există. Dar conform propoziţiei 2, în care punem $\lambda = s - t_0$, $\lambda' = t - t_0$,

$$\xi_{\lambda, k}(s) = \frac{[\xi(s)]_k - [\xi(t_0)]_k}{s - t_0}, \quad \xi_{\lambda', k}(t) = \frac{[\xi\,(t)]_l - [\xi\,(t_0)]_l}{t - t_0}, \quad \xi_k(t_0) = [\xi'(t_0)]_k$$

pentru ca să existe o variabilă aleatoare $\xi'(t_0)$ astfel ca

$$\lim_{t \to t_0} M\left(\left|\frac{[\xi\,(t)]_k - [\xi\,(t_0)]_k}{t - t_0} - [\xi'(t_0)]_k\right|^2\right) = 0, \quad k \in N^\star$$

este necesar şi suficient ca limita

$$\lim_{s, t \to t_0} M\left(\frac{[\xi\,(s)]_k - [\xi\,(t_0)]_k}{s - t_0} \cdot \frac{\overline{[\xi\,(t)]_l} - \overline{[\xi\,(t_0)]_l}}{t - t_0}\right), \quad k, l \in N^\star$$

să existe. Cu aceasta, teorema 3 este demonstrată.

3. Fie $\Delta = (t_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ o diviziune a lui T cu $\| \Delta \| = \sup\limits_{0 \leqslant j \leqslant n-1} \{ | t_{j+1} - t_j | \}$. Lui Δ îi punem în corespondență diviziunea asociată $\Delta' = (s_j)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$, unde $t_j \leqslant s_j \leqslant t_{j+1}$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

Să considerăm o funcție aleatoare $\xi(t)$ și să punem

$$R_k(\xi | \Delta, \Delta') = \sum_{j=0}^{n-1} [\xi(s_j)]_k (t_{j+1} - t_j), \quad k \in N^*$$

pentru orice Δ și Δ'.

DEFINIȚIA 4. *Funcția aleatoare* $\xi(t)$ *este* q-integrabilă *pe intervalul* T, *dacă există o variabilă aleatoare notată cu* ξ_T *astfel încît*

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} M(|R_k(\xi | \Delta, \Delta') - [\xi_T]_k|^2) = 0, k \in N^* ;$$

variabila aleatoare ξ_T *o vom numi* q-integrala *funcției aleatoare* $\xi(t)$ *pe intervalul* T *și o vom nota cu*

$$(q) \int_T \xi(t) \, \mathrm{d}t.$$

Folosindu-ne de funcțiile de corelație $C_{kl}^{\xi\xi}(s, t)$ vom da un criteriu de q-integrabilitate pentru o funcție aleatoare $\xi(t)$. Anume are loc :

TEOREMA 4. *Pentru ca funcția aleatoare* $\xi(t)$ *să fie q-integrabilă pe intervalul* T, *este necesar și suficient ca funcțiile de corelație* $C_{kl}^{\xi\xi}(s,t)$ *să fie integrabile pe* $T \times T$ *pentru orice* $k, l \in N^*$.

Demonstrație. Să luăm $\Delta_1 = (s_j)_{0 \leqslant j \leqslant n_1}$, $\Delta_2 = (t_j)_{0 \leqslant j \leqslant n_2}$ și $\Delta_1' = (\sigma_j)_{0 \leqslant j \leqslant n_1 - 1}$, $\Delta_2' = (\tau_j)_{0 \leqslant j \leqslant n_2 - 1}$ două familii asociate respectiv diviziunilor Δ_1, Δ_2.

Să considerăm valoarea medie

$$M(R_k(\xi | \Delta_1, \Delta_1') \overline{R_l(\xi | \Delta_2, \Delta_2')} =$$

$$= M\left(\sum_{j=0}^{n_1 - 1} [\xi(\sigma_j)]_k (s_{j+1} - s_j) \sum_{h=0}^{n_2 - 1} \overline{[\xi(\tau_h)]_l} (t_{h+1} - t_h) \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n_1 - 1} \sum_{h=0}^{n_2 - 1} M([\xi(\sigma_j)]_k \overline{[\xi(\tau_h)]_l} (s_{j+1} - s_j)(t_{h+1} - t_h) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n_1 - 1} \sum_{h=0}^{n_2 - 1} C_{kl}^{\xi\xi}(\sigma_j, \tau_h)(s_{j+1} - s_j)(t_{h+1} - t_h).$$

Folosind propoziția 2, în care punem $\lambda = \| \Delta_1 \|$, $\lambda' = \| \Delta_2 \|$

$$\xi_{\Delta_1 . k}(\Delta_1') = R_k(\xi | \Delta_1, \Delta_1'); \; \xi_{\Delta_2 . l}(\Delta_2') = R_l(\xi |(\Delta_2, \Delta_2'); \; \xi_k = [\xi_T]_k,$$

deducem că funcția aleatoare $\xi(t)$ este q-integrabilă pe T, dacă și numai dacă funcțiile $C_{kl}^{\xi\xi}(s, t)$, $k, l \in N^*$ sînt integrabile pe $T \times T$, ceea ce demonstrează teorema.

Observaţia 1. Din demonstraţia teoremei de mai sus rezultă că avem

$$\int_T \int_T C_{kl}^{\xi\xi}(s, t)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = M\left(\left[(q)\int_T \xi(s)\, \mathrm{d}s\right]_k \left[(q)\int_T \overline{\xi(t)}\, \mathrm{d}t\right]_l\right), \; k, l \in N^\star .$$

Observaţia 2. Dacă $q-\lim\limits_{\substack{a \to \infty \\ b \to -\infty}} \left((q)\int_T \xi(t)\mathrm{d}t\right)$ există, vom spune că funcţia aleatoare $\xi(t)$ este q-integrabilă pe $(-\infty, +\infty)$. În cazul cînd există această limită o vom nota cu

$$(q)\int_R \xi(t)\, \mathrm{d}t$$

şi o vom numi *q-integrala* funcţiei aleatoare $\xi(t)$ pe intervalul $(-\infty, +\infty)$.

O condiţie suficientă de existenţă a q-integralei funcţiei aleatoare $\xi(t)$ pe intervalul $(-\infty, +\infty)$ este dată de

PROPOZIŢIA 3. *Dacă $C_{kl}^{\xi\xi}(s, t)$, $k, l \in N^\star$ sînt absolut integrabile pe $R \times \times R$, atunci funcţia aleatoare $\xi(t)$ este q-integrabilă pe* $(-\infty, +\infty)$

Demonstraţia rezultă imediat din teorema 4.

Să considerăm acum $\xi(t)$ şi $\eta(t)$ două funcţii aleatoare definite pe T.

Cu aceleaşi notaţii pe care le-am folosit mai înainte, să formăm suma Riemann-Stieltjes.

$$S_k(\xi, \eta \mid \Delta, \Delta') = \sum_{j=0}^{n-1} [\xi(\tau_j)]_k ([\eta(t_{j+1})]_k - [\eta(t_j)]_k)$$

pentru orice Δ şi Δ'.

DEFINIŢIA 5. *Funcţia aleatoare $\xi(t)$ este* q-integrabilă pe T în raport cu funcţia aleatoare $\eta(t)$ *dacă există o variabilă aleatoare notată cu $\widetilde{\xi}_T$ astfel încît*

$$\lim_{\|\Delta\| \to \infty} M(|S_k(\xi, \eta \mid \Delta, \Delta') - [\widetilde{\xi}_T]_k|^2) = 0, \; k \in N^\star$$

variabila aleatoare $\widetilde{\xi}_T$ o vom numi q-integrala funcţie aleatoare $\xi(t)$ *în raport cu funcţia aleatoare $\eta(t)$ pe T şi o vom nota cu*

$$(q)\int_T \xi(t)\, \mathrm{d}\eta(t).$$

Şi în acest caz putem da un criteriu de q-integrabilitate al funcţiei aleatoare $\xi(t)$ în raport cu funcţia aleatoare $\eta(t)$.

TEOREMA 5. *Dacă $\xi(t)$ şi $\eta(t)$ sînt două funcţii aleatoare independente pentru orice $t \in T$, atunci*

$$(q)\int_T \xi(t)\, \mathrm{d}\eta(t)$$

există dacă şi numai dacă

$$\int_T \int_T C_{kl}^{\xi\xi}(s,\ t)\, \mathrm{d}^2 C_{kl}^{\eta\eta}(s, t)$$

există. Dacă integrala dublă de mai sus există, atunci

$$M\left\{\left[(q)\int_T \xi(s)\, \mathrm{d}\eta(s)\right]_k \left[(q)\int_T \overline{\xi(t)}\ \overline{\mathrm{d}\eta(t)}\right]_l\right\} = \int_T \int_T C_{kl}^{\xi\xi}(s, t)\, \mathrm{d}^2\, C_{kl}^{\eta\eta}(s,t).$$

Demonstraţie. Să considerăm

$$M\,(S_k(\xi, \eta \mid \Delta_1, \Delta_1')\, \overline{S_l(\xi, \eta \mid \Delta_2,\ \Delta_2')}) =$$

$$= M\left(\sum_{j=0}^{n_1-1} [\xi(\sigma_j)]_k([\eta(s_{j+1})]_k - [\eta(s_j)]_k) \sum_{h=0}^{n_2-1} \overline{[\xi(\tau_h)]_l}(\overline{[\eta(t_{h+1})]_l} - \overline{[\eta(t_h)]_l})\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n_1-1} \sum_{h=0}^{n_2-1} M([\xi(\sigma_j)]_k \overline{[\xi(\tau_h)]_l})\, M([\eta(s_{j+1})]_k \overline{[\eta(t_{h+1})]_l} - [\eta(s_j)]_k \overline{[\eta(t_{h+1})]_l} -$$

$$-[\eta(s_{j+1})]_k \overline{[\eta(t_h)]_l} + [\eta(s_j)]_k \overline{[\eta(t_h)]_l} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n_1-1} \sum_{h=0}^{n_2-1} C_{kl}^{\xi\xi}(\sigma_j, \tau_h)\, [C_{kl}^{\eta\eta}(s_{j+1}, t_{h+1}) - C_{kl}^{\eta\eta}(s_j, t_{h+1}) - C_{kl}^{\eta\eta}(s_{j+1}, t_h) +$$

$$+ C_{kl}^{\eta\eta}(s_j, t_h)],\ k, l \in N^{\star}.$$

Folosind acum propoziţia 2, va rezulta afirmaţia făcută.

Primită la redacţie la 18 februarie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. R. CRISTESCU, *Asupra funcţiilor aleatoare care nu admit momente*. Com. Acad. R.P.R., **XII**, *10*, 1097–1101 (1962).
2. M. LOÈVE. *Probability theory*. Ed. II-a, New York, 1960.
3. O. ONICESCU, *Teoria probabilităţilor şi aplicaţii*. Ed. Didact. şi Ped., Bucureşti, 1963.
4. O. ONICESCU, I. SĂCUIU, *Extinderea noţiunii de moment şi de coeficient de corelaţie la variabile aleatoare oarecare*. Studii şi cercetări matematice, **15**, *3* (1964).

ASUPRA FIXĂRII UNEI VARIABILE ÎNTR-O DISTRIBUȚIE DE DOUĂ VARIABILE

DE

FLORIN CONSTANTINESCU

În această lucrare ne ocupăm de distribuții de mai multe variabile. Pentru definiții, teoreme fundamentale și notații ne referim la cartea lui L. Schwartz [9].

1. Problema valorii într-un punct și problema fixării unor variabile într-o distribuție au fost puse de S. Lojasiewicz [3], [4], [5].

Spunem că distribuția T definită în vecinătatea punctului x_1 al axei reale are valoarea C în punctul x_1 : $T(x_1) = C$, dacă limita

$$\lim_{\lambda \to 0+} T(x_1 + \lambda x) = C \tag{1}$$

există într-o vecinătate a lui x_1 și ea este constantă. Se poate demonstra că în cazul unei singure variabile din existența limitei (1) într-o vecinătate a lui x_1 rezultă și faptul că ea este constantă [10]. În cazul mai multor variabile acest lucru nu mai este adevărat [5].

Fie Ω un interval deschis al axei Oy și $T(x,y)$ o distribuție definită într-un domeniu al planului Oxy care conține mulțimea $\{x_1\} \times \Omega$. Spunem că în distribuția $T(x,y)$ putem fixa $x = x_1$ pe Ω dacă limita

$$\lim_{\lambda \to 0+} T(x_1 + \lambda x,\ y) = S(y) \tag{2}$$

există și nu depinde de y într-un domeniu care conține $\{x_1\}\ x\ \Omega$. Distribuția $S(y)$ definită în Ω se numește secțiunea lui T pentru $x = x_1$ și $y \in \Omega$. Scriem

$$S(y) = T(x_1, y) \tag{3}$$

S. Lojasiewicz a demonstrat următoarele condiții necesare și suficiente.

TEOREMA 1. *Fie $T(x)$ o distribuţie definită în vecinătatea lui x_1. Pentru ca valoarea $T(x_1) = C$ să existe, este necesar şi suficient ca să existe un număr întreg nenegativ p şi o funcţie continuă F astfel încît*

$$T = D^p F \tag{4}$$

şi

$$\lim_{x \to x_1} \frac{F(x)}{(x - x_1)^p} = \frac{C}{p!} \tag{5}$$

în vecinătatea lui x_1 :

TEOREMA 2. *Fie Ω un interval deschis al axei Oy şi Λ un domeniu din planul Oxy care conţine mulţimea $\{x_1\} \times \Omega$. Presupunem că distribuţia T este definită în Λ. Pentru a putea fixa $x = x_1$ pe Ω este necesar şi suficient ca, pentru orice interval deschis mărginit Ω_0 astfel încît $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, să existe o pereche (p,q) de numere întregi nenegative, o vecinătate Δ a lui x_1, o îfuncţie $F(x, y)$ continuă în $\Delta \times \Omega_0$ şi o funcţie $g(y)$ continuă în Ω_0 pentru care*

$$T = D_x^p D_y^q F \tag{4'}$$

$$\lim_{x \to x_1} \frac{F(x, y)}{(x - x_1)^p} = \frac{g(y)}{p!} \tag{6}$$

n $\Delta \times \Omega_0$. Dacă $S(y) = T(x_1, y)$ în Ω_0, atunci avem

$$S = D^q g \quad \text{în} \quad \Omega_0. \tag{7}$$

Relativ la existenţa valorii într-un punct pentru o distribuţie de o singură variabilă, am arătat, cu altă ocazie [1], că bazîndu-ne pe noţiunea de diferenţă divizată [8] putem da o altă condiţie necesară şi suficientă. În acest mod s-a arătat că există o echivalenţă perfectă între problema valorii într-un punct pentru o distribuţie de o variabilă şi problema mai veche a existenţei unei derivate directe pentru o funcţie continuă [7], [6]. Vrem să extindem rezultatul amintit la cazul fixării unei variabile într-o distribuţie de două variabile.

2. Fie $F(x)$ o funcţie continuă în intervalul $A < x < B$. Notăm cu

$$[x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}; F] \tag{8}$$

diferenţa divizată de ordinul n [8] a funcţiei $F(x)$ pe nodurile distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ care aparţin intervalului (A, B). Aceasta este o expresie liniară, simetrică, dedusă în virtutea relaţiei de recurenţă

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; F] = \frac{[x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}; F] - [x_1, x_2, \ldots, x_n; F]}{x_{n+1} - x_1}, \tag{9}$$

$$[x_1, F] = F(x_1).$$

În cele ce urmează vom avea nevoie de formula de interpolare a lui Newton pe nodurile distincte $x_1, x_2,\ldots,x_k$ scrisă cu ajutorul diferenţelor divizate

$$F(x) = F(x_1) + (x - x_1)[x_1, x_2; F] + \ldots +$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{k-1})[x_1, x_2, \ldots, x_k; F] +$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)[x_1, x_2, \ldots, x_k, x; F]$$

de unde

$$[x_1\ x_2, \ldots, x_k, x; F] =$$
$$= \frac{F(x) - F(x_1) - (x - x_1)[x_1, x_2; F] -}{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)}$$
$$\frac{- \ldots - (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{k-1})[x_1, x_2, \ldots, x_k; F]}{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)}. \qquad (10)$$

Diferenţele divizate ale funcţiilor de mai multe variabile le putem introduce cu ajutorul diferenţelor divizate ale funcţiilor de o singură variabilă [7], [2]. Pentru a nu complica prea mult formulele, ne mărginim deocamdată la cazul a două variabile.

Fie $G(x,y)$ o funcţie de două variabile definită în domeniul Λ al planului Oxy. Definim diferenţa divizată a funcţiei $G(x,y)$ pe nodurile (x_i, y_j), $i = 1,2, \ldots, n+1$; $j = 1,2, \ldots, m+1$, care aparţin domeniului Λ

$$\left[\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \end{matrix}; \ G(x, y)\right| =$$
$$= [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; [y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}; G(x,y)]]. \qquad (11)$$

Se poate demonstra cu uşurinţă că avem

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; [y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}; G(x, y)]] =$$
$$= [y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}; [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; G(x, y)]].$$

Pentru cele ce urmează avem nevoie de următoarele două leme:

LEMA 1. *Fie* $\omega(x, \alpha)$ *o funcţie continuă de* x *pe intervalul* (A, B) *şi care depinde de parametrul* α *care aparţine intervalului* (a,b). *Dacă oricare ar fi* α *din* (a,b) *există*:

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ \cdots \\ x_k \to x_1}} [x_1, x_2, \ldots, x_k, x; \omega(x, \alpha)] =$$
$$= [x_1, x_1, \ldots, x_1, x; \omega(x, \alpha)] \qquad (12)$$

$x_2, x_3, \ldots, x_k$ *tinzînd în mod independent către* x_1, avem

$$[x_1, x_1 \ldots, x_1\, x;\ \omega(x, \alpha)] = \frac{\omega(x, \alpha) - P_{k-1}(x, \alpha)}{(x - x_1)^k}, \tag{13}$$

unde $P_{k-1}(x,\alpha)$ *este un polinom de gradul* $k-1$ *în* x *și care depinde de* α.

Pentru demonstrație ne folosim de formula de recurență a diferențelor divizate (8)

$$[x_1,x_2,\ldots,x_k,\ x;\ \omega(x,\alpha)] = \frac{[x_2,x_3,\ldots,x;\ \omega(x,\alpha)] - [x_1,\ x_2,\ldots,\ x_k,\ \omega(x,\alpha)]}{x - x_1}$$

sau

$$[x_1,x_2,\ldots,x_k;\ \omega(x, \alpha)] = (x_1 - x)\,[x_1, x_2, \ldots, x_k, x;\ \omega(x, \alpha)] + $$

$$+ [x_2, x_3, \ldots, x;\ \omega(x, \alpha)]. \tag{14}$$

Însă limita membrului al doilea al relației (14) există pentru $x_2 \to x_1$, oricare ar fi α. Rezultă existența limitei

$$\lim_{x_2 \to x_1} [x_1, x_2, \ldots, x_k;\ \omega(x, \alpha)] =$$

$$= [x_1, x_1, \ldots, x_k;\ \omega(x, \alpha)]. \tag{15}$$

Relația (14) devine

$$[x_1, x_1, x_3, \ldots, x_k;\ \omega(x, \alpha)] =$$

$$= (x_1 - x)\,[x_1, x_1, x_3, \ldots, x_k;\ \omega(x, \alpha)] + [x_1, x_3, \ldots, x;\ \omega(x, \alpha)]. \tag{16}$$

Însă avem

$$\lim_{x_3 \to x_1} [x_1, x_1, x_3, \ldots, x_k;\ \omega(x, \alpha)] =$$

$$= [x_1, x_1, x_1, \ldots, x_k;\ \omega(x, \alpha)]$$

și

$$\lim_{x_3 \to x_1} [x_1, x_3, \ldots, x;\ \omega(x, \alpha)] = [x_1, x_1, \ldots, x;\ \omega(x, \alpha)]$$

în virtutea condiției anterioare. Atunci din (16) deducem existența limitei

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ x_3 \to x_1}} [x_1, x_2, \ldots, x_k, x;\ \omega(x, \alpha)]$$

și în general existența limitei

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ x_3 \to x_1 \\ \cdots \\ x_i \to x_1}} [x_1, x_2, \ldots, x_i, x;\ \omega(x, \alpha)];\ i = 2, 3, \ldots k. \tag{17}$$

Rezultă că putem trece la limită în formula (9) scrisă pentru funcţia $\omega(x, \alpha)$ pentru $x_2 \to x_1, x_3 \to x_1, \ldots, x_k \to x_1$ şi obţinem

$$[x_1, x_1, \ldots, x; \omega(x, \alpha)] = \frac{\omega(x, \alpha) - P_{k-1}(x, \alpha)}{(x - x_1)^k}, \tag{18}$$

unde $P_{k-1}(x, \alpha)$ este un polinom de gradul $k - 1$ în x.

LEMA 2. *Fie $\mu(x, \alpha)$ o funcţie continuă de x în intervalul (A,B) şi care depinde de parametrul α care aparţine intervalului (a, b). Din existenţa limitei*

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\mu(x, \alpha)}{(x - x_1)^k} = \frac{\nu(\alpha)}{k!} \tag{19}$$

oricare ar fi α din (a, b) rezultă existenţa limitei

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ \cdots\cdots \\ x_k \to x_1 \\ x \to x_1}} [x_1, x_2, \ldots, x_k, x; \mu(x, \alpha)] = \frac{\nu(\alpha)}{k!} \tag{20}$$

nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_k$ aparţinînd intervalului (A,B).

Într-adevăr, dacă x este destul de aproape de x_1, atunci pentru orice α există un număr $\varepsilon(\alpha)$ astfel încît

$$\frac{\mu(x, \alpha)}{(x - x_1)^k} = \frac{\nu(\alpha)}{k!} + \varepsilon(\alpha), \tag{21}$$

unde $\varepsilon(\alpha) \to 0$ pentru $x \to x_1$. De aici avem

$$\frac{\mu(x, \alpha)}{(x - x_1)^{k-1}} = \left[\frac{\nu(\alpha)}{k!} + \varepsilon(\alpha)\right] \cdot (x - x_1)$$

de unde rezultă

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\mu(x, \alpha)}{(x - x_1)^{k-1}} = 0$$

şi în general

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\mu(x, \alpha)}{(x - x_1)^i} = 0, \quad (i = 1,2,\ldots,k - 1), \tag{22}$$

$$\mu(x_1, \alpha) = 0.$$

Însă avem

$$[x_1, x; \mu(x, \alpha)] = \frac{\mu(x, \alpha) - \mu(x_1, \alpha)}{x - x_1} = \frac{\mu(x, \alpha)}{x - x_1}$$

şi din (22)

$$\lim_{x \to x_1} [x_1, x; \mu(x, \alpha)] = 0. \tag{23}$$

Mai departe utilizînd formula lui Newton avem

$$[x_1, x_2, x ; \mu (x, \alpha)] = \frac{\mu(x, \alpha) - \mu (x_1, \alpha) - (x - x_1) [x_1, x_2 ; \mu (x, \alpha)]}{(x - x_1) (x - x_2)}$$

şi făcînd $x_2 \to x_1$

$$[x_1, x_1, x ; \mu(x, \alpha) = \frac{\mu (x, \alpha)}{(x - x_1)^2}$$

iar de aici

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ x \to x_1}} [x_1, x_2, x ; \ \mu (x, \alpha)] = 0.$$

În general avem

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ \cdots\cdots \\ x_i \to x_1 \\ x \to x_1}} [x_1, x_2, \ldots, x_k, x ; \mu (x, \alpha)] = 0, \quad (i = 2,3, \ldots, k - 1). \tag{24}$$

În fine putem trece la limită în formula lui Newton scrisă pentru funcţia μ (x, α) şi obţinem

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ \cdots\cdots \\ x_k \to x_1 \\ x \to x_1}} [x_1, x_2, \ldots, x_k , x ; \mu (x, \alpha)] = \lim_{x \to x_1} \frac{\mu (x, \alpha)}{(x - x_1)^k} = \frac{\nu (\alpha)}{k\,!} .$$

3. Fie acum $G (x, y)$ o funcţie continuă în domeniul Λ al planului xOy. Vom spune că funcţia $G (x,y)$ admite o derivată directă de ordinul k în raport cu x pentru $x = x_1$ şi y aparţinînd intervalului deschis Ω_0, $\{x_1\} \times \Omega_0 \subset \Lambda$, dacă avem

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ \cdots\cdots \\ x_k \to x_1 \\ x \to x_1}} [x_1, x_2, \ldots, x_k, x ; G (x, y)] = \frac{g (y)}{k\,!} , \tag{25}$$

unde $g (y)$ este o funcţie continuă în Ω_0.

Observăm că pe baza lemei 2 existenţa derivatei directe (25) rezultă din existenţa limitei (5). Invers, din existenţa derivatei directe (25) rezultă, pe baza lemei 1,

$$[x_1, x_1, \ldots, x_1, x ; G (x, y)] = \frac{G (x,y) - P_{k-1} (x, y)}{(x - x_1)^k}$$

şi deci

$$\lim_{x \to x_1} \frac{G (x, y) - P_{k-1} (x, y)}{(x - x_1)^k} = \frac{g(y)}{k\,!} .$$

Dacă luăm $G(x, y) - P_{k-1}(x, y) = F(x, y)$, atunci

$$\lim_{x \to x_1} \frac{F(x, y)}{(x - x_1)^k} = \frac{g(y)}{k!}.$$

Dat fiind că şi în cadrul teoriei distribuţiilor avem

$$D_x^k P_{k-1}(x, y) = 0$$

putem enunţa următorul rezultat

TEOREMA 2'. *Condiţia necesară şi suficientă pentru a putea fixa variabila $x = x_1$ în distribuţia T din teorema 2 este ca funcţia $g(y)$ să fie derivata directă de ordinul p a funcţiei $F(x,y)$ în $\Delta \times \Omega_0$.*

Rezultatul este analog cu cel obţinut în [1] (teorema 1).

În încheiere vom observa că teorema 2' poate fi enunţată şi în cazul a mai mult decît două variabile, demonstraţiile cerînd doar aplicarea succesivă a lemelor 1 şi 2. De asemenea, putem demonstra condiţii necesare şi suficiente de aceeaşi formă pentru problema limitei distribuţiei T pentru $x \to x_1$ [4], [5].

Primită la redacţie la 8 februarie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. F. CONSTANTINESCU, *Sur la valeur d'une distribution dans un point.* Studia Math., **24,** 7–12 (1963).
2. D. V. IONESCU, *La représentation de la différence divisée d'une fonction de deux variables par une intégrale double.* Mathematica, **3 (26),** *1*, 59–78 (1961).
3. S. LOJASIEWICZ, *Sur la valeur d'une distribution dans un point.* Bull. Ac. Polon. Sci. Cl., **III,** *4*, 239–242 (1956).
4. S. LOJASIEWICZ, *Sur la valeur et la limite d'une distribution dans un point.* Studia Math., **16,** 1–36 (1957).
5. S. LOJASIEWICZ, *Sur la fixation des variables dans une distribution.* Studia Math., **17,** 1–64 (1958).
6. M. NICOLESCU, *Analiza matematică*, vol. II, Bucureşti, 1958.
7. POPOVICIU, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réeles.* Théses, Paris, 1933.
8. T. POPOVICIU, *Différences divisées et dérivées.* Mathematica, I, **24,** *2*, 297–319 (1959)
9. L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions.* I, II, Paris, 1957, 1959.
10. Z. ZIELEZNY, *Sur la definition de Lojasiewicz de la valeur d'une distribution dans un point.* Bull. Ac. Polon., Sci. Cl., **III,** *3*, 519–520 (1955).

ASUPRA OPERATORILOR NUCLEARI

DE

V. ISTRĂȚESCU

1. Să considerăm H un spațiu Hilbert şi T un operator liniar şi continuu $T : H \rightarrow H$.

Vom spune că T este un operator complet continuu dacă

$$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx$$

(prin $\rightharpoonup$ am însemnat convergența slabă, iar prin $\rightarrow$ convergența tare pentru elemente).

Se demonstrează următoarea teoremă [3] :

TEOREMĂ. *O condiție necesară și suficientă ca T să fie compact este ca pentru orice mulțime mărginită $M \subset H$, $T(M)$ să fie relativ compactă.*

În prezenta observație dăm o caracterizare a operatorilor nucleari $A : H \rightarrow H$, avînd în vedere teorema de mai sus.

2. Vom da mai întîi cîteva definiții. Fie E un spaţiu vectorial topologic

DEFINIŢIA 1. *Prin înfășurătoare p-convexă a unui șir de elemente $(x_i) \subset E$ vom înțelege mulțimea elementelor de forma*

$$\Gamma^p(\{x_i\}) = \left\{x,\ x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \leqslant 1\right\}\cdot$$

DEFINIŢIA 2. *Fie U o mulțime absolut convexă. (Dacă $x, y \in U$, atunci pentru orice α, β, $|\alpha| + |\beta| \leqslant 1$, $\alpha x + \beta y \in U$). Vom spune că mulțimea V este nucleară relativ la mulțimea U dacă există un șir de elemente $\{x_i\} \subset E$, $\{x_i\} \subset U$, $\{x_i\}$ liberă, $V \subset \Gamma^2(\{x_i\})$ și $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|_U < < \infty$, unde $|x_i|_U$ înseamnă valoarea funcționalei lui Minkovski atașate mulțimii U în punctul x.*

DEFINIȚIA 3. [1] *Dacă H_1 și H_2 sînt două spații Hilbert peste același corp K, atunci A nuclear este de forma*

$$Af = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < f, e_i > h_i, \; \lambda_i \geqslant 0 \; \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty,$$

unde $\{e_i\}$ și *$\{h_i\}$ sînt baze ortonormale.*

3. PROPOZIȚIA 1. *Un operator nuclear*

$$A : H \rightarrow H$$

transformă mulțimile mărginite în mulțimi nucleare față de vecinătățile absolut convexe ale lui zero în H.

Într-adevăr, este suficient să luăm pentru aceasta

$$x_i = \lambda_i \, e_i, \quad (i = 1,2,3,\dots)$$

și

$$\xi_i (f) = < f, e_i > .$$

Oricare ar fi vecinătatea absolută convexă U a originii avem

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|_U < \infty$$

și cum

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i (f)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |< f, e_i >|^2 = ||f||^2 \leqslant 1.$$

și propoziția e demonstrată pentru sfera unitate. În mod analog se procedează pentru orice mulțime mărginită.

LEMA 1. *Fie E un spațiu vectorial topologic și V o mulțime nucleară relativ la mulțimea absolut convexă U. Mulțimea V este nucleară relativ la U dacă și numai dacă există un șir de elemente $\{x_i^{*}\} \subset U$ astfel încît*

$$V \subset \left\{ x, x \in E, \; x = \Sigma \eta_i \xi_i^{*} (x) \, x_i^{*}, \; \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{*} (x)|^2 < \infty, |x_i^{*}|_U = 1, \; \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \infty \right\}.$$

Într-adevăr, dacă V este nucleară în raport cu U vom pune

$$x_i^{*} = \frac{x_i}{|x_i| \, U}, \eta_i = |x_i|_U, \;\; \xi_i^{*} (x) = \xi_i (x)$$

și necesitatea e demonstrată.

Suficiența se demonstrează astfel: luăm $x_i = \eta_i \, x_i^{*}$ și $\xi_i^{*} (x) = \xi_i (x)$.

PROPOZIȚIA 2. *Orice operator $A : H \rightarrow H$ care transformă mulțimile mărginite în mulțimi nucleare relativ la vecinătățile absolut convexe ale lui zero este nuclear.*

Demonstrație. Vom considera mulțimea $M = S\,\overline{(\theta,1)} = \{x,\ ||x|| \leqslant 1\}$. Avem, conform ipotezei,

$$A_x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(x)\,\eta_i\,x_i \quad ||x_i|| = 1, \ \sum_{i=1}^{\infty} |\,\xi_i(x)|^2 < \infty .$$

Cum familia $\{x_i\}$ este liberă, vom considera baza $\{x_i^*\}$ care se construiește cu ajutorul ei. Vom avea în acest caz

$$A_x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(x)\,\eta_i\,x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^*(x)\,x_i^*,$$

unde $\xi_i^*(x)$ sînt funcționale liniare. Din faptul că $\{x_i\}$ este liberă, rezultă că $\xi_i(x)$ sînt funcționale liniare. Faptul că operatorul este nuclear rezultă din

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i(x)|\,\eta_i < \infty .$$

Propozițiile 1 și 2 ne dau următoarea

TEOREMĂ. *O condiție necesară și suficientă ca un operator $A : H \to H$ să fie nuclear este ca să transforme orice mulțime mărginită în mulțime nucleară față de vecinătățile absolut convexe ale lui zero.*

Observație. Teorema de mai sus se extinde și la operatori nucleari A definiți pe un spațiu Hilbert cu valori în altul.

Primită la redacție la 1 februarie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. И. М. Гелфанд, Н. У. Виленкин, *Обобщение функций*. Vol. 4, Cap. I, Moscova, 1961.
2. Б. С. Митнагин, У.М.Н., **XVI**, вып. 4 (100), 63—132 (1961).
3. F. Riesz, B. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Cap. V, Budapest, 1952.

ASUPRA SPAŢIILOR BANACH CU BAZĂ NUMĂRABILĂ. II

DE

V. ISTRĂŢESCU

În [4] am arătat că într-un spaţiu Banach cu bază numărabilă se poate introduce o normă echivalentă cu cea iniţială şi care are proprietăţile unei K-norme Nikolski.

Vom arăta în cele ce urmează că este posibilă o construcţie asemănătoare pentru T-norme Nikolski.

Vom da mai întîi cîteva definiţii [1], [2].

DEFINIŢIA 1. *Dacă* $\{e_i\}_{i \in N}$ *este un sistem de elemente liniare independente din spaţiul Banach* E, *vom înţelege prin polinom de ordin* n, *un element* $p_n \in E$, $p_n \; E \; \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

DEFINIŢIA 2. *Un polinom de ordinul* n *este polinom de cea mai bună aproximaţie dacă*

$$\|x - p_n\| = \inf_{r_i} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} r_i e_i \right\|, \quad p_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

DEFINIŢIA 3. *O normă este minorantă dacă*

$$\left\| \sum_{n+1}^{\infty} \lambda_i e_i \right\| \leqslant \left\| \sum_{n}^{\infty} \lambda_i e_i \right\|$$

oricare ar fi n.

Are loc următoarea :

TEOREMĂ. *În orice spaţiu Banach cu bază numărabilă există o normă echivalentă cu cea iniţială cu proprietăţile următoare* :

α) *este o normă minorantă* ;

β) *polinomul de ordin* n *de cea mai bună aproximaţie coincide cu suma parţială* s_n *pentru orice element* $x \in E$;

γ) *spaţiul E înzestrat cu această normă este strict normat.* Dăm mai întîi o lemă :

LEMĂ. *Dacă pentru orice $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$ punem*

$$\|x\|_1 = \sup_k \left\| \sum_{k+1}^{\infty} \lambda_i e_i \right\|$$

atunci $\|x\|_1$ este o normă echivalentă cu cea iniţială şi care are proprietăţile α) *şi* β).

Demonstraţie. Faptul că este o normă este evident. Să arătăm că este echivalentă cu cea iniţială.

Să arătăm mai întîi că E cu $\|x\|_1$ este complet. Într-adevăr, fie $\{x_n\}$ un şir Cauchy. Vom avea deci

$$x_n = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (x_n) e_i$$

de unde

$$\| \beta_j (x_n - x_m) e_J \| = | \beta_j (x_n - x_m) | \|e_j\| \leqslant 2 \| x_n - x_m \|_1$$

oricare ar fi j. Rezultă deci că şirul $\{\beta_j (x_n) e_j\}$ converge către un element $\beta_j e_j$. Fie $x = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j$. Să arătăm că această serie converge şi că $x_n \to x$. Într-adevăr, pentru $\varepsilon > 0$ există m_ε astfel încît $n > m > m_\varepsilon$, $\| x_n - x_m \|_1 < \varepsilon$. Pentru $n \to \infty$ obţinem

$$\left\| \sum_{k+1}^{j} \beta_l (x_m) e_l - \sum_{k+1}^{j} \beta_j e_j \right\| < 2 \varepsilon$$

oricare ar fi $k < j$ şi $m > m_\varepsilon$, şi din completitudinea spaţiului rezultă că seria $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j$ converge.

Cum

$$\| x_n - x \|_1 = \sup_k \left\| \sum_{k+1}^{\infty} (\beta_j (x_n) - \beta_j (x)) e_j \right\|$$

rezultă că $x_n \to x$ în $\| \|_1$.

Rezultă astfel că aplicaţia identică este un izomorfism şi deci exista m şi M astfel încît

$$m \|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant M \|x\| .$$

Proprietăţile α) şi β) rezultă din definiţia normei. Lema este astfel demonstrată. Pentru a demonstra teorema vom pune

$$\| x \|_2 = \left\{ \| x \|_1^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\lambda_i|^2}{2^{2i}} \right\}^{1/2}.$$

Se verifică imediat că aceasta este o normă echivalentă cu cea iniţială.

Proprietăţile α) şi β) rezultă din faptul că $\|x\|_1$ are aceste proprietăţi. Proprietatea γ) rezultă aplicînd inegalitatea lui Hölder.

Primită la redacţie la 17 decembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Nicolski, D.A.N. S.S.S.R., **9**, *4* (1948).
2. M. M. Day. *Normed linear spaces*. Springer Verlag, Berlin, 1958.
3. J. A. Clarkson, Trans. Amer. Math. Soc., **40** (1936).
4. V. Istrăţescu, Revue de math. pures et appliquées, **7**, *2*, 481 (1962).

RECENZIE

NATHAN JACOBSON, *Lie algebras*, New York, 1962. IX + 331 p. Interscience publishers.

Scrisă de unul din marii algebrişti contemporani şi avînd ca bază un curs ţinut timp de 10 ani la Yale, cartea se impune atît prin conţinutul ei, cît şi prin modul de prezentare al materialului. Teoria algebrelor Lie este expusă în spirit : ,,pur algebric'', nefăcînd apel nici la teoria grupurilor topologice, nici la teoria grupurilor algebrice ; prin aceasta neexcluzîndu-se nici un rezultat important. În acest sens remarcăm că grupul automorfismelor interioare a unei algebre Lie L (peste un corp de caracteristică 0) este definit ca grupul generat de totalitatea automorfismelor de forma $\exp \operatorname{ad} z$ unde $\operatorname{ad} z$ este nilpotent. Analog se definesc automorfismele ce apar în teorema lui Malţev. De asemenea remarcăm că teorema de conjugare printr-un automorfism interior a subalgebrelor Cartan dintr-o algebră Lie finit dimensională peste un corp algebric închis, este dovedită cu ajutorul unei leme de geometrie algebrică asupra aplicaţiilor polinomiale pentru care există un punct în care au diferenţiala surjectivă, aplicată unui produs de automorfisme de forma $\exp \operatorname{ad} \lambda_i z_i$. În expunere este conţinută şi formula lui Weyl a caracterelor (vezi Cap. 8).

Deşi majoritatea rezultatelor se obţin pentru algebre Lie peste un corp de caracteristică 0, în carte sînt date exemple ce arată nevalabilitatea anumitor teoreme pentru cazul caracteristicii $\neq 0$ (teorema lui Lie) ; în acelaşi timp însă, teorema lui Ado este demonstrată şi pentru cazul caracteristicii $\neq 0$ (teorema lui Iwasawa), ca şi teorema Birkhoff-Poincaré-Witt şi se arată că orice algebră Lie finit dimensională peste un corp de caracteristică $\neq 0$ are reprezentări finit dimensionale care nu sînt total reductibile. De asemenea, două paragrafe din Cap. 5 sînt dedicate ,,algebrelor Lie restrînse'' de caracteristică $p \neq 0$ (algebre Lie plus o aplicaţie $x \to x^{[p]}$ cu anumite proprietăţi : remarcăm că pentru existenţa unei asemenea aplicaţii într-o algebră Lie peste un corp de caracteristică p este necesar şi suficient ca orice $(\operatorname{ad} x)^p$ să fie o derivare interioară ; vom avea $(\operatorname{ad} x)^p = \operatorname{ad} x^{[p]}$). De asemenea remarcăm o tendinţă analogă în ceea ce priveşte teoremele de clasificare : rezultatele pentru corpuri de bază algebric închise sînt formulate pentru ,,algebre semisimple descompuse'' (în care există o subalgebră Cartan ce are toate rădăcinile în corpul de bază) şi, ceea ce e mai interesant, prin analogie au studiul algebrelor Lie simple peste corpul numerelor reale, se abordează problema studiului şi clasificării algebrelor Lie simple peste un corp oarecare de caracteristică 0 (Cap. 10).

Un alt fapt demn de remarcat este utilizarea algebrelor asociative finit dimensionale în studiul algebrelor Lie (vezi Cap. 2 şi 10).

Fiecare capitol este însoţit de un număr de exerciţii, departe de a fi triviale. În unele cazuri, în aceste exerciţii, se completează esenţial materialul prezentat, în special în cazul problemelor care cer o tratare separată a unor anumite cazuri şi, mai ales, în Cap. 9 (demonstraţia faptului că automorfismul unei algebre Lie simple, generat de un automorfism al matricii Cartan, nu este interior).

Conţinutul cărţii pe capitole:

Capitolul 1: ,,Noţiuni fundamentale". Pe lîngă definiţiile şi preliminariile uzuale, în această teorie, remarcăm în acest capitol determinarea algebrelor Lie de dimensiune cel mult 3.

Una din ele: ,,algebra simplă descompusă de dimensiune 3" va juca un rol însemnat în demonstraţiile din capitolele următoare, caracterizarea reprezentărilor ei finit dimensionale conţinînd drept cazuri particulare cîteva din lemele des utilizate în teoria algebrelor Lie semisimple şi a reprezentărilor lor.

Capitolul 2: ,,Algebre Lie rezolubile şi nilpotente". Este de notat utilizarea algebrelor asociative în demonstrarea teoremelor clasice.

Teorema lui Engel şi descompunerea spaţiului V în sumă directă de componente primare faţă de o algebră Lie nilpotentă de transformări liniare pe V se deduc din faptul că, dacă orice transformare dintr-o algebră Lie (sau, mai general, dintr-o mulţime ,,slab închisă") L de transformări liniare pe un spaţiu finit dimensional este nilpotentă, atunci algebra asociativă generată de L este nilpotentă.

Se arată apoi că orice algebră Lie de transformări liniare pe un spaţiu finit dimensional, faţă de care spaţiul e semisimplu, este sumă directă dintre centrul ei şi o algebră semisimplă (pe baza faptului că algebra asociativă generată rezultă semisimplă). De aici se deduce teorema lui Lie (aplicînd propoziţia de mai sus la reprezentările ce rezultă pe spaţiile cît dintr-un şir de compoziţie).

În final se dau aplicaţii la algebre Lie ,,abstracte" ($[L, R] \subset N$, unde L e o algebră Lie finit dimensională, R radicalul, N nil-radicalul etc.).

Capitolul 3: ,,Criteriul Cartan şi consecinţele sale".

În acest capitol se obţin teoremele fundamentale de structură a algebrelor Lie finit dimensionale. Instrumente de lucru: subalgebre Cartan, forma Killing şi în general forma biliniară ataşată unei reprezentări finit dimensionale, lemele lui Whitehead. Pe lîngă rezultatele uzuale, cităm şi: Dacă orice element nilpotent dintr-o algebră Lie de transformări liniare pe un spaţiu finit dimensional aparţine unei subalgebre simple descompuse de dimensiune 3 şi dacă centrul algebrei are proprietatea că o dată cu o transformare conţine şi componentele sale semisimplă şi nilpotentă, atunci spaţiul este semisimplu faţă de acea algebră, şi reciproc (ultima proprietate rezultînd şi pentru întreaga algebră).

Remarcăm de asemenea că se definesc grupurile de coomologie a unei reprezentări şi se interpretează în acest sens lemele lui Whitehead.

Capitolul 4: ,,Algebre semisimple descompuse (finit dimensionale peste corp de caracteristică 0)". Se dă clasificarea lui Killing cu ajutorul diagramei ,,Dînkin". Se dovedeşte faptul că există o bază a algebrei, cu coeficienţii tablei de înmulţire raţionali. Se construiesc A_n, B_n, C_n, D_n şi de asemenea, lăsînd nedemonstrate anumite fapte, G_2, F_4, E_6. Se dovedeşte existenţa formelor reale compacte.

Capitolul 5: ,,Algebra universală înfăşurătoare". Se dovedeşte, prin metoda lui Birkhoff, teorema lui Poincaré-Birkhoff-Witt pentru algebre Lie nu neapărat finit dimensionale şi nu neapărat cu corpul de bază de caracteristică 0. Se dovedeşte absenţa divizorilor lui 0 în algebra universală. Se dovedeşte formula lui Campbell-Hausdorff (în cazul caracteristicii 0) pe baza faptului că algebra Lie liberă generată de o mulţime de elemente se scufundă în algebra asociativă liberă respectivă, care e algebra ei universală, şi pe baza unei caracterizări a elementelor din algebra asociativă liberă care aparţin algebrei Lie libere.

Se prezintă apoi teoria Cartan-Eilenberg de coomologie a unei algebre Lie L, construindu-se o rezoluție liberă a corpului de bază cu ajutorul „algebrei operatorilor diferențiali pe algebra exterioară $E(L)$, relativ la reprezentarea ad" graduată cu ajutorul graduării lui $E(L)$. Se arată că grupurile de coomologie obținute coincid cu cele din Cap. 3.

Capitolul 6. „Teorema lui Ado-Iwasawa".

Capitolul 7. „Clasificarea modulelor ireductibile de dimensiune finită pentru o algebră semisimplă finit dimensională descompusă peste un corp de caracteristică 0".

O dată cu această clasificare se obține și o construcție a unei algebre semisimple finit dimensionale cu matrice Cartan dată, cu condiția ca „reflexiile" ei să genereze un grup finit. Metoda utilizată, cu folosirea ideii de algebră universală, e cea inițiată de Harish-Chaudra.

Se dă construcția explicită a modulelor simple „fundamentale" pentru A_n, B_n, G_2 (spin reprezentarea pentru B_n e descrisă fără demonstrații complete).

În exerciții se dă construcția pentru C_n și D_n și se stabilește neizomorfismul dintre C_6 și F_6 respectiv B_6 și F_6.

Capitolul 8: „Caracterele modulelor ireductibile peste algebre semisimple". Capitolul începe cu cîteva proprietăți ale grupului Weyl (faptul că e generat de reflecțiile elementare, faptul că e simplu tranzitiv pe sistemele de rădăcini simple) demonstrate algebric.

Se obține apoi formula lui Weyl a caracterelor, înțelegînd prin caracter al unui modul ireductibil $\Sigma d_M \, e(M)$, unde M parcurge mulțimea ponderilor, d_M este dimensiunea subspațiului corespunzător ponderii M, iar $e(M)$ sînt supuși numai condițiilor $e(M)e(M') = e(M + M')$, generatorii unei algebre $\mathfrak{U}$. Definind prin $e(M) \to \exp(M, \lambda)\, t$ pentru orice pondere λ un homomorfism al lui $\mathfrak{U}$ în algebra seriilor formale în t, și compunîndu-l cu homomorfismul de luare a termenului constant, se obține din formula lui Weyl formula ce dă dimensiunea modulului (de pondere maximală cunoscută).

Se dau apoi: formula lui Kostant pentru d_M într-o reprezentare cu pondere dominantă Λ, precum și o generalizare a formulei Clebsch-Gordon (pentru produsul a 2 caractere).

Capitolul 9: „Grupul automorfismelor". Scopul principal este determinarea grupului factor dintre grupul automorfismelor și subgrupul automorfismelor interioare a unei algebre Lie simple (finit dimensionale, peste un corp algebric închis de caracteristică 0). Se demonstrează teorema de conjugare a subalgebrelor Cartan prin automorfisme interioare. Se arată că acel grup este un grup factor al grupului automorfismelor matricii Cartan. În exerciții se arată izomorfismul celor 2 grupuri.

Se determină explicit forma generală a automorfismelor pentru A_n, B_n, C_n, D_n (cu excepția lui D_4) G_2 și F_4 (în general forma este $X \to A X A^{-1}$). Cazul D_4 este rezolvat în exerciții.

Capitolul 10: „Algebre Lie simple peste un corp oarecare".

Se definește întîi centroidul unei algebre neasociative L drept comutantul în algebra transformărilor liniare pe L a mulțimii multiplicărilor drepte și stîngi. El e comutativ. Dacă L e simplă, centroidul e un corp. Coincidența centroidului cu corpul de bază — „centralitatea" algebrei este condiția necesară și suficientă pentru păstrarea simplității la orice extensie a corpului de bază.

L poate fi totdeauna considerată ca algebră peste centroid.

Problema clasificării algebrelor simple finit dimensionale peste un corp K se reduce la a găsi algebrele simple centrale peste extensii finit dimensionale ale lui K și de a găsi condițiile de K-izomorfism între ele.

K-izomorfismul implică egalitatea centroizilor şi, pentru o algebră Lie, izomorfismul algebrelor obţinute prin extensie de la centroid la un acelaşi corp algebric închis. Problema este rezolvată pentru algebrele Lie, „în cazurile" A_n, B_n, C_n, D_n cu excepţia lui D_4.

Construirea acelor algebre se face cu ajutorul următoarelor construcţii :

1. Se consideră o algebră asociativă finit dimensională simplă centrală, şi se ia derivata algebrei Lie corespunzătoare.

2. Se consideră o algebră asociativă finit dimensională simplă centrală $\mathfrak{G}$, un antiautomorfism involutiv J al ei şi se consideră $\mathfrak{G}_J = \{x \mid x \in \mathfrak{G},\ J\,x = -\,x\}$ ca algebră Lie.

3. Se consideră o algebră asociativă finit dimensională simplă $\mathfrak{G}$ al cărui centru $\mathfrak{C}$ e o extensie pătratică a corpului de bază şi un antiautomorfism involutiv J, a cărui restricţie la $\mathfrak{C}$, nu coincide cu identitatea, şi se consideră derivata algebrei Lie $\mathfrak{G}_J$.

Se arată legătura dintre asemenea antiautomorfisme şi „formele biliniare" pe spaţiul vectorial n-dimensional peste $\mathfrak{T}$ cu valori în $\mathfrak{T}$, unde $\mathfrak{G}$ este izomorfă cu algebra matricilor de grad n peste corpul $\mathfrak{T}$ (J este aplicaţia de „trecere la adjunct").

Se studiază cazul $K =$ corpul numerelor reale.

Descrierea conţinutului cărţii pe capitole poate da o idee asupra bogăţiei şi completitudinii materialului prezentat în carte, fapt ce o recomandă călduros ca un veritabil curs la cel mai înalt nivel în acest domeniu.

I. Cuculescu

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoremele de descompunere ale algebrei)**, 619 p., 25,50 lei.
D. BARBILIAN, **Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)**, 380 p., 7 lei.
JANKÓ BÉLA, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații liniare**, 223 p., 8,85 lei.
N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU și A. CORNEA, **Seminar S. Stoilow, 1959—1960, Teoria potențialului pe suprafețe riemanniene**, 160 p., 5 lei.
G. CIUCU și R. THEODORESCU, **Procese cu legături complete**, 232 p., 9,85 lei.
C. CONSTANTINESCU, **Seminar M. Neculcea. Teoria mulțimilor**, 108 p., 3,25 lei.
C. CORDUNEANU, **Funcții aproape-periodice**, 191 p., 8,30 lei.
ROMULUS CRISTESCU, **Spații liniare ordonate**, 332 p., 11,10 lei.
I. CUCULESCU, **Seminar O. Onicescu. Algebre Lie**, 148 p., 5,15 lei.
C. FOIAȘ, **Seminar M. Nicolescu, 1959—1960. Teoria spectrală în algebre Banach (necomutative) axată pe noțiunea de rezolventă**, 82 p., 2,85 lei.
ALEXANDRU FRODA, **Algebra superioară (fundamente: mulțimi și operații, divizibilitate, spații liniare, forme pătratice)**, 455 p., 24,50 lei.
GH. GALBURĂ, **Corpuri de funcții algebrice și varietăți algebrice**, 180 p., 7,85 lei.
M. GHERMĂNESCU, **Ecuații funcționale**, 523 p., 25,60 lei.
A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale**, 484 p., 21,50 lei.
CAIUS JACOB, **Introduction mathématique à la mécanique des fluides**, 1288 p., 66,50 lei.
TRAIAN LALESCU, **Introducere în teoria ecuațiilor integrale**, 135 p., 5,90 lei.
LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice și hidraulice**, 52 p., 18,50 lei.
* * * **Lucrările celui de-al IV-lea Congres al matematicienilor romîni**, 228 p., 8,55 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie și topologie, Iași 2—5 iunie 1958**, 264 p., 9,75 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie diferențială din 9—12 iunie 1955, organizată de Secția de științe matematice și fizice a Academiei R.P.R.**, 368 p., 9,50 lei.
G. MARINESCU, **Spații vectoriale normate**, 295 p., 6 lei.
G. MARINESCU, **Spații vectoriale topologice și pseudotopologice**, 219 p., 8,80 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie neeuclidiană**, 144 p., 4,30 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferențială neeuclidiană**, 387 p., 13 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă**, 495 p., 25,90 lei
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă. Teoria corespondenței**, 232 p., 10,50 lei.
GH. MIHOC și V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 732 p., 34,70 lei.
GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 142 p., 8,55 lei; vol. II, 155 p., 8,25 lei.
GR. C. MOISIL, **Funcționarea în mai mulți timpi a schemelor cu relee ideale**, 279 p., 12 lei.
GR. C. MOISIL, **Introducere în algebră, I. Inele și ideale**, vol. I, 256 p., 9,10 lei.
GR. C. MOISIL, **Matricele asociate sistemelor de ecuații cu derivate parțiale. Introducere în studiul cercetărilor lui I. N. Lopatinschi**, 64 p., 1,20 lei.
GR. C. MOISIL, **Scheme cu comandă directă cu contacte și relee**, 205 p., 9,65 lei.
ALEXANDRU MYLLER, **Scrieri matematice**, 595 p. + 1 pl., 39,40 lei.
VERA MYLLER-LEBEDEV, **Lecții de algebră**, 396 p., 8,75 lei.
MIRON NICOLESCU, **Analiza matematică**, vol. II, 420 p., 11,90 lei.
OCTAV ONICESCU, **Numere și sisteme aleatoare**, 260 p., 11,20 lei.
OCTAV ONICESCU, **Strategia jocurilor. Cu aplicații la programarea liniară**, 228 p., 8,45 lei.
OCTAV ONICESCU și COLAB., **Calculul probabilităților și aplicații**, 788 p., 15 lei.
O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU și R. THEODORESCU, **Seminar de funcții sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 123 p., 4,25 lei.
Opera matematică a lui Alexandru Pantazi, 496 p., 24,20 lei.
DIMITRIE POMPEI, **Opera matematică**, 535 p. + 1 pl., 30,20 lei.
N. RANCU și L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicații în producție**, 896 p. + 20 pl., 45 lei.
SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor și ale algebrelor booleene**, 159 p., 5,75 lei.
S. STOILOW, **Teoria funcțiilor de o variabilă complexă**, vol. I, 308 p., 10 lei; vol. II in colaborare cu Cabiria Andreian-Cazacu, 379 p., 25,70 lei.
P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticității**, vol. I, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.
GHEORGHE ȚIȚEICA, **Geometria diferențială proiectivă a rețelelor**, 287 p., 8 lei.
DRAGOȘ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 76 p., 3,15 lei.
SERGIU VASILACHE, **Elemente de teoria mulțimilor și structurilor algebrice**, 235 p., 5 lei.
GH. VRĂNCEANU, **Leçons de géometrie différentielle**, vol. I, 407 p., 26,50 lei; vol. II, 428 p., 27,60 lei.
GH. VRĂNCEANU, Lecții de geometrie diferențială, vol. III, 454 p., 15 lei.

883

Revista apare de 10 ori pe an.

Preţul unui abonament este de 120 lei.

În ţară abonamentele se fac la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii şi difuzorii voluntari din întreprinderi şi instituţii.

Orice comandă din străinătate (numere izolate sau abonamente) se face prin :

CARTIMEX
Căsuţa poştală 134 — 135
Bucureşti
R. P. Romînă

sau prin reprezentanţii săi din străinătate

ST. CERC MAT., TOM. 15, Nr. 5, P. 545—672, BUCUREŞTI, 1964

„Informaţia" — c. 1574 | 43831 | Lei 12. —

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

6

TOMUL 16
1964

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
GH. MARINESCU, — membru corespondent al Academiei R.P.R.
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție

Prețul unui abonament este de 120 lei.

În țară abonamentele se fac la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii și difuzorii voluntari din întreprinderi și instituții.

Orice comandă din străinătate (numere izolate sau abonamente) se face prin: CARTIMEX Căsuța poștală 134—135 București, R. P. Romînă sau prin reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție pe adresa: str. Mihail Eminescu, nr. 47, București

Revista apare de 10 ori pe an

TOM. 16, Nr. 6
1964

STUDII ŞI CERCETĂRI
MATEMATICE

SUMAR

Pag.

IVAN SINGER, Baze în spaţii Banach. III 675

D. MANGERON şi A. F. ŞESTOPAL, Contribuţii la studiul funcţiilor lui Green. I. Dezvoltarea funcţiilor lui Green relative la operatori diferenţiali liniari cu derivate parţiale după soluţii fundamentale 727

EUGEN RĂDESCU, Studiul ansamblurilor statistice cu ajutorul congruenţelor pseudo-ortogonale în relativitatea generală 741

V. G. GORCIU, Asupra unor algebre neasociative A_3 747

DUMITRU GAŞPAR, Asupra semigrupurilor complet neunitare . 753

D. V. IONESCU, Construirea unor formule practice de cvadratură 757

STERE IANUŞ, Asupra scufundării spaţiului-timp Reissner-Weyl V_4 într-un spaţiu pseudoeuclidian E_6 771

MARIAN ŢARINĂ, Spaţii de $n - 3$ ori subproiective cu grup maxim de mişcări 777

NICOLAE POPESCU, Module cu diferenţială generalizată . . . 791

RECENZIE 801

ST. CERC. MAT. TOM. 16, Nr. 6, P. 673—804, BUCUREŞTI, 1964.

BAZE ÎN SPAŢII BANACH. III

DE

IVAN SINGER

INTRODUCERE

Lucrarea de faţă este ultima parte a unei lucrări formate din trei părţi, în care ne propunem să expunem rezultatele cunoscute pînă în prezent asupra bazelor în spaţii Banach. Partea I a lucrării (a se vedea [78]) conţine capitolele I şi II, partea a II-a conţine capitolele III şi IV (a se vedea [79]), iar partea a III-a cuprinde capitolele V şi VI, precum şi o Anexă. Pentru notaţiile şi noţiunile neexplicate în lucrarea de faţă, trimitem la [78] şi [79].

CAPITOLUL V

LEGĂTURI CU TEORIA CELEI MAI BUNE APROXIMĂRI

În acest capitol vom prezenta unele aplicaţii ale bazelor în teoria celei mai bune aproximări precum şi unele aplicaţii ale teoriei celei mai bune aproximări în studiul bazelor.

Reamintim că dacă G este un subspaţiu vectorial închis al unui spaţiu Banach E, se numeşte *element de cea mai bună aproximaţie* (prin elementele lui G) al unui element $x \in E$, orice element $g_0 \in G$ cu proprietatea

$$\| x - g_0 \| = \inf_{g \in G} \| x - g \| . \tag{5.1}$$

În cazul particular cînd G este un subspaţiu n-dimensional al lui E, unde $n < \infty$, adică

$$G = [x_1, \ldots, x_n] \quad (x_1, \ldots, x_n \text{ liniar independente}), \tag{5.2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 6, P. 673–804, BUCUREŞTI, 1964.

elementele din G se numesc *polinoame*. Se știe că orice element are cel puțin un polinom de cea mai bună aproximație. În cazul cînd G este un subspațiu de codimensiune finită $n < \infty$, adică

$$G \oplus [x_1, \ldots, x_n] = E \quad (x_1, \ldots, x_n \text{ liniar independente}), \tag{5.3}$$

elementele din G se numesc *complementare polinomiale*.

§ 1. BAZE ȘI CEA MAI BUNĂ APROXIMAȚIE

Chiar și în cazurile concrete în care existența și unicitatea elementelor de cea mai bună aproximație este asigurată (de exemplu, în cazul celei mai bune aproximări a funcțiilor continue pe un segment $[a, b]$ prin polinoame algebrice de grad $\leq n$), calcularea efectivă a elementelor de cea mai bună aproximație prezintă, în general, dificultăți deosebite, deoarece aplicația $x \to g_0(x)$ (unde $g_0(x) \in G$ este elementul de cea mai bună aproximație a elementului x) a lui E pe G nu este, în general, liniară. În paragraful de față vom vedea că în orice spațiu Banach E cu bază $\{x_n\}$ se poate introduce o nouă normă, echivalentă cu cea inițială, astfel încît în această nouă normă aplicația de cea mai bună aproximare prin subspațiile (5.2) și (5.3) corespunzătoare bazei $\{x_n\}$ devine liniară, iar elementele de cea mai bună aproximație se calculează cu ușurință.

Definiția 5.1. Se spune că norma dintr-un spațiu Banach E cu bază $\{x_n\}$ este o *T-normă* (relativ la baza $\{x_n\}$), dacă:

a) Pentru orice $x \in E$ și $n = 1, 2, \ldots$ există un polinom unic $g_n(x) \in L_{(n)} = [x_1, \ldots, x_n]$ de cea mai bună aproximație a lui x.

b) Acest polinom coincide cu a n-a sumă parțială a dezvoltării elementului x după baza $\{x_n\}$, adică avem

$$g_n(x) = s_n(x) \quad (x \in E,\ n = 1, 2, \ldots). \tag{5.4}$$

Vom nota T-normele prin ((((.

Definiția 5.2. Se spune că norma dintr-un spațiu Banach E cu bază $\{x_n\}$ este o *K-normă* (relativ la baza $\{x_n\}$), dacă:

a) Pentru orice $x \in E$ și $n = 1, 2, \ldots$ există o complementară polinomială unică $g^n(x) \in L^{(n)} = [x_{n+1}, x_{n+2}; \ldots]$ de cea mai bună aproximație a lui x.

b) Această complementară polinomială coincide cu al n-lea rest $r_n(x)$ al dezvoltării elementului x după baza $\{x_n\}$, adică

$$g^n(x) = r_n(x) = x - s_n(x) \quad (x \in E,\ n = 1, 2, \ldots). \tag{5.5}$$

Vom nota K-normele prin)))).

Definiția 5.3. Se spune că norma dintr-un spațiu Banach E cu bază $\{x_n\}$ este o *TK-normă* (relativ la baza $\{x_n\}$) dacă ea este simultan o T-normă și o K-normă relativ la baza $\{x_n\}$.

Vom nota TK-normele prin (( )).

Definițiile 5.1, 5.2 și 5.3 au fost date de V. N. Nikolski ([62], [63]). În cele ce urmează vom omite, pentru prescurtare, cuvintele „relativ la baza $\{x_n\}$”.

PROPOZIŢIA 5.1. *Fie E un spaţiu Banach cu bază $\{x_n\}$.*

a) *Dacă norma din E este o T-normă $((\ (($, avem*

$$((\sum_{i=l}^{\infty} \alpha_i x_i ((< ((\sum_{i=l-1}^{\infty} \alpha_i x_i ((\tag{5.6}$$

pentru orice şir de scalari $\{\alpha_n\}_{l-1}^{\infty} \subset K$ cu $\alpha_{l-1} \neq 0$ pentru care seriile din (5.6) converg.

b) *Dacă norma din E este o K-normă $))\ ))$, avem*

$$)) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)) <)) \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i)) \tag{5.7}$$

pentru orice scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in K$ cu $\alpha_{n+1} \neq 0$. Prin urmare, în acest caz baza $\{x_n\}$ este strict monotonă.

c) *Dacă norma din E este o TK-normă $((\ ))$, avem*

$$((\sum_{i=l}^{n} \alpha_i x_i)) < ((\sum_{i=l-1}^{n+1} \alpha_i x_i)) \tag{5.8}$$

pentru orice scalari $\alpha_{l-1}, \alpha_l, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in K$ cu $|\alpha_{l-1}| + |\alpha_{n+1}| \neq 0$ (V. N. Nikolski [63], § 4 şi § 5).

TEOREMA 5.1. *Fie E un spaţiu Banach cu bază $\{x_n\}$, şi fie $\{f_n\} \subset E^*$ şirul de funcţionale coeficienţi asociat bazei $\{x_n\}$.*

a) *În E se poate introduce o T-normă echivalentă cu norma iniţială a spaţiului E, prin formula :*

$$((x ((= \max_{1 \leqslant n < \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \| f_i(x) x_i \| + \| \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x) x_i \| \right\}. \tag{5.9}$$

b) *În E se poate introduce o K-normă echivalentă cu norma iniţială a spaţiului E, prin formula :*

$$)) x)) = \sup_{1 \leqslant n < \infty} \| \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i \| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \| f_i(x) x_i \|. \tag{5.10}$$

c) *În E se poate introduce o TK-normă echivalentă cu norma iniţială a spaţiului E, prin formula :*

$$((x)) = \sup_{1 \leqslant n < \infty} \{ ((\sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i ((+)) \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x) x_i))\} \tag{5.11}$$

(V. N. Nikolski [63], § 4 şi § 5).

După cum a observat V. Istrăţescu [38], norma echivalentă din teorema 5.1 poate fi aleasă chiar strict convexă.

Fie E un spaţiu Banach, $\{x_n\}$ un şir din E, şi $L_{(n)} = [x_1, \ldots, x_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Vom nota prin $\mu_n(x)$ cea mai bună aproximaţie a lui $x \in E$ prin elementele lui $L_{(n)}$, adică

$$\mu_n(x) = \inf_{g \in L_{(n)}} \| x - g \| \quad (x \in E, n = 1, 2, \ldots). \tag{5.12}$$

COROLARUL 5.1. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$. Atunci există o constantă A, $0 < A \leqslant 1$, depinzînd numai de baza $\{x_n\}$, astfel încît*

$$A \; \|r_n(x)\| \leqslant \mu_n(x) \leqslant \|r_n(x)\| \quad (x \in E, \; n = 1, 2, \ldots), \tag{5.13}$$

unde prin $r_n(x)$ se notează al n-lea rest al dezvoltării lui x după baza $\{x_n\}$ (adică $r_n(x) = x - s_n(x)$).

Corolarul 5.1 a fost demonstrat de V. N. Nikolski ([63], § 7). Acest corolar ne arată că dacă $\{x_n\}$ este o bază a spațiului E, $\mu_n(x)$ şi $\| r_n(x) \|$ au acelaşi ordin de mărime. Prin urmare, dacă vrem să clasificăm elementele $x \in E$ după rapiditatea convergenței către 0 a şirurilor $\{\mu_n(x)\}$, putem să ne servim de şirurile $\{ \|r_n(x)\| \}$, care se calculează mult mai uşor.

Vom considera acum problemele analoage pentru baze necondiționate. Vom folosi notațiile din [78], Cap. II, § 9 şi § 11.

D e f i n i ț i a 5.4. Se spune că norma dintr-un spațiu Banach E cu bază necondiționată $\{x_n\}$ este o *NT-normă* (relativ la $\{x_n\}$), dacă:

a) Pentru orice $x \in E$ şi $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathfrak{D}$ există un polinom unic $g_{i_1, \ldots, i_n}(x) \in L_{(i_1, \ldots, i_n)} = [x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}]$ de cea mai bună aproximație a lui x.

b) Acest polinom coincide cu *a* $(i_1, \ldots, i_n)$ — a sumă parțială a dezvoltării elementului x după baza $\{x_n\}$, adică avem

$$g_{i_1, \ldots, i_n}(x) = s_{i_1, \ldots, i_n}(x) \quad (x \in E, \; (i_1, \ldots, i_n) \in \mathfrak{D}). \tag{5.14}$$

Vom nota NT-normele prin ((.

D e f i n i ț i a 5.5. Se spune că norma dintr-un spațiu Banach E cu bază necondiționată $\{x_n\}$ este o *NK-normă* (relativ la $\{x_n\}$), dacă:

a) Pentru orice $x \in E$ şi $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathfrak{D}$ există o complementară polinomială unică $g^{i_1, \ldots, i_n}(x) \in L^{(i_1, \ldots, i_n)} = [x_j]_{j \in \mathfrak{N}, \, j \neq i_1, \ldots, i_n}$ de cea mai bună aproximație a lui x.

b) Avem

$$g^{i_1, \ldots, i_n}(x) = r_{i_1, \ldots, i_n}(x) = x - s_{i_1, \ldots, i_n}(x) \quad (x \in E, \; (i_1, \ldots, i_n) \in \mathfrak{D}). \tag{5.15}$$

Vom nota NK-normele prin)).

D e f i n i ț i a 5.6. Se spune că norma dintr-un spațiu Banach E cu bază necondiționată $\{x_n\}$ este o *NTK-normă* (relativ la $\{x_n\}$), dacă ea este simultan o NT-normă şi o NK-normă relativ la $\{x_n\}$.

Vom nota NTK-normele prin ( ).

De exemplu, norma naturală dintr-un spațiu Hilbert H este o NTK-normă relativ la orice bază ortogonală $\{x_n\}$ a spațiului H.

Definițiile 5.4, 5.5 şi 5.6 au fost date în lucrarea [76]. În cele ce urmează vom omite, pentru prescurtare, cuvintele ,,relativ la $\{x_n\}$".

TEOREMA 5.2. *Fie E un spațiu Banach cu bază necondiționată $\{x_n\}$, şi fie $\{f_n\} \subset E^*$ şirul de funcționale asociat bazei $\{x_n\}$. Atunci în E se poate introduce o NK-normă echivalentă cu norma inițială a spațiului E, prin formula:*

$$(\, x \,) = \sup_{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathfrak{D}} \Big\| \sum_{j=1}^{n} f_{i_j}(x)\, x_{i_j} \Big\| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \| f_i(x)\, x_i \| . \tag{5.16}$$

Teorema 5.2 a fost demonstrată în [76] ([76], teorema 2).

Problema 5.1. Fie E un spaţiu Banach cu bază necondiţionată $\{x_n\}$. Se poate oare introduce în E o NT-normă echivalentă cu norma iniţială a spaţiului E? Dar o NTK-normă echivalentă cu norma iniţială?

Problema 5.1 a fost pusă în [76].

§ 2. CARACTERIZĂRI ALE ŞIRURILOR BAZICE

Definiţia 5.7. Fie $\{x_n\}$ un şir arbitrar de elemente dintr-un spaţiu Banach E. Se spune [63] că norma din E este o *T-normă slabă* relativ la şirul $\{x_n\}$, dacă pentru orice polinom $p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ şi orice $l \in \mathfrak{N}$ cu $l \leqslant n$ polinomul $g_l = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i x_i \in [x_1, \ldots, x_l]$ este un polinom de cea mai bună aproximaţie al lui p. Se spune că norma din E este o *K-normă slabă* relativ la şirul $\{x_n\}$, dacă pentru orice polinom $p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ şi orice $l \in \mathfrak{N}$ cu $l \leqslant n$ complementara polinomială $g^l = \sum_{i=l+1}^{n} \alpha_i x_i \in [x_{l+1}, \ldots, x_n]$ este o complementară polinomială de cea mai bună aproximaţie a lui p. Se spune că norma din E este o *TK-normă slabă* relativ la şirul $\{x_n\}$, dacă ea este simultan o T-normă slabă şi o K-normă slabă relativ la şirul $\{x_n\}$.

Importanţa acestor noţiuni constă în aceea că ele au sens pentru un şir arbitrar $\{x_n\}$. De asemenea, în definiţia de mai sus nu se cere unicitatea elementelor de cea mai bună aproximaţie respective.

Pentru un şir arbitrar $\{x_n\} \subset E$ vom nota

$$P = \{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K; \quad n = 1, 2, \ldots \}, \tag{5.17}$$

$$S_l (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{l} \alpha_i x_i & \text{pentru } l < n \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i & \text{pentru } l \geqslant n \end{cases} \qquad (l, n = 1, 2, \ldots) \tag{5.18}$$

$$R_l (p) = p - S_l (p) \quad (p \in P,\ l = 1, 2, \ldots). \tag{5.19}$$

PROPOZIŢIA 5.2. *Fie $\{x_n\}$ un şir de elemente dintr-un spaţiu Banach E.*

a) *Pentru ca norma din E să fie o T-normă slabă relativ la $\{x_n\}$, este necesar şi suficient ca*

$$\sup_{1 \leqslant n < \infty} \sup_{\substack{p \in P \\ \|p\| \leqslant 1}} \| R_n(p) \| = 1. \tag{5.20}$$

b) *Pentru ca norma din E să fie o K-normă slabă relativ la $\{x_n\}$, este necesar și suficient ca*

$$\sup_{1\leqslant n<\infty}\ \sup_{\substack{p\in P\\ \|p\|\leqslant 1}} \|S_n(p)\| = 1. \tag{5.21}$$

c) *Pentru ca norma din E să fie o TK-normă slabă relativ la $\{x_n\}$, este necesar și suficient să avem*

$$\max\Big(\sup_{1\leqslant n<\infty}\ \sup_{\substack{p\in P\\ \|p\|\leqslant 1}} \|R_n(p)\|,\ \sup_{1\leqslant n<\infty}\ \sup_{\substack{p\in P\\ \|p\|\leqslant 1}} \|S_n(p)\|\Big) = 1 \tag{5.22}$$

(V. N. Nikolski [63], § 8).

TEOREMA 5.3. *Fie $\{x_n\}$ un șir de elemente dintr-un spațiu Banach E astfel încît $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

1°. *$\{x_n\}$ este un șir bazic.*

2°. *În E se poate introduce o T-normă slabă relativ la $\{x_n\}$, echivalentă cu norma inițială a spațiului E.*

3°. *În E se poate introduce o K-normă slabă relativ la $\{x_n\}$, echivalentă cu norma inițială.*

4°. *În E se poate introduce o TK-normă slabă relativ la $\{x_n\}$, echivalentă cu norma inițială.*

5°. *În $[x_n]$ se poate introduce o T-normă slabă relativ la $\{x_n\}$, echivalentă cu norma inițială a spațiului $[x_n]$.*

6°. *În $[x_n]$ se poate introduce o K-normă slabă relativ la $\{x_n\}$, echivalentă cu cea inițială.*

7°. *În $[x_n]$ se poate introduce o TK-normă slabă relativ la $\{x_n\}$, echivalentă cu cea inițială.*

Echivalența 1° ⇔ 5° a fost demonstrată de V. N. Nikolski ([63], § 6). Ea rezultă și din [78], Cap. I, § 3, propoziția 1.1 și § 7, teorema 1.5.

Teorema 5.3 se poate aplica în spații concrete, pentru a stabili că un șir anumit este sau nu un șir bazic. De exemplu, folosind teorema 5.3, V. N. Nikolski ([63], § 7) a arătat că *dacă $\{i_n\}$ este un șir de numere naturale astfel încît*

$$\frac{i_{n+1}}{i_n} = 2j_n + 1 \qquad (n = 2, 3, \ldots), \tag{5.23}$$

unde j_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sînt numere întregi pozitive, atunci în spațiul C $([-1, +1])$ șirul $\{x_n\}$ definit prin

$$x_n(t) = \cos i_n \arccos t \quad (t \in [-1, +1],\ n = 1, 2, \ldots) \tag{5.24}$$

este un șir bazic. De altfel, am menționat acest rezultat și în [79]’ Cap. III, § 1.

Caracterizările șirurilor bazice, date în teorema 5.3 de mai sus, sînt exprimate în termenii proprietăților polinoamelor de cea mai bună aproximație în sensul unei noi norme convenabile. Se pot da și caracterizări în termenii proprietăților polinoamelor de cea mai bună aproximație în sensul normei inițiale a spațiului E. Avem

TEOREMA 5.4. *Fie E un spaţiu Banach şi fie* (x_n, f_n) $(\{x_n\}\subset E$, $\{f_n\}\subset E^*)$ *un sistem biortogonal E-fundamental. Pentru* $x\in E$, *fie* $g_n(x)\in[x_1, \ldots, x_n]$ *un polinom de cea mai bună aproximaţie* 1) *al lui* x $(n = 1, 2, \ldots)$. *Următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

1°. $\{x_n\}$ *este o bază a spaţiului* E.

2°. *Pentru orice* $x\in E$ *avem*

$$\sup_{1\leqslant n<\infty} |||\, g_n(x)\,||| < \infty, \tag{5.25}$$

unde am notat $|||\, p\,||| = \sup\limits_{1\leqslant l\leqslant m} \left\| \sum\limits_{i=1}^{l} f_i(p)\, x_i \right\|$ $\left(p = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \in P\right)$.

Teorema 5.4 a fost demonstrată de S. R. Foguel ([26], teorema 4).

§ 3. BAZE ŞI APROXIMĂRI DE ACELAŞI ORDIN CU CEA MAI BUNĂ APROXIMAŢIE

În cele precedente am văzut că dacă $\{x_n\}$ este un şir fundamental dintr-un spaţiu Banach E, polinoamele de cea mai bună aproximaţie $g_n(x)$ relativ la subspaţiile $G_n = [x_1, \ldots, x_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nu pot fi în general alese astfel încît aplicaţiile $x \to g_n(x)$ $(x\in E,\ n = 1, 2, \ldots)$ să fie liniare; am văzut, de asemenea, că acest lucru devine posibil dacă se presupune că $\{x_n\}$ este o bază a spaţiului E şi se consideră polinoamele de cea mai bună aproximaţie $g_n(x)$ în sensul unei noi norme convenabile, echivalente cu norma iniţială a spaţiului E.

Se pune, în mod natural, problema următoare: în ce condiţii asupra şirului $\{x_n\}$ există un şir de aplicaţii liniare continue $\{u_n\}$, $u_n\in L(E, [x_1, \ldots, x_n])$, astfel încît $u_n(x)$ să dea, pentru orice $x\in E$ şi $n = 1, 2, \ldots$, o aproximaţie de acelaşi ordin cu cea mai bună aproximaţie (în sensul normei iniţiale din E)

$$\mu_n(x) = \inf_{g\in G} \| x - g\|$$

a lui x prin G? Cu alte cuvinte, în ce condiţii există un şir $\{u_n\}$, $u_n\in L(E,[x_1, \ldots, x_n])$, şi o constantă $C \geqslant 1$ independentă de x şi n, astfel încît să avem

$$\| x - u_n(x)\| \leqslant C\, \mu_n(x) \qquad (x\in E,\ n = 1, 2, \ldots)? \tag{5.26}$$

Dacă aceasta are loc, $\{x_n\}$ este, evident, o bază aproximativă a spaţiului E.

Un răspuns parţial la problema de mai sus este dat de

TEOREMA 5.5. *Fie* $\{x_n\}$ *un şir fundamental de elemente dintr-un spaţiu Banach* E, *astfel încît* $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

1°. $\{x_n\}$ *este o bază a spaţiului* E.

---

1) Cel puţin un asemenea $g_n(x)$ sigur există.

2°. *Există o constantă $C \geqslant 1$ independentă de p şi n, astfel încît*

$$\| p - S_n(p) \| \leqslant C\mu_n(p) \qquad (p \in P, n = 1, 2, \ldots), \quad (5.27)$$

unde P şi $\{S_n\}$ sînt definite prin (5.17) *şi* (5.18) *respectiv.*

Dacă 1°, 2° *au loc, avem*

$$\| x - s_n(x) \| \leqslant C\mu_n(x) \qquad (x \in E, \ n = 1, 2, \ldots), \quad (5.28)$$

unde $\{s_n\}$ este şirul de operatori sumă parţială asociat bazei $\{x_n\}$.

Implicaţia 1° $\Rightarrow$ (5.28) nu este altceva decît corolarul 5.1 din § 1.

§ 4. BAZE POLINOMIALE ŞI BAZE POLINOMIALE STRICTE

Definiţia 5.8. Fie $\{x_n\}$ un şir fundamental într-un spaţiu Banach cu bază E, avînd proprietatea că orice subşir finit al lui $\{x_n\}$ este liniar independent (vom spune că un asemenea şir este *liniar independent în sens clasic*). Se numeşte *bază polinomială* a spaţiului E relativ a $\{x_n\}$ orice bază $\{y_n\}$ a spaţiului E de forma

$$y_n = \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^{(n)} x_i \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad (5.29)$$

şi *bază polinomială strictă* a spaţiului E relativ la $\{x_n\}$ orice bază $\{y_n\}$ de forma (5.29), unde

$$m(n) = n, \qquad \alpha_n^{(n)} \neq 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (5.30)$$

Este evident că orice bază polinomială strictă este o bază polinomială şi orice bază este o bază polinomială strictă relativ la ea însăşi.

Din condiţia (5.30) rezultă că o bază polinomială strictă $\{y_n\}$ relativ la $\{x_n\}$ conţine polinoame de orice ordin [2]), ordinul lui y_n fiind egal cu n $(n = 1, 2, \ldots)$ şi avem

$$[x_1, \ldots, x_n] = [y_1, \ldots, y_n] \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (5.31)$$

Am văzut în [78] ([78], Cap. I, § 9, corolarul 1.2) că problema existenţei bazelor polinomiale relativ la un şir fundamental $\{x_n\}$ într-un spaţiu cu bază E, liniar independent în sens clasic, are un răspuns afirmativ. Dimpotrivă, problema existenţei bazelor polinomiale *stricte* relativ la un şir fundamental $\{x_n\}$ într-un spaţiu cu bază E, liniar independent în sens clasic, are un răspuns negativ, cum ne arată

Exemplul 5.1. Fie $E = C([a, b])$ şi fie $\{x_n\} \subset E$ definit prin

$$x_n(t) = t^{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (5.32)$$

Atunci $\{x_n\}$ este fundamental în E şi liniar independent în sens clasic, dar spaţiul E nu are nici o bază polinomială strictă relativ la $\{x_n\}$.

---

[2]) Se numeşte *ordinul* unui polinom $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$ numărul $\max_{\alpha_l \neq 0} l$.

TEOREMA 5.6. *Fie* $\{x_n\}$ *un şir fundamental liniar independent în sens clasic într-un spaţiu Banach. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

1°. *Există un şir de endomorfisme* $\{v_n\}\subset\mathcal{L}(E, E)$ *cu proprietăţile:*

a) $v_n(x)\in[x_1, \ldots, x_n]$ $(x\in E,\ n = 1, 2, \ldots)$;

b) $v_n(p) = p$ *pentru orice* $p\in[x_1, \ldots, x_n]$;

c) *Pentru orice* $x\in E$ *ordinul lui* $v_{n+1}(x)$ *este* $\geqslant$ *ordinul lui* $v_n(x)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(x) = x$ *pentru orice* $x\in E$.

2°. E *are o bază polinomială strictă relativ la* $\{x_n\}$ (V. N. Nikolski [63], § 7).

În spaţiul $C([a, b])$ se cunoaşte următorul rezultat al lui S. M. Lozinski şi F. I. Harşiladze (a se vedea [60], anexa 3):

PROPOZIŢIA 5.3. *Fie* $E = C([a, b])$ *şi fie* $\{x_n\}\subset E$ *şirul definit prin* (5.32). *Atunci nu există nici un şir de endomorfisme* $\{v_n\}\subset\mathcal{L}(E,E)$ *avînd proprietăţile* a), b) *şi* d) *din teorema* 5.6.

Teorema 5.6 şi propoziţia 5.3 implică exemplul 5.1. Reciproc, exemplul 5.1 şi teorema 5.6 implică o formă mai slabă a propoziţiei 5.3, în care intervine şi proprietatea c) din teorema 5.6. O consecinţă imediată a propoziţiei 5.3 (în care d) se înlocuieşte printr-o condiţie mai tare) a fost regăsită ulterior de D. L. Berman [10].

Problema 5.2. Se poare oare omite în afirmaţia 1° din teorema 5.6 proprietatea c)?

Această problemă a fost pusă de V. N. Nikolski ([63], § 7), care consideră probabil că răspunsul este, în general, negativ. În legătură cu această problemă observăm că se poate demonstra următorul rezultat pozitiv:

PROPOZIŢIA 5.4. *Fie* $\{x_n\}$ *un şir fundamental liniar independent în sens clasic într-un spaţiu Banach* E *şi fie* $\{v_n\}\subset\mathcal{L}(E, E)$ *un şir de endomorfisme cu proprietăţile a), b), d) din afirmaţia 1° din teorema* 5.6. *Dacă există o normă* $|||\ \ |||$ *pe spaţiul* E, *echivalentă cu norma iniţială, astfel încît*

$$|||v_n||| = \sup_{|||x|||\leqslant 1} |||v_n(x)||| \leqslant 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5.33}$$

sau astfel încît

$$|||v_n(x)||| \leqslant |||v_{n+1}(x)||| \qquad (x\in E,\ n = 1, 2, \ldots), \tag{5.34}$$

atunci spaţiul E *are o bază polinomială strictă relativ la* $\{x_n\}$.

Din metoda de demonstraţie a implicaţiei 1° $\Rightarrow$ 2° din teorema 5.6 rezultă partea de suficienţă a următorului rezultat (partea de necesitate este o consecinţă imediată a afirmaţiei a) din teorema 5.1):

PROPOZIŢIA 5.5. *Pentru ca un spaţiu Banach* E *să aibă o bază, este necesar şi suficient să existe un şir de subspaţii* $\{G_n\}$ *de forma*

$$G_n = [x_1, \ldots, x_n] \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5.35}$$

unde $\{x_n\}$ *este un şir liniar independent în sens clasic şi fundamental în* E, *şi o nouă normă* $|||\ \ |||$ *pe* E, *echivalentă cu cea iniţială, astfel încît orice* $x\in E$ *să aibă, în norma* $|||\ \ |||$, *un singur polinom de cea mai bună* *aproximație* $v_n(x) \in G_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *și încît aplicațiile* $x \to v_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *să fie liniare. În acest caz E are o bază polinomială strictă relativ la* $\{x_n\}$.

Partea de suficiență se poate întări. Anume, avem

TEOREMA 5.7. *Pentru ca un spațiu Banach E să aibă o bază, este suficient (și, evident, necesar) să existe un șir de subspații* $\{G_n\}$ *de forma*

$$G_n = [x_1, \ldots, x_n] \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5.36}$$

unde $\{x_n\} \subset E$ *este un șir liniar independent în sens clasic și fundamental în E, un șir de aplicații liniare continue* $\{v_n\} \subset \mathfrak{L}(E, [x_1, \ldots, x_n])$ *și o nouă normă* $|||\ \ |||$ *pe E, echivalentă cu cea inițială, astfel încît în norma* $|||\ \ |||$, $v_n(x)$ *să fie un polinom de cea mai bună aproximație (nu neapărat unic) al lui x prin elementele lui* $[x_1, \ldots, x_n]$, *oricare ar fi* $x \in E$, $n = 1, 2, \ldots$ *În acest caz E are o bază polinomială strictă relativ la* $\{x_n\}$ (V.N.Nikolski [64], teorema 3).

§ 5. ȘIRURI FUNDAMENTALE LINIAR INDEPENDENTE ÎN SENS CLASIC ȘI CEA MAI BUNĂ APROXIMAȚIE

Fie $\{x_n\}$ un şir fundamental liniar independent în sens clasic într-un spațiu Banach E. Vom nota

$$\mu_n(x) = \inf_{g \in [x_1, \ldots, x_n]} \| x - g \| \quad (x \in E,\ n = 1, 2, \ldots). \tag{5.37}$$

TEOREMA 5.8. *Fie* $\{x_n\}$ *un șir fundamental liniar independent în sens clasic într-un spațiu Banach E, și* $\{\varepsilon_n\}$ *un șir de numere pozitive convergînd monoton către* 0. *Atunci pentru orice* $x \in E$ *există* $x' \in E$ *și* $x'' \in E$ *astfel încît*

$$x = x' + x'', \tag{5.38}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu_n(x')}{\varepsilon_n} = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\mu_n(x'')}{\varepsilon_n} = 0 \tag{5.39}$$

(A. I. Markuşevici [53], teorema 2).

Elementele unui spaţiu Banach E cu un şir fundamental liniar independent în sens clasic $\{x_n\}$ se pot clasifica după rapiditatea cu care numerele $\mu_n(x)$ tind către zero. În particular, vom da aici

Definiția 5.9. Fie E un spaţiu Banach cu un şir fundamental liniar independent în sens clasic $\{x_n\}$. Un element $x \in E$ se numeşte *element cvasianalitic* (relativ la $\{x_n\}$), dacă

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu_n(x)}{\rho^n} = 0, \tag{5.40}$$

unde $0 < \rho < 1$ şi ρ este independent de n.

De exemplu, în spaţiul $E = C\ ([a,\ b])$ elementele cvasianalitice relativ la şirul (5.32) nu sînt altceva decît funcţiile cvasianalitice în sensul lui Bernstein [11].

Din teorema 5.8 rezultă

COROLARUL 5.2. *Fie* E *un spaţiu Banach cu un şir fundamental liniar independent în sens clasic* $\{x_n\}$. *Atunci orice element* $x \in E$ *este suma a două elemente cvasianalitice.*

Vom considera acum cazul particular cînd şirul $\{x_n\}$ este o bază în sens larg.

PROPOZIŢIA 5.6. *Fie* $\{x_n\} \subset E$ *o bază în sens larg a unui spaţiu Banach* E, $\{f_n\} \subset E^*$ *şirul de funcţionale asociat, şi* $\{s_n\}$ $\left(s_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i\right)$ *şirul de operatori sumă parţială asociat.*

a) *Dacă* $x \in E$ *satisface*

$$\lim_{n \to \infty} \| s_n \| \mu_n(x) = 0, \tag{5.41}$$

atunci $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, x_i$.

b) *Dacă* $x \in E$ *satisface*

$$\varliminf_{n \to \infty} \| s_n \| \mu_n(x) = 0, \tag{5.42}$$

atunci seria $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, x_i$ *posedă un şir de sume parţiale* $\{s_{i_n}(x)\}$ *care converge către* x (A. I. Markuşevici [53], teorema 1).

Din propoziţia 5.6 şi teorema 5.8 rezultă

TEOREMA 5.9. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază în sens larg a unui spaţiu Banach* E *şi fie* $\{f_n\} \subset E^*$ *şirul de funcţionale asociat. Atunci orice* $x \in E$ *se poate reprezenta ca o sumă*

$$x = x' + x'', \tag{5.43}$$

unde seriile $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x')\, x_i$ *şi* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x'')\, x_i$ *posedă cîte un şir de sume parţiale convergent către* x' *şi respectiv* x''.

Teorema 5.9 a fost dată de A. I. Markuşevici ([53], teorema 3 şi [54]). În cazul particular al seriilor Fourier din $C\ ([-\pi,\ \pi])$, ea a fost dată de D. E. Menşov ([56], teorema 4).

Este interesant de comparat teorema 5.9 de mai sus cu teorema lui M. I. Kadeţ despre bazele cu paranteze (a se vedea [79], Cap. III, § 12, teorema 3.23).

§ 6. COMPACITATE, BAZE APROXIMATIVE ŞI CEA MAI BUNĂ APROXIMAŢIE

PROPOZIŢIA 5.7. *Fie* $\{w_n\}$ *un şir de aplicaţii continue de rang finit (nu neapărat liniare) ale unui spaţiu Banach E în el însuşi, astfel încît*

$$\lim_{n\to\infty} w_n(x) = x \qquad (x \in E), \tag{5.44}$$

şi fie A o mulţime din E. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

1°. *A este relativ compactă.*

2°. *A este mărginită şi* (5.44) *are loc uniform în A, adică*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \| x - w_n(x) \| = 0. \tag{5.45}$$

Implicaţia 1° ⇒ 2° are loc şi în cazul cînd aplicaţiile w_n nu sînt de rang finit, iar implicaţia 2° ⇒ 1° are loc şi în cazul cînd aplicaţiile w_n nu sînt continue.

În cazul particular cînd aplicaţiile w_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sînt liniare, implicaţia 1° ⇒ 2° a fost demonstrată de I. Maddaus [51]. În acest caz, spaţiul E are o bază aproximativă (a se vedea [79], Cap. III, § 10, propoziţia 3.12 a)). În cazul particular cînd spaţiul E are o bază $\{x_n\}$ şi w_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sînt operatorii sumă parţială asociaţi bazei $\{x_n\}$, echivalenţa 1° ⇔ 2° se află de exemplu în cartea lui L. A. Liusternik şi V. I. Sobolev ([50], Cap. IV, § 28). De altă parte, în cazul particular cînd E are un şir fundamental $\{x_n\}$ care este un „sistem T" (adică orice element $x \in E$ are un singur polinom de cea mai bună aproximaţie în fiecare $G_n = [x_1, \ldots, x_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$) şi $w_n(x)$ este polinomul de cea mai bună aproximaţie al lui x prin elementele lui $G_n = [x_1, \ldots, x_n]$, echivalenţa 1° ⇔ 2° a fost demonstrată de M. I. Kadeţ ([41], lema 2).

Problema 5.3. Fie E un spaţiu Banach separabil, $\{x_n\}$ un şir fundamental în E, şi A o mulţime convexă din E, simetrică relativ la 0 (adică $x \in A \Rightarrow -x \in A$). Există oare un şir de aplicaţii *liniare* continue $\{v_n\}$, $v_n \in \mathfrak{L}(E, [x_1, \ldots, x_n])$, astfel încît

$$\sup_{x\in A} \| x - v_n(x) \| = \sup_{x\in A} \mu_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5.46}$$

sau, cel puţin, astfel încît

$$\sup_{x\in A} \| x - v_n(x) \| \leqslant C \sup_{x\in A} \mu_n(x), \tag{5.47}$$

unde C este o constantă independentă de x şi n?

Prima întrebare din problema 5.3 a fost pusă de S. M. Nikolski [61]. Importanţa problemei 5.3 reiese din

PROPOZIŢIA 5.8. *Fie E un spaţiu Banach separabil şi* $\{x_n\}$ *un şir fundamental în E. Dacă pentru orice mulţime convexă, simetrică relativ la* 0 *şi relativ compactă A din E răspunsul la problema* 5.3 *este afirmativ (unde şirul* $\{v_n\}$ *depinde de A), atunci spaţiul E are o bază aproximativă generalizată.*

Din [79], Cap. III, § 10, teorema 3.17, rezultă că în acest caz spaţiul E are proprietatea de aproximare (în sensul lui Grothendieck [32]). Prin urmare, dacă răspunsul la problema 5.3 (cu A relativ compactă) ar fi afirmativ pentru orice spaţiu Banach E, ar rezulta că orice spaţiu Banach E are proprietatea de aproximare.

CAPITOLUL VI

PROPRIETĂŢI ALE BAZELOR ÎN SPAŢII BANACH CONCRETE

§ 1. PROPRIETĂŢI ALE BAZELOR NECONDIŢIONATE ÎN SPAŢIILE $L^p([0,1])$ $(p \geqslant 1)$

În cele precedente am văzut că sistemul ortogonal al lui Haar este o bază a spaţiului 3) $L^p([0,1])$ pentru orice $p \geqslant 1$ ([78], Cap. I, § 2, exemplul 1.6), şi chiar o bază necondiţionată a spaţiului $L^p([0,1])$ pentru orice $p > 1$ ([78], Cap. II, § 9). Spaţiul $L^1([0,1])$ nu are însă nici o bază necondiţionată ([78], Cap. II, § 9, exemplul 2.13). În paragraful de faţă vom considera proprietăţi ale unei baze necondiţionate arbitrare a spaţiului $L^p([0,1])$ $(p > 1)$.

Definiţia 6.1. Fie $\{x_n\}$ un şir de elemente din spaţiul $L^p([0,1])$ $(p > 1)$. Să considerăm spaţiul Banach de şiruri de scalari

$$A^p_{\{x_n\}} = \{\{\alpha_n\} \subset K \mid \int_0^1 [\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 |x_i(t)|^2]^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}t < \infty\}, \tag{6.1}$$

în care norma este definită prin $\|\{\alpha_n\}\|_p = \int_0^1 [\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 |x_i(t)|^2]^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}t$. Se spune că şirul $\{x_n\}$ are *proprietatea* (A), dacă el este o bază în sens larg a spaţiului $L^p([0,1])$ şi dacă pentru orice $x \in L^p([0,1])$ avem $\{f_n(x)\} \in A^p_{\{x_n\}}$, unde $\{f_n\} \subset \{L^p([0,1])\}^*$ este şirul de funcţionale asociat 4) lui $\{x_n\}$. Se spune că şirul $\{x_n\}$ are *proprietatea* (B), dacă el este o bază în sens larg a spaţiului $L^p([0,1])$ şi dacă pentru orice $\{\alpha_n\} \in A^p_{\{x_n\}}$ există un element $x \in L^p([0,1])$ astfel încît $f_n(x) = \alpha_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (V. F. Gapoşkin [29], definiţiile 1 şi 2).

PROPOZIŢIA 6.1. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază în sens larg a spaţiului* $L^p([0,1])$ $(p > 1)$, *şi fie* $\{f_n\}$ *şirul de funcţionale asociat.*

a) *Şirul* $\{x_n\}$ *are proprietatea* (A) *dacă şi numai dacă există o constantă* $m > 0$ *astfel încît*

$$m \|\{f_n(x)\}\|_p \leqslant \|x\| \quad (x \in L^p([0,1])). \tag{6.2}$$

---

3) Menţionăm, în completare, că sistemul ortogonal al lui Haar formează o bază şi în spaţiile Orlicz separabile (W. Orlicz [65], p. 216; a se vedea şi monografia lui M. A. Krasnoselski şi Ia. B. Rutiţki [47], p. 122–126), şi chiar o bază monotonă a acestor spaţii (M. Z. Solomiak [80]). H. W. Ellis şi I. Halperin [24] au construit baze Haar generalizate pentru spaţii Banach separabile L^{λ} pe un spaţiu cu măsură general (nu neapărat metric), unde λ poate fi p-norma clasică sau chiar o funcţie mult mai generală. Există însă şi unele spaţii L^{λ} în care nu se cunoaşte nici o bază.

4) Adică $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ (A se vedea [79], Cap. III, § 5).

b) *Şirul* $\{x_n\}$ *are proprietatea* (B) *dacă şi numai dacă există o constantă* $M > 0$ *astfel încît*

$$\|x\| \leqslant M \, \|\{f_n(x)\}\|_p \qquad (x \in L^p([0,1])). \tag{6.3}$$

c) *Şirul* $\{x_n\}$ *are proprietatea* (A) *dacă şi numai dacă şirul asociat* $\{f_n\} \subset \{L^p([0,1])\}^* \equiv L^q([0,1])$, *unde* $q = \dfrac{p}{p-1}$, *are proprietatea* (B) *în* $L^q([0,1])$.

Necesitatea condiţiilor (6.2) şi (6.3) a fost demonstrată de V. F. Gapoşkin ([29], lemele 2 şi 3). Suficienţa lui (6.2) este imediată, iar suficienţa condiţiei (6.3) a fost observată de C. Foiaş. Partea de necesitate din c) a fost demonstrată de V. F. Gapoşkin ([29], lema 4). Partea de suficienţă din c) se poate arăta folosind izometria $(A^q_{\{f_n\}})^* \equiv A^p_{\{x_n\}}$.

TEOREMA 6.1. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază în sens larg a spaţiului* $L^p([0,1])$ ($p>1$), *şi fie* $\{f_n\}$ *şirul de funcţionale asociat. Următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

1°. *Şirul* $\{x_n\}$ *are proprietăţile* (A) *şi* (B).

2.° $A^p_{\{x_n\}} = \{\{f_n(x)\} \mid x \in L^p([0,1])\}$.

3°. *Există două constante* $m > 0$ *şi* $M \geqslant m$ *astfel încît*

$$m \|\{f_n(x)\}\|_p \leqslant \|x\| \leqslant M \|\{f_n(x)\}\|_p \qquad (x \in L^p([0,1])). \tag{6.4}$$

4°. $\{x_n\}$ *este o bază necondiţionată a spaţiului* $L^p([0,1])$.

Implicaţiile 4°⇔1°⇒3° au fost demonstrate de V. F. Gapoşkin ([29], teorema 1). Echivalenţa 1°⇔2° este o consecinţă imediată a definiţiei 6.1, iar implicaţia 3°⇒1° rezultă din propoziţia 6.1.

Deoarece în spaţiul $L^p([0,1])$ ($1 < p \neq 2$) nu există nici o bază simetrică (a se vedea [78], Cap. II, § 14, exemplul 2.19) şi deoarece două baze sînt echivalente dacă şi numai dacă mulţimile de coeficienţi corespunzătoare coincid ([79], Cap. III, § 8, teorema 3.12), rezultă

COROLARUL 6.1. *Pentru orice bază* $\{x_n\}$ *a spaţiului* $L^p([0,1])$ ($1 < p \neq 2$) *există o permutare* $\{x_{\sigma(n)}\}$ *astfel încît* $A^p_{\{x_n\}} \neq A^p_{\{x_{\sigma(n)}\}}$.

Pentru cazul particular $p = 2$ este convenabilă

Definiţia 6.2. Fie $\{x_n\}$ un şir de elemente dintr-un spaţiu Hilbert H. Se spune că $\{x_n\}$ este un *şir besselian*, dacă el este o bază în sens larg a spaţiului H şi dacă pentru orice $x \in H$ avem $\{f_n(x)\} \in l^2$, unde $\{f_n\} \subset H^* \equiv H$ este şirul de funcţionale asociat lui $\{x_n\}$. Se spune că $\{x_n\}$ este un *şir hilbertian*, dacă el este o bază în sens larg şi dacă pentru orice $\{\alpha_n\} \in l^2$ există un element $x \in H$ astfel încît $f_n(x) = \alpha_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), unde $\{f_n\}$ este şirul de funcţionale asociat lui $\{x_n\}$ (N. K. Bari [8], definiţiile 1 şi 2).

În cazul particular cînd $H = L^2([0,1])$ şi

$$0 < \inf_{1 \leqslant n < \infty} \|x_n\| \leqslant \sup_{1 \leqslant n < \infty} \|x_n\| < \infty, \tag{6.5}$$

din definiţiile 6.1 şi 6.2 rezultă că $\{x_n\}$ este un şir besselian dacă şi numai dacă el are proprietatea (A), şi $\{x_n\}$ este un şir hilbertian dacă şi numai dacă el are proprietatea (B). Prin urmare, ţinînd seama că orice spaţiu Hilbert separabil H este izometric cu spaţiul $L^2([0,1])$, din teorema 6.1 rezultă

COROLARUL 6.2. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază în sens larg, mărginită*[5]), *a unui spaţiu Hilbert* H. *Următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

1°. *Baza în sens larg* $\{x_n\}$ *este simultan besseliană şi hilbertiană.*

2°. $\{\{f_n(x)\} \mid x \in H\} = l^2$.

3°. *Există două constante* $m > 0$ *şi* $M \geqslant m$ *astfel încît să avem*

$$m\,[\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|^2]^{\frac{1}{2}} \leqslant \| x \| \leqslant M\,[\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|^2]^{\frac{1}{2}} \quad (x \in H), \tag{6.6}$$

unde $\{f_n\} \subset H^*$ *este şirul de funcţionale asociat lui* $\{x_n\}$.

4°. $\{x_n\}$ *este o bază necondiţionată a spaţiului* H.

Implicaţiile 1° ⇒ 3° şi 1° ⇒ 4° au fost demonstrate de N. K. Bari ([8], teoremele 12 şi 9), iar implicaţia 4° ⇒ 1° de I. M. Gelfand [31]. Rezultate mai complete vor fi date în § 4 (teorema 6.10 şi corolarul 6.11).

Deoarece două baze sînt echivalente dacă şi numai dacă mulţimile de coeficienţi corespunzătoare coincid ([79], Cap. III, § 8, teorema 3.12), din corolarul 6.2 rezultă

COROLARUL 6.3. *Toate bazele necondiţionate mărginite ale unui spaţiu Hilbert* H *sînt echivalente* (N. K. Bari [8], p. 84 şi I. M. Gelfand [31]).

Să ne reîntoarcem la cazul $p \neq 2$. Folosind inegalităţile (6.4) se demonstrează

TEOREMA 6.2. *Nici un şir* $\{x_n\} \subset L^p([0,1])$ $(1 < p \neq 2)$ *cu proprietăţile*

$$\|x_n\| = 1, \quad |x_n(t)| \leqslant M < \infty \quad (t \in [0,1];\ n = 1, 2, \ldots) \tag{6.7}$$

nu este o bază necondiţionată a spaţiului $L^p([0,1])$ (V. F. Gapoşkin [29], teorema 2).

O întărire a teoremei 6.2, în cazul $1 < p < 2$, precum şi alte rezultate similare, vor fi date în paragraful următor (corolarul 6.8 şi 6.9).

PROPOZIŢIA 6.2. *Dacă un şir* $\{x_n\} \subset L^p([0,1])$ $(p \geqslant 2)$ *cu* $\|x_n\| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *este o bază necondiţionată a spaţiului* $L^p([0,1])$, *există o constantă* $m > 0$ *astfel încît*

$$m[\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|^p]^{\frac{1}{p}} \leqslant \|x\| \quad (x \in L^p([0,1])), \tag{6.8}$$

unde $\{f_n\} \subset \{L^p([0,1])\}^*$ *este şirul de funcţionale coeficienţi asociat bazei* $\{x_n\}$. *Dacă* $p > 2$, *există un şir* $\{\alpha_n\} \in l^p$ *astfel încît*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \, \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \| = \infty \tag{6.9}$$

(V. F. Gapoşkin [30], lemele 2 şi 3).

---

[5]) Adică satisfăcînd (6.5).

§ 2. PROPRIETĂȚI ALE ȘIRURILOR BAZICE ÎN SPAȚIILE $L^p([0, 1])$ $(p \geqslant 1)$.

Fie $p \geqslant 1$ și $\varepsilon > 0$. Vom introduce, după M. I. Kadeț [42], notația

$$M_\varepsilon^p = \{x \in L^p([0,1]) \mid \mu\{t \mid |x(t)| \geqslant \varepsilon \left[\int_0^1 |x(s)|^p \mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{p}}\} \geqslant \varepsilon\}, \tag{6.10}$$

unde prin $\mu(A)$ notăm măsura Lebesgue a mulțimii A.

Teorema 6.3. *Fie* $\{x_n\}$ *un șir în* $L^p([0,1])$ $(p \geqslant 1)$ *cu proprietatea că pentru orice* $\varepsilon>0$ *există un indice* n_ε *astfel încît* $x_{n_\varepsilon} \notin M_\varepsilon^p$. *Atunci există un subșir* $\{x'_n\} = \{x_{i_n}\}$ $(i_1 < i_2 < \ldots)$ *al lui* $\{x_n\}$ *cu proprietățile următoare :*

1°. *Șirul* $\{\frac{x'_n}{\|x'_n\|}\}$ *este un șir bazic echivalent cu baza naturală a spațiului* l^p.

2°. *Subspațiul* $[x'_n]$ *admite un complementar în* $L^p([0,1])$ (M. I. Kadeț și A. Pelczyński [43], teorema 2).

Un exemplu de șir bazic în $L^p([0,1])$ $(p \geqslant 1)$ avînd proprietățile 1° și 2° din teorema 6.3 este dat de un șir de funcții caracteristice ale unor mulțimi disjuncte două cîte două.

Definiția 6.3. Fie $p>2$. Un șir ortonormat $\{x_n\} \subset L^p([0,1])$ se numește șir p-lacunar, dacă există o constantă C astfel încît să avem

$$\left[\int_0^1 |\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)|^p \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant C \left[\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.11}$$

pentru orice număr întreg pozitiv n și orice scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ (a se vedea, de exemplu, [40], Cap. VII, § 1).

Deoarece pentru un șir ortonormat $\{x_n\} \subset L^p([0,1])$ $(p > 2)$ avem

$$\left[\int_0^1 |\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)|^p \, \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}} \geqslant \left[\int_0^1 |\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)|^2 \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} = [\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2]^{\frac{1}{2}},$$

rezultă că *un șir ortonormat* $\{x_n\} \subset L^p([0,1])$ $(p>2)$ *este p-lacunar dacă și numai dacă el este un șir bazic echivalent cu baza naturală a spațiului* l^2, și în acest caz operatorul $P : x \to \sum_{i=1}^\infty \left[\int_0^1 x(t) x_i(t) \, \mathrm{d}t\right] x_i$ este o proiecție continuă a lui $L^p([0,1])$ pe subspațiul său $[x_n]$. Un exemplu de șir p-lacunar $(p > 2)$ este dat de șirul funcțiilor Rademacher ([40], Cap. II, § 2).

Teorema 6.4. *Fie* $p > 2$ *și fie* E *un subspațiu vectorial închis infinitdimensional al spațiului* $L^p([0,1])$. *Următoarele afirmații sînt echivalente :*

1°. *Există un șir ortonormat p-lacunar* $\{x_n\}$ *astfel încît* $[x_n] = E$.

2°. E *este izomorf cu spațiul* l^2.

3°. *Nici un subspațiu al lui* E *nu este izomorf cu* l^p.

4°. *Nici un subspaţiu al lui* E, *complementat în* L^p, *nu este izomorf cu* l^p.

5°. *Există un număr* $\varepsilon > 0$ *astfel încît* $E \subset M^p_\varepsilon$.

6°. *Există un număr* $\varepsilon > 0$ *şi o bază necondiţionată* $\{y_n\}$ *a lui* E, *astfel încît* $y_n \in M^p_\varepsilon$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (M. I. Kadeţ şi A. Pelczyński [43], teorema 3).

COROLARUL 6.4. *Fie* $p > 2$ *şi fie* $\{x_n\}$ *un şir bazic necondiţionat mărginit*[6]) *din* $L^p([0,1])$. *Şirul* $\{x_n\}$ *este echivalent cu baza naturală a spaţiului* l^2 *dacă şi numai dacă există un număr* $\varepsilon > 0$ *astfel încît* $x_n \in M^p_\varepsilon$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (M. I. Kadeţ şi A. Pelczyński [43], corolarul 4).

Din corolarul 6.4 şi din teorema 6.4, afirmaţia 5°, se poate regăsi corolarul 6.3.

S. Banach [5] a pus problema dacă orice şir ortonormat conţine un subşir p-lacunar sau nu. M. I. Kadeţ şi A. Pelczyński au considerat [43] următoarea problemă mai generală:

Fiind dat un şir $\{x_n\} \subset L^p([0,1])$ $(p > 2)$, în ce condiţii $\{x_n\}$ conţine un subşir bazic $\{x_{i_n}\}$ echivalent cu baza naturală a lui l^2? Răspunsul este conţinut în

COROLARUL 6.5. *Fie* $p > 2$ *şi fie* $\{x_n\}$ *un şir din* $L^p([0,1])$, *slab convergent către* 0 *şi astfel încît* $\inf\limits_{1 \leqslant n < \infty} \|x_n\| > 0$. *Atunci există un subşir bazic* $\{x_{i_n}\}$ *care este echivalent sau cu baza naturală a lui* l^p, *sau cu baza naturală a lui* l^2. *Există un subşir bazic* $\{x_{i_n}\}$ *echivalent cu baza naturală a lui* l^2 *dacă şi numai dacă există un număr* $\varepsilon > 0$ *astfel încît* $x_n \in M^p_\varepsilon$ *pentru o infinitate de indici* n (M. I. Kadeţ şi A. Pelczyński [43], corolarul 5).

În particular, deoarece spaţiul $L^p([0,1])$ $(p > 2)$ este reflexiv, orice şir bazic mărginit $\{x_n\} \subset L^p([0,1])$ satisface ipoteza din corolarul 6.5, deci conţine sau un subşir bazic echivalent cu baza naturală a lui l^p, sau un subşir bazic echivalent cu baza naturală a lui l^2.

COROLARUL 6.6. *Fie* $p > 2$ *şi fie* $\{x_n\} \subset L^p([0,1])$ *un şir ortonormat astfel încît* $\sup\limits_{1 \leqslant n < \infty} \|x_n\| < \infty$. *Atunci există un subşir* p*-lacunar* $\{x_{i_n}\}$ (S. Kaczmarz şi H. Steinhaus [40], Cap. VII, § 2; a se vedea şi M. I. Kadeţ şi A. Pelczyński [43], corolarul 7).

TEOREMA 6.5. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază necondiţionată mărginită a spaţiului* $L^p([0,1])$ $(p > 1)$. *Atunci*

a) *Orice subşir al lui* $\{x_n\}$ *conţine un subşir care este echivalent sau cu baza naturală a lui* l^p, *sau cu baza naturală a lui* l^2.

b) *Există un subşir* $\{x_{i_n}\}$ *care este echivalent cu baza naturală a lui* l^p (M. I. Kadeţ şi A. Pelczyński [43], teorema 4).

COROLARUL 6.7. *Spaţiul* $L^p([0,1])$ $(1 < p \neq 2)$ *nu are nici o bază simetrică* (M. I. Kadeţ şi A. Pelczyński [43], corolarul 8 şi 11).

Acest corolar a fost menţionat şi în [78], Cap. II, § 14, exemplul 2.19.

---

[6]) Adică ([78], Cap. II, § 9, trimiterea [10])), $0 < \inf\limits_{1 \leqslant n < \infty} \|x_n\| \leqslant \sup\limits_{1 \leqslant n < \infty} \|x_n\| < \infty$.

Problema 6.1. Fie $1 < p < 2$. Există oare o bază $\{x_n\}$ în $L^p([0,1])$, cu proprietatea că pentru orice şir crescător de numere întregi pozitive $\{i_n\}$ şirul bazic $\{x_{i_n}\}$ este echivalent cu baza $\{x_n\}$? (M. I. Kadeţ şi A. Pelczyński [43], p. 171).

Se poate arăta [43] că pentru $p > 2$ răspunsul la problema corespunzătoare este negativ.

COROLARUL 6.8. *Fie* $\{x_n\} \subset L^p([0,1])$ $(1 < p \neq 2)$ *o bază necondiţionată a spaţiului* $L^p([0,1])$, *astfel încît* $\|x_n\| = 1$ $(n = 1,2,\ldots)$.

a) *Dacă* $p > 2$, *avem* $\varliminf_{n\to\infty} \left[\int_0^1 |x_n(t)|^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}} = 0$.

b) *Dacă* $1 < p < 2$, *avem* $\varlimsup_{n\to\infty} \left[\int_0^1 |x_n(t)|^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}} = \infty$.

Corolarul 6.8 a fost dat de M. I. Kadeţ şi A. Pelczyński ([43], corolarul 9). Din corolarul 6.8 rezultă imediat cazul $1 < p < 2$ al teoremei 6.2. De asemenea, din corolarul 6.8 rezultă

COROLARUL 6.9. *Fie un şir ortonormat* $\{x_n\} \subset L^p([0,1])$ $(1 < p \neq 2)$ *o bază necondiţionată a spaţiului* $L^p([0,1])$.

a) *Dacă* $p > 2$, *avem* $\varlimsup_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$.

b) *Dacă* $1 < p < 2$, *avem* $\varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ (M. I. Kadeţ şi A. Pelczyński [43], corolarul 9).

În teorema 6.5, precum şi în corolariile 6.8 şi 6.9, este esenţială ipoteza că $\{x_n\}$ este o bază necondiţionată, cum ne arată

Exemplul 6.1. Fie $\{x_n\} \subset L^p([0,1])$ $(1 < p \neq 2)$ definit prin:

$$x_0(t) \equiv 1, \quad x_{2n-1}(t) = \sqrt{2} \sin 2n\pi t, \quad x_{2n}(t) = \sqrt{2} \cos 2n\pi t \quad (n=1, 2,\ldots). \tag{6.12}$$

Atunci $\{x_n\}$ este o bază condiţionată a spaţiului $L^p([0,1])$ (a se vedea [78], Cap. II, § 10, exemplul 2.16), care nu conţine nici un subşir $\{x_{i_n}\}$ echivalent cu baza naturală a lui l^p, şi avem

$$\left[\int_0^1 |x_n(t)|^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}} = 1, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \|x_n\| \leqslant \sqrt{2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dacă $p > 2$, baza condiţionată mărginită $\{x_n\}$ din exemplul 6.1 conţine un subşir echivalent cu baza naturală a lui l^2 (în virtutea corolarului 6.6). Un exemplu de bază necondiţionată mărginită a lui $L^p([0,1])$ $(1 < p \neq 2)$ conţinînd un subşir echivalent cu baza naturală a lui l^2 a fost dat de A. Pelczyński ([67], p. 225—226). De altă parte, baza (necondiţionată) Haar a lui $L^p([0,1])$ $(1 < p \neq 2)$ nu conţine nici un subşir echivalent cu baza naturală a lui l^2 (A. Pelczyński [67], propoziţia 8; a se vedea şi [43], p. 172, observaţia 7).

COROLARUL 6.10. *Fie E un subspaţiu vectorial închis complementat al lui* $L^p([0,1])$ $(1 < p < \infty)$ *avînd o bază simetrică* $\{x_n\}$. *Atunci* $\{x_n\}$ *este echivalentă sau cu baza naturală a lui* l^p, *sau cu baza naturală a lui* l^2 (M. I. Kadeţ şi A. Pelczyński [43], corolarul 13).

§ 3. SISTEME BIORTOGONALE REGULATE ÎN SPAŢII HILBERT

În cele precedente am văzut unele proprietăţi ale bazelor în spaţii Hilbert. Astfel, orice bază monotonă a unui spaţiu Hilbert H este ortogonală ([78], Cap. II, §2, propoziţia 2.4). De asemenea, orice şir ortogonal fundamental în H este o bază necondiţionată a spaţiului H şi, cum s-a menţionat în Cap. V, § 1, norma naturală dintr-un spaţiu Hilbert H este o NTK-normă relativ la orice bază ortogonală $\{x_n\}$ a spaţiului H. Am mai văzut (§ 2, corolarul 6.4) că toate bazele necondiţionate mărginite din spaţiul H sînt echivalente. În spaţiul H există însă şi baze condiţionate (a se vedea [78], Cap. II, § 10, exemplul 2.17). Existenţa unui produs scalar implică o serie de alte proprietăţi ale bazelor precum şi ale diverselor generalizări ale bazelor în spaţii Hilbert, pe care le vom expune în paragrafele 3—8. Nu ne vom opri însă asupra proprietăţilor speciale binecunoscute ale bazelor ortonormate şi ale şirurilor liniar independente în sens clasic (de exemplu, asupra faptului că dezvoltarea unui element $x \in H$ după o bază ortonormată $\{x_n\}$ este chiar seria Fourier a lui x în raport cu $\{x_n\}$, asupra seriilor Fourier, asupra ortonormalizării şirurilor liniar independente în sens clasic, asupra exprimării polinoamelor de cea mai bună aproximaţie relativ la un şir liniar independent în sens clasic cu ajutorul determinanţilor Gram etc.), deoarece prezentarea acestora ar prelungi prea mult lucrarea de faţă. De altfel, ele sînt expuse într-o serie de monografii clasice (a se vedea, de exemplu, [40]; pentru proprietăţile speciale ale sistemului trigonometric în spaţiul L^2, a se vedea [9], [83]).

Definiţia 6.4. Fie $\{x_n\}$ un şir de elemente dintr-un spaţiu Hilbert H. Se numeşte *matricea Gram* a şirului $\{x_n\}$ matricea infinită (c_{ij}), unde

$$c_{ij} = (x_i, x_j) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots) \qquad (6.13)$$

(a se vedea de exemplu [35], § 9, p. 437).

Avem următoarea caracterizare a regularităţii sistemelor biortogonale H-fundamentale (a se vedea [78], Cap. I, § 4, definiţiile 1.1 şi 1.2):

TEOREMA 6.6. *Fie H un spaţiu Hilbert şi $\{x_n\} \subset H$, $\{f_n\} \subset H^*$ un sistem biortogonal H-fundamental. Următoarele afirmaţii sînt echivalente*:

1°. *Sistemul $\{x_n\} \subset H$, $\{f_n\} \subset H^*$ este regulat.*

2°. *Avem*

$$\inf_{1 \leqslant n, p < \infty} \operatorname{Re} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{p} f_i(x) \overline{f_j(x)}\, c_{ij} \right] > -\infty, \qquad (6.14)$$

unde (c_{ij}) este matricea Gram a şirului $\{x_n\}$ (S. R. Foguel [26], teorema 7).

De asemenea, avem

PROPOZIŢIA 6.3. *Fie H un spaţiu Hilbert, fie $\{x_n\} \subset H$, $\{f_n\} \subset H^*$ un sistem biortogonal H-fundamental, şi fie (c_{ij}) matricea Gram a şirului $\{x_n\}$.*

a) *Dacă*

$$\sum_{i\neq j} |c_{ij}| < \infty, \tag{6.15}$$

atunci sistemul $\{x_n\}\subset H$, $\{f_n\}\subset H^*$ *este regulat* (S. R. Foguel [26]).

b) *Dacă sistemul* $\{x_n\}\subset H$, $\{f_n\}\subset H^*$ *este regulat, şirurile*

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_i(x)\overline{f_j(x)}c_{ij}\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad (x\in H) \tag{6.16}$$

sînt convergente (a se vedea [40], propoziţia 8.4.4).

c) *Dacă sistemul* $\{x_n\}\subset H$, $\{f_n\}\subset H^*$ *este regulat, matricea Gram* (c_{ij}) *a şirului* $\{x_n\}$ *este inversibilă şi inversa ei coincide cu matricea Gram a şirului* $\{f_n\}$ (S. Lewin [49]; N. K. Bari [8], lema 2).

TEOREMA 6.7. *Fie H un spaţiu Hilbert şi* $\{x_n\}\subset H$, $\{f_n\}\subset H^*$ *un sistem biortogonal H-fundamental. Următoarele afirmaţii sînt echivalente*:

1°. *Sistemul* $\{x_n\}\subset H$, $\{f_n\}\subset H^*$ *este regulat şi baza* $\{x_n\}$ *este besseliană* [7]).

2°. *Pentru orice* $x\in H$ *există un număr real* $\alpha(x)$ *astfel încît*

$$2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} f_i(x)\overline{f_j(x)}\,c_{ij}\right] > \alpha(x) \qquad (n=1, 2,\ldots), \tag{6.17}$$

unde (c_{ij}) *este matricea Gram a şirului* $\{x_n\}$ (S. R. Foguel [26], teorema 6).

§ 4. ŞIRURI BESSELIENE ŞI HILBERTIENE ÎN SPAŢII HILBERT. BAZE RIESZ

Definiţia 6.5. O matrice infinită (α_{ij}) se numeşte *mărginită* în sensul lui Hilbert, dacă pentru orice $x=\{\xi_n\}\in l^2$, $y=\{\eta_n\}\in l^2$ şi orice numere întregi pozitive m şi p avem

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\alpha_{ij}\xi_i\eta_j\right| \leqslant M\sqrt{\sum_{i=1}^{m}|\xi_i|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{p}|\eta_j|^2}, \tag{6.18}$$

unde M este o constantă depinzînd numai de matricea (α_{ij}) (a se vedea de exemplu [35], § 9, p. 437).

Avem următoarele caracterizări ale şirurilor besseliene şi ale şirurilor hilbertiene (pentru definiţia acestor şiruri, a se vedea § 1, definiţia 6.2):

TEOREMA 6.8. *Fie* $\{x_n\}$ *un şir fundamental* [8]) *într-un spaţiu Hilbert H. Următoarele afirmaţii sînt echivalente*:

---

[7]) Adică $\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(x)|^2<\infty$ pentru orice $x\in H$ (a se vedea § 1, definiţia 6.2).

[8]) Reamintim că folosim termenul „şir fundamental" în sensul lui Banach [4], adică: $[x_n]=H$.

1°. *Şirul* $\{x_n\}$ *este besselian.*

2°. *Există o aplicaţie liniară continuă* $A \in \mathfrak{L}(H, H)$ *astfel încît şirul* $\{y_n\} \subset H$ *definit prin*

$$y_n = A(x_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6.19}$$

să fie o bază ortonormată a spaţiului H.

Dacă şirul $\{x_n\}$ *este o bază în sens larg a spaţiului* H *şi* $\{f_n\} \subset H$ *este şirul de funcţionale asociat, afirmaţiile de mai sus sînt echivalente cu următoarele afirmaţii :*

3°. *Există o constantă* $m > 0$ *astfel încît*

$$m \left[\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \|x\| \qquad (x \in H). \tag{6.20}$$

4°. *Există o bază ortonormată* $\{y_n\}$ *a spaţiului* H *astfel încît matricea infinită* $\|(f_n, y_k)\|$ *să fie mărginită în sensul lui Hilbert.*

5°. *Matricea Gram a şirului* $\{f_n\}$ *este mărginită în sensul lui Hilbert.*

6°. *Există un operator hermitian pozitiv* $B \in \mathfrak{L}(H, H)$ *astfel încît*

$$B(x_n) = f_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6.21}$$

7°. *Baza în sens larg* $\{f_n\} \subset H$ *este hilbertiană.*

TEOREMA 6.9. *Fie* $\{x_n\}$ *un şir fundamental într-un spaţiu Hilbert* H. *Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

1°. *Şirul* $\{x_n\}$ *este hilbertian.*

2°. *Există o bază ortonormată* $\{z_n\}$ *a spaţiului* H *şi o aplicaţie liniară continuă* $A_1 \in \mathfrak{L}(H, H)$ *astfel încît*

$$x_n = A_1(z_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6.22}$$

3°. *Există o bază ortonormată* $\{z_n\}$ *a spaţiului* H *astfel încît matricea infinită* $\|(x_n, z_k)\|$ *să fie mărginită în sensul lui Hilbert.*

4°. *Matricea Gram a şirului* $\{x_n\}$ *este mărginită în sensul lui Hilbert.*

Dacă şirul $\{x_n\}$ *este o bază în sens larg a spaţiului* H *şi* $\{f_n\} \subset H$ *este şirul de funcţionale asociat, afirmaţiile de mai sus sînt echivalente cu următoarele afirmaţii :*

5°. *Există o constantă* M *astfel încît*

$$\|x\| \leqslant M \left[\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (x \in H). \tag{6.23}$$

6°. *Există un operator hermitian pozitiv* $B_1 \in \mathfrak{L}(H, H)$ *astfel încît*

$$B_1(f_n) = x_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6.24}$$

7°. *Baza în sens larg* $\{f_n\} \subset H$ *este besseliană.*

Cu excepţia implicaţiei 5°⇒1° din teorema 6.9, care a fost observată de C. Foiaş, teoremele 6.8 şi 6.9 au fost date, sub o formă mai puţin generală [9]), de N. K. Bari ([8], teoremele 1, 2 şi corolariile lor, precum şi teoremele 3, 4, 5, 6, 7). După cum a menţionat N. K. Bari ([8], p. 79), echivalenţa 1°⟺5° din teorema 6.8 şi echivalenţa 1°⟺4° din teorema 6.9 (teoremele 6 şi 7 din [8]) au fost obţinute de R. P. Boas ([17], p. 361—362).

Există şiruri besseliene care nu sînt baze şi, de asemenea, şiruri hilbertiene care nu sînt baze, cum ne arată

Exemplul 6.2. Fie $\{z_n\}$ un şir ortonormat fundamental în $L^2([0,1])$ şi fie

$$x_1 = z_1,\quad x_n = (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{\mu_k}}{\sqrt{k}} z_k + \mu_n z_n \quad (n = 2, 3, \dots), \tag{6.25}$$

unde numerele μ_n sînt alese astfel încît să avem $\|x_n\| = 1$ şi $\frac{1}{2} \leqslant \mu_n \leqslant 1$ $(n = 2, 3, \dots)$ ceea ce este totdeauna posibil ([8], § 5). Atunci $\{x_n\}$ este o bază în sens larg a spaţiului $L^2([0,1])$, avînd şirul de funcţionale asociat

$$f_n = \frac{1}{\mu_n} z_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k}\left(1 - \sqrt{\frac{k}{k-1}}\right) z_k \quad (n = 1, 2, \dots),$$

şi $\{x_n\}$ este un şir besselian care nu este o bază, iar $\{f_n\}$ este un şir hilbertian care nu este o bază (N. K. Bari [8], § 5).

Situaţia este diferită în cazul şirurilor care sînt simultan besseliene şi hilbertiene [10]), cum ne arată

TEOREMA 6.10. *Fie $\{x_n\}$ un şir fundamental într-un spaţiu Hilbert H. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

1°. *Şirul $\{x_n\}$ este simultan besselian şi hilbertian.*

2°. *$\{x_n\}$ este o bază necondiţionată mărginită a spaţiului H.*

3°. *Există o aplicaţie liniară continuă biunivocă $A \in \mathfrak{L}(H, H)$ cu inversa A^{-1} continuă, astfel încît şirul $\{y_n\} \subset H$ definit prin*

$$y_n = A(x_n) \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{6.26}$$

să fie o bază ortonormată a spaţiului H.

4°. *Există pe H un produs scalar $(x,y)_1$, echivalent [11]) cu produsul scalar iniţial (x,y), astfel încît $\{x_n\}$ să fie o bază ortonormată a spaţiului H dotat cu produsul scalar $(x,y)_1$.*

5°. *Matricea Gram a şirului $\{x_n\}$ este mărginită în sensul lui Hilbert şi inversibilă, avînd inversa mărginită în sensul lui Hilbert.*

---

[9]) Anume, în [8] se presupune de la început că $\{x_n\}$ este o bază în sens larg a spaţiului H. Or, se poate arăta că echivalenţele 1°⟺2° din teorema 6.8 şi 1°⟺2° ⟺3° ⟺4° din teorema 6.9 sînt valabile şi fără această ipoteză restrictivă.

[10]) Asemenea şiruri au fost numite, de N. K. Bari, *şiruri Fischer-Riesz* ([8], definiţia 3).

[11]) Se spune că produsul scalar $(x, y)_1$ este echivalent cu produsul scalar (x, y), dacă există două constante $C_1, C_2 > 0$ astfel încît să avem $C_1 (x, x) \leqslant (x, x)_1 \leqslant C_2 (x, x)$ pentru orice $x \in H$.

Dacă șirul $\{x_n\}$ *este o bază în sens larg a spațiului* H *și* $\{f_n\}\subset H$ *este șirul de funcționale asociat, afirmațiile de mai sus sînt echivalente cu următoarele afirmații :*

6°. *Există două constante* $m > 0$ *și* $M \geqslant m$ *astfel încît*

$$m\left[\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \|x\| \leqslant M\left[\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (x\in H). \qquad (6.27)$$

7°. *Există un operator hermitian pozitiv biunivoc* B_1, *cu inversa continuă, astfel încît*

$$B_1(f_n) = x_n \qquad (n = 1, 2,\ldots). \qquad (6.28)$$

8°. *Baza în sens larg* $\{f_n\}\subset H$ *este simultan besseliană și hilbertiană.*

9°. $\{x_n\}$ *și* $\{f_n\}$ *sînt baze echivalente ale spațiului* H.

Echivalențele 1°⇔2°⇔6° rezultă imediat din corolarul 6.2 și din observația că orice bază în sens larg simultan besseliană și hilbertiană este mărginită (care rezultă, de exemplu, din implicația 1°⇒3°). Echivalența 3°⇔4° a fost observată de I. M. Gelfand [31]. Echivalența 1°⇔3° a fost demonstrată de N. K. Bari ([8], teorema 10), în ipoteza suplimentară că $\{x_n\}$ este o bază în sens larg a spațiului H ; se poate însă arăta că ea este valabilă și fără această ipoteză restrictivă. Echivalențele 1°⇔7°, 1°⇔8°, 1°⇔9° și implicația 1°⇒5° au fost demonstrate de N. K. Bari ([8], teoremele 13, 8, corolarul teoremei 17 și corolarul lemei 2). Demonstrația implicației 5°⇒1°, schițată în [8], nu este corectă decît dacă se presupune că $\{x_n\}$ este o bază a spațiului H, și dacă se adaugă în enunțul din [8] condiția ca inversa matricei Gram a șirului $\{x_n\}$ să fie mărginită. Deși această din urmă condiție nu figurează în [8], ea este evident necesară pentru valabilitatea implicației 5°⇒1° (deoarece există baze hilbertiene care nu sînt besseliene, și orice asemenea bază satisface toate condițiile din 6°, cu excepția condiției de mărginire a inversei matricei Gram a șirului $\{x_n\}$). O demonstrație a implicației 5°⇒1° din teorema 6.10 de mai sus ne-a fost comunicată de C. Foiaș.

Echivalențele 2°⇔3°⇔4° din teorema 6.10 se pot exprima sub următoarea formă mai generală :

COROLARUL 6.11. *Fie* $\{x_n\}$ *un șir fundamental într-un spațiu Hilbert* H. *Următoarele afirmații sînt echivalente :*

1°. $\{x_n\}$ *este o bază necondiționată a spațiului* H.

2°. *Există o aplicație liniară continuă biunivocă* $A\in\mathfrak{L}(H,H)$ *cu inversa* A^{-1} *continuă, astfel încît șirul* $\{y_n\}\in H$ *definit prin* (6.26) *să fie o bază ortogonală a spațiului* H.

3°. *Există pe* H *un produs scalar* $(x,y)_1$, *echivalent cu produsul scalar inițial* (x,y), *astfel încît* $\{x_n\}$ *să fie o bază ortogonală a spațiului* H *dotat cu produsul scalar* $(x,y)_1$ (I. M. Gelfand [31]).

Într-adevăr, aceasta rezultă aplicînd teorema 6.10 șirului $\left\{\dfrac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$.

Echivalența 1° ⇔ 3° din corolarul 6.11 este o întărire, pentru cazul particular al spațiilor Hilbert, a teoremei 2.14 din [78], Cap. II, unde s-a afirmat numai existenţa unei norme echivalente în care baza $\{x_n\}$ este ortogonală (deoarece această nouă normă nu este, în general, indusă de un produs scalar $(x,y)_1$ pe H).

În virtutea teoremei 6.10 este justificată

Definiţia 6.6. Un şir $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Hilbert H se numeşte *bază Riesz* a spaţiului H, dacă $\{x_n\}$ este simultan besselian şi hilbertian (N. K. Bari [8]), sau, ceea ce este echivalent, dacă $\{x_n\}$ este o bază necondiţionată mărginită a spaţiului H.

Problema existenţei bazelor Riesz are un răspuns afirmativ, deoarece orice bază ortonormată a spaţiului Hilbert H este o bază Riesz. Problema existenţei bazelor non-Riesz are de asemenea un răspuns afirmativ, deoarece orice bază nemărginită este non-Riesz. Problema existenţei bazelor non-Riesz mărginite are, cum a arătat K. I. Babenko (a se vedea [78], Cap. II, § 10, exemplul 2.17), un răspuns afirmativ. Baza din acest exemplu al lui Babenko este besseliană (şi prin urmare, în virtutea teoremei 6.10, non-hilbertiană). Prin urmare, şirul de funcţionale coeficienţi asociat bazei lui Babenko este, în virtutea teoremelor 6.10 şi 6.8, o bază non-Riesz mărginită hilbertiană, dar non-besseliană, a spaţiului H. Există şi baze non-Riesz mărginite ale lui H, care sînt simultan non-besseliene şi non-hilbertiene, cum ne arată

Exemplul 6.3. Fie $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Atunci şirul $\{x_n\} \subset L^2([-\pi, \pi])$ definit prin

$$x_{2n}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} |t|^{\alpha} \cos nt, \quad x_{2n+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} |t|^{\alpha} \sin nt \ (n=0, 1, 2, \ldots) \qquad (6.29)$$

este o bază non-Riesz mărginită a spaţiului $L^2([-\pi, \pi])$, care este simultan non-besseliană şi non-hilbertiană (M. Ş. Altman [1]).

După cum a observat N. K. Bari ([8], p. 72), în exemplul lui K. I. Babenko de bază non-Riesz mărginită, demonstraţia faptului că acest şir este o bază, s-a bazat pe unele proprietăţi foarte fine ale funcţiilor conjugate. Aceeaşi observaţie fiind valabilă şi pentru baza din exemplul 6.3, rămîne nerezolvată:

Problema 6.2. Cum se pot construi bazele non-Riesz mărginite ale unui spaţiu Hilbert H? (N. K. Bari [8], p. 72).

Un răspuns parţial la această problemă este dat în

PROPOZIŢIA 6.4. *Fie* $z(\cdot)$ *o funcţie măsurabilă pe segmentul* $[-\pi, \pi]$ *astfel încît funcţia* $y(\cdot) = z^2(\cdot)$ *să aibă următoarele proprietăţi*:

a) $y(-\pi) = y(\pi)$,

b) $y(r, t) \geqslant c\eta(r, t) \qquad (0 \leqslant r < 1, \ -\pi \leqslant t \leqslant \pi)$,

unde prin $y(\zeta) \equiv y(r, t)$ *se notează funcţia armonică definită prin*

$$y(\zeta) \equiv y(r, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(s) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(s-t)} \mathrm{d}s \quad (0 \leqslant r < 1, \zeta = re^{it}),$$

iar prin $\eta(\zeta) \equiv \eta(r, t)$ *funcţia ei conjugată, şi unde* c *este o constantă astfel încît*

$$c > 0 \text{ pentru } p \geqslant 2,$$

$$c > \left| \operatorname{tg} \frac{p\pi}{2} \right| \text{ pentru } 1 < p \leqslant 2.$$

În acest caz clasele de echivalenţă $\{\tilde{x}_n\}$ *şi* $\{\tilde{x}'_n\}$ *ale şirurilor* $\{x_n(\cdot)\}$ *şi* $\{x'_n(\cdot)\}$ *definite respectiv prin*

$$x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z(t)\, e^{int} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$x'_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z(t)} e^{int} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

constituie baze mărginite ale spaţiului $L^2([-\pi, \pi])$. *Dacă există constante* $m > 0$ *şi* $M \geqslant m$ *astfel încît* $m \leqslant |z(t)| \leqslant M$ *a.p.t. (pe* $[-\pi, \pi]$*), atunci* $\{\tilde{x}_n\}$ *este o bază Riesz; dacă există* $m > 0$ *astfel încît* $m \leqslant |z(t)|$ *a.p.t., dar nu există* M *astfel încît* $|z(t)| \leqslant M$ *a.p.t., atunci baza* $\{\tilde{x}_n\}$ *este besseliană şi non-hilbertiană; dacă există* M *astfel încît* $|z(t)| \leqslant M$ *a.p.t., dar nu există* $m > 0$ *astfel încît* $m \leqslant |z(t)|$ *a.p.t., atunci baza* $\{\tilde{x}_n\}$ *este hilbertiană şi non-besseliană; dacă nu există nici* $m > 0$ *astfel încît* $m \leqslant |z(t)|$ *a.p.t., nici* M *astfel încît* $|z(t)| \leqslant M$ *a.p.t., atunci baza* $\{\tilde{x}_n\}$ *este non-besseliană şi non-hilbertiană* (V. F. Gapoşkin [28], teorema 2 şi p. 370).

Luînd în propoziţia 6.4 funcţia $z(t) = |t|^{\alpha}$, unde $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ [12], se regăseşte baza mărginită hilbertiană non-besseliană $\{\tilde{x}_n\}$ a lui $L^2([-\pi, \pi])$ construită de K. I. Babenko.

§ 5. TEOREME DE STABILITATE DE TIP PALEY-WIENER ÎN SPAŢII HILBERT

Reamintim teorema de stabilitate expusă în [78] ([78], Cap. I, § 9, teorema 1.7), care este numită *teorema lui Paley-Wiener* [13]:

Fie $\{x_n\}$ *şi* $\{y_n\}$ *şiruri dintr-un spaţiu Banach* E. *Să presupunem că există o constantă* λ, $0 \leqslant \lambda < 1$, *astfel încît să avem*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - y_i) \right\| \leqslant \lambda \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \tag{6.30}$$

pentru orice întreg pozitiv n *şi orice* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. *Atunci şirul* $\{y_n\}$ *este echivalent cu şirul* $\{x_n\}$ *şi avem următoarele implicaţii:*

---

[12] În [28] se arată că această funcţie satisface condiţiile din propoziţia 6.4.

[13] A se vedea comentariile din [78].

a) *Dacă toate* $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *atunci toate* $y_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

b) *Dacă şirul* $\{x_n\}$ *este fundamental în* E, *la fel este şi* $\{y_n\}$.

c) *Dacă şirul* $\{x_n\}$ *este tare liniar independent, la fel este şi* $\{y_n\}$.

d) *Dacă şirul* $\{x_n\}$ *este o bază a spaţiului* E, *atunci şirul* $\{y_n\}$ *este de asemenea o bază a spaţiului* E.

Din (6.30) rezultă imediat că *avem*

$$(1-\lambda)\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right\| \leqslant (1+\lambda)\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\| \tag{6.31}$$

pentru orice întreg pozitiv n *şi orice* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Prin urmare, în cazul particular cînd E este un spaţiu Hilbert, la implicaţiile de mai sus se adaugă şi implicaţia următoare:

e) *Dacă şirul* $\{x_n\}$ *este o bază ortonormată a spaţiului* H, *atunci şirul* $\{y_n\}$ *este o bază a spaţiului* H, *cu proprietatea*

$$(1-\lambda)\left[\sum_{i=1}^{\infty}|g_i(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \|x\| \leqslant (1+\lambda)\left[\sum_{i=1}^{\infty}|g_i(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (x \in H), \tag{6.32}$$

unde $\{g_n\}$ *este şirul de funcţionale coeficienţi asociat bazei* $\{y_n\}$ (R.E.A.C. Paley şi N. Wiener [66]).

Din teorema 6.10 rezultă că *în acest caz* $\{y_n\}$ *este chiar o bază Riesz a spaţiului* H (a se vedea şi lucrarea [72] a lui F. W. Schäfke [14])).

În cazul spaţiilor Hilbert, condiţia (6.30) poate fi înlocuită prin diverse condiţii mai slabe, astfel încît concluziile teoremei de mai sus să rămînă valabile. În cele ce urmează ne vom ocupa mai ales de afirmaţiile b) şi e).

TEOREMA 6.11. *Fie* $\{x_n\}$ *şi* $\{y_n\}$ *şiruri dintr-un spaţiu Hilbert* H. *Să presupunem că există trei constante* λ, μ, ν, $0 \leqslant \lambda < 1$, $0 \leqslant \nu < 1$, $\mu^2 \leqslant (1-\lambda)(1-\nu)$, *astfel încît să avem*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i - y_i)\right\|^2 \leqslant \lambda\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\|^2 + 2\mu\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right\| + \nu\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right\|^2 \tag{6.33}$$

pentru orice întreg pozitiv n *şi orice* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. *Avem atunci următoarele implicaţii*:

a) *Dacă şirul* $\{x_n\}$ *este fundamental în* H, *la fel este şi* $\{y_n\}$.

b) *Dacă şirul* $\{x_n\}$ *este o bază ortonormată a spaţiului* H, *atunci şirul* $\{y_n\}$ *este o bază a spaţiului* H, *cu proprietatea*

$$m\left[\sum_{i=1}^{\infty}|g_i(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \|x\| \leqslant M\left[\sum_{i=1}^{\infty}|g_i(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (x \in H), \tag{6.34}$$

---

[14] Menţionăm că lucrarea [72] ne este cunoscută numai din [73]

unde m şi M sînt zerourile polinomului

$$P(t) = (1 - \lambda) - 2(1 + \mu)t + (1 - \nu)t^2, \tag{6.35}$$

şi unde $\{g_n\}$ este şirul de funcţionale coeficienţi asociat bazei $\{y_n\}$.

Din teorema 6.10 rezultă că *în cazul b), $\{y_n\}$ este chiar o bază Riesz a spaţiului H.* Aplicînd (6.34) lui $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$, rezultă că *baza $\{y_n\}$ este echivalentă cu baza ortonormată $\{x_n\}$.*

Teorema 6.10 a fost demonstrată de B. Sz-Nagy [59]. În cazul particular $\mu = 0$, implicaţia a) a fost demonstrată de H. Pollard ([70], teorema 1.1). În cazul particular $\mu = \nu = 0$, se regăseşte teorema lui Paley-Wiener. În cazul particular $\lambda = \mu = 0$, schimbînd rolurile lui $\{x_n\}$ şi $\{y_n\}$ precum şi rolurile lui λ şi ν, se obţine următoarea inversare a implicaţiilor b) şi e) din teorema lui Paley-Wiener:

COROLARUL 6.12. *Fie $\{x_n\}$ şi $\{y_n\}$ şiruri dintr-un spaţiu Hilbert H. Să presupunem că există o constantă λ, $0 \leqslant \lambda < 1$, astfel încît să avem* (6.30) *pentru orice întreg pozitiv n şi orice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Atunci avem următoarele implicaţii:*

a) *Dacă şirul $\{y_n\}$ este fundamental în H, la fel este şi $\{x_n\}$.*

b) *Dacă şirul $\{y_n\}$ este o bază ortonormată a spaţiului H, atunci şirul $\{x_n\}$ este o bază Riesz a spaţiului H, echivalentă cu baza ortonormată $\{y_n\}$.*

În cazul cînd în loc de H se consideră un spaţiu Banach arbitrar E, nu se ştie, nici măcar pentru implicaţia b) din teorema lui Paley-Wiener, dacă o asemenea inversare este posibilă. În acest caz general *inversarea implicaţiilor b) şi d) din teorema lui Paley-Wiener este posibilă dacă avem* (6.30) *pentru o constantă λ satisfăcînd $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}$* (F. W. Schäfke [73]).

Să ne reîntoarcem la teorema 6.11. În cazul particular $\lambda = \mu = \nu = \frac{1}{2}$, condiţia (6.33) se poate scrie sub forma

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i - y_i)\right\| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right\|\right], \tag{6.36}$$

iar dacă ambele şiruri $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sînt ortonormate, (6.36) este echivalentă cu

$$\operatorname{Re}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \bar{\alpha}_j (x_i, y_j)\right] \geqslant 0, \tag{6.37}$$

pentru orice întreg n şi orice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ (B. Sz-Nagy [59]). Implicaţia a), în condiţii mai restrictive decît (6.36) şi (6.37), a fost demonstrată de H. Pollard ([70], teoremele 2.1 şi 2.2).

O altă generalizare a cazului particular $\mu = 0$, $\lambda = \nu$ al teoremei 6.11 a), este dată în

TEOREMA 6.12. *Fie* $\{x_n\}$ *şi* $\{y_n\}$ *şiruri dintr-un spaţiu Hilbert* H, *şi* p *un număr pozitiv arbitrar. Să presupunem că există o constantă* λ, $0 < \lambda < \min(1, 2^{1-\frac{1}{p}})$, *astfel încît să avem*

$$\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i - y_i)\| \leqslant \lambda [\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\|^p + \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\|^p]^{\frac{1}{p}} \tag{6.38}$$

pentru orice întreg pozitiv n *şi orice* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. *Atunci dacă şirul* $\{x_n\}$ *este fundamental în* H, *la fel este şi* $\{y_n\}$ (S. H. Hilding [37]).

Luînd aici $p = 1$, rezultă că dacă în (6.36) constanta $\frac{\sqrt{2}}{2}$ se înlocuieşte prin $\lambda < 1$ arbitrar, implicaţia a) din teorema 6.11 rămîne adevărată.

Vom considera acum problema : ce se întîmplă în cazul limită cînd $\lambda = 1$? În acest caz teorema lui Paley-Wiener, teoremele 6.11, 6.12 şi corolarul 6.12 nu mai sînt adevărate, cum ne arată următoarele două exemple.

Exemplul 6.4. Fie $\{x_n\}$ o bază ortonormată a unui spaţiu Hilbert H şi fie $y_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Atunci $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ satisfac (6.30), (6.33) şi (6.38) cu $\lambda = 1$, $\mu = \nu = 0$, dar $\{y_n\}$ nu este fundamental în H (H. Pollard [70], R. J. Duffin şi J. J. Eachus [21]).

Exemplul 6.5. Fie $\{z_n\}$ o bază ortonormată a unui spaţiu Hilbert H şi fie

$$x_n = z_{n+1}, \; y_n = z_{n+1} - z_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6.39}$$

Atunci $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ satisfac (6.30) cu $\lambda = 1$, şirul $\{y_n\}$ este fundamental în H, dar şirul $\{x_n\}$ este nefundamental în H (H. Pollard [70], R. J. Duffin şi J. J. Eachus [21]).

Tot exemplul 6.4 arată (schimbînd rolurile lui $\{x_n\}$ şi $\{y_n\}$ precum şi ale lui λ şi ν), că teorema 6.11 nu mai este adevărată în cazul limită $\nu = 1$.

De asemenea, cum se arată în [37], teorema 6.12 nu mai este adevărată în cazul limită $\lambda = \min(1, 2^{1-\frac{1}{p}})$.

Există totuşi unele rezultate pozitive. Astfel, avem

PROPOZIŢIA 6.5. *Fie* $\{x_n\}$ *şi* $\{y_n\}$ *şiruri dintr-un spaţiu Banach reflexiv* E, *astfel încît*

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x_i - y_i)\| < \|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\| \tag{6.40}$$

pentru orice şir de scalari $\{\alpha_n\} \subset K$ *cu proprietatea* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in E$ [15]). *Atunci,*

---

[15]) Prin urmare, se presupune că $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in E$ implică $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i \in E$.

dacă $\{x_n\}$ *este o bază a spațiului* E, *șirul* $\{y_n\}$ *este fundamental în* E (R. J. Duffin și J. J. Eachus [21], observația la teorema B).

De altă parte, faptul că un șir $\{y_n\}$ satisfăcînd (6.40) este fundamental în E nu implică fundamentalitatea în E a șirului $\{x_n\}$, nici chiar în cazul particular cînd E este un spațiu Hilbert H și $\{x_n\}$ un șir bazic ortonormat din H, cum ne arată

Exemplul 6.6. Fie H un spațiu Hilbert, $\{z_n\}$ o bază ortonormată a spațiului H și $\{c_n\}$ un șir de constante astfel încît

$$c_1 > \ldots > c_n > c_{n+1} > \ldots > 1. \tag{6.41}$$

Atunci șirurile $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ definite prin

$$x_n = z_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6.42}$$

$$y_n = z_{n+1} - \frac{c_{n+1}}{c_n} z_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6.43}$$

satisfac (6.40), șirul $\{y_n\}$ este fundamental în H, dar șirul $\{x_n\}$ este un șir bazic ortonormat nefundamental în H (R. J. Duffin și J. J. Eachus [21]).

Dacă în (6.40) semnul $<$ este înlocuit prin $\leqslant$, propoziția 6.5 nu mai este adevărată, cum ne arată exemplul 6.4. Avem, cu toate acestea, următorul rezultat pozitiv :

PROPOZIȚIA 6.6. *Fie* $\{x_n\}$ *și* $\{y_n\}$ *șiruri dintr-un spațiu Hilbert* H, *astfel încît*

$$\Big\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (x_i - y_i) \Big\| \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \Big\| \tag{6.44}$$

pentru orice șir de scalari $\{\alpha_n\} \subset K$ *cu proprietatea* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in H$[16]. *Atunci, dacă* $\{x_n\}$ *este un șir ortonormat și* $\{y_n\}$ *un șir fundamental în* H, *șirul* $\{y_n\}$ *nu admite dezvoltări netriviale ale lui zero*[17], *și avem*

$$0 < \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i \Big\| \leqslant 2 \, \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \Big\| \tag{6.45}$$

pentru orice șir de scalari $\{\alpha_n\} \subset K$, $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \neq 0$, *cu proprietățile de mai sus* (R. J. Duffin și J. J. Eachus [21], teorema C).

Din teorema 6.9 rezultă că *în acest caz* $\{y_n\}$ *este chiar un șir hilbertian.*

Unele rezultate din acest paragraf admit o reciprocă. Astfel, avem

TEOREMA 6.13. *Fie* $\{y_n\}$ *un șir dintr-un spațiu Hilbert* H.

---

[16] Prin urmare, se presupune că $\sum_{i=}^{\infty} \alpha_i x_i \in H$ implică $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i \in H$.

[17] A se vedea [78], Cap. I, § 6, definiția 1.6.

a) *Dacă există o constantă* λ, $0 \leqslant \lambda < 1$, *astfel încît să avem*[18])

$$(1-\lambda)\left[\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right\| \leqslant (1+\lambda)\left[\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.46}$$

pentru orice întreg pozitiv n *şi orice* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, *atunci există un şir ortonormat* $\{x_n\} \subset H$ *astfel încît să avem*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i - y_i)\right\| \leqslant \lambda \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\| \tag{6.47}$$

pentru orice întreg pozitiv n *şi orice* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$.

b) *Dacă şirul* $\{y_n\}$ *este fundamental în* H *şi dacă avem*[19])

$$0 < \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i y_i\right\| \leqslant 2\left[\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.48}$$

pentru orice şir $\{\alpha_n\} \subset K$, $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i| \neq 0$, *cu proprietatea* $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2 < \infty$, *atunci există o bază ortonormată* $\{x_n\}$ *a spaţiului* H *astfel încît să avem*

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(x_i - y_i)\right\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i\right\| \tag{6.49}$$

pentru orice şir $\{\alpha_n\} \subset K$ *cu proprietăţile de mai sus* (R. J. Duffin şi J. J. Eachus [21], teoremele A şi C).

Dacă $\{x_n\}, \{y_n\} \subset H$ satisfac (6.47), avem (6.31) pentru orice întreg pozitiv n şi orice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, ceea ce, dacă $\{x_n\}$ este ortonormat, nu este altceva decît (6.46). Afirmaţia a) este o reciprocă a acestui rezultat. Afirmaţia b) este o reciprocă a propoziţiei 6.6.

§ 6. STABILITATE SLABĂ, STABILITATE, STABILITATE PĂTRATICĂ ŞI STABILITATE TARE ÎN SPAŢII HILBERT

Definiţia 6.7. Fie $\{x_n\}$ şi $\{y_n\}$ şiruri dintr-un spaţiu Banach E şi fie

$$\rho_n = \|x_n - y_n\| \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6.50}$$

Se spune că şirul $\{y_n\}$ este

a) *în* $\{\varepsilon_n\}$*-vecinătatea şirului* $\{x_n\}$, unde $\{\varepsilon_n\}$ este un şir de numere pozitive, dacă avem

$$\rho_n \leqslant \varepsilon_n \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{6.51}$$

b) *apropiat de* $\{x_n\}$, dacă avem

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0; \tag{6.52}$$

---

[18]) Din teorema 6.10 rezultă că în acest caz $\{y_n\}$ este un şir bazic Riesz în spaţiul H.

[19]) Din teorema 6.9 rezultă că în acest caz $\{y_n\}$ este un şir hilbertian.

c) *pătratic apropiat de* $\{x_n\}$, dacă avem

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^2 < \infty; \tag{6.53}$$

d) *apropiat în sens restrîns de* $\{x_n\}$, dacă avem

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty. \tag{6.54}$$

Definiţia 6.8. Se spune că o proprietate P a unui şir $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu Banach E este

a) *slab stabilă*, dacă există o $\{\varepsilon_n\}$-vecinătate V a şirului $\{x_n\}$ astfel încît orice şir $\{y_n\} \in V$ are proprietatea P;

b) *stabilă*, dacă orice şir $\{y_n\} \subset E$ apropiat în sens restrîns de $\{x_n\}$ are proprietatea P;

c) *pătratic stabilă*, dacă orice şir $\{y_n\} \subset E$ pătratic apropiat de $\{x_n\}$ are proprietatea P;

d) *tare stabilă*, dacă orice şir $\{y_n\} \subset E$ apropiat de $\{x_n\}$ are proprietatea P.

În cazul spaţiului $E = L^2([a, b])$, definiţiile 6.7 şi 6.8 au fost date [20]) de N. K. Bari ([6], [7]). Ele sînt însă utile şi într-un spaţiu Banach arbitrar. În adevăr, de exemplu din teorema lui Krein-Milman-Rutman (a se vedea [78], Cap. I, § 9, teorema 1.9) rezultă că *proprietăţile unui şir tare liniar independent* $\{x_n\}$ *dintr-un spaţiu Banach* E, 1) *de a consta din elemente* $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ 2) *de a fi fundamental în* E, 3) *de a fi tare liniar independent*, 4) *de a fi o bază a spaţiului* E, *sînt slab stabile.* De asemenea, din teorema lui Krein-Liusternik (a se vedea [78], Cap. I, § 9, teorema 1.10) rezultă că în *clasa şirurilor care nu admit dezvoltări netriviale ale lui zero, proprietatea de a fi o bază mărginită este stabilă.*

Orice şir $\{y_n\} \subset E$ se află în $\{\varepsilon_n\}$-vecinătatea oricărui şir $\{x_n\} \subset E$, pentru $\varepsilon_n = \|x_n - y_n\|$ $(n = 1, 2, \ldots)$. De altă parte, pentru orice şiruri $\{x_n\} \subset E$, $\{y_n\} \subset E$ avem evident implicaţiile:

$$\textit{apropiat în sens restrîns} \Rightarrow \textit{pătratic apropiat} \Rightarrow \textit{apropiat}. \tag{6.55}$$

În ceea ce priveşte proprietăţile unui şir $\{x_n\} \subset E$, avem evident implicaţiile:

$$\textit{tare stabilă} \Rightarrow \textit{pătratic stabilă} \Rightarrow \textit{stabilă} \Rightarrow \textit{slab stabilă}. \tag{6.56}$$

Într-adevăr, primele două implicaţii rezultă din (6.55), iar ultima se vede luînd drept $\{\varepsilon_n\}$ un şir de numere pozitive astfel încît $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \infty$.

Vom da acum cîteva proprietăţi ale şirurilor apropiate în diverse sensuri, precum şi unele proprietăţi de stabilitate, în diverse sensuri, în spaţiul $L^2([0,1])$. Vom nota prin $\widetilde{x}, \widetilde{y}, \ldots$ elementele din $L^2([0,1])$, iar prin $x, y, \ldots$ funcţii arbitrare din clasele de echivalenţă $\widetilde{x}, \widetilde{y}, \ldots$ respective. Prin afirmaţia că un element $\widetilde{x}$ din $L^2([0,1])$ (sau un şir $\{\widetilde{z}_n\}$, sau o serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \widetilde{z}_i$, din $L^2([0,1])$) are proprietatea P, vom înţelege că există o funcţie $x(\cdot) \in \widetilde{x}$ (respectiv funcţii $z_i(\cdot) \in \widetilde{z}_i$, $i = 1, 2, \ldots$) astfel încît funcţia $x(\cdot)$ (respectiv şirul de funcţii $\{z_n(\cdot)\}$, sau seria de funcţii $\sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i(\cdot)$) are proprietatea P; bineînţeles, în unele cazuri va rezulta că orice reprezentant $x(\cdot) \in \widetilde{x}$ (respectiv orice şir $\{z_n(\cdot)\}$, sau orice serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i(\cdot)$, astfel încît $z_i(\cdot) \in \widetilde{z}_i$, $i = 1, 2, \ldots$) are proprietatea P.

---

[20]) De fapt, definiţiile 6.8 a), b) şi d) au fost date de N. K. Bari ([6]), [7]) pentru funcţii din $\mathfrak{L}^2$ în loc de clase de echivalenţă din L^2, ceea ce a implicat o formă întrucîtva diferită a acestor definiţii. Anume, se cere, pentru orice şir $\{y_n\}$ apropiat (într-unul din sensurile de la a), b), d) de $\{x_n\}$, existenţa unui şir $\{\overline{y}_n\}$, avînd proprietatea P şi astfel încît $\overline{y}_n(t) \equiv y_n(t)$ aproape peste tot pe $[a, b]$.

PROPOZIŢIA 6.7. a) *Dacă un şir ortonormat* $\{\widetilde{x}_n\} \subset L^2([0,1])$ *şi un şir normat* $\{\widetilde{y}_n\} \subset L^2([0,1])$ *sînt apropiate în sens restrîns, atunci pentru orice* $\widetilde{x} \in L^2([0,1])$ *seriile sale Fourier în raport cu aceste şiruri au drept diferenţă o serie care converge a.p.t.*

b) *Pentru orice şir ortonormat fundamental* $\{\widetilde{x}_n\} \subset L^2([0,1])$, *cu proprietatea* $|x_n(t)| < M_n$ $(t \in [0,1])$, *există un şir de numere pozitive* $\{\varepsilon_n\}$ *astfel încît oricare ar fi şirul ortonormat* $\{\widetilde{y}_n\}$ *din* $\{\varepsilon_n\}$*-vecinătatea lui* $\{\widetilde{x}_n\}$, *pentru orice* $\widetilde{x} \in L^2([0,1])$ *seriile sale Fourier în raport cu* $\{\widetilde{x}_n\}$ *şi* $\{\widetilde{y}_n\}$ *au drept diferenţă o serie care converge absolut şi uniform.*

În a) *şi* b) *nu se poate înlocui „apropiate în sens restrîns”, respectiv „*$\{\varepsilon_n\}$*-apropiate” prin „pătratic apropiate”* (N. K. Bari [6], [7] [21])).

Cu aceleaşi notaţii şi convenţii ca mai sus, avem

TEOREMA 6.14. 1°. *Următoarele proprietăţi ale unui şir ortonormat* $\{\widetilde{x}_n\} \subset L^2([0,1])$ *sînt tare stabile:*

a) *Proprietatea lui Cantor şi proprietatea lui Cantor în sens restrîns.*

b) *Proprietatea lui Denjoy-Lusin şi proprietatea lui Denjoy-Lusin în sens restrîns.*

2°. *Următoarea proprietate a unui şir ortonormat* $\{\widetilde{x}_n\} \subset L^2([0,1])$ *este stabilă: Proprietatea lui* $\{\widetilde{x}_n\}$ *de a fi un sistem de convergenţă.*

3°. *Următoarele proprietăţi ale unei baze ortonormate* $\{\widetilde{x}_n\} L^2([0,1])$ *sînt stabile:*

a) *Elementele* $\widetilde{x}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *sînt mărginite pe* $[0,1]$ *în totalitatea lor.*

b) *Elementele* $\widetilde{x}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *sînt mărginite pe* $[0,1]$ *în totalitatea lor şi continue pe* $[0,1]$.

4°. *Următoarele proprietăţi ale unei baze ortonormate* $\{\widetilde{x}_n\} \subset L^2([0,1])$ *formate din elemente mărginite pe* $[0,1]$ *în totalitatea lor, sînt stabile:*

a) *Proprietatea: pentru toate* $\widetilde{x} \in S$ *şi numai pentru acestea seria Fourier în raport cu* $\{\widetilde{x}_n\}$ *converge absolut* (*unde prin* S *se notează mulţimea elementelor* $\widetilde{x} \in L^2$ *ale căror serii Fourier în raport cu* $\{\widetilde{x}_n\}$ *converg absolut.*

b) *Proprietatatea: toate mulţimile* $M \in B$ *şi numai acestea sînt baze de convergenţă absolută pentru şirul* $\{\widetilde{x}_n\}$ (*unde prin* B *se notează mulţimea tuturor bazelor de convergenţă absolută pentru şirul* $\{\widetilde{x}_n\}$).

---

[21]) Menţionăm că lucrarea [6] ne este cunoscută numai din [7] şi [35].

5°. *Următoarele proprietăţi ale unei baze ortonormate* $\{\widetilde{x}_n\}\subset L^2([0,1])$ *sînt slab stabile*:

a) *Elementele* $\widetilde{x}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *sînt mărginite pe* $[0,1]$.

b) *Elementele* $\widetilde{x}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *sînt continue pe* $[0,1]$.

c) *Proprietatea lui* $\{\widetilde{x}_n\}$ *de a fi un sistem de convergenţă uniformă*.

În 3° a), b) şi în 4° a) nu se poate înlocui „stabilă" prin „pătratic stabilă". În 5° a) şi b) nu se poate înlocui „slab stabilă" prin „tare stabilă", iar în 5° c) nu se poate înlocui „slab stabilă" prin „stabilă" (N. K. Bari [6] [7]).

Reamintim (a se vedea [40]) că un şir ortonormat $\{\widetilde{x}_n\}\subset L^2([0,1])$ *are proprietatea lui Cantor* (respectiv, *proprietatea lui Cantor în sens restrîns*), dacă din convergenţa seriei Fourier a lui $\widetilde{x}\in L^2([0,1])$ în raport cu $\{\widetilde{x}_n\}$ pe o mulţime de măsură pozitivă (respectiv, a.p.t. pe $[0,1]$), rezultă convergenţa către zero a coeficienţilor Fourier. Un şir ortonormat $\{\widetilde{x}_n\}\subset L^2([0,1])$ *are proprietatea lui Denjoy-Lusin* (respectiv, *proprietatea lui Denjoy-Lusin în sens restrîns*), dacă din convergenţa absolută a seriei $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i\widetilde{x}_i$ pe o mulţime de măsură pozitivă (respectiv, a.p.t. pe $[0,1]$) rezultă convergenţa seriei $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|$. Un şir $\{\widetilde{x}_n\}\subset L^2([0,1])$ se numeşte *sistem de convergenţă*, dacă din $\{\alpha_n\}\subset K$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2 < \infty$ rezultă convergenţa seriei $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i\widetilde{x}_i$ a.p.t. pe $[0,1]$. O mulţime $M\subset[0,1]$ este *numită bază de convergenţă absolută* pentru un şir $\{\widetilde{x}_n\}\subset L^2([0,1])$, dacă din convergenţa absolută a seriei $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i\widetilde{x}_i$ pe M rezultă convergenţa seriei $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|$. În sfîrşit, un şir ortonormat $\{\widetilde{x}_n\} \subset L^2([0,1])$ se numeşte *sistem de convergenţă uniformă*, dacă pentru orice funcţie continuă seria sa Fourier în raport cu $\{\widetilde{x}_n\}$ converge uniform şi are a.p.t. drept sumă funcţia dată. Menţionăm şi că aceste definiţii trebuie înţelese în sensul convenţiilor făcute mai sus.

§ 7. PROPRIETĂŢI ALE ŞIRURILOR PĂTRATIC APROPIATE ÎN SPAŢII HILBERT

TEOREMA 6.15. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază ortonormată a unui spaţiu Hilbert* H *şi* $\{y_n\}$ *un şir din* H, *pătratic apropiat de* $\{x_n\}$. *Următoarele afirmaţii sînt echivalente*:

1°. $\{y_n\}$ *este fundamental în* H *şi toate* $y_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

2°. $\{y_n\}$ *nu admite dezvoltări netriviale ale lui zero.*

3°. $\{y_n\}$ *este tare liniar independent.*

4°. $\{y_n\}$ *este o bază a spaţiului* H.

5°. $\{y_n\}$ *este o bază Riesz a spaţiului* H.

Dacă şirul $\{y_n\}$ *este normat, afirmaţiile de mai sus sînt echivalente cu următoarele afirmaţii :*

6°. *Determinantul* $|a_{nk}|$ *format din coeficienţii Fourier ai elementelor* $\{y_n\}$ *în raport cu şirul* $\{x_k\}$ *este convergent şi* $\neq 0$.

7°. *Determinantul Gram* $G(y_1, y_2, \ldots)$ *al şirului* $\{y_n\}$ *este convergent şi* $\neq 0$.

Reamintim, în legătură cu condiţiile 6° şi 7°, că un determinant infinit $|a_{nk}|$ este numit *convergent*, dacă limita şirului de determinanţi finiţi $\{ |a_{nk}|_{\substack{n = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, m}} \}_{m=1}^{\infty}$ există pentru $m \to \infty$, şi în acest caz se spune că această limită este *valoarea* determinantului infinit. Reamintim, de asemenea, că pentru orice m elemente $x_1, \ldots, z_m \in H$ avem totdeauna $G(z_1, \ldots, z_m) \geqslant 0$, unde semnul egalităţii are loc dacă şi numai dacă $z_1, \ldots, z_m$ sînt liniar dependente. Prin urmare, afirmaţia 7° este echivalentă cu următoarea :

7′. *Determinantul Gram* $G(y_1, y_2, \ldots)$ *este convergent şi* > 0.

De altfel, cum a arătat N. K. Bari [7], pentru orice şir normat $\{y_n\}$ pătratic apropiat de un şir ortonormat $\{x_n\}$, determinanţii $|a_{nk}|$ şi $G(y_1, y_2, \ldots)$ din teorema 6.15 sînt convergenţi şi $G(y_1, y_2, \ldots)$ este pătratul determinantului $|a_{nk}|$.

Teorema 6.15 a fost demonstrată de N. K. Bari ([7], teoremele 1, 4, 7, corolarul teoremei 8, teorema 9 şi [8], teorema 14). În enunţul şi demonstraţiile echivalenţelor 1° $\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ 4°, N. K. Bari [7] a presupus că şirul $\{y_n\}$ este normat. Se poate însă arăta că această ipoteză este de prisos (folosind propoziţia 6.11 a)) din paragraful următor).

Din implicaţia 7° $\Rightarrow$ 1° rezultă

COROLARUL 6.13. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază ortonormată a unui spaţiu Hilbert* H *şi* $\{y_n\}$ *un şir ortonormat din* H, *pătratic apropiat de* $\{x_n\}$. *Atunci şirul* $\{y_n\}$ *este fundamental în* H (N. K. Bari [7], teorema 2).

În acest caz şirul $\{y_n\}$ este, evident, o bază ortonormată a spaţiului H. O nouă demostraţie a corolarului 6.13 a fost dată de A. Kostiucenko şi A. Skorohod [45].

În condiţia 3° din teorema 6.15 nu se poate înlocui „tare liniar independent" prin „liniar independent în sens clasic" (adică : orice subşir finit este liniar independent). Mai mult, cum a arătat N. K. Bari ([7], teorema 5.1), pentru orice şir ortonormat fundamental $\{x_n\} \subset H$ se poate construi un şir normat $\{y_n\} \subset H$ liniar independent în sens clasic, dar nefundamental în spaţiul H, astfel încît şirul $\{y_n\}$ să fie pătratic apropiat de $\{x_n\}$.

Dacă se modifică condiţia de apropiere dintre $\{x_n\}$ şi $\{y_n\}$, se poate de asemenea obţine ca şirul $\{y_n\}$ să fie o bază Riesz a spaţiului H. Anume, avem

PROPOZIŢIA 6.8. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază ortonormată a unui spaţiu Hilbert* H *şi* $\{y_n\}$ *un şir din* H *cu proprietatea că există o constantă* $\lambda < 1$ *astfel încît*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i - y_i)|^2 \leqslant \lambda \|x\|^2 \qquad (x \in H). \qquad (6.57)$$

Atunci $\{y_n\}$ *este o bază Riesz a spaţiului* H (F. W. Schäfke [72]).

COROLARUL 6.14. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază ortonormată a unui spaţiu Hilbert* H *şi* $\{y_n\}$ *un şir din* H, *astfel încît*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \| x_i - y_i \|^2 < 1. \tag{6.58}$$

Atunci şirul $\{y_n\}$ *este o bază Riesz a spaţiului* H.

Corolarul 6.14 a fost dat de F. W. Schäfke [72]. Afirmaţia că în ipoteza (6.58) şirul $\{y_n\}$ este fundamental în H a fost dată, independent, de N. K. Bari ([7] [22]), teorema 5.2) şi S. H. Hilding [36]. De altfel, corolarul 6.14 este o consecinţă imediată a teoremei lui Paley-Wiener, deoarece $\{x_n\}$ fiind ortonormată, (6.58) implică (6.30) cu $\lambda = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i - y_i \|^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Din teorema lui Paley-Wiener rezultă că în *acest caz baza Riesz* $\{y_n\}$ *este echivalentă cu baza ortonormată* $\{x_n\}$ *şi satisface* (6.31), (6.32).

Se pune, în mod natural, problema slăbirii condiţiei ca $\{x_n\}$ să fie o bază ortonormată a spaţiului H. Avem

TEOREMA 6.16. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază a unui spaţiu Hilbert* H *şi* $\{y_n\} \subset H$ *un şir tare liniar independent, pătratic apropiat de* $\{x_n\}$.

a) *Dacă* $\{x_n\}$ *este o bază Riesz a spaţiului* H, $\{y_n\}$ *este de asemenea o bază Riesz a lui* H.

b) *Dacă* $\{x_n\}$ *este o bază besseliană a spaţiului* H, $\{y_n\}$ *este de asemenea o bază besseliană a spaţiului* H.

c) *Dacă* $\{x_n\}$ *este o bază hilbertiană a spaţiului* H, $\{y_n\}$ *este de asemenea o bază hilbertiană a spaţiului* H (N. K. Bari [8], teorema 14 şi p. 83, trimiterea 1).

Cu alte cuvinte, proprietăţile de a fi o bază Riesz, sau o bază besseliană, sau o bază hilbertiană, sînt pătratic stabile în clasa şirurilor tare liniar independente.

Problema 6.3. Fie $\{x_n\}$ o bază a unui spaţiu Hilbert H şi $\{y_n\} \subset H$ un şir tare liniar independent, pătratic apropiat de $\{x_n\}$. Este oare $\{y_n\}$ o bază a spaţiului H? Cu alte cuvinte, proprietatea de a fi o bază a spaţiului H este oare pătratic stabilă în clasa şirurilor tare liniar independente? (N. K. Bari [8], p. 83).

Proprietatea, mai slabă, de a fi un şir fundamental în spaţiul H, nu mai este pătratic stabilă în clasa şirurilor tare liniar independente, cum ne arată

---

[22] În [7] s-a mai presupus că şirul $\{y_n\}$ este normat.

Exemplul 6.7. Fie $\{z_n\}$ un şir ortonormat fundamental într-un spaţiu Hilbert H, fie $\{c_n\}$ un şir de scalari astfel încît $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = 1$, şi fie $\lambda_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} |c_i|^2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Atunci şirul $\{x_n\} \subset H$ definit prin

$$x_n = \lambda_n \sum_{i=1}^{n} c_i z_i \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (6.59)$$

este normat, tare liniar independent şi fundamental în spaţiul H, iar şirul $\{y_n\} \subset H$ definit prin

$$y_n = x_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (6.60)$$

este normat, tare liniar independent şi pătratic apropiat de şirul $\{x_n\}$, dar nu este fundamental în spaţiul H (N. K. Bari [7], § 5).

În corolarul 6.13 s-a dat o condiţie asupra numerelor $\rho_n = \|x_n - y_n\|$ $(n = 1, 2, \ldots)$, unde $\{x_n\} \subset H$ este o bază ortonormată şi $\{y_n\} \subset H$ un şir ortonormat, suficientă pentru ca şirul $\{y_n\}$ să fie fundamental în spaţiul H. Această condiţie este şi necesară, cum ne arată

PROPOZIŢIA 6.9. *Oricare ar fi numerele* ρ_n *cu proprietăţile* $0 \leqslant \rho_n \leqslant \sqrt{2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ şi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i^2 = \infty$, *pentru orice bază ortonormată* $\{x_n\} \subset H$ *se poate găsi un şir ortonormat nefundamental* $\{y_n\}$ *astfel încît* $\|x_n - y_n\| = \rho_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (N. K. Bari [7], teorema 10).

Restricţia $0 \leqslant \rho_n \leqslant \sqrt{2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ din propoziţia 6.9 este naturală, deoarece pentru orice două şiruri normate $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset H$ avem $\|x_n - y_n\| > \sqrt{2}$ dacă şi numai dacă [23]) $\|-x_n - y_n\| < \sqrt{2}$ şi deoarece $\{x_n\}$ este fundamental în H dacă şi numai dacă orice şir de forma $\{\varepsilon_n x_n\}$, unde $\varepsilon_n = \pm 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ este fundamental în H.

Dacă se menţine numai restricţia absolut necesară $0 \leqslant \rho_n \leqslant 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, satisfăcută de distanţa dintre două funcţii normate arbitrare, avem

PROPOZIŢIA 6.10. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază ortonormată a unui spaţiu Hilbert* H *şi fie* $\{\rho_n\}$ *un şir de numere astfel încît* $0 \leqslant \rho_n \leqslant 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

a) *Dacă* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i^2(4 - \rho_i^2) < \infty$, *atunci orice şir tare liniar independent (deci, în particular, orice şir ortonormat)* $\{y_n\}$ *cu proprietatea* $\|x_n - y_n\| = \rho_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *este fundamental în* H.

---

[23]) În adevăr, aceasta rezultă din formula

$$\|x_n - y_n\|^2 + \|-x_n - y_n\|^2 = 4.$$

b) *Dacă* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i^2(4 - \rho_i^2) = \infty$, *se poate construi un şir ortonormat nefundamental* $\{y_n\}$ *astfel încît* $\|x_n - y_n\| = \rho_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (N. K. Bari [7], teorema 12 şi observaţia făcută după această teoremă).

§ 8. BAZE BARI ÎN SPAŢII HILBERT

Am văzut, în teorema 6.15, că dacă un şir tare liniar independent dintr-un spaţiu Hilbert H este pătratic apropiat de o bază ortonormată a spaţiului H, atunci el este o bază a spaţiului H. De aceea, este naturală

Definiţia 6.9. O bază $\{x_n\}$ a unui spaţiu Hilbert H se numeşte *bază Bari* a spaţiului H, dacă există o bază ortonormată $\{z_n\}$ a spaţiului H astfel încît $\{x_n\}$ să fie pătratic apropiată de $\{z_n\}$ (M. G. Krein [48]).

În virtutea teoremei 6.15, *orice bază Bari este o bază Riesz*. Reciproca acestei afirmaţii nu este însă adevărată, deoarece dacă $\{y_n\}$ este o bază ortonormată, atunci şirul $\{x_n\}$ definit prin

$$x_n = 2\, y_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

este o bază Riesz care nu este pătratic apropiată de nici o bază normată $\{z_n\}$[24]. Există însă şi baze Riesz *normate* care nu sînt baze Bari, cum ne arată următorul exemplu construit de C. Foiaş :

Exemplul 6.8. Fie $x(\cdot)$ o funcţie măsurabilă pe $[0, 2\pi]$, astfel încît să avem, pentru un $\varepsilon > 0$ convenabil, $\varepsilon \leqslant x(t) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ a.p.t. pe $[0, 2\pi]$, şi încît $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} [x(t)]^2\, dt = 1$ (de exemplu, $x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{C}}(t + 1)$, unde $C = \dfrac{\pi^2}{3} + (\pi + 1)^2$). Atunci şirul $\{x_n\}$ definit prin

$$x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x(t)\, e^{int} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad (6.61)$$

este o bază Riesz normată a lui $L^2([0, 2\pi])$, care nu este o bază Bari.

---

[24] În adevăr, avem

$$\| 2y_n - z_n \| \geqslant |\, \|2y_n\| - \|z_n\|\, | = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

deci $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \| 2y_i - z_i \|^2 = \infty$.

PROPOZIŢIA 6.11. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază Bari a unui spaţiu Hilbert* H. *Atunci*

a) *Şirul normat* $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$ *este o bază Bari a spaţiului* H.

b) *Şirul de funcţionale coeficienţi* $\{f_n\} \subset H$ *asociat bazei* $\{x_n\}$ *este de asemenea o bază Bari a spaţiului* H (M. G. Krein [48], p. 334 şi p. 335).

Anume, dacă şirul $\{x_n\}$ este pătratic apropiat de baza ortonormată $\{z_n\}$, se arată că şirul $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$ este pătratic apropiat de o bază ortonormată convenabilă de forma $\{\varepsilon_n z_n\}$, unde $|\varepsilon_n| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, iar şirul $\{f_n\}$ este pătratic apropiat de $\{z_n^*\}$ [48]. Prin urmare, avem

COROLARUL 6.15. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază Bari a unui spaţiu Hilbert* H *şi* $\{f_n\} \subset H$ *şirul de funcţionale coeficienţi asociat bazei* $\{x_n\}$. *Avem atunci*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - f_i\|^2 < \infty \tag{6.62}$$

(M. G. Krein [48], p. 334).

Reamintim că o matrice infinită $(a_{nk})_1^\infty$ se numeşte *cvadrabilă*, dacă seria dublă $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2$ este convergentă.

TEOREMA 6.17. *Fie* $\{x_n\}$ *un şir fundamental într-un spaţiu Hilbert* H. *Următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

1°. $\{x_n\}$ *este o bază Bari a spaţiului* H.

2°. $\{x_n\}$ *nu admite dezvoltări netriviale ale lui zero şi matricea*

$$\|(x_n, x_k) - \delta_{nk}\|_1^\infty \tag{6.63}$$

este cvadrabilă.

Dacă şirul $\{x_n\}$ *este normat, aceste afirmaţii sînt echivalente cu următoarea afirmaţie* :

3°. *Determinantul Gram* $G(x_1, x_2, \ldots)$ *este convergent şi* > 0.

Teorema 6.17 a fost demonstrată de M. G. Krein ([48], teoremele 2 şi 1). Implicaţiile 1° ⇒ 2° şi 1° ⇒ 3° apar şi în lucrarea lui N. K. Bari [7]. De altfel, implicaţia 1° ⇒ 3° nu este altceva decît implicaţia 4° ⇒ 7′ din teorema 6.15. Reciproc, dacă avem 3°, se arată că şirul $\{x_n\}$ nu admite dezvoltări netriviale ale lui zero şi este pătratic apropiat de baza ortonormată $\{z_n\}$ a lui H care se obţine ortonormalizînd şirul $\{x_n\}$ cu procedeul lui E. Schmidt (M. G. Krein [48], p. 336).

TEOREMA 6.18. *Fie* $\{x_n\}$ *o bază Bari a unui spaţiu Hilbert* H, *şi* $\{z_n\}$ *o bază ortonormată arbitrară a spaţiului* H. *Avem atunci*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - z_i\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sqrt{\mu_i} - 1\right)^2, \tag{6.64}$$

unde $\{\mu_n\}$ *este spectrul complet al numerelor proprii ale matricei Gram* $\|(x_n, x_k)\|_1^\infty$. *Există o bază ortonormată* $\{z_n^{(0)}\}$ *a spaţiului* H *şi numai una, pentru care avem semnul egalităţii în* (6.64) (M. G. Krein [48], teorema 3).

Avem astfel o metodă de a determina, pentru o bază Bari dată $\{x_n\}$ a spaţiului H, baza ortonormată unică $\{z_n^{(0)}\}$ a spaţiului H, pentru care $\inf_{\{z_n\}} \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - z_i\|^2$ este atins (unde $\{z_n\}$ parcurge mulţimea tuturor bazelor ortonormate ale spaţiului H).

§ 9. BAZE ÎN SPAŢII DE FUNCŢII CONTINUE

Am văzut ([78], Cap. I, § 1, problema 1.2) că problema bazei este echivalentă cu problema: există oare o bază în orice subspaţiu vectorial închis infinitdimensional al spaţiului $C([0, 1])$? În paragraful de faţă ne vom ocupa de bazele întregului spaţiu $C([0, 1])$, precum şi de bazele spaţiilor $C(Q)$ unde Q este un spaţiu metric compact.

Am văzut ([78], Cap. I, § 1, exemplul 1.4) că şirul de funcţii $\{x_n\} \subset C([0, 1])$ definit prin

$$x_0(t) \equiv 1, \quad x_1(t) = t,$$

$$x_{2^k+l}(t) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } t \notin \left(\dfrac{2l-2}{2^{k+1}}, \dfrac{2l}{2^{k+1}}\right), \\[2ex] 1 \text{ pentru } t = \dfrac{2l-1}{2^{k+1}}, \\[2ex] \text{liniară pentru } t \in \left[\dfrac{2l-2}{2^{k+1}}, \dfrac{2l-1}{2^{k+1}}\right] \text{ şi } t \in \left[\dfrac{2l-1}{2^{k+1}}, \dfrac{2l}{2^{k+1}}\right] \end{cases} \tag{6.65}$$

$$(l = 1, \ldots, 2^k;\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

constituie o bază a spaţiului $C([0, 1])$, numită *baza Schauder* a acestui spaţiu [25]). Această bază, precum şi orice altă bază a spaţiului $C([0, 1])$ este condiţionată (a se vedea [78], Cap. II, § 9, exemplul 2.13 şi [79], Cap. IV, § 4, corolarul 4.10).

---

[25]) De fapt în [78] primele două funcţii ale bazei Schauder s-au definit prin $\overline{x}_0(t) = t$, $\overline{x}_1(t) = 1 - t$, ceea ce dă, evident, o bază echivalentă cu (6.65), avînd proprietatea $[\overline{x}_0, \overline{x}_1] = [x_0, x_1]$.

Reamintim, de asemenea, că *sistemul ortogonal* $\{y_n\}$ *al lui Haar* pe $[0, 1]$ este definit prin

$$y_1(t) \equiv 1,$$

$$y_{2^k+l}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^k} \text{ pentru } t \in \left[\dfrac{2l-2}{2^{k+1}}, \dfrac{2l-1}{2^{k+1}}\right), \\ -\sqrt{2^k} \text{ pentru } t \in \left(\dfrac{2l-1}{2^{k+1}} \cdot \dfrac{2l}{2^{k+1}}\right], \\ 0 \text{ pentru ceilalţi } t \end{cases} \tag{6.66}$$

$$(l = 1, 2, \ldots, 2^k;\ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

(a se vedea [78], Cap. I, § 1, exemplul 1.6).

Sumele parţiale ale dezvoltării unei funcţii continue arbitrare $x \in C([0, 1])$ după sistemul ortogonal $\{y_n\}$ al lui Haar sînt funcţii în scară, tinzînd către funcţia x uniform pe $[0, 1]$ (a se vedea de exemplu [40], Cap. IV, § 4).

PROPOZIŢIA 6.12. *Fie* $\{y_n\}$ *sistemul ortogonal al lui Haar pe* $[0, 1]$ *şi fie* $\{x_n\}$ *baza Schauder a spaţiului* $C([0, 1])$. *Avem atunci*

$$x_n(t) = \gamma_n \int_0^t y_n(s)\, \mathrm{d}s \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1;\ n = 1, 2, \ldots) \tag{6.67),}$$

unde $\gamma_1 = 1$, $\gamma_{2^k+l} = 2\sqrt{2^k}$ $(l = 1, 2, \ldots, 2^k;\ k = 0, 1, 2, \ldots)$, *şi avem, uniform pe* $[0, 1]$,

$$x(t) = x(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\gamma_i \int_0^1 y_i(s)\, \mathrm{d}x(s)\right] x_i(t) \qquad (x \in C([0, 1])) \tag{6.68}$$

(Z. Ciesielski [18], teorema 3).

Coeficienţii lui x_n din (6.68) se pot exprima şi astfel:

$$f_{2^k+l}(x) = \gamma_{2^k+l} \int_0^1 y_{2^k+l}(s)\, \mathrm{d}x(s) = \sqrt{2^k}\left[2x\left(\frac{2l-1}{2^{k+1}}\right) - x\left(\frac{l-1}{2^k}\right) - x\left(\frac{l}{2^k}\right)\right] \tag{6.69}$$

$$(x \in C([0, 1]);\ l = 1, 2, \ldots, 2^k;\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

ceea ce ne arată că dacă funcţia $x \in C([0, 1])$ este concavă, avem $f_n(x) \geqslant 0$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Sumele parţiale ale dezvoltării (6.68) a unei funcţii $x \in C([0,1])$ după baza Schauder $\{x_n\}$ a lui $C([0, 1])$ sînt funcţii poligonale care interpolează valorile lui $x(t)$ într-un număr finit de puncte convenabile ale segmentului $[0, 1]$.

Deoarece prin (6.69) avem

$$f_{2^k+l}(x) = -\gamma_{2^k+l} \int_0^1 x(s)\, \mathrm{d}y_{2^k+l}(s) \quad (x \in C([0, 1]);$$

$$l = 1, 2, \ldots, 2^k;\ k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6.70}$$

rezultă că *sistemul ortogonal* $\{y_n\}$ *al lui Haar este biortogonal pe şirul* $\{-\gamma_n x_n\}$, *unde* $\{x_n\}$ *este baza Schauder* (6.65) *a spaţiului* $C([0,1])$ (Z. Semadeni [74], p. 100).

Am văzut în Cap. V, § 4 (a se vedea şi [78], Cap. I, § 9, corolarul 1.2), că spaţiul $C([0,1])$ nu are baze formate din polinoame algebrice $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n)} t^i$ care să conţină polinoame de toate gradele (adică $\alpha_n^{(n)} \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$) dar are totuşi baze formate din polinoame algebrice $\sum_{i=0}^{m(n)} \alpha_i^{(n)} t^i$. Se pune, în mod natural, problema construirii efective a unor asemenea baze polinomiale.

Pentru o funcţie $x \in C\,([0,1])$ vom nota prin $B_m(x)$ polinomul ei Bernstein de grad m, adică

$$[B_m(x)](t) = \sum_{j=0}^{m} x\left(\frac{j}{m}\right) C_m^j\, t^j (1-t)^{m-j}, \tag{6.71}$$

şi prin $T_m(x)$ polinomul ei de cea mai bună aproximaţie de grad $\leqslant m$. Cu aceste notaţii, avem

TEOREMA 6.19. *Fiecare din şirurile*

$$\begin{gathered} p_0 = x_0,\ p_1 = x_1,\ p_{2^k+l} = B_{9.4^{2^k}+l+k+2}(x_{2^k+l}) \\ (l = 1, 2, \ldots, 2^k;\ k = 0, 1, 2, \ldots) \end{gathered} \tag{6.72}$$

şi

$$\begin{gathered} \bar{p}_0 = x_0,\ \bar{p}_1 = x_1,\ \bar{p}_{2^k+l} = T_{48.2^{2^k}+l+k}(x_{2^k+l}) \\ (l = 1, 2, \ldots, 2^k;\ k = 0, 1, 2, \ldots) \end{gathered} \tag{6.73}$$

constituie o bază polinomială a spaţiului $C([0,1])$.

Teorema 6.19 a fost demonstrată în lucrarea [27] ([27], teorema 2). După cum rezultă din recenzia lui D. P. Milman [57] a lucrării [27], baze polinomiale ale spaţiului $C([0,1])$ au fost construite şi de K. M. Şaidukov [81], care a mai arătat că se pot alege baze polinomiale ale lui $C([0,1])$ cu proprietatea că după ortogonalizarea Schmidt a acestora să se obţină din nou baze ale lui $C([0,1])$ [26]).

Vom examina acum comportarea gradelor polinoamelor dintr-o bază polinomială a spaţiului $C([0,1])$.

Definiţia 6.10. Fie $\{p_n\}$ o bază polinomială a spaţiului $C([0,1])$ şi fie g_n gradul polinomului p_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Se numeşte [27] *gradul asimptotic* al bazei polinomiale $\{p_n\}$ numărul

$$g(\{p_n\}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log g_n}{n}, \tag{6.74}$$

---

[26]) Lucrarea [81] ne este cunoscută numai din [57].

şi *gradul asimptotic* al spaţiului $C([0,1])$, numărul

$$g_0 = \inf_{\{p_n\}\in(P)} g(\{p_n\}), \tag{6.75}$$

unde prin (P) s-a notat mulţimea tuturor bazelor polinomiale ale spaţiului $C([0,1])$.

Avem, evident, $g_0 \geqslant 0$. Din teorema 6.19 rezultă

COROLARUL 6.16. *Fie* $\{p_n\}$ *şi* $\{\bar{p}_n\}$ *bazele polinomiale ale spaţiului* $C([0,1])$, *date în teorema* 6.19. *Avem atunci*

$$g(\{p_n\}) \leqslant 2 \log 2, \tag{6.76}$$

$$g(\{\bar{p}_n\}) \leqslant \log 2, \tag{6.77}$$

şi prin urmare

$$g_0 \leqslant \log 2. \tag{6.78}$$

Corolarul 6.16 a fost dat în lucrarea [27].

Problema 6.4. Care este valoarea exactă a lui g_0? Sau, cel puţin, să se găsească evaluări (superioare şi inferioare), suficient de strînse, ale lui g_0 ([27], p. 594).

Dacă ar exista o bază polinomială $\{p_n\}$ a lui $C([0,1])$, astfel încît $g_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, din definiţia 6.10 ar rezulta că avem $g_0 = 0$. Am văzut însă (Cap. V, § 4, exemplul 5.1) că nu există nici o asemenea bază a spaţiului $C([0, 1])$.

Pentru un spaţiu compact Q, spaţiul $C(Q)$ este separabil dacă şi numai dacă spaţiul Q este metrizabil. După cum am văzut în [78] (Cap. I, § 2, exemplul 1.5), o bază în spaţiul $C(Q)$, unde Q este un spaţiu metric compact arbitrar, a fost construită (generalizînd construcţia lui Schauder din spaţiul $C([0,1])$), de F. S. Vaher [82] şi, independent, de C. Bessaga [12]. Construcţia lui F. S. Vaher se face scufundînd spaţiul metric compact Q în cubul hilbertian şi folosind triangulări finitdimensionale ale acestui cub. După cum a observat însă C. Bessaga, demonstraţia lui F. S. Vaher este valabilă numai pentru spaţii Q nenumărabile, iar cazul cînd Q este numărabil trebuie considerat separat. În acest din urmă caz Q este omeomorf cu o mulţime Q_1 de numere diadice din $[0, 1]$ şi $C(Q)$ este izometric cu spaţiul E_1 al funcţiilor continue pe Q_1 şi prelungite liniar pe $[0, 1]$, iar mulţimea funcţiilor Schauder cu vîrfurile în Q_1 este o bază a lui E_1.

Menţionăm că unele construcţii de baze în spaţii $C(Q)$, unde Q este o mulţime mărginită închisă dintr-un spaţiu euclidian finitdimensional, au mai fost făcute (generalizînd construcţia lui Schauder din spaţiul $C([0,1])$) de L. A. Gurevici [34] precum şi de H. W. Ellis şi D. G. Kuehner [24]; se pare că aceştia din urmă nu au cunoscut lucrările lui Vaher şi Bessaga menţionate în cele de mai sus.

Cu excepţia cazului cînd $Q = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, 0\}$ (cu metrica sa naturală), bazele de mai sus ale spaţiilor $C(Q)$, precum şi orice altă bază a acestor spaţii, sînt condiţionate. În adevăr, am văzut în [79], Cap. IV, § 4, că orice spaţiu infinitdimensional $C(Q)$ care posedă o bază necondiţionată este izomorf cu spaţiul c.

ANEXĂ

§ 1. DESPRE BAZE NEECHIVALENTE ŞI BAZE CONDIŢIONATE ÎN SPAŢII BANACH

Recent s-au obţinut, în lucrarea [68], o serie de noi rezultate asupra bazelor neechivalente şi bazelor condiţionate în spaţii Banach. Aici ne mărginim să menţionăm că rezultatul principal din lucrarea [68] este

TEOREMA 7.1. *În orice spaţiu Banach infinitdimensional cu bază există două baze normalizate* [27]) *neechivalente, dintre care una condiţionată.*

Deoarece în spaţiile de dimensiune finită toate bazele normalizate sînt echivalente şi necondiţionate (a se vedea [78], Cap. II, § 17), din teorema 7.1 rezultă că fiecare din aceste două proprietăţi caracterizează spaţiile de dimensiune finită în clasa spaţiilor Banach cu bază.

§ 2. GENERALIZĂRI ALE NOŢIUNII DE BAZĂ, CARE NU SÎNT ŞIRURI INFINITE DE ELEMENTE

Prin generalizări ale noţiunii de bază sau a noţiunii de bază aparţinînd unei clase speciale (de exemplu, bază necondiţionată) am înţeles în cele precedente (a se vedea [79], Cap. III) introducerea unor clase de şiruri infinite $\{x_n\}$ într-un spaţiu Banach arbitrar E, cu proprietăţile următoare : *a*) Dacă spaţiul E are o bază (respectiv o bază necondiţionată etc.), orice bază (respectiv orice bază necondiţionată etc.) a spaţiului E aparţine acestor clase, şi *b*) şirurile $\{x_n\}$ dintr-o asemenea clasă posedă o parte (depinzînd de clasa respectivă şi aleasă astfel încît să fie utilă pentru aplicaţii) din proprietăţile pe care le au bazele (respectiv bazele necondiţionate etc.).

Se pot însă da şi alte generalizări ale noţiunii de bază (sau a noţiunii de bază aparţinînd unei clase speciale de baze) care să nu mai fie şiruri infinite de elemente x_n din spaţiul E. De exemplu, am văzut în [79] ([79], Cap. III, § 10, propoziţia 3.12) că un spaţiu Banach E are o bază aproximativă dacă şi numai dacă există un şir de endomorfisme liniare continue de rang finit $\{u_n\}\subset\mathfrak{L}(E, E)$ astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = x \qquad (x\in E), \tag{7.1}$$

ceea ce justifică să numim bază aproximativă chiar şirul de endomorfisme $\{u_n\}$ (în loc de şirul $\{x_n\}$ din [79], Cap. III, § 10, definiţia 3.19) [28]). Aşadar, în acest caz prin bază aproximativă se înţelege un şir de endomorfisme cu anumite proprietăţi.

Există şi alte generalizări ale noţiunii de bază, care nu sînt şiruri infinite de elemente x_n din E. În paragraful de faţă vom prezenta două asemenea generalizări.

---

[27]) Adică avînd toate elementele de normă 1.

[28]) De altfel, chiar aşa a procedat I. Maddaus [51], iar în [79] am dat de fapt o altă definiţie, echivalentă cu cea a lui Maddaus.

Definiția 7.1 Fie E un spațiu Banach, T un spațiu cu o măsură nenegativă σ, și M_σ spațiul vectorial al claselor de funcții σ-măsurabile și finite σ-aproape peste tot, echivalente relativ la măsura σ. O aplicație liniară $v : E^* \to M_\sigma$ se numește *bază continuală* a spațiului E, dacă pentru orice element $x \in E$ există un element unic $\xi \in M_\sigma$ astfel încît

$$f(x) = \int_T \xi(t)\,[v(f)](t)\,\sigma(\mathrm{d}t) \qquad (f \in E^*). \tag{7.2}$$

Aplicația liniară $\varphi : E \to M_\sigma$ definită prin

$$\varphi(x) = \xi \qquad (x \in E) \tag{7.3}$$

se numește *aplicația asociată* bazei continuale v.

În cazul particular cînd E este un spațiu Hilbert, această definiție a fost dată de G. M. Keselman [44].

Din (7.2) și (7.3) rezultă că avem

$$f(x) = \int_T [\varphi(x)](t)\,[v(f)](t)\,\sigma(\mathrm{d}t) \qquad (f \in E^*,\ x \in E). \tag{7.4}$$

Dacă E este reflexiv și baza continuală v satisface o anumită condiție de mărginire integrală, aplicația asociată φ este o bază continuală a spațiului adjunct E^*.

Teoria bazelor besseliene, hilbertiene și teoria bazelor Riesz (a se vedea Cap. VI, § 4) a fost extinsă de G. M. Keselman [44] la baze continuale în spații Hilbert. O serie de alte rezultate despre baze în spații Banach se pot de asemenea extinde la baze continuale în spații Banach.

Definiția 7.2. Un șir de subspații vectoriale închise nenule $\{G_n\}$ ale unui spațiu Banach E se numește *bază de subspații* a spațiului E, dacă pentru orice element $x \in E$ există un șir unic $\{x_n\} \subset E$, cu $x_n \in G_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ astfel încît să avem

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i. \tag{7.5}$$

În cazul particular cînd E este un spațiu Hilbert, această definiție a fost dată de M. K. Fage [25] și reluată de A. S. Markus [52]. În cazul unui spațiu Banach arbitrar, noțiunea de mai sus a fost studiată de M. M. Grinblium [33], care a folosit însă o altă terminologie 29). Anume, în situația din definiția 7.2, M. M. Grinblium spune că E este *suma directă* a subspațiilor $G_1, G_2, \ldots$ [33].

Teoria bazelor Riesz a fost extinsă de M. K. Fage [25] la baze de subspații în spații Hilbert (în [25] se folosește, pentru baze Riesz de subspații, termenul *bază rectificabilă*). Bazele Riesz de subspații au fost studiate și de A. S. Markus [52] care a extins, între altele, teoria bazelor Bari (a se vedea Cap. VI, § 8) la baze de subspații în spații Hilbert. Caracterizarea intrinsecă bine cunoscută a bazelor (a se vedea [78], Cap. I, § 7, teorema 1.5, echivalența 1° ⟺ 4°) a fost extinsă de

---

29) După cum ne-a adus la cunoștință A. Pelczyński, această noțiune a fost studiată și de S. Mazur, care însă nu a publicat rezultatele sale.

M. M. Grinblium la baze de subspaţii în spaţii Banach ([33], teorema 5). De asemenea, caracterizarea corespunzătoare a bazelor necondiţionate (a se vedea [78], Cap. II, § 11, teorema 2.10, echivalenţa 1° ⇔ 7°) a fost extinsă de M. M. Grinblium la baze necondiţionate de subspaţii în spaţii Banach ([33], teorema 6). O serie de alte rezultate despre baze în spaţii Banach se pot de asemenea extinde la baze de subspaţii în spaţii Banach*).

§ 3. O EXTENSIUNE A NOŢIUNII DE BAZĂ NECONDIŢIONATĂ LA SPAŢII BANACH GENERALE (NU NEAPĂRAT SEPARABILE)

Prin extensiune a noţiunii de bază, sau a noţiunii de bază aparţinînd unei clase speciale (de exemplu, bază necondiţionată), sau a unei generalizări a noţiunii de bază (de exemplu, T-bază) la spaţii Banach generale, înţelegem introducerea, pentru orice spaţiu Banach E, a unei clase $\mathcal{A}$ de mulţimi $A\subset E$, cu proprietatea următoare: Dacă E este un spaţiu separabil, clasa $\mathcal{A}$ coincide cu clasa tuturor bazelor spaţiului E (respectiv, cu clasa tuturor bazelor necondiţionate, sau clasa tuturor T-bazelor).

Unele din generalizările noţiunii de bază, considerate în lucrarea de faţă (de exemplu noţiunile de şir bazic, bază generalizată, bază continuală, bază de subspaţii etc.) au sens într-un spaţiu Banach arbitrar E, adică existenţa lor într-un spaţiu Banach E nu implică separabilitatea spaţiului E. Prin aceasta ele sînt extinse, în mod automat, la spaţii Banach arbitrare. Uneori există însă, pe lîngă aceste extensiuni automate, şi alte extensiuni, care se obţin prin înlocuirea şirurilor numărabile $\{x_n\}\subset E$ cu mulţimi indexate $\{x_i\}_{i\in I}\subset E$ arbitrare. De exemplu, o familie $\{x_i\}_{i\in I}\subset E$ se numeşte *tare liniar independentă*, dacă există o familie $\{f_i\}_{i\in I}\subset E^*$ astfel încît $f_i(x_j)=\delta_{ij}$ $(i, j\in I)$. În acest caz cuplul $(\{x_i\}_{i\in I}, \{f_i\}_{i\in I})$ se numeşte *sistem biortogonal general* (a se vedea de exemplu [40], Cap. VIII, § 1, unde se foloseşte termenul de *sistem biortonormat*, sau [19]). Se arată că dacă spaţiul E este separabil, orice sistem biortogonal general este cel mult numărabil ([40], Cap. VIII, § 1). Prin urmare, noţiunile de familie tare liniar independentă şi sistem biortogonal general constituie extensiuni, în sensul din acest paragraf, ale noţiunilor corespunzătoare din spaţii separabile şi aceste extensiuni sînt diferite de cele care se obţin în mod automat din definiţiile respective care au sens în spaţii arbitrare (a se vedea [78], Cap. I, § 6, definiţia 1.5 şi § 4, definiţia 1.1). O serie de rezultate asupra sistemelor biortogonale numărabile au fost extinse la familii biortogonale generale (a se vedea [19]).

De altă parte, majoritatea noţiunilor considerate în lucrarea de faţă (de exemplu, noţiunile de bază, bază necondiţionată, T-bază, bază aproximativă etc.), aşa cum au fost ele definite în cele precedente, au sens numai în spaţii Banach separabile, adică existenţa şirurilor respective într-un spaţiu Banach E implică separabilitatea spaţiului E (deoarece şirurile respective sînt fundamentale în E). În unele cazuri este posibilă extensiunea lor la spaţii Banach generale, prin înlocuirea şirurilor numărabile $\{x_n\}\subset E$ cu mulţimi indexate fundamentale $\{x_i\}_{i\in I}\subset E$. De exemplu, noţiunea de *familie tare liniar independentă fundamentală* este o asemenea extensiune a noţiunii de şir tare liniar independent fundamental. O extensiune a noţiunii de bază aproximativă, în care şirul de endomorfisme de rang finit $\{u_n\}$ se înlocuieşte printr-o mulţime dirijată mărginită de endomorfisme compacte $\{u_d\}$ a fost dată de R. S. Phillips [69]. Baze aproximative generalizate (în sensul din [79], Cap. III, §10, formula (3.39)) în spaţii Banach arbitrare au fost studiate de A. Grothendieck [32].

---

*) *Notă la corectură.* Noi rezultate interesante asupra bazelor de subspaţii au fost obţinute recent de Ch. W. McArthur şi J. R. Retherford.

În numeroase cazuri, situaţia este însă diferită. Astfel, de exemplu, *nu se ştie pînă în prezent cum se poate extinde noţiunea de bază la spaţii Banach generale.* Cu toate acestea, pentru noţiunea de bază necondiţionată o asemenea extensiune există şi este utilă în unele aplicaţii.

Definiţia 7.3. O familie $\{x_i\}_{i\in I}$ de elemente dintr-un spaţiu Banach E se numeşte *bază necondiţionată generală* a spaţiului E, dacă pentru orice element $x\in E$ există un subşir *unic* $\{x_{i_n}\}_{i_n\in I}\subset\{x_i\}_{i\in I}$ şi un şir *unic* de scalari nenuli $\{\alpha_n\}\subset K$, astfel încît să avem

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_{i_n}, \tag{7.6}$$

independent de ordinea termenilor din seria (7.6) (R. C. James [39]).

R. C. James a extins o teoremă de caracterizare intrinsecă a bazelor necondiţionate (a se vedea [78], Cap. II, § 11, teorema 2.10, echivalenţa $1°\Leftrightarrow4°$) la baze necondiţionate generale ([39], p. 167). De asemenea, el a observat că dacă E are o bază necondiţionată generală, atunci orice subspaţiu vectorial închis separabil al lui E este conţinut într-un subspaţiu vectorial închis separabil complementat al lui E.

Bazele necondiţionate generale se pot clasifica după numărul lor cardinal. Anume, notînd prin $\overline{\overline{M}}$ numărul cardinal al unei mulţimi M, C. Bessaga şi A. Pelczyński ([14], § 4) au dat

Definiţia 7.4. O mulţime A de elemente dintr-un spaţiu Banach E se numeşte *bază necondiţionată de putere* $\overline{\overline{A}}$ a spaţiului E, dacă ea este fundamentală în spaţiul E şi dacă orice şir (numărabil) de elemente din A este un şir bazic necondiţionat.

De asemenea, C. Bessaga şi A. Pelczyński ([14], § 4) au observat că o serie de teoreme pentru subspaţii ale unui spaţiu Banach cu bază necondiţionată (de exemplu caracterizări ale reflexivităţii etc.) se pot extinde la subspaţii ale unui spaţiu Banach E cu bază necondiţionată de putere arbitrară.

§ 4. BAZE ÎN SPAŢII VECTORIALE TOPOLOGICE

Am văzut în [78] (preliminarii, definiţia 0.1) că noţiunea de bază are sens în orice spaţiu vectorial topologic U (bineînţeles, existenţa unei baze într-un spaţiu vectorial topologic U implică separabilitatea spaţiului

U), şi am văzut că dacă U nu este un spaţiu Banach, funcţionalele coeficienţi pot fi discontinue. În cazul cînd ele sînt continue, baza se numeşte *bază Schauder* (a se vedea [78], preliminarii, definiţia 0.3).

Necesitatea introducerii noţiunii de bază în spaţii mai generale decît spaţiile Banach a fost parţial motivată prin rezultatele despre dualitatea slabă, prezentate în [78], Cap. I, § 3. Într-adevăr, s-a arătat acolo că studiul bazelor Schauder în spaţiul vectorial topologic E^*_σ obţinut dotînd spaţiul adjunct E^* al unui spaţiu Banach E cu topologia slabă $\sigma(E^*, E)$, are aplicaţii chiar în studiul bazelor din spaţiul Banach E (a se vedea [78], Cap. I, § 13, teorema 1.16).

Afară de studiul bazelor (şi unor generalizări ale bazelor) în spaţii vectoriale topologice generale, întreprins de M. G. Arsove, R. E. Edwards [3] şi alţii, precum şi de studiul bazelor din spaţiile local convexe E^*_σ de mai sus, făcut în lucrările [75], [77], există rezultate asupra bazelor şi în alte clase importante de spaţii vectoriale topologice care nu sînt spaţii Banach.

Astfel, s-a arătat că o serie de rezultate asupra bazelor din spaţii Banach, se pot extinde la baze în spaţii vectoriale metrice complete : de exemplu, continuitatea funcţionalelor coeficienţi 30), teorema lui Paley-Wiener (M. G. Arsove [2]), şi altele.

De asemenea, s-a arătat că o serie de rezultate asupra bazelor din spaţii Banach, se pot extinde la baze în spaţii Fréchet : de exemplu, legăturile dintre baze şi cea mai bună aproximaţie (V. N. Nikolski [63]), şi altele.

De altă parte, s-a arătat că deşi o serie de proprietăţi ale bazelor din spaţii Banach rămîn valabile în spaţii de tip B_0 (în sensul lui S. Mazur şi W. Orlicz [55]), ca de exemplu existenţa şirurilor bazice, faptul că orice bază slabă este o bază tare (C. Bessaga şi A. Pelczyński [15]), şi altele, totuşi unele rezultate importante asupra bazelor din spaţii Banach nu se pot extinde la baze în spaţii de tip B_0 : de exemplu, teorema lui Krein-Milman-Rutman (C. Bessaga şi A. Pelczyński [13]).

Menţionăm, în sfîrşit, că numeroase lucrări au fost consacrate studiului bazelor în spaţii nucleare generale, în clase particulare de spaţii nucleare, precum şi în unele spaţii nucleare concrete (spaţii de funcţii analitice, spaţii $L(|x_k|_p)$ în sensul lui Köthe [46] etc.). Astfel, s-a arătat că o serie de proprietăţi ale bazelor din spaţiile Banach *de dimensiune finită* rămîn adevărate în spaţii nucleare. De exemplu, *într-un spaţiu Fréchet* 31) *nuclear orice bază este o bază necondiţionată* (A. Dînin şi B. S. Mitiaghin [22]; a se vedea şi B. S. Mitiaghin [58]). De asemenea, *orice două baze din spaţiul A al funcţiilor analitice în discul unitate deschis* $|\zeta| < 1$ *sînt permutativ echivalente* 32) (M. M. Draghilev [20]); acest rezultat a fost extins de B. S. Mitiaghin la aşa-numitele centre ale scărilor Riesz

---

30) După cum a observat B. S. Mitiaghin ([58], p. 92—93), continuitatea funcţionalelor coeficienţi are loc, mai general, în orice spaţiu vectorial topologic B-complet în sensul lui V. Pták [71].

31) Prin *spaţiu Fréchet* se înţelege aici un spaţiu local convex metrizabil complet.

32) A se vedea [78], Cap. II, § 9, definiţia 2.11.

[58]. De altă parte, spre deosebire de situația din cazul spațiilor Banach de dimensiune finită, *în clasa spațiilor Fréchet nucleare cu bază există un spațiu universal pentru izomorfisme, anume spațiul* $C^{\infty}(-\infty, \infty)$ (C. Bessaga și A. Pelczyński [16], teorema 1).

Despre unele proprietăți importante ale bazelor din spațiile Banach de dimensiune finită nu se știe, pînă în prezent, dacă ele rămîn valabile sau nu în spații nucleare, și nici măcar în spații Fréchet nucleare. De exemplu, sînt nerezolvate următoarele probleme:

Problema 7.1. Există oare o bază în orice spațiu Fréchet nuclear?

După cum se afirmă în [58] ([58], p. 126, problema 1), această problemă a fost pusă de A. Grothendieck în [32]. De fapt, în [32] ([32], Cap. II, p. 136), s-a pus problema mai generală a existenței unei baze aproximative (în sensul din Cap. III, § 10, definiția 3.19) în orice spațiu Fréchet nuclear.

Problema 7.2. Sînt oare orice două baze dintr-un spațiu Fréchet nuclear permutativ echivalente? (B. S. Mitiaghin [58], p. 103, problema E).

Nu vom expune aici mai multe detalii, deoarece ele ies din cadrul lucrării de față. O prezentare a proprietăților bazelor în spații nucleare, precum și o bibliografie a lucrărilor apărute în acest domeniu se află în lucrarea menționată mai sus a lui B. S. Mitiaghin [58].

Notă la corectură. Teorema 1.11 din [78], Cap. I, §10, p. 549, trebuie modificată astfel:

TEOREMA 1.11. *Fie* $\{\alpha_k\}$ *un șir crescător de numere pozitive astfel încît* $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \infty$. *Dacă există un șir crescător de spații Banach* $E_3 < E_4 < E_5 < \ldots$, *dim* $E_n = n$, *astfel încît pentru orice pereche de întregi pozitivi* k, n *cu* $n = n(k) \geqslant k + 1$ *să existe un întreg pozitiv* $N = N(k, n)$ *cu proprietățile*

$$N \geqslant n, \quad \varphi_{k+1}(E_N) > \alpha_k,$$

atunci există un spațiu Banach separabil E care nu are nici o bază.

Primită la redacție la 24 februarie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. M. Ш. АЛЬТМАН, *О базисах в пространстве Гильберта*, ДАН СССР, **69**, 483—485 (1949).
2. M. G. ARSOVE, *The Paley-Wiener theorem in metric linear spaces*, Pacific. J. Math., **10**, 365–379 (1960).
3. M. G. ARSOVE, R. E. EDWARDS, *Generalized bases in topological linear spaces*, Studia Math., **19**, 95–113 (1960).
4. S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, Monografje Matematyczne, Warszawa, 1932.
5. — *Sur les séries lacunaires*, Bull. Acad. Pol. Sci., 149–154 (1933).
6. N. K. BARY, *Sur la stabilité de certaines propriétés des systèmes orthogonaux*, Матем. сб, **12**, 3–27 (1943).
7. — *Sur les systèmes complets de fonctions orthogonales*, Матем. сб., **14**, 51–108 (1944).
8. — *Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве*, Уч. зап. МГУ, **148**, *4*, 69—107 (1951).
9. — *Тригонометрические ряды*, Москва, 1961.

10. Д.Л. БЕРМАН, *О невозможности построения линейного полиномиального оператора, дающего приближение порядка наилучшего*, Успехи матем. наук. **14**, *4* (88), 141—142 (1959).
11. S. Bernstein, *Génération et généralisation des fonctions analytiques d'une variable réelle*, în volumul *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle*, Paris, 1926.
12. C. Bessaga, *Bases in certain spaces of continuous functions*, Bull. Acad. Pol. Sci., **5**, 11–14 (1957).
13. C. Bessaga, A. Pełczyński, *An extension of the Krein-Milman-Rutman theorem concerning bases to the case of B_0-spaces*, Bull. Acad. Pol. Sci., **4**, 379–383 (1957).
14. — *A generalization of results of R. C. James concerning absolute bases in Banach spaces*, Studia Math., **17**, 165–174 (1958).
15. — *Własności baz w przestrzeniach typu B_0*, Prace Mat., **3**, 123–142 (1959).
16. — *О вложении ядерных пространств в пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на прямой*, ДАН СССР, **134**, 745—748 (1960).
17. R. P. Boas, *A general moment problem*, Amer. J. Math., **63**, 361–370 (1941).
18. Z. Ciesielski, *On Haar functions and on the Schauder basis of the space $C_{<0,1>}$*, Bull. Acad. Pol. Sci., **7**, 227–232 (1959).
19. J. Dieudonné, *On biorthogonal systems*, Michigan Math. J., **2**, 7–20 (1953/54).
20. М.М. ДРАГИЛЕВ, *Каноническая форма базиса пространства аналитических функций*, Успехи матем. наук, **15**, *2* (92), 181—188 (1960).
21. R. J. Duffin, J. J. Eachus, *Some notes on an expansion theorem of Paley and Wiener*, Bull. Amer. Math. Soc., **48**, 850–855 (1942).
22. A. Dynin, B. Mitiagin, *Criterion for nuclearity in terms of approximative dimension*, Bull. Acad. Pol. Sci., **8**, 535–540 (1940).
23. H. W. Ellis, I. Halperin, *Haar functions and the basis problem for Banach spaces*, J. London. Math. Soc., **31**, 28–39 (1956).
24. H. W. Ellis, D. G. Kuehner, *On Schauder bases for spaces of continuous functions*, Canad. Math. Bull., **3**, 173–184 (1960).
25. М. К. ФАГЕ, *Идемпотентные операторы и их спрямление*, ДАН СССР, **73**, 895—897 (1950).
26. S. R. Foguel, *Biorthogonal systems in Banach spaces*, Pacific J. Math., **7**, 1065–1072 (1957).
27. C. Foiaş, I. Singer, *Some remarks on strongly linearly independent sequences and bases in Banach spaces*, Revue de math. pures et appl., **6**, 589–594 (1961).
28. В. Ф. ГАПОШКИН, *Одно обобщение теоремы М. Рисса о сопряженных функциях*, Матем. сб., **46 (88)**, *3*, 359—372 (1958).
29. — *О безусловных базисах в пространствах L^p* $(p>1)$, Успехи матем. наук, **13**, *4* (*82*), 179—184 (1958).
30. — *Об одном свойстве безусловных базисов в пространстве L^p*, Успехи матем. наук, **14**, *4* (*88*), 143—148 (1959).
31. И.М. ГЕЛЬФАНД, *Замечание к работе Н.К. Бари „Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве''*, Уч. зап. МГУ, **148**, *4*, 224—225 (1951).
32. A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc., **16**, Providence, 1955.
33. М. М. ГРИНБЛЮМ, *О представлении пространства типа В в виде прямой суммы подпространств*, ДАН СССР, **70**, 749—752 (1950).
34. Л. А. ГУРЕВИЧ, *О базисе в пространстве непрерывных функций, определенном на замкнутом ограниченном множестве n-мерного пространства*, Труды ун-та Воронеж, **27**, 84—87 (1954).
35. Р.С. ГУТЕР, П. Л. УЛЬЯНОВ, *О новых результатах в теории ортогональных рядов* (*обозорная статья*), добавление к русскому переводу книги [40], Москва, 1948.
36. S. H. Hilding, *Sur les systèmes complets dans l'espace de Hilbert*, 10. Skand. Mat. Kongr. Kobenhavn, 290–292 (1946/47).
37. — *Note on completeness theorems of Paley-Wiener type*, Ann. of Math., **49**, 953–955 (1948).

38. V. Istrătescu, *Über die Banachräume mit zählbarer Basis. I*, Revue de math. pures et appl., **7**, 481–482 (1962).
39. R. C. James, *Reflexivity and the supremum of linear functionals*, Ann. of Math., **66**, 159–169 (1957).
40. S. Kaczmarz, H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografje Matematyczne, Warszawa–Lwów, 1935.
41. М.И. Кадец, *О гомеоморфизме некоторых пространств Банаха*, ДАН СССР, **92** 465—468 (1953).
42. — *О линейной размерности пространства L_p* (p>2), Научн. докл. высш. шк,. **6** 104—108 (1958).
43. M. I. Kadec, A. Pełczyński, *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p*, Studia Math., **21**, 161–176 (1962).
44. Г.М. Кесельман, *Об одном обобщении понятия базиса и теорем Н.К. Бари о базисах*, ДАН СССР, **141**, 300—303 (1961).
45. А. Костюченко, А. Скороход, *Об одной теореме Н.К. Бари*, Успехи матем. наук, **8**, *5* (*57*), 165—166 (1953).
46. G. Köthe, *Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume*, Math. Zeitschr., **51**, 317–345 (1948).
47. М.А. Красносельский, Я.Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Москва, 1958.
48. М.Г. Крейн, *О базисах Бари пространства Гильберта*, Успехи матем. наук, **12**, *3*(*75*), 333—341 (1957).
49. S. Lewin, *Über einige mit der Konvergenz im Mittel verbundenen Eigenschaften von Funktionenfolgen*, Math. Zeitschr., **32**, 491–511 (1930).
50. Л.А. Люстерник, В.И. Соболев, *Элементы функционального анализа*, Москва-Ленинград, 1951.
51. I. Maddaus, *On completely continuous linear transformations*, Bull. Amer. Math. Soc., **44**, 279–282 (1938).
52. А.С. Маркус, *О базисе из корневых векторов диссипативного оператора*. ДАН СССР., **132**, 524—527 (1960).
53. A. Markouchevitch, *Sur la meilleure approximation*, ДАН СССР, **44**, 262–264 (1944).
54. — *Обобщение одной теоремы Д.Е. Меньшова*, Матем. сб., **15 (57)**, 433—436 (1944).
55. S. Mazur, W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires, I*, Studia Math., **10**, 184–208 (1948).
56. D. Menchoff, *Sur les sommes partielles des séries de Fourier des fonctions continues*, Матем. сб., **15** (**57**), 385–432 (1944).
57. Д.П. Мильман, *Рецензия 4637*, Реферативный журнал, математика, **6**, 50 (1958).
58. Б.С. Митягин, *Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах*, Успехи матем. наук, **16**, *4* (*100*), 63—132 (1961).
59. B. Sz. Nagy, *Expansion theorems of Paley-Wiener type*, Duke Math. J., **14**, 975–978 (1947).
60. И.П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, Москва-Ленинград, 1949.
61. S. M. Nikolsky, *Einige Fragen der Approximation von Funktionen durch Polynome*, Proc. Int. Congr. Math., Amsterdam (1949).
62. В.Н. Никольский, *Наилучшее приближение и базис в пространстве Фреше*, ДАН СССР, **59**, 639—642 (1948).
63. — *Некоторые вопросы наилучшего приближения в функциональном пространстве*, Труды физ. мат. фак. Калининск. гос. пед. инст-та, **16**, 119—160 (1954).
64. — *Операторные свойства полиномов наилучшего приближения*, Успехи матем. наук, **12**, *3* (*75*), 353—358 (1957).
65. W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räume vom Typus B*, Bull. Acad. Pol. Sci., 207–220 (1932).
66. R. E. A. C. Paley, N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., New York, 1934.
67. A. Pełczyński, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math., **19**, 209–228 (1960).
68. A. Pełczyński, I. Singer, *On non-equivalent bases and conditional bases in Banach spaces*, Studia Math. (sub tipar).

69. R. S. Phillips, *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., **48**, 516–541 (1940).

70. H. Pollard, *Completeness theorems of Paley-Wieber type*, Ann. of Math., **45**, 738–739 (1944).

71. V. Pták, *Completeness and the open mapping theorem*, Bull. Soc. math. France, **86**, 41–74 (1958).

72. F. W. Schäfke, *Über einige unendliche lineare Gleichunsgssysteme*, Math. Nachr., **3**, 40–58 (1949).

73. — *Das Kriterium von Paley und Wiener im Banachschen Raum*, Math. Nachr., **3**, 59–61 (1949).

74. Z. Semadeni, *Isomorphic properties of Banach spaces of continuous functions*, Studia Math., seria specjalna, Z. 1, 93–108 (1958).

75. I. Singer, *Weak* bases in conjugate Banach spaces*, Studia Math., **21**, 75–81 (1961).

76. — *Об одной теореме И. М. Гельфанда*, Успехи матем. наук, **17, *1* (*103*)**, 169—176 (1962).

77. — *Weak* bases in conjugate Banach spaces. II*, Revue de math. pures et appl., **8**, 575–584 (1963).

78. — *Baze în spaţii Banach. I*, Studii şi cercetări matematice, **14**, 533–585 (1963).

79. — *Baze în spaţii Banach. II*, Studii şi cercetări matematice, **15**, 157–208 (1964).

80. М.З. Соломяк, *Об ортогональном базисе в пространстве Банаха*, Вестник ЛГУ, **1**, 27 — 36 (1957).

81. К.М. Шайдуков, *О существовании ортонормированного базиса в классе полиномов*, Научн. Тр. Казанск. ин.-та инж. строит. нефт. пром-ти,, **5**, 119—151 (1957).

82. Ф.С. Вахер, *О базисе в пространстве непрерывных функций, определенных на компакте*, ДАН СССР, **101**, 589—592 (1955).

83. A. Zygmund, *Trigonometrical series. I, II*, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.

CONTRIBUŢII LA STUDIUL FUNCŢIILOR LUI GREEN

I. DEZVOLTAREA FUNCŢIILOR LUI GREEN RELATIVE LA OPERATORI DIFERENŢIALI LINIARI CU DERIVATE PARŢIALE DUPĂ SOLUŢII FUNDAMENTALE

DE

D. MANGERON [1]) şi A. F. ŞESTOPAL [2])

1. Într-un şir de lucrări anterioare [1]—[4] primul dintre autori a studiat pentru prima oară variate probleme de contur pentru operatori diferenţiali neeliptici de forma

$$F(u) = \lambda G(u), \tag{1}$$

$$U_{i\mu}(u) = \sum_{\nu=0}^{rm-1} \left[\alpha_{i\mu\nu} \frac{\partial^{\nu} u(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i^{*}, x_{i+1}, \ldots, x_r)}{\partial x_i^{\nu}} + \right.$$

$$\left. + \beta_{i\mu\nu} \frac{\partial^{\nu} u(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i^{**}, x_{i+1}, \ldots, x_r)}{\partial x_i^{\nu}} \right] = 0, \tag{2}$$

în care

$$F(u) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{\partial^{r\nu}}{\partial x_1^{\nu} \partial x_2^{\nu} \ldots \partial x_r^{\nu}} \left(f_{\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \frac{\partial^{r\nu} u(x_1, x_2, \ldots, x_r)}{\partial x_1^{\nu} \partial x_2^{\nu} \ldots \partial x_r^{\nu}} \right), \tag{3}$$

$$G(u) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\partial^{r\nu}}{\partial x_1^{\nu} \partial x_2^{\nu} \ldots \partial x_r^{\nu}} \left(g_{\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \frac{\partial^{r\nu} u(x_1, x_2, \ldots, x_r)}{\partial x_1^{\nu} \partial x_2^{\nu} \ldots \partial x^{\nu}} \right), \tag{4}$$

$o \leqslant n < m$, λ este un parametru complex, funcţiile f_{ν} şi g_{ν} sînt definite într-un domeniu „dreptunghiular" $R = \{x_i^{*} \leqslant x_i \leqslant x_i^{**}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ dintr-un spaţiu E_r cu r dimensiuni, fiind, în R, regulate de ordin ν (con-

---

[1]) Institutul politehnic Iaşi.

[2]) Academia de Ştiinţe a R. S. S. Ukraina, U.R.S.S.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 6, P. 673—804, BUCUREŞTI, 1964

tinue, împreună cu derivatele lor totale — în sensul lui M. Picone [5], [6] — pînă la ordin ν inclusiv [3])), $(i = 1, 2, \ldots, r;\ \eta = 1, 2, \ldots, rm)$, $\alpha_{i\mu\nu}$, $\beta_{i\mu\nu}$ putînd fi, pentru orice indice i fixat, funcţii de variabile $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_r$.

Pornind de la formula preliminară a lui Green pentru expresia diferenţială $F(u)$

$$\int_R \cdots \int [v\,F(u) - u\,F(v)]\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_r = F^*(x, v)\Big|_{\mathrm{Fr}R}, \tag{5}$$

în care FrR este frontiera domeniului R şi

$$F^*(u, v) = \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{k_1 k_2 \ldots k_s}' \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^{rp+s} \int_{\overset{*}{x}_{k_1}}^{\overset{**}{x}_{k_1}} \int_{\overset{*}{x}_{k_2}}^{\overset{**}{x}_{k_2}} \cdots \int_{\overset{*}{x}_{k_s}}^{\overset{**}{x}_{k_s}} \mathrm{d}x_{k_1}\,\mathrm{d}x_{k_2} \ldots \mathrm{d}x_{k_s} \times$$
$$\times \left[\frac{\partial^s}{\partial x_{k_1}\,\partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_s}}\, v^{(rp)} (f_\nu\, u^{(r\nu)})^{(rq)} - \frac{\partial^s}{\partial x_{k_1}\,\partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_s}}\, u^{(rp)} (f_\nu\, v^{(r\nu)})^{(rq)} \right], \tag{6}$$

simbolul $\sum\limits_{k_1 k_2 \ldots k_s}'$ indicînd sumarea relativă la toate combinările $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ din $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, şi introducînd noţiunea de *funcţie a lui Green de ordin p*, care extinde la operatorii cu derivate totale (neeliptici) [7] rezultatele, datorite academicianului M. Nicolescu, devenite rapid clasice, referitoare la funcţii poliarmonice [8], autorul a demonstrat următoarea teoremă:

TEOREMA 1. *O funcţie $u(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, definită în R este perfect determinată prin valorile pe care această funcţie şi derivatele sale totale pînă la ordin $p - 1$ le iau pe frontiera domeniului R şi prin valorile derivatei sale totale de ordin p în R.*

Rezultatele obţinute în această ordine de idei, extinse apoi la operatori funcţionali şi mai generali, ca, de exemplu, operatori integro-diferenţiali, liniari şi neliniari, cu derivata de ordin superior a lui Picone [9]—[10], au condus pe primul dintre autori între altele la elaborarea aşa-numitei metode a ecuaţiilor integrale, eficace în rezolvarea cu aproximaţie a variatelor probleme de contur [11] — [12] şi folosită şi de alţi cercetători [13]—[15].

2. Cel de-al doilea autor, studiind sistematic aplicarea principiului reflectării la determinarea dezvoltării funcţiilor lui Green în serii de soluţii fundamentale, a elaborat un şir de rezultate relative la operatori diferenţiali eliptici, pe cînd ambii autori, lucrînd în colaborare, au reuşit să parvină la unele generalizări atît în ceea ce priveşte conturul domeniului referitor la variate probleme de contur considerate, cît şi în ceea ce priveşte natura operatorilor diferenţiali luaţi în studiu [16] — [17].

În vederea păstrării integrităţii expunerii problemei de dezvoltare în serii de soluţii fundamentale a funcţiilor lui Green relative la operatori diferenţiali liniari cu derivate parţiale, vom începe în cele ce urmează cu un şir de definiţii fundamentale şi vom trece apoi la stabilirea efectivă a dezvoltărilor menţionate, clasate, fie după natura operatorilor diferenţiali, ce nu vor fi neapărat eliptici, fie după forma domeniilor problemelor de contur luate în studiu.

---

[3]) Condiţiile restrictive de mai sus relative la spaţiu şi la regularitatea funcţiilor considerate pot fi, fireşte, extinse.

3. Să considerăm într-un spaţiu euclidian cu n dimensiuni un operator diferenţial liniar L cu derivate parţiale de tip eliptic de ordin $2r$ cu coeficienţi analitici. Un astfel de operator posedă o soluţie fundamentală, pe care o vom nota cu $\Gamma(P, Q)$, $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fiind un punct curent şi $Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — un punct izvor.

Fie $u(P, Q)$ — o funcţie ce satisface ecuaţia diferenţială

$$L[u] = \delta(P - Q) \tag{7}$$

şi un număr de condiţii de contur, situat într-un hiperplan:

$$H_{n-1} : (\vec{x} \cdot \vec{k}^*) = C^*, \tag{8}$$

$\delta(P - Q)$ fiind funcţia singulară a lui Dirac.

Presupunem că operatorii L_m ce figurează în condiţiile de contur:

$$L_m [u(P, Q)] \,|_{H_{n-1}} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, r) \tag{9}$$

sînt liniari, omogeni, de ordin inferior lui $2r$, ansamblul operatorilor de frontieră acoperind [18] operatorul L.

Definiţia 1. Condiţiile de contur (9) din H_{n-1} admit o *reflectare,* dacă pentru orice punct Q

$$u(P, Q) = \Gamma(P, Q) + A\ \Gamma(P, Q^*), \tag{10}$$

în care A este un operator liniar, permutabil cu operatorul L şi cu operatorii L_m, iar Q^* este conjugat cu punctul Q faţă de H_{n-1}.

Se va presupune că operatorul A depinde efectiv de P şi de Q^*. Operatorul A se numeşte *operator efect al condiţiilor de contur.*

Fie H^1_{n-1} şi H^2_{n-1} două hiperplane din spaţiul E_n, pentru care avem îndeplinite condiţiile de contur

$$L^1_m [u(P, Q)] |_{H^1_{n-1}} = 0, \quad L^2_m [u(P, Q)] |_{H^2_{n-1}} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, r). \tag{11}$$

Să presupunem, pentru a fixa ideile, că condiţiile de contur considerate admit pentru H^1_{n-1} o reflectare cu operator efect A_1 şi pentru H^2_{n-1} o reflectare cu operator efect A_2.

Definiţia 2. Se zice că condiţiile de contur din hiperplanele H^1_{n-1} şi H^2_{n-1} nu sînt *conexe,* dacă operatorii A_1 şi A_2 sînt permutabili, în sensul că operatorul A_1 este permutabil cu sistemul de operatori de contur L^2_m, iar operatorul A_2 este permutabil cu sistemul de operatori de contur L^1_m.

4. Fie

$$B\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{12}$$

o ecuație diferențială liniară cu derivate parțiale, de ordin m în raport cu variabila t. Presupunem că operatorul diferențial B este astfel încît problema bidimensională a lui Cauchy relativă la ecuația

$$B\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \omega_1 \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \omega_n \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{13}$$

este bine pusă în sensul lui Hadamard [19], [20]. În aceste ipoteze rezultă [21] că ecuația (12) admite o soluție fundamentală referitoare la problema lui Cauchy, cu alte cuvinte, există o funcție $E(P, Q, t)$ care satisface ecuația (12) și condițiile de contur

$$E\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^\nu E}{\partial t^\nu}\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } \nu = 1, 2, \ldots, m-2, \\ \delta(P-Q), \text{ dacă } \nu = m-1. \end{cases} \tag{14}$$

Se pot formula definiții analoge definițiilor 1 și 2 de mai sus, corespunzătoare operatorului diferențial B.

5. Noțiunea de soluție fundamentală poate fi extinsă și la operatori diferențiali neeliptici, pentru care primul dintre autori a formulat și a rezolvat pentru prima oară variate serii de probleme de contur [22], folosite apoi în lucrările lor și de numeroși alți cercetători [23]—[25].

Vom zice că un operator C posedă o soluție fundamentală $G(P, Q)$, atunci cînd este asigurată valabilitatea formulei

$$C\left[\int_{E_n} G(P, Q) f(Q)\, \mathrm{d}Q\right] = f(P), \tag{15}$$

în care $f(P)$ este o funcție suficient de regulată și finită. În corespondență cu definiția (15), soluția fundamentală poate exista pentru o vastă mulțime de operatori diferențiali eliptici și neeliptici, așa încît formulele de dezvoltări în serii de soluții fundamentale ale funcțiilor lui Green, stabilite mai jos în anumite cazuri concrete, au o sferă mult mai largă de aplicabilitate.

6. Presupunem că problema de contur

$$L[F(P, Q)] = \delta(P-Q), \tag{16}$$

$$C_m^i\, [F(P, Q)]\,|_{x_i=0} = 0,\ D_m^i\, [F(P, Q)]\,|_{x_i=a_i} = 0,\ (i = 1, 2, \ldots, r;\ m = 1, 2, \ldots, r) \tag{17}$$

relativă la un operator diferențial eliptic L este univoc solubilă în domeniul „dreptunghiular” $R = \{0 \leqslant x_1 \leqslant a_1, \ldots, 0 \leqslant x_n \leqslant a_n\}$ și că condițiile de contur relative la hiperplanele $x_j = 0$, a_j admit reflectări cu operatori efecte ale condițiilor de contur considerate, notați respectiv prin A_j și B_j.

Are loc următoarea teoremă:

TEOREMA 2. *Dacă condițiile de contur nu sînt conexe pentru toate hiperplanele considerate și dacă seria*

$$F(P, Q) - \Gamma(P, Q) = \sum_{s_1, s_2, \ldots, s_n = -\infty}^{\infty} \Pi\, A_{s_j}^j\, B_{s_j}^j\, \Gamma(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_n}) \tag{18}$$

este uniform convergentă în domeniul R împreună cu derivatele sale pînă la ordinul $2r$ inclusiv, atunci funcția $F(P, Q)$, determinată prin egalitatea (18), *este funcția lui Green pentru „dreptunghiul" R.*

Operatorii $A^j_{s_j}$ și $B^j_{s_j}$ ce figurează în (18), *se determină prin operatorii efect al condițiilor de contur cu ajutorul următoarelor formule :*

$$\begin{aligned} A^j_{s_j} &= \prod_{k=1}^{a_{s_j}} A_j\left(P,\ Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{j-1}, 1-2k-\frac{1-(-1)^{s_j}\operatorname{sign} s_j}{2}, s_{j+1}, \ldots, s_n}\right), \\ B^j_{s_j} &= \prod_{k=1}^{b_{s_j}} B_j\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{j-1}, 2k-\frac{1-(-1)^{s_j}\operatorname{sign} s_j}{2}, s_{j+1}, \ldots, s_n}\right), \end{aligned} \tag{19}$$

în care s-a notat

$$\begin{aligned} a_{s_j} &= \frac{1}{2}\left\{ |s_j| - \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^{s_j}\right] \operatorname{sign} s_j \right\}, \\ b_{s_j} &= \frac{1}{2}\left\{ |s_j| + \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^{s_j}\right] \operatorname{sign} s_j \right\}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\operatorname{sign} s_j = \frac{|s_j|}{s_j}, \quad \operatorname{sign} 0 = 1,$$

iar $Q_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$ constituie sistemul de puncte conjugate (*față de punctele $Q(\xi)$ și hiperplanele H_{n-1} corespunzătoare*) *de coordonate*

$$\xi_j^* = s_j a_j + \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^{s_j}\right]\xi_j. \tag{21}$$

În adevăr, prin ipoteza formulată în enunțul teoremei, funcția $F(P, Q)$ satisface ecuația (16) și posedă în punctul $Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ singularitate caracteristică cerută. Deoarece toate punctele conjugate sînt situate în afara domeniului R, rezultă că funcția $F(P, Q)$ nu poate avea în domeniul R alte singularități, în afară de cazul cînd dispar simultan și s_j. Rămîne prin urmare de demonstrat că $F(P, Q)$ satisface condițiile de contur fixate dinainte. Printr-o verificare directă se stabilește șirul de egalități

$$a_{-s_j} = b_{s_j}, \quad a_{s_j+1} = b_{s_j}, \quad b_{s_j+1} = a_{s_j} + 1. \tag{22}$$

Să arătăm acum că dependenţele similare au loc şi pentru operatorii $A^j_{s_j}$ şi $B^j_{s_j}$. Pentru $s_i \geqslant 0$ avem

$$B^i_{-s_i-1} = \prod_{k=1}^{b_{-s_i-1}} B_i\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, 2k-\frac{1-(-1)^{-s_i-1}\operatorname{sign}(-s_i-1)}{2}, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{b_{s_i}} B_i\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, 2k-\frac{1-(-1)^{s_i}\operatorname{sign} s_i}{2}, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right) = B^i_{s_i}; \tag{23}$$

$$A^i_{-s_i-1} = \prod_{k=1}^{a_{-s_i-1}} A_i\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, 1-2k-\frac{1-(-1)^{-s_i-1}\operatorname{sign}(-s_i-1)}{2}, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right) =$$

$$= A^i_{s_i} A_i\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, -s_i-1, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right),\ B^i_{-1} = A^i_0 = I. \tag{24}$$

În mod analog se stabileşte şi şirul de relaţii

$$\begin{aligned} &B^i_{s_i+1} = B^i_{-s_i} B_i\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right),\ s_i \geqslant 1,\\ &A^i_{s_i+1} = A^i_{-s_i}, s_i \geqslant 1,\ B^i_1 = B_i\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, 1, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right), A^i_1 = I, \end{aligned} \tag{25}$$

în care I este operatorul identitate.

Plecînd de la formulele (23), (24) şi (25), funcţia $F(P, Q)$ poate fi prezentată sub forma

$$F(P, Q) = \sum_{s_m \neq s_i}^{\infty} \prod_{j \neq i = 1}^{n} A^j_{s_j} B^j_{s_j} \sum_{s_i=0}^{\infty} B^i_{s_i} A^i_{s_i} \left[\Gamma\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_n}\right) + \right.$$

$$\left. + A_i\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i-1, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right) \Gamma\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, -s_i-1, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right)\right], \tag{26}$$

sau

$$F(P,Q) = \sum_{s_m \neq s_i}^{\infty} \prod_{j \neq i = 1}^{n} A^j_{s_j} B^j_{s_j} \sum_{s_i=0}^{\infty} A^i_{-s_i} B^i_{-s_i} \left[\Gamma\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, -s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right) + \right.$$

$$\left. + B_i\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right) \Gamma\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right)\right). \tag{27}$$

Deoarece punctele $Q_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$ au drept puncte conjugate faţă de hiperplanul $x_i = 0$ punctele $Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, -s_i-1, s_{i+1}, \ldots, s_n}$, iar punctele $Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, -s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n}$ au drept puncte conjugate faţă de hiperplanul $x_i = a_i$ punctele $Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1}, \ldots, s_n}$, rezultă

$$\begin{aligned} &C^i_m \left[\Gamma\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_n}\right) + A_i \Gamma\left(P, Q_{s_1 s_2, \ldots, s_{i-1}, -s_i-1, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right)\right] \big|_{x_i=0} = 0,\\ &D^i_m \left[\Gamma\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, -s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right) + B_i \Gamma\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right)\right] \big|_{x_i=a_i} = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

şi, în consecinţă, afirmaţia din teorema 2 se deduce nemijlocit din ansamblul condiţiilor relative la neconexiune.

7. Metoda reflectării conduce la acoperirea univocă a unui plan euclidian numai în cazul dreptunghiurilor, triunghiurilor dreptunghice isoscele, triunghiurilor echilatere şi al triunghiurilor ce se obţin din triunghiuri echilatere prin subdivizarea acestora din urmă în două părţi egale.

Înainte de a păşi la dezvoltările funcţiilor lui Green relative la domeniile de mai sus, vom demonstra pentru benzi infinite, în vederea unor aplicaţii de seamă la probleme de Fizică matematică [26], următoarea teoremă :

TEOREMA 3. *În ipoteză că : a) Funcţia lui Green* $F_\infty(P, Q_0)$ *există şi este unică pentru banda determinată prin „hiperplanele"* $x = 0$, a ; *b) Operatorii efect ai condiţiilor de contur* A_Q, B_Q, *corespunzători „hiperplanelor"* $x = 0$, a *sînt permutabili şi c) Seria*

$$F_\infty(P, Q_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_Q^{a_k} B_Q^{b_k} \Gamma(P, Q_k) \tag{29}$$

converge uniform în banda considerată aproape peste tot împreună cu derivatele sale pînă la ordinul cu o unitate mai mic decît ordinul ecuaţiei diferenţiale considerate inclusiv, seria (29) *reprezintă funcţia lui Green relativă la banda considerată* a_k *şi* b_k *ce figurează în* (29) *şi se exprimă prin formulele* (20) *în care s-a pus* $s_j = k$, Q_k *este un sistem de puncte de coordonate*

$$\left\{ka + \frac{1}{2}\,[1 - (-1)^k]\,a + (-1)^k\,\xi, \eta\right\}, \tag{30}$$

iar

$$\operatorname{sign} k = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin k x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

În adevăr, ţinînd seama de faptul că în cazul considerat operatorul $L(u)$ trebuie să fie astfel încît soluţia fundamentală să tindă către zero la infinit, seria (29) poate fi scrisă, avînd în vedere că posedă împreună cu derivatele sale o singură singularitate în bandă, în punctul $P = Q_0$, sub forma

$$\Gamma(P, Q_0) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' A_Q^{a_k} B_Q^{b_k} \Gamma(P, Q_k), \tag{31}$$

în care prin accentul pus la simbolul Σ s-a indicat sumarea în raport cu toţi indicii lui k în afară de zero.

Notînd membrul întîi din (29) prin $F_\infty(P, Q_0)$, se obţine din (29), (31), ca urmare a aplicării operatorului L,

$$L[F_\infty(P, Q_0)] = L[\Gamma(P, Q_0)] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_Q^{a_k} B_Q^{b_k} L[\Gamma(P, Q_k)] = \delta(P-Q). \tag{32}$$

Rezultă că funcţia $F_\infty(P, Q_0)$ $(Q = Q_0)$ satisface ecuaţia diferenţială considerată şi posedă în punctul Q_0 singularitate caracteristică. Rămîne de demonstrat, pentru a se conserva sensul clasic al noţiunii de funcţie Green, că $F_\infty(P, Q_0)$ satisface şi condiţiile de contur în $x = 0, a$. Deoarece $F_\infty(P, Q_0)$ poate fi transcris succesiv sub forma

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} A_Q^{a_k} B_Q^{b_k} \Gamma(P, Q_k) + \sum_{k=0}^{\infty} A_Q^{a_k} B_Q^{b_k} \Gamma(P, Q_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_Q^{b_k} B_Q^{a_k} \Gamma(P, Q_{-k}) + \sum_{k=0}^{\infty} A_Q^{a_k} B_Q^{b_k} \Gamma(P, Q_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A_Q^{a_k} B_Q^{b_k} \Gamma(P, Q_k) + A_Q^{b_{k+1}} B_Q^{a_{k+1}} \Gamma(P, Q_{-k-1}),$$

şi avînd în vedere că pentru k pozitivi avem

$$a_{k+1} = b_k, \; b_{k+1} = a_k + 1,$$

şi că operatorii A_Q şi B_Q sînt permutabili, rezultă

$$F_\infty(P), Q_0 = \sum_{k=0}^{\infty} B_Q^{b_k} A_Q^{a_k} [\Gamma(P, Q_k) + A_Q \Gamma(P, Q_{-k-1})], \tag{33}$$

şi, prin urmare, întrucît punctele $Q_k (k = 0, 1, \ldots, \infty)$ sînt conjugate cu punctele Q_{-k-1} faţă de $x = 0$, rezultă că condiţiile de contur sînt satisfăcute pentru $x = 0$.

Demonstraţia faptului că condiţiile de contur sînt îndeplinite şi pentru $x = a$ rezultă din transcrierea succesivă a funcţiei $F_\infty(P, Q)$ [4]:

$$\sum_{k=-\infty}^{0} A_Q^{a_k} B_Q^{b_k} \Gamma(P, Q_k) + \sum_{k=1}^{\infty} A_Q^{a_k} B_Q^{b_k} \Gamma(P, Q_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A_Q^{b_k} B_Q^{a_k} \Gamma(P, Q_k) + A_Q^{b_k} B_Q^{a_{k+1}} \Gamma(P, Q_{k+1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A_Q^{b_k} B_Q^{a_k} [\Gamma(P, Q_k) + B_Q \Gamma(P, Q_{k+1})] \tag{34}$$

şi a faptului că punctele Q_{k+1} şi Q_{+1} sînt conjugate faţă de $x = a$.

8. O demonstraţie similară cu aceea reprodusă în legătură cu dezvoltarea funcţiilor lui Green în serii de soluţii fundamentale relativă la bandă, p. 7, permite să se enunţe următoarea teoremă :

---

[4] Dacă seria (31) converge uniform, converge condiţionat sau este divergentă, în corespondenţă cu banda considerată, funcţia $F_\infty(P, Q_0)$ se numeşte funcţie generalizată a lui Green [27].

TEOREMA 4.[5]) *În ipoteza existenței și unicității funcției lui Green relativă la dreptunghi* $D = \{0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$, *dacă seria*

$$F_{\infty\infty}(P, Q) = \sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} A_Q^{a_k} B_Q^{b_k} A_Q^{*a_l} B_Q^{*b_l} \Gamma(P, Q_{k,l}) \tag{35}$$

în care A_Q, B_Q, A_Q^*, B_Q^* *sînt, respectiv, operatorii efect ai condițiilor de contur pentru* $x = 0,\ a,\ y = 0,\ b$, *toate condițiile de contur fiind nec nexe (operatori permutabili), este uniform convergentă în domeniul* D *împreună cu derivatele sale pînă la ordinul 2r inclusiv,* $F_{\infty\infty}(P, Q)$ *este funcția lui Green relativă la dreptunghiul considerat.*

9. Dacă domeniul de bază al problemei de contur considerate este constituit dintr-un triunghi echilateral, funcția lui Green corespunzătoare poate fi dezvoltată în serie de soluții fundamentale în cazul cînd operatorii efect nu depind de punctul conjugat și coincid pentru toate laturile triunghiului. Are loc următoarea teoremă :

TEOREMA 5. *Dacă condițiile de contur corespunzătoare dreptelor* $x_2 = 0$, $x_2 = x_1\sqrt{3}$, $x_2 + x_1\sqrt{3} = a\sqrt{3}$ *admit reflectare cu unul și același operator efect* $A\ (P, Q)$ *și dacă seria*

$$F(P, Q) = \sum_{s_1, s_2=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{5} A^{a_{s_1 s_2}} \Gamma(P, Q^i_{s_1, s_2}) \tag{36}$$

este uniform convergentă împreună cu derivatele sale pînă la ordinul 2r inclusiv, pentru toate punctele domeniului de bază în afară de punctul Q, *atunci* $F(P, Q)$ *este funcția lui Green relativă la operatorul* L *considerat.*

În (36) s-a notat

$$a^i_{s_1 s_2} = 1 - \frac{1}{2}[1 + (-1)^i]\operatorname{sign}(s_1 - s_2)(s_2 + 2s_1)(2s_2 + s_1 - 1),$$

$$Q^i_{s_1, s_2}\left\{\frac{3a}{2}(s_1 + s_2) + \xi_i,\ \frac{a\sqrt{3}}{2}(s_2 - s_1) + \eta_i\right\},\ Q(\xi_1, \xi_2) \equiv Q(\xi, \eta),$$

$$\xi_5 = \xi_0 = \xi,\ \xi_1 = \xi_4 = \frac{\eta\sqrt{3} - \xi}{2},\ \xi_2 = \xi_3 = -\frac{\xi + \eta\sqrt{3}}{2}, \tag{37}$$

$$\eta_0 = -\eta_5 = \eta,\ \eta_1 = -\eta_4 = \frac{\xi\sqrt{3} + \eta}{2},\ \eta_2 = -\eta_3 = \frac{\xi\sqrt{3} - \eta}{2}.$$

În adevăr, este evident că funcția $F(P, Q)$, definită prin (36), satisface ecuația diferențială considerată. Să arătăm că $F(P, Q)$ satisface condițiile de contur. Ne vom mărgini, ținînd seamă de analogiile ce intervin, a demonstra cele cerute pentru $x_2 = 0$.

---

[5]) Această teoremă poate fi dedusă și prin particularizarea teoremei 2.

Să reprezentăm funcţia $F(P,\ Q)$ sub forma

$$F(P,Q)=\sum_{s_1,\,s_2=-\infty}^{\infty}\ \sum_{i=0}^{5} A^{a^i_{s_1 s_2}}\,\Gamma(P,Q^i_{s_1,s_2})+A^{a^i_{s_2 s_1}}\,\Gamma(P,Q^i_{s_2,s_1})+$$

$$+\sum_{s_1=-\infty}^{\infty}\ \sum_{i=0}^{5} A^{a^i_{s_1 s_1}}\,\Gamma(P,Q^i_{s_1,s_1}), \tag{38}$$

în care sumarea se extinde în prima sumă la toţi indicii pentru care $(s_1,\ s_2)\neq(s_2,\ s_1)$. Dacă cea din urmă sumă din (38) se transcrie sub forma

$$\sum_{s_1=-\infty}^{\infty}[\Gamma(P,Q^0_{s_1,s_1})+A\,\Gamma(P,Q^5_{s_1,s_1})]+[A\,\Gamma(P,Q^1_{s_1,s_1})+\Gamma(P,Q^4_{s_1,s_1})]+$$

$$+[\Gamma(P,Q^2_{s_1,s_1})+A\,\Gamma(P,Q^3_{s_1,s_1})] \tag{39}$$

şi se observă faptul că punctele $Q^i_{s_1,s_1}$ au drept puncte conjugate $Q^{5-i}_{s_1,s_1}$, rezultă nemijlocit că suma considerată satisface condiţiile de contur de pe dreapta $x_2=0$.

Să reprezentăm prima sumă din (38) sub forma

$$\sum_{s_1,s_2=-\infty}^{\infty}\ \sum_{i=0}^{5} A^{a^i_{s_1 s_2}}\,\Gamma(P,Q^i_{s_1,s_2})+A^{a^{5-i}_{s_2 s_1}}\,\Gamma(P,Q^{5-i}_{s_2,s_1}). \tag{40}$$

Ţinînd seamă de faptul că punctele $Q^i_{s_1,s_2}$ sînt conjugate cu punctele $O^{5-i}_{s_1,s_2}$ faţă de dreapta $x_2=0$ şi avînd în vedere egalitatea

$$|\,a^i_{s_1 s_2}-a^{5-i}_{s_2 s_1}\,|=1,$$

se conchide că expresia (40) satisface condiţiile de contur impuse.

În vederea aplicaţiilor rezultatelor obţinute la analiză spectrală şi la determinări de mulţimi de funcţii proprii interesînd mecanica vibraţiilor plăcilor, expuse într-o notă cu totul recentă prezentată de M. Picone la Accademia Nazionale dei Lincei [28], formula (36) se prezintă sub forma

$$F(P,Q)=\frac{1}{3}\sum_{s_1,\,s_2=-\infty}^{\infty}\ \sum_{i=0}^{5} A^{a^i_{s_1 s_2}}[\Gamma(P,Q^i_{s_1,s_2})+\Gamma(P,R^i_{s_1,s_2})+$$

$$+\Gamma(P',S^i_{s_1,s_2})+\Gamma(P',U^i_{s_1,s_2})+\Gamma(P'',V^i_{s_1,s_2})+\Gamma(P'',Z^i_{s_1,s_2}), \tag{41}$$

în care punctele $P, Q^i_{s_1,s_2},\ R^i_{s_1,s_2},\ P', S^i_{s_1,s_2},\ U^i_{s_1,s_2},\ P'',\ V^i_{s_1,s_2},\ Z^i_{s_1,s_2}$ au următoarele coordonate

$$P(x_1,x_2),\ P'\left(\frac{x_2\sqrt{3}-x_1}{2},\ -\frac{x_1\sqrt{3}+x_2}{2}\right),\ P''\left(-\frac{x_1+x_2\sqrt{3}}{2},\ \frac{x_1\sqrt{3}-x_2}{2}\right),$$

$$Q^i_{s_1,s_2}(3\,a\,s_1+\xi_i,\ a\sqrt{3}\,s_2+\eta_i),\ R^i_{s_1,s_2}\left(3\,a\,s_1+\frac{3a}{2}+\xi_i,\ a\sqrt{3}\,s_2-\frac{a\sqrt{3}}{2}+\eta_i\right),$$

$$S^i_{s_1,s_2}\left(3as_1+\frac{\eta_i\sqrt{3}+\xi_i}{2},\ a\sqrt{3}\,s_2-\frac{\xi_i\sqrt{3}+\eta_i}{2}\right), \tag{42}$$

$$U^i_{s_1,s_2}\left(3as_1+\frac{3a}{2}+\frac{\eta_i\sqrt{3}-\xi_i}{2},\ a\sqrt{3}\,s_2-\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{\xi_i\sqrt{3}+\eta_i}{2}\right),$$

$$V^i_{s_1,s_2}\left(3as_1-\frac{\xi_i+\eta_i\sqrt{3}}{2},\ a\sqrt{3}\,s_2+\frac{\xi_i\sqrt{3}-\eta_i}{2}\right),$$

$$Z^i_{s_1,s_2}\left(3as_1+\frac{3a}{2}-\frac{\xi_i+\eta_i\sqrt{3}}{2},\ a\sqrt{3}\,s_2-\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{\xi_i\sqrt{3}-\eta_i}{2}\right).$$

10. Presupunem că domeniul fundamental este constituit dintr-un triunghi, mărginit de dreptele

$$x_2=0,\ x_2=x_1\sqrt{3} \quad \text{şi} \quad x_1=\frac{a}{2}\cdot$$

Presupunem, pentru a fixa ideile, că condiţiile de contur corespund cu rezemarea articulată a bordurilor domeniului considerat. Fie $A(P,\ Q)$ operatorul efect al condiţiilor de contur de pe dreptele $x_2=0,\ x_2=x_1\sqrt{3}$ şi C — operatorul efect al condiţiilor de contur de pe dreapta $x_1=\frac{a}{2}$. Dacă operatorii efect al condiţiilor de contur considerate nu depind de punctele conjugate şi sînt permutabili, are loc următoarea teoremă :

TEOREMA 6. *Funcţia lui Green relativă la un triunghi ce se obţine prin subdivizarea unui triunghi echilateral în două părţi egale are forma*

$$G(P,\ Q)=F(P,\ Q)+C\,F(P,Q^*), \tag{43}$$

în care $F(P,Q)$ *este definit prin intermediul formulei* (36), *iar punctul* Q^* *are coordonatele* $a-\xi,\ \eta$.

11. Aplicarea metodelor reflectării şi a dezvoltării funcţiilor lui Green în serii de soluţii fundamentale în diferite domenii şi, în primul rînd, în mecanica tehnică a vibraţiilor [29], conduce la determinări de spectre şi de mulţimi de soluţii proprii corespunzătoare, permiţînd, acolo unde atare probleme şi-au găsit anterior soluţii prin folosirea altor metode, confruntări şi verificări preţioase. Din această din urmă categorie fac parte, de exemplu, unele probleme relative la vibraţia plăcilor, rezolvate cu ajutorul calculului variaţional de O. D. Oniasvili [30] ş.a., studii recente relative la determinarea densităţii oscilaţiilor proprii în învelişuri elastice subţiri (V. V. Bolotin [31]) ş.a., încadrate, astăzi, armonios şi cu totul general, în criterii suficiente interesînd probleme generale de calculul variaţiilor relative la integrale pluridimensionale de ordin oarecare, stabilite de M. Picone [32]. Un alt punct de vedere ce se referă la adîncirea teoriei funcţiilor lui Green îşi are ca punct de plecare teoria programării dinamice, aplicată deja de primul dintre autori într-un studiu recent inserat în Comunicările Academiei R.P.R. [33] la unele clase noi de probleme de contur [34].

Într-una din lucrările viitoare se vor expune alte extinderi ale problemelor tratate în lumina rezultatelor obţinute cu totul recent de G. Fichera [35] şi L. Hörmander [36] şi se vor trata aplicaţii la mecanica vibraţiilor corespunzătoare cazurilor în care metoda reflectării conduce la acoperiri multiple.

Primită la redacţie la 3 martie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. D. Mangeron, *Sur une nouvelle classe de fonctions relatives à une nouvelle classe d'équations aux dérivées totales.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **II** (**VI**), 1–2, 1956, 21–27.
2. D. Mangeron, *Problèmes des spectres pour les systèmes différentiels réductibles*, Bull. Inst. polytechn. Iaşi, **4**, 441–445 (1948/49).
3. D. Mangeron, *Sur une classe de problèmes à la frontière pour certaines équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.* C.R. Acad. Sci., Paris, **204**, 94–96; 544–546; 1 022–1 024 (1937).
4. D. Mangeron, *Asupra stabilităţii soluţiilor unor probleme de contur pentru o nouă clasă de ecuaţii integro-diferenţiale cu derivata de ordin superior a lui Picone.* Comunicările Acad. R.P.R., **XIII**, *8*, 665–670 (1963).
5. M. Picone, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica.* Annales Sci. de l'Univ. de Jassy, I-e Section (Math., Phys., Chimie), **XXVI**, *1*, 183–232 (1940).
6. D. Mangeron, *On a new class of functions related to the equations with total derivatives.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **IV** (**VIII**) *3–4*, 73–74 (1958).
7. D. Mangeron, *Sur une nouvelle classe de problèmes à la frontière.* International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communications. Stockholm, 95 (1962).
8. M. Nicolescu, *Les fonctions polyharmoniques*, Hermann, Paris, 1936.
9. D. Mangeron, *Risolubilità e struttura delle soluzioni dei problemi al contorno non omogenei di Goursat e di Dirichlet per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate totali d'ordine superiore.* Accademia Naz. dei Lincei. Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, **XXXIV**, *2*, 118–122 (1963).
10. D. Mangeron, L. E. Krivošein, *Valutazione degli errori commessi in alcuni metodi di calcolo numerico delle soluzioni di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali d'ordine superiore.* Accademia Naz. dei Lincei. Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, **XXXIV**, *2*, 123–129 (1963).
11. D. Mangeron, *Noi metode de aproximare a soluţiilor unor probleme de contur neliniare relative la ecuaţii integro-diferenţiale cu derivate parţiale.* Colocviul de aproximarea funcţiilor cu aplicaţii la calculul numeric. Cluj, 15–19, **XI**, 1963, p. 7.
12. D. Mangeron, *The Integral Equations Method in Nonlinear Mechanics.* Trudy mejdunarodnogo simpoziuma po nelineinym kolebaniam, IUTAM, **I**. Analiticeskie metody, Akad. Nauk Ukrain. S.S.R., Kiev, 1963, 347–350.
13. F. S. Rossi, *Sopra il metodo di Mangeron in certi problemi non lineari.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **IX** (**XIII**), *3–4* (1963).
14. Ştefania Ruscior, *Applicazione del metodo delle equazioni integrali allo studio di certi problemi al contorno.* Accademia Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, **XXXV**, *6* (1963).
15. L. E. Krivošein, *Integral'nyi metod v issledovanii nekotoryh zadač kasaiuscihsia integro-differentzial'nyh uravnenii.* Trudy XII – i konferentzii professorsko-prepodavatel'skogo sostava Kirg. Gos. Univ-ta, dec. 1963.
16. A. F. Šestopal, *Razlojenie funktzii Green-a lineinyh differentzal'nyh operatorov ellipticeskogo tipa v nekotoryh mnogougol'nyh oblastiah.* Analele ştiinţ. ale Univ. „Al. I. Cuza" din Iaşi, s.n., Secţ. I (Mat., Fiz., Chimie), **IX** (1964) (sub tipar).

17. D. MANGERON, A. F. ŠESTOPAL, *Aplicarea metodelor reflectării şi a dezvoltării funcţiilor lui Green în serii de soluţii fundamentale în mecanica tehnică a vibraţiilor*. Bul. Inst. politehn. Bucureşti, *6* (1963).
18. M. SCHECHTER, *General boundary value problems for elliptic partial differential equations*. Comm. Pure Appl. Math., **12**, 3, 457–486 (1959); **12**, 4, 561–578 (1959).
19. J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Dover publ., New York, 1952.
20. D. MANGERON, *Problèmes au sens d'Hadamard pour une classe d'équations fonctionnelles* (*À Jacques Hadamard, Membre honoraire de l'Académie de la République Populaire Roumaine, IN MEMORIAM*). Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **IX** (**XIII**), *3–4* (1963).
21. ГЕЛЬФАНД Л. М., Г. Е. ШИЛОВ, *Обобщение функций*. ГИФМЛ, Москва, 1958.
22. D. MANGERON, *Applicazione della transformata multipla di Laplace ad intervallo d'integrazione finito allo studio di vari problemi al contorno*. Rend. Accad. d'Italia, s. 7, **I**, *1*, 1–9 (1939).
23. L. POLI, P. DELERUE, *Le calcul symbolique à deux variables*. Mémorial des Sciences Mathématiques, **CXXVII**, 1954, Gauthier-Villars, Paris, 49–50.
24. А. Д. МЫШКИС, О задаче Каушти. Успехи Матем. Наук., 1948.
25. E. de GIORGI, *Un teorema di unicità per il problema di Cauchy, relativo ad equazioni differenziali a derivate parziali di tipo parabolico*. Scritti Matematici offerti a Mauro Picone. Bologna, Azzoguidi, 781–787 (1955).
26. A. F. ŠESTOPAL, *Metod otrajenii i ego primenenia k zadačam matematiceskoi fiziki*. Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **X** (**XIV**), *3–4* (1964).
27. D. MANGERON, A. F. ŠESTOPAL, *Problema razlojenia funktzii Green- a lineinyh differentzial'nyh operatorov i nekotorye ee primenenia k issledovaniu kolebatel'nyh protzessov*. Mathematica, Cluj, **6** (**29**) (1964).
28. D. MANGERON, A. F. ŠESTOPAL, *Sull'analisi spettrale delle piastre triangolari*. Accademia Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, **XXXVI**, *1* (1964).
29. D. MANGERON, *Mecanica vibraţiilor*, În volumul „*Fundamentele Mecanicii*" de D. Mangeron, Z. Gabos şi I. Stan. Ed. Acad. R.P.R., 1962.
30. О. Д. ОНЯШВИЛИ, Некоторые динамические задачи теории оболочек. АН СССР, АН ГрузССР, Москва, 1957.
31. V. V. BOLOTIN, *O plotnosti častot sobstvennyh kolebanii tonkih uprugih obolocek*. PMM, **XXVII**, 2, 362–364 (1963).
32. M. PICONE, *Criteri sufficienti in generali problemi di Calcolo delle variazioni riguardanti integrali pluridimensionali d'ordine qualsivoglia nel vettore minimante a più componenti*. Atti della Accademia Naz. dei Lincei. Anno **CCCLX** (1963); Memorie, Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, **VII**, Sez. I (Mat. mec., astron., geod., geofis.), 3, 33–57.
33. D. MANGERON, *O nouă clasă de probleme de contur în lumina teoriei proceselor optimale*. Comunicările Acad. R.P.R., **XIII**, 12, 1 023–1 030 (1963).
34. D. MANGERON, *Sur une classe de problèmes à la frontière non elliptiques d'ordre supérieur*. C.R. Acad. Sci., Paris, **255**, 2 894–2 896 (1962).
35. G. FICHERA, M. PICONE, *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale pluridimensionale, del primo rodine nel vettore minimante in parte o completamente libero alla frontiera del dominio d'integrazione. Calcolo di un confine inferiore per taluni autovalori*. Atti della Accademia Naz. dei Lincei, **CCCLIX** (1962); Memorie, Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, **VI**, Sez. I (Mat., Mecc., astron., geod. e geofis.), *12* 341–379.
36. L. HÖRMANDER, *Opérateurs différentiels à caractéristiques simples*. Les équations aux dérivées partielles. Colloques Internationaux du Centre National des Recherches Scientifiques, Paris, 41–46 (1963).

STUDIUL ANSAMBLURILOR STATISTICE CU AJUTORUL CONGRUENȚELOR PSEUDO-ORTOGONALE ÎN RELATIVITATEA GENERALĂ

DE

EUGEN RĂDESCU

În cele ce urmează, ne propunem să facem o aplicație a teoriei congruențelor pseudo-ortogonale [1] la studiul ansamblurilor statistice în relativitatea generală. Vom urma o cale analoagă modelului [2] de introducere a unei distribuții microcanonice, lucrînd, însă, cu un spațiu al fazelor diferit și utilizînd consecvent formularea dată în [1] teoriei relativității generale. Din punct de vedere geometric, modul de tratare este mai general, existînd, în plus, avantajul că în locul unor mărimi dependente de transformările de coordonate, apar în noua formulare mărimi analoage, invariante la aceste transformări.

Ecuațiile de mișcare pentru un punct material aflat în cîmp gravific au, după [1], forma

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mu^i_a\, u^a} = \frac{\mathrm{d}u^a}{\gamma^a_{bc}\, u^b\, u^c} = \mathrm{d}t \tag{1}$$

unde :

1°. u^a sînt componentele vectorului tangent la geodezică, într-un sistem de patru congruențe de parametri μ^i_a, momente λ^a_i și diferențiale ale arcului $\mathrm{d}s^a$ $(i, a = 0, 1, 2, 3)$.

2°. μ^i_a și λ^a_i sînt funcții de (x^0, x^1, x^2, x^3) determinate astfel ca forma pătratică (nedegenerată) a metricii

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,(x)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \;; \qquad g \equiv \det|\,g_{ij}\,| \neq 0, \tag{2}$$

să se reducă la forma canonică

$$\mathrm{d}s^2 = \varepsilon_0\,(\mathrm{d}s^0)^2 + \varepsilon_1\,(\mathrm{d}s^1)^2 + \varepsilon_2\,(\mathrm{d}s^2)^2 + \varepsilon_3\,(\mathrm{d}s^3)^2 \tag{3}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 6, P. 673–804, BUCUREȘTI, 1964.

cu $\mathrm{d}s^a$ forme Pfaff de tipul

$$\mathrm{d}s^a = \lambda_i^a \mathrm{d}x^i ; \quad \det |\, \lambda_i^a \,| \neq 0, \; ([4]), \tag{4}$$

astfel că putem obține prin inversare

$$\mathrm{d}x^i = \mu_a^i \mathrm{d}s^a, \tag{5}$$

$$\lambda_i^a \, \mu_a^j = \delta_i^j, \tag{6}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1 ; \; \varepsilon_0 = 1. \tag{7}$$

Semnele pentru ε_0 fiind diferite, congruențele cu care operăm sînt prin definiție pseudo-ortogonale.

3°. γ_{bc}^a reprezintă coeficienții care caracterizează transportul paralel Levi Civita în sistemul congruențelor :

$$\mathrm{d}v^a = \gamma_{bc}^a \, v^b \, \mathrm{d}s^c, \tag{8}$$

v^a fiind proiecțiile vectorului pe tangentele la curbele aparținînd fiecare uneia din cele patru congruențe și trecînd toate printr-un același punct (x^0, x^0, x^2, x^3).

Dacă V_i, V^i sînt, respectiv, componentele covariante și contravariante ale vectorului în sistemul de coordonate x^0, x^1, x^2, x^3,

$$v^a = \lambda_i^a \, V^i. \tag{9}$$

$$v_a = \mu_a^i \, V_i \tag{10}$$

Pentru γ_{bc}^a avem expresiile :

$$\gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} \left(w_{bc}^a + \varepsilon_a \, \varepsilon_b \, w_{ca}^b + \varepsilon_a \, \varepsilon_c \, w_{ba}^c \right), \tag{11}$$

$$w_{bc}^a = \left(\frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_j^a}{\partial x^i} \right) \mu_b^i \, \mu_c^j \tag{12}$$

w_{bc}^a și, în consecință, γ_{bc}^a depind numai de sistemul de congruențe și nu de metrică, fiind invariante la transformări de coordonate.

Mai au loc egalitățile :

$$g_{ij} = \varepsilon_a \, \lambda_i^a \, \lambda_j^a \tag{13}$$

cu sumare peste a și

$$v_a = \varepsilon_a \, v^a \tag{14}$$

cu a fix.

Considerăm, în legătură cu sistemul diferențial (1), spațiul V_8 al variabilelor (x^i, u^a) (spațiul fazelor).

Sistemul (1) *admite integrala primă*

$$\varphi \equiv u_a \, u^a = 1, \tag{15}$$

care reprezintă o varietate cu șapte dimensiuni V_7 *din* V_8.

Într-adevăr, calculînd derivata lui φ în raport cu parametrul t avem

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_a \frac{\mathrm{d}(u^a u^a)}{\mathrm{d}t} = u_a \frac{\mathrm{d}u^a}{\mathrm{d}t} = \gamma^a_{bc} u_a u^b u^c = 0\,;$$

şi încă

$$\varphi = \varepsilon_a u^a u^a = \varepsilon_c \lambda^c_i \lambda^c_k \mu^{i'}_a \mu^k_b u^a u^b = g_{ik} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 1,$$

dacă se ia $s = t$. S-au utilizat (1), (11), (12), (14), (6).

Singurele soluţii ale sistemului (1) care au semnificaţie fizică, sînt acelea pentru care integrala primă φ are valoarea 1. Introducem atunci un ansamblu de puncte materiale, caracterizat prin condiţia ca numai distribuţiile sale microcanonice în raport cu φ să prezinte semnificaţie fizică.

Lăsînd, pentru moment, ansamblul distribuit arbitrar în raport cu φ, distribuţia este dată de o formă diferenţială exterioară de gradul $n - 1$ $(n = 8)$, invariantă în raport cu sistemul de ecuaţii (1). Rezultă, conform teoriei invarianţilor integrali [3], că o asemenea formă este în mod necesar de tipul:

$$f(x,u)\left\{\left(\frac{1}{3}\sum \mu^i_a u^a \,\mathrm{d}x^j\,\mathrm{d}x^k\,\mathrm{d}x^l\right)\left(\mathrm{d}u^0\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3\right)\frac{1}{3}\sum \gamma^i_{ab} u^a u^b \,\mathrm{d}u^j\,\mathrm{d}u^k\,\mathrm{d}u^l,\right\} \tag{16}$$

i, j, k, l fiind permutări pare ale lui 0, 1, 2, 3 şi sumele extinzîndu-se pe toate permutările pare posibile. Din condiţia de anulare a derivatei exterioare a acestei forme, care exprimă invarianţa sa faţă de sistemul (1), rezultă relaţia

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\mu^i_a u^a f) + \frac{\partial}{\partial u^i}(\gamma^i_{ab} u^a u^b f) = 0. \tag{17}$$

Condiţia de microcanonicitate în raport cu φ poate fi introdusă luînd f de forma:

$$f(x,u) = \delta(\varphi - 1)\, g(x,u) \tag{18}$$

δ fiind funcţia lui Dirac.

Ecuaţia (17) se reduce la

$$\delta(\varphi-1)\left[\frac{\partial}{\partial x^i}(\mu^i_a u^a g) + \frac{\partial}{\partial u^i}(\gamma^i_{ab} u^a u^b g)\right] +$$
$$+ g\cdot\delta'(\varphi-1)\left[\mu^i_a u^a \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \gamma^i_{ab} u^a u^b \frac{\partial\varphi}{\partial u^i}\right] = 0.$$

Paranteza pătrată din al doilea termen este nulă, deoarece φ este o integrală primă a sistemului (1), astfel că condiția de microcanonicitate revine la

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\mu_a^i u^a g) + \frac{\partial}{\partial u^i}(\gamma_{ab}^i u^a u^b g) = 0 \tag{19}$$

de-a lungul varietății $u_a u^a = 1$.

Semnificația fizică a considerațiilor de mai sus este următoarea: Integrala formei diferențiale (16) cu f de forma (18) extinsă la o varietate 6 dimensională Σ_6 scufundată în V_7, reprezintă numărul de puncte ale ansamblului a căror traiectorie taie varietatea Σ_6. Ecuația de continuitate (19) exprimă, atunci, conservarea numărului de puncte ale sistemului.

În ecuațiile lui Einstein scrise în sistemul congruențelor ([1]), apare în membrul drept tensorul $T_{a'}^{a}$ exprimat în acest sistem.

Pentru ca aceste ecuații să fie compatibile, este necesar ca tensorul $T_{a'}^{a}$ *să satisfacă următoarea relație:*

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\mu_o^i \lambda_j^{a'} \sqrt{-g}\, T_{a'}^{a}) - \frac{\varepsilon_b}{2} \frac{\partial(\lambda_i^b \lambda_k^b)}{\partial x^j}(\mu_a^i \mu_{a'}^k \sqrt{-g}\, T^{aa'}) = 0 \tag{20}$$

Într-adevăr, ținînd seamă de legătura dintre mărimile tensorului scrise în sistemul congruențelor $T_{a'}^{a}$, și cele scrise în sistemul de coordonate (x^0, x^1, x^2, x^3), T_j^i,

$$T_{a'}^{a} = \lambda_i^a \mu_{a'}^j T_j^i, \tag{21}$$

cu (13) și știind că condiția de compatibilitate a ecuațiilor lui Einstein în forma uzuală este binecunoscuta relație:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{-g}\, T_j^i) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}(\sqrt{-g}\, T^{ik}) = 0$$

egalitatea (20) este imediată.

Cîmpul gravific fiind determinat de însăși distribuția maselor constitutive și eventual de mase exterioare, definim tensorul energiei în sistemul congruențelor în următorul mod, corespunzător distribuției considerate a ansamblului:

$$T_{a'}^{a} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \int u^a u_{a'} f(x, u)\, \mathrm{d}u^0\, \mathrm{d}u^1\, \mathrm{d}u^2\, \mathrm{d}u^3, \tag{22}$$

integrala fiind extinsă pe tot spațiul variabilelor u.

Tensorul $T_{a'}^{a}$ *astfel definit, cu* f *satisfăcînd ecuația de continuitate* (17), *verifică condiția* (20).

Demonstrație. Avem, notînd $\mathrm{d}u \equiv \mathrm{d}u^0\, \mathrm{d}u^1\, \mathrm{d}u^2\, \mathrm{d}u^3$,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\mu_a^i \lambda_j^{a'} \sqrt{-g}\, T_{a'}^{a}) = \int u^a u_{a'} \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu_a^i \lambda_j^{a'} f)\, \mathrm{d}u =$$

$$= \int u^a u_{a'} \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu_a^i f) \cdot \lambda_j^{a'}\, \mathrm{d}u + \int u^a u_{a'} \mu_a^i f \cdot \frac{\partial \lambda_j^{a'}}{\partial x^i}\, \mathrm{d}u.$$

Înlocuind $u^a \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu^i_a f)$ din (17) în primul termen, apoi efectuînd o integrare prin părţi, cu (14) şi ţinînd seamă că pe frontiera domeniului de integrare, din motive fizice, f se anulează, obţinem

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\mu^i_a \lambda^{a'}_j \sqrt{-g}\, T^a_{a'}) = \int f \cdot \left[\varepsilon_a \gamma^a_{bc} \lambda^a_j u^b u^c + \varepsilon_b u^b u^c \mu^i_c \frac{\partial \lambda^b_j}{\partial x^i} \right] \mathrm{d}u =$$

$$= \int f \left[\frac{1}{2} u^b u^c \lambda^a_j \varepsilon_a \left(\frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \lambda^a_k}{\partial x^i} \right) \mu^i_b \mu^k_c + \frac{1}{2} u^b u^c \lambda^a_j \varepsilon_b \left(\frac{\partial \lambda^b_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \lambda^b_k}{\partial x^i} \right) \mu^i_c \mu^k_a + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} u^b u^c \lambda^a_j \varepsilon_c \left(\frac{\partial \lambda^c_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \lambda^c_k}{\partial x^i} \right) \mu^i_b \mu^k_a + \varepsilon_b u^b u^c \mu^i_c \frac{\partial \lambda^b_j}{\partial x^i} \right] \mathrm{d}u$$

Primul termen din paranteza pătrată este identic nul, cum se poate vedea uşor printr-o schimbare convenabilă a indicilor de sumare. Pentru ceilalţi termeni utilizăm relaţiile (6) şi, după reduceri, paranteza patrată din membrul drept devine

$$\varepsilon_b u^b u^c \frac{\partial \lambda^b_k}{\partial x^j} \mu^k_c .$$

Această expresie se mai poate scrie

$$\frac{1}{2} \varepsilon_b u^b u^c \mu^k_c \frac{\partial \lambda^b_k}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \varepsilon_c u^b u^c \mu^i_b \frac{\partial \lambda^c_i}{\partial x^j} =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_a u^b u^c \mu^k_c \delta^b_a \frac{\partial \lambda^a_k}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \varepsilon_a u^b u^c \mu^i_b \delta^c_a \frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^j} =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_a u^b u^c \mu^k_c \mu^i_b \lambda^a_i \frac{\partial \lambda^a_k}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \varepsilon_a u^b u^c \mu^i_b \mu^k_c \lambda^a_k \frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^j} =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_a u^b u^c \mu^i_b \mu^k_c \frac{\partial \lambda^a_i \lambda^a_k}{\partial x^j} .$$

Avem deci, întrucît mărimile λ şi μ nu depind de variabilele de integrare:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\mu^i_a \lambda^{a'}_j \sqrt{-g}\, T^a_{a'}) = \int f \cdot \frac{1}{2} u^b u^c \mu^i_b \mu^k_c \frac{\partial \varepsilon_a \lambda^a_i \lambda^a_k}{\partial x^j} \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_a \lambda^a_i \lambda^a_k}{\partial x^j} \cdot \mu^i_b \mu^k_c \int f u^b u^c \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_a \lambda^a_i \lambda^a_k}{\partial x^j} (\mu^i_b \mu^k_c \sqrt{-g}\, T^{bc}),$$

adică tocmai ceea ce trebuia arătat.

Ecuaţiile lui Einstein scrise în forma din [1], avînd tensorul $T^{a'}_a$ în membrul drept sînt deci compatibile, sistemul de ecuaţii algebrice şi integro-diferenţiale format de ele împreună cu (6) şi cu ecuaţia de continuitate (17) permițînd, în principiu, determinarea simultană a sistemului de congruențe pseudo-ortogonale (mărimile λ și μ) și a funcției de distribuție f.

Avantajul deosebit pe care îl prezintă acest mod de tratare a problemei ansamblelor statistice în relativitatea generală, bazată pe teoria congruențelor pseudo-ortogonale, îl constituie faptul că integrala primă $\varphi \equiv u_a u^a = 1$ în raport cu care se pune condiția de microcanonicitate este o suprafață explicit determinată în spațiul fazelor (x, u) de ecuația

$$\varphi \equiv (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 = 1.$$

Integrala primă din [2] depinde de toate cele opt coordonate și, în plus, rămîne practic nedeterminată, fiind exprimabilă prin coeficienții de metrică $g_{ik}(x)$ care nu sînt cunoscuți explicit.

Primită la redacție la 26 martie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. G. Vrănceanu, *Conferenze del Seminario di Matematica dell Universita di Bari*, **84**, Bologna, 1962.
2. S. Țițeica, S. Ciulli, *Les ensembles statistiques en relativité générale*, preprint I.F.A./FT/23, 1956.
3. E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, Hermann, 1922.
4. G. Vrănceanu, *Leçons de géometrie differentielle*, vol. I, București, 1957.

ASUPRA UNOR ALGEBRE NEASOCIATIVE A_3

DE

V. G. GORCIU

Voim să construim tabloul de înmulțire pentru o algebră A_3 [1]) avînd următoarele caracteristici :

I) comutativitatea ;

II) neasociativitatea ;

III) algebra posedă un anulator.

Acad. Gh. Vrănceanu [1] a arătat că se poate asocia o asemenea algebră unui V_3 cu conexiune afină constantă şi care nu e local euclidian.

Faptul că algebra e comutativă, se traduce prin aceea că tabloul e simetric față de diagonală. Într-un astfel de tablou există, deci, şase produse $e_i e_k$, cunoaşterea lor implică, deci, cunoaşterea a 18 constante.

Vom nota relația generală de asociativitate

$$(e_i e_j) e_k = e_i (e_j e_k) \tag{1}$$

cu $(i j k)$, indicînd indicii care intervin şi ordinea lor. În relația (1) i, j, k iau separat valorile 1, 2, 3.

Ținînd seama de comutativitate şi, într-un caz, de tranzitivitatea egalității, rămîn următoarele 11 combinări :

(1 1 1) ; (1 1 2) ; (1 1 3) ; (1 2 2) ; (1 2 3) ; (1 3 2) ; (1 3 3) ; (2 2 3) ; (2 2 2) ; (2 3 3) şi (3 3 3).

Din acestea, (1 1 1), (2 2 2) şi (3 3 3) sînt verificate identic.

Într-adevăr, avem $e_i^2 \cdot e_i = e_i e_i^2$ în virtutea comutativității.

Din condiția ca e_1 să fie un anulator, rezultă :

$$e_1^2 = e_1 e_2 = e_1 e_3 = 0. \tag{2}$$

---

[1]) Fiind dat un corp comutativ K, înțelegem printr-o algebră A în raport cu K un obiect compus dintr-un spațiu vectorial A pe K şi o aplicare biliniară a lui $A \times A$ în A.

În felul acesta mai rămîn q coeficienți care trebuie să fie determinați. Notăm :

$$e_2^2 = a\,e_1 + b\,e_2 + c\,e_3\,;\ e_2 e_3 = l\,e_1 + m\,e_2 + n\,e_3 \qquad (3)$$
$$e_3^2 = \alpha\,e_1 + \beta\,e_2 + \gamma\,e_3.$$

Impunem ultima condiție care trebuie să fie satisfăcută de algebrele ce le construim :

IV) Reprezentările lui e_2^2, $e_2\,e_3$ și e_3^2 trebuie să fie liniar independente.

În baza relațiilor (2) toate condițiile de asociativitate, corespunzînd combinărilor de mai sus, sînt verificate cu excepția următoarelor două : (2 2 3) și (2 3 3).

Ținînd seama de faptul că e_1, e_2, e_3 sînt liniar independente, cînd scriem relația de asociativitate, pentru fiecare din aceste combinări, obținem cîte trei ecuații.

Ecuațiile corespunzătoare lui (2 3 3) sînt :

$$\begin{aligned}(m-\gamma)\,l + n\,\alpha - \beta a &= 0,\\ (m-\gamma)m + n\,\beta - \beta b &= 0,\\ (m-\gamma)\,n + n\gamma - \beta c &= 0.\end{aligned} \qquad (4)$$

Potrivit cu caracteristica IV) avem :

$$\Delta = \begin{vmatrix} l & \alpha & a \\ m & \beta & b \\ n & \gamma & c \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (5)$$

Deci soluția acestui sistem este :

$$m = \gamma,\ n = 0,\ \beta = 0.$$

Pentru că voim să construim tabloul de înmulțire al unei algebre neasociative, luăm :

$$m \neq \gamma,\ n = 0,\ \beta = 0. \qquad (6)$$

Combinării (2 2 3) îi corespunde sistemul de ecuații liniare și omogene :

$$\begin{aligned}(b-n)\,l + c\alpha - m\,a &= 0,\\ (b-n)\,m + c\beta - m\,b &= 0,\\ (b-n)\,n + c\gamma - m\,c &= 0.\end{aligned} \qquad (7)$$

Vedem că determinantul acestui sistem de ecuații este tot Δ. Soluția lui este deci :

$$b = n,\ c = 0,\ m = 0.$$

Deoarece voim ca sistemul (7) să nu fie satisfăcut, luăm

$$b = n,\ c = 0 \text{ și } m \neq 0. \qquad (8)$$

Deoarece avem din (6) $n = 0$, rezultă că

$$b = 0. \tag{9}$$

Dacă înlocuim elementele lui Δ cu valorile lor obținute în (6), (8) și (9), avem:

$$\Delta = a\, m\, \gamma\,.$$

Rezultă că trebuie să avem și

$$a \neq 0\,;\ \gamma \neq 0. \tag{10}$$

Cele trei produse care au rămas să fie determinate au forma:

$$e_2^2 = \underline{a}\, e_1\,;\quad e_2\, e_3 = l\, e_1 + \underline{m}\, e_2,\quad e_3^2 = \alpha\, e_1 + \underline{\gamma}\, e_3. \tag{11}$$

Coeficienții subliniați trebuie să fie diferiți de zero.

În [1], prof. G. Vrănceanu dă următoarea lege de înmulțire:

$$e_j\, e_k = \Gamma^i_{jk}\, e_i\,,$$

unde Γ^i_{jk} sînt componentele conexiunii afine constante a unui spațiu V_3 în variabilele X_1, X_2, X_3. Dacă schimbăm semnul, aceste componente sînt egale cu simbolurile lui Christoffel de specia a doua. Noi luăm constantele de structură ca fiind egale chiar cu simbolurile lui Christoffel.

Voim să determinăm spațiile lui Riemann de dimensiune trei, la care se poate asocia algebra găsită și a căror metrică este o formă pătratică nedegenerată.

Considerăm un caz special, anume acela cînd constantele care nu au fost găsite ca trebuind să fie diferite de zero sînt nule. Deci luăm $l = \alpha = 0$. Acei Γ^i_{jk} care nu sînt nuli, sînt dați de formulele:

$$\Gamma^1_{22} = a\,;\qquad \Gamma^2_{23} = m\,;\qquad \Gamma^3_{33} = \gamma.$$

Componentele tensorului metric sînt date de următorul sistem de 18 ecuații diferențiale liniare cu derivate parțiale:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} = 0,\\
&\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} = 0,\ \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} = a g_{11},\ \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} = m\, g_{12},\\
&\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} = 0,\ \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} = m\, g_{12},\ \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} = \gamma\, g_{13},\\
&\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = 0,\ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = 2\, a\, g_{12},\ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} = 2\, m\, g_{22}\,,\\
&\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} = 0,\ \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} = m\, g_{22} + a\, g_{13}\,,\ \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} = (m + \gamma)\, g_{23}\,,\\
&\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = 0,\ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = 2\, m\, g_{23}\,,\ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} = 2\, \gamma_{33}\,.
\end{aligned} \tag{12}$$

Din cele 18 condiții de integrabilitate, le scriem numai pe acelea care nu sînt verificate în mod identic. Ținînd seama de sistemul (12), acestea sînt :

$$m\, a\, g_{11} = 0, \quad m^2 g_{12} = m\, \gamma\, g_{12}\,, \quad m\, a\, g_{12} = 0,$$
$$(\gamma - m)\, g_{22} + (a\, g_{13} = 0, \quad m\,(m + \gamma)\, g_{23} = 2\, m\, \gamma\, g_{23}. \tag{13}$$

Din acestea rezultă :

$$g_{11} = g_{13} = g_{23} = 0, \quad g_{22} = \frac{a}{m - \gamma}\, g_{13}. \tag{14}$$

Ținînd seama de (14), ecuația din sistemul (12) care dă pe $\frac{\partial g_{23}}{\partial x^2}$ devine :

$$a\, g_{13} + m\, g_{22} = 0 \Rightarrow (2\, m - \gamma)\, a\, g_{13} = 0. \tag{15}$$

Dacă luăm $g_{13} = 0$, rezultă și $g_{22} = 0$. Se vede imediat că metrica ar fi o formă pătratică degenerată.

Excludem deci acest caz. Rezultă :

$$\gamma = 2m. \tag{16}$$

Pentru ușurința scrisului notăm $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Sistemul de ecuații diferențiale care determină pe g_{13} sînt :

$$\frac{\partial g_{13}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g_{13}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g_{13}}{\partial z} = \gamma\, g_{13} \tag{17}$$

Rezultă : $g_{13} = K_1\, \mathrm{e}^{2mz}$. Deci :

$$g_{22} = K_1\, \frac{a}{m - \gamma}\, \mathrm{e}^{2mz} = -\, \frac{K_1\, a}{m}\, \mathrm{e}^{2mz}.$$

În același fel g_{33} e determinat de sistemul

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial y} = 0\,; \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial z} = 2\, \gamma\, g_{33} = 4\, m\, g_{33}. \tag{18}$$

Rezultă :

$$g_{33} = K_2\, \mathrm{e}^{4mz} \quad (K_1 \text{ și } K_2 \text{ constante}).$$

Metrica lui V_3 este deci :

$$\mathrm{d}s^2 = \left[-\, \frac{K_1 a}{m}\, \mathrm{d}y^2 + 2K_1\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z \right] \mathrm{e}^{2mz} + K_2\, \mathrm{e}^{4mz}\, \mathrm{d}z^2. \tag{19}$$

Acesta este spațiul V_3 neeuclidian, cu conexiune afină constantă, și de genul 2 găsit de prof. G. Vrănceanu ([2], formula (27)).

Am văzut că, în cazul tratat, relațiile de asociativitate se împart în două : cele care sînt verificate datorită faptului că e_1, este un anulator și cele corespunzătoare combinărilor (2 2 3) și (2 3 3). Am ales constantele de structură astfel încît ambele sisteme de ecuații, corespunzătoare acestor combinări, să nu fie verificate. Evident însă că algebra nu este asociativă chiar dacă numai unul din aceste sisteme de ecuații nu este verificat. Voim să vedem ce spațiu al lui Riemann obținem în acest caz. Luăm aceleași valori pentru sistemul (7), corespunzînd combinării (2 2 3), adică : $b = n$; $c = 0$, $m \neq 0$.

În schimb, pentru sistemul (4) luăm soluția lui, ținînd seama de faptul că determinantul Δ corespunzător este $\neq 0$. Avem deci :

$$m = \gamma,\ n = 0,\ \beta = 0.$$

Rezultă

$$b = n = 0. \tag{20}$$

Pentru aceste valori avem : $\Delta = a\gamma^2 \neq 0$. Deci $a \neq 0$. În cazul de față, cele trei produse care trebuiau să fie determinate au forma :

$$e_2^2 = a\, e_1\, ;\ e_2\, e_3 = l\, e_1 + \gamma\, e_2,\ e_3^2 = \alpha\, e_1 + \gamma\, e_3\, . \tag{21}$$

Considerăm și aici cazul special cînd $l = \alpha = 0$. În acest caz, simbolurile lui Christoffel, care nu sînt egale cu zero, sînt :

$$\Gamma_{22}^{1} = a,\quad \Gamma_{23}^{2} = \gamma,\quad \Gamma_{33}^{3} = \gamma\, .$$

Dacă scriem sistemul de ecuații cu derivate parțiale care dau componentele tensorului metric și condițiile de integrabilitate corespunzătoare obținem :

$$g_{11} = g_{12} = g_{13} = 0.$$

Rezultă că, în cazul considerat, metrica e o formă pătratică degenerată.

Observație. Putem vedea ușor că nu se poate construi o algebră asociativă care să îndeplinească cele 5 condiții impuse. Într-adevăr, dacă rezolvăm sistemele (4) și (7), ținînd seama că $\Delta \neq 0$, obținem :

$$m = \gamma\, ;\ n = 0,\ \beta = 0,\ b = n,\ c = 0,\ m = 0. \tag{22}$$

Deci :

$$m = n = 0\, ;\ \beta = \gamma = 0\, ;\ b = c = 0. \tag{23}$$

Pentru aceste valori, $\Delta = 0$, obținînd astfel o contradicție.

Primită la redacție la 1 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. G. VRĂNCEANU, *Spazi a connessione affine e le algebre di numeri ipercomplessi.* Anali della Scuola normale superiore di Pisa (1958).

2. G. VRĂNCEANU, *Asupra spațiilor lui Riemann cu conexiune constantă*, Studii și cercetări matematice, **13**, *2* (1962).

ASUPRA SEMIGRUPURILOR COMPLET NEUNITARE

DE

DUMITRU GAŞPAR

Un semigrup tare continuu $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ de contracţii ale spaţiului Hilbert $\mathcal{H}$ se zice complet neunitar [3] dacă pentru orice $h \in \mathcal{H}$, $h \neq 0$ are loc relaţia :

$$\inf_{0\leqslant t<\infty} \{\|T_t h\|,\ \|T_t^* h\|\} < \|h\|. \tag{1}$$

Se cunoaşte că un semigrup de contracţii este complet neunitar, dacă şi numai dacă cogeneratricea sa [2] este complet neunitară [3]. De obicei însă această cogeneratrice nu este dată explicit. În majoritatea problemelor cu semigrupuri concrete de operatori se dă generatorul semi-grupului (vezi de exemplu [1]).

În cele ce urmează vom da o condiţie suficientă de completă neunitaritate a unui semigrup de contracţii, exprimată cu ajutorul generatorului. Aceasta constă în următoarea :

TEOREMĂ. *Fie A generatorul unui semigrup de contracţii în spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$. Dacă are loc relaţia* :

$$\operatorname{Re}\,(Ax, x) < 0 \ \textit{sau}\ \operatorname{Re}\,(A^* x, x) < 0 \ \textit{pentru orice}\ x \in \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_{A^*}, \tag{2}$$

atunci semigrupul este complet neunitar.

Demonstraţie. Ţinînd seama de observaţia făcută la început este suficient să raţionăm asupra cogeneratricii T a semigrupului. Presupunem prin absurd că T nu este complet neunitară. Atunci spaţiul $\mathcal{H}$ posedă un subspaţiu $\mathcal{H}^{(u)} \neq \{0\}$, care reduce pe T, iar restricţia $T^{(u)}$ a lui T la $\mathcal{H}^{(u)}$ este unitară [2]. Fie $x_0 \in \mathcal{H}^{(u)}$; $x_0 \neq 0$. Atunci

$$y = \frac{1}{2}(T - I)\,x_0$$

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 6, P. 673–804, BUCUREŞTI, 1964

este un vector din $\mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_{A^*}$. În adevăr, este evident că $y \in \mathfrak{D}_A$ (vezi definiția cogeneratricei în [2]); pe de altă parte,

$$y = \frac{1}{2}(T^{(u)} - T^{(u)*}\,T^{(u)})\,x_0 = \frac{1}{2}(1 - T^{(u)*})\,T^{(u)}\,x_0 = \frac{1}{2}(T^* - I)\,x_1,$$

unde $x_1 = -\,Tx_0$; urmează $y_1 \in \mathfrak{D}_{A^*}$.

Pentru vectorul y, relația (2) este infirmată. Într-adevăr, făcînd calculele:

$$(Ay, y) = \frac{1}{4}((T + I)\,x_0, (T - I)\,x_0) = \frac{1}{4}(\|Tx_0\|^2 -$$
$$-\,(Tx_0, x_0) + (x_0, Tx_0) - \|x_0\|^2)$$
$$(A^*y, y) = \frac{1}{4}((T^* + I)\,x_1, (T^* - I)\,x_1) = \frac{1}{4}(\|T^*x_1\|^2 -$$
$$-\,(T^*x_1, x_1) + (x_1, T^*x_1) - \|x_1\|^2)$$

și ținînd cont că $x_0 \in \mathcal{H}^{(u)}$ și $x_1 = -\,Tx_0 \in \mathcal{H}^{(u)}$, obținem:

$$\operatorname{Re}(Ay, y) = 0 = \operatorname{Re}(A^*y, y)$$

și teorema este demonstrată.

Condiția (2) nu este necesară pentru completa neunitaritate a semigrupului. Acest fapt e ilustrat de exemplul următor:

Fie în spațiul l^2 contracția T definită astfel:

$$T\{c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\} = \{c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}, \ldots\}.$$

Contracția T nu are pe 1 ca valoare proprie, deoarece, în caz contrar, vectorul propriu al unei asemenea valori ar fi de forma: $\{c_0, c_0, \ldots\}$, care nu aparține lui l^2.

În plus, T este complet neunitară deoarece sub spațiile pe care T păstrează norma sînt formate de elemente $\{0, \ldots, 0, c_{k+1}, \ldots\}$ și există neapărat o iterată a lui T care nu mai păstrează norma oricărui vector $\neq 0$.

Considerînd acum semigrupul $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ cogenerat de T, acesta va fi complet neunitar. Fie A generatorul semigrupului T. Vom arăta pentru toți vectorii $\{f_n\}$ din $\mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_{A^*}$ că au loc egalitățile:

$$\operatorname{Re}(A\{f_n\}, \{f_n\}) = \operatorname{Re}(A^*\{f_n\}, \{f_n\}) = 0.$$

Deoarece

$$T^*\{c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots\} = \{0, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, \ldots\}$$

se observă că: $\mathfrak{D}_{A^*} \subset \mathfrak{D}_A$. Într-adevăr, dacă $\{f_n\} \in \mathfrak{D}_{A^*}$, există în l^2 un șir $\{c_n\}$ astfel ca:

$$\{f_n\} = \frac{1}{2}(T^* - I)\{c_n\}$$

şi luînd şirul

$$\{d_n\} : d_0 = 0,\ d_1 = -c_0, \ldots, d_n = -c_{n-1}, \ldots$$

se observă uşor că :

$$\{f_n\} = \frac{1}{2}(T - I)\{d_n\}$$

deci $\{f_n\} \in \mathfrak{D}_A$.

Efectuînd acum calculele pentru un $\{f_n\} \in D_{A^*}$,

$$(A^* \{f_n\}, \{f_n\}) = \frac{1}{4}\left(|c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(|c_{n-1}|^2 - |c_n|^2)\right) = 0,$$

$$(A \ \{f_n\}, \{f_n\}) = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(|d_n|^2 - |d_{n-1}|^2)\right) = -\frac{1}{4}|d_0|^2 = 0,$$

deci condiţia (2) nu este satisfăcută.

Primită la redacţie la 4 aprilie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. N. DUNFORD and J. L. SCHWARTZ, *Linear Operators*. Part. I, New York, 1958.
2. B. SZ-NAGY et C. FOIAŞ, *Sur les contractions de l'espace de Hilbert*. Acta Sci. Math., **III**, 19 (1958).
3. B. SZ-NAGY et C. FOIAŞ, *Sur les contractions de l'espace de Hilbert*. Acta Sci. Math., **IV**, 21 (1960).

CONSTRUIREA UNOR FORMULE PRACTICE DE CVADRATURĂ

DE

D. V. IONESCU

Într-o lucrare recentă [2], am determinat resturile în cîteva formule practice de cvadratură pe care le-am numit formulele lui *G. Coulmy* [1] și *Durand* [3]. În această lucrare, vom arăta o metodă pentru a construi aceste formule și altele similare.

1. Să considerăm o formulă de cvadratură de forma

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = A_0\,[f(x_0)+f(x_n)] + A_1\,[f(x_1)+f(x_{n-1})] + \dots$$

$$+ A_p\,[f(x_p)+f(x_{n-p})] + h\,[f(x_{p+1}) + \dots + f(x_{n-p-1})] + R \qquad (1)$$

care depinde de parametrii $A_0, A_1, \dots, A_p$ și care este considerată pe nodurile $x_0, x_1, \dots, x_n$ în progresie aritmetică cu rația h. Se pot determina relațiile dintre acești parametri, astfel ca gradul de exactitate al formulei (1) să fie q. În acest caz presupunînd că funcția $f(x)$ este de clasa C^{q+1} pe intervalul $[x_0, x_n]$, restul R, al formulei (1), se poate pune sub forma

$$R = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f^{(q+1)}(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

Este evident că și funcția $\varphi(x)$ depinde de parametrii $A_0, A_1, \dots, A_p$. Deoarece formula (1) și restul ei sînt determinate de funcția $\varphi(x)$, parametrii $A_0, A_1, \dots, A_p$ pot fi toți determinați dacă în afară de relațiile dintre parametrii, care fac ca gradul de exactitate să fie q, se mai adaugă noi condiții pe care să le îndeplinească funcția $\varphi(x)$. Condițiile care se vor adăuga pentru funcția $\varphi(x)$, vor fi totdeauna legate de o evaluare cît mai convenabilă a restului R, dat de formula (2). Felul de condiții noi pe care le vom impune, va fi văzut din exemplele pe care le vom

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 6, BUCUREȘTI, 1964.

trata. Ne vom mărgini în această lucrare la formule cu gradul de exactitate 1, urmînd ca în alte lucrări să tratăm despre formule cu gradul de exactitate mai mare ca 1.

2. Să presupunem mai întîi că în formula (1) avem un singur parametru A_0 și că gradul de exactitate al formulei este 1. În acest caz avem $A_0 = \frac{h}{2}$ și formula este

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\,[f(x_0) + f(x_n)] + h\,[f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})] + \\ + \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f''(x)\,dx.\end{aligned} \tag{3}$$

Aceasta este formula care se deduce de obicei din formula trapezului. Funcția $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... cu polinoamele $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... unde

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)(x - x_1),\quad \varphi_2(x) = \frac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2), \ldots \tag{4}$$

Pentru restul formulei (3) avem evaluarea

$$|R| \leqslant \frac{n}{12} M_2 h^3, \tag{5}$$

unde

$$M_2 = \sup_{[x_0,\, x_n]} |f''(x)|\,. \tag{6}$$

3. Să presupunem că în formula (1) avem doi parametri A_0, A_1 și că gradul de exactitate al formulei este 1. În acest caz parametrii A_0, A_1 nu sînt determinați, ci sînt legați prin relația

$$A_0 + A_1 = \frac{3h}{2}\cdot \tag{7}$$

Restul R este dat de formula (2) în care $q = 1$ și funcția $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... cu polinoamele $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... Fără greutate se găsește că

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \frac{(x - x_0)}{2} - A_0(x - x_0),\\ \varphi_2(x) &= \frac{(x - x_1)^2}{2} + (h - A_0 - A_1)(x - x_1) + \left(\frac{h^2}{2} - A_0 h\right)\cdot\end{aligned} \tag{8}$$

Din condițiile la limită care determină polinoamele $\varphi_k(x)$ și anume

$$\varphi_k(x_{k-1}) - \varphi_{k-1}(x_{k+1}) = 0$$

$$\varphi'_{k-1}(x_{k-1}) - \varphi'_k(x_{k-1}) = h \qquad (k = 3, 4, \ldots)$$

se deduce că

$$\begin{aligned} \varphi_k(x_{k-1}) &= \varphi_{k-1}(x_{k-1}), \\ \varphi_k'(x_{k-1}) &= \varphi_{k-1}'(x_{k-1}) - h. \end{aligned} \tag{9}$$

Pentru $k = 3$, se deduce, ținînd seamă de ecuațiile (8), că

$$\begin{aligned} \varphi_3(x_2) &= 2h^2 - 2A_0 h - A_1 h, \\ \varphi_3'(x_2) &= h - A_0 - A_1 \end{aligned} \tag{10$_1$}$$

și din cauza ecuației (7), vom avea

$$\varphi_3(x_2) = \frac{h^2}{2} - A_0 h. \tag{10$_2$}$$

Rezultă astfel că

$$\varphi_3(x) = \frac{(x - x_2)^2}{2} + (h - A_0 - A_1)(x - x_2) + \left(\frac{h^2}{2} - A_0 h\right) \tag{10$_3$}$$

și refăcînd aceleași calcule pentru $k = 4$, se găsește

$$\varphi_4(x) = \frac{(x - x_3)^2}{2} + (h - A_0 - A_1)(x - x_3) + \left(\frac{h^2}{2} - A_0 h\right) \tag{10$_4$}$$

și așa mai departe.

Pentru determinarea parametrilor A_0, A_1 mai introducem : *condiția* (α), prin formula

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi_2(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{11}$$

și din cauza formulelor (10$_3$), (10$_4$), vom avea de asemenea

$$\int_{x_2}^{x_3} \varphi_3(x)\,\mathrm{d}x = 0, \int_{x_3}^{x_4} \varphi_4(x)\,\mathrm{d}x = 0, \ldots$$

Condiția (11) conduce la ecuația

$$3 A_0 + A_1 = \frac{7h}{2} \tag{12}$$

și rezolvînd sistemul format de ecuațiile (7) și (12) se deduce că

$$A_0 = \frac{5h}{12}, \; A_1 = \frac{13h}{12}.$$

Formula de cvadratură (3) devine

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5h}{12}[f(x_0) + f(x_n)] + \frac{13h}{12}[f(x_1) + f(x_{n-1})] + \\ + h[f(x_2) + \ldots + f(x_{n-2})] + R. \end{aligned} \tag{13}$$

Aceasta este *formula lui Durand, caracterizată deci de gradul de exactitate al ei egal cu* 1 *şi de condiţia* (α) *exprimată prin formula* (11). Pentru această formulă avem

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{(x-x_0)^2}{2} - \frac{5h}{12}(x-x_0) \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x-x_1)^2}{2} - \frac{h}{2}(x-x_1) + \frac{h^2}{12} \\ \varphi_3(x) &= \frac{(x-x_2)^2}{2} - \frac{h}{2}(x-x_2) + \frac{h^2}{12} \end{aligned} \tag{14}$$

. . . .

şi sîntem conduşi la evaluarea

$$| R | \leqslant K_D M_2 h^3,$$

unde

$$K_D = \int_{x_0}^{x_n} |\varphi(x)|\, dx = \frac{71 - 12\sqrt{3}}{648} + \frac{n\sqrt{3}}{54} = 0{,}07749\ldots + \frac{n\sqrt{3}}{54}\cdot \tag{15}$$

4. Să presupunem că în formula (1) avem trei parametri A_0, A_1, A_2. Scriind că formula are gradul de exactitate 1, avem

$$A_0 + A_1 + A_2 = \frac{5h}{2}\cdot \tag{16}$$

Din primele condiţii la limită pentru determinarea funcţiei $\varphi(x)$, se deduce că

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_0(x-x_0) \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x-x_1)^2}{2} + (h - A_0 - A_1)(x-x_1) + \left(\frac{h^2}{2} - hA_0\right) \\ \varphi_3(x) &= \frac{(x-x_2)^2}{2} + (2h - A_0 - A_1 - A_2)(x-x_2) + \\ &\quad + [2h^2 - h(2A_0 + A_1)]. \end{aligned} \tag{17}$$

Din condiţiile la limită următoare, care sînt date tot de formulele (9), se deduce, pentru $k = 4$, că avem

$$\varphi_4(x_3) = \varphi_3(x_3) = \frac{h^2}{2} + (2h - A_0 - A_1 - A_2)h + [2h^2 - h(2A_0 + A_1)]$$

$$\varphi_4'(x_3) = \varphi_3'(x_3) - h = 2h - A_0 - A_1 - A_2.$$

Însă din cauza ecuației (16), prima din aceste formule se reduce la

$$\varphi_4(x_3) = 2h^2 - h(2A_0 + A_1)$$

astfel că vom avea

$$\begin{aligned}\varphi_4(x) = \frac{(x-x_3)^2}{2} &+ (2h - A_0 - A_1 - A_2)(x - x_3) + \\ &+ [2h^2 - h(2A_0 + A_1)]\end{aligned} \tag{18}$$

iar $\varphi_5(x)$ se deduce din $\varphi_4(x)$ înlocuind pe x_3 cu $x_4, \ldots$, și așa mai departe.

Să introducem *condiția* (α) pentru funcția φ, exprimată prin

$$\int_{x_2}^{x_3} \varphi_3(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{19}$$

Aceasta conduce la următoarea ecuație

$$5A_0 + 3A_1 + A_2 = \frac{19h}{3}. \tag{20}$$

Gradul de exactitate 1 al formulei (1) și condiția (α) *determină polinoamele* $\varphi_3(x), \varphi_4(x), \ldots$. Într-adevăr, ținînd seamă de ecuația (16), coeficientul lui $x - x_2$ din $\varphi_3(x)$ este $-\frac{h}{2}$, iar identitatea

$$2A_0 + A_1 = \frac{(5A_0 + 3A_1 + A_2) - (A_0 + A_1 + A_2)}{2}$$

arată că termenul liber din $\varphi_3(x)$ este

$$2h^2 - h \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{19h}{3} - \frac{5h}{2}\right] = 2h^2 - \frac{23h^2}{12} = \frac{h^2}{12}.$$

Prin urmare, avem

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-x_2)^2}{2} - \frac{h}{2}(x - x_2) + \frac{h^2}{12}$$

iar $\varphi_4(x)$ se deduce din $\varphi_3(x)$, înlocuind pe x_2 cu $x_3, \ldots$ și așa mai departe.

Rămîne să determinăm pe $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x)$ care mai depind de un singur parametru.

1°. Dacă se impune condiția ca

$$\varphi_2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 0 \tag{21}$$

ceea ce se întîmplă în cazul formulei lui *G. Coulmy*, sîntem conduşi la ecuaţia

$$3A_0 + A_1 = \frac{9h}{4}. \tag{22}$$

Rezolvînd sistemul format de ecuaţiile (16), (20), (22), avem

$$A_0 = \frac{h}{3},\ A_1 = \frac{5h}{4},\ A_2 = \frac{11h}{12}$$

şi aceasta conduce la formula de cvadratură

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\,[f(x_0) + f(x_n)] + \frac{5h}{4}\,[f(x_1) + f(x_{n-1})] + \\ + \frac{11h}{12}\,[f(x_2) + f(x_{n-2})] + h\,[f(x_3) + \ldots + f(x_{n-3})] + R.\end{aligned} \tag{23}$$

Se arată că pentru formula (23) avem

$$|R| \leqslant K\,M_2\,h^3, \tag{24}$$

unde

$$K = 0{,}0553\ldots + \frac{n\sqrt{3}}{54} \tag{25}$$

şi acest număr este cu puţin mai mare decît numărul corespunzător K_c din formula lui G. Coulmy, care este

$$K_c = 0{,}0521\ldots + \frac{n\sqrt{3}}{54}. \tag{26}$$

2°. Însă dacă se supune condiţia

$$\varphi_2(x_1) = \frac{7h^2}{48}, \tag{27}$$

atunci A_0, A_1, A_2 sînt daţi de ecuaţiile (16), (20) şi ecuaţia

$$\frac{h^2}{2} - hA_0 = \frac{7h^2}{48}$$

de unde se deduce că

$$A_0 = \frac{17h}{48},\ A_1 = \frac{58h}{48},\ A_2 = \frac{45h}{48}.$$

Formula de cvadratură corespunzătoare este

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{17h}{48}\,[f(x_0) + f(x_n)] + \frac{58h}{48}\,[f(x_1) + f(x_{n-1})] +$$

$$+ \frac{45h}{48}\,[f(x_2) + f(x_{n-2})] + h\,[f(x_3) + \ldots + f(x_{n-3})] + R, \tag{28}$$

unde pentru R avem evaluarea (24) cu coeficientul K dat de formula

$$K = 0{,}0421\ldots + \frac{n\sqrt{3}}{54} \tag{29}$$

şi acesta este mai avantajos decît coeficientul corespunzător din formula lui *G. Coulmy*.

5. Să presupunem acum că în formula (1) avem patru parametri A_0, A_1, A_2, A_3. Scriind că formula (1) are gradul de exactitate 1, avem ecuaţia

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = \frac{7h}{2} \tag{30}$$

şi din condiţiile la limită relative la punctele x_0, x_1, x_2, x_3 rezultă că

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_0(x-x_0)\\
\varphi_2(x) &= \frac{(x-x_1)^2}{2} + (h - A_0 - A_1)(x-x_1) + \left(\frac{h^2}{2} - h A_0\right)\\
\varphi_3(x) &= \frac{(x-x_2)^2}{2} + (2h - A_0 - A_1 - A_2)(x-x_2) +\\
&\quad + [2h^2 - h(2A_0 + A_1)]\\
\varphi_4(x) &= \frac{(x-x_3)^2}{2} + (3h - A_0 - A_1 - A_2 - A_3)(x-x_3) +\\
&\quad + \left[\frac{9h^2}{2} - h(3A_0 + 2A_1 + A_2)\right],
\end{aligned} \tag{31}$$

Ţinînd seamă de condiţiile la limită din nodul x_4, care sînt date de ecuaţiile (9), pentru $k = 5$, se deduce că

$$\begin{aligned}
\varphi_5(x) &= \frac{(x-x_4)^2}{2} + (3h - A_0 - A_1 - A_2 - A_3)(x-x_4) +\\
&\quad + [8h^2 - h(4A_0 + 3A_1 + 2A_2 + A_3)]
\end{aligned} \tag{32}$$

şi conform ecuației (30), ultimul termen se reduce la ultimul termen din $\varphi_4(x)$. Prin urmare avem

$$\varphi_4(x) = \frac{(x - x_3)^2}{2} - \frac{h}{2}(x - x_3) + \left[\frac{9h^2}{2} - h(3A_0 + 2A_1 + A_2)\right]$$

$$\varphi_5(x) = \frac{(x - x_4)^2}{2} - \frac{h}{2}(x - x_4) + \left[\frac{9h^2}{2} - h(3A_0 + 2A_1 + A_1)\right]$$

şi aşa mai departe.

Introducînd *condiția* (α) prin ecuația

$$\int_{x_3}^{x_4} \varphi_4(x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{33}$$

obținem ecuația

$$7A_0 + 5A_1 + 3A_2 + A_3 = \frac{37}{3}h \tag{34}$$

şi din identitatea

$$3A_0 + 2A_1 + A_2 = \frac{1}{2}[(7A_0 + 5A_1 + 3A_2 + A_3) - \\ - (A_0 + A_1 + A_2 + A_3)]$$

deducem în baza ecuațiilor (30) şi (34) că

$$\frac{9h^2}{2} - h(3A_0 + 2A_1 + A_2) = \frac{9h^2}{2} - \frac{h}{2}\cdot\frac{37}{3}h + \frac{h}{2}\frac{7h}{2} = \frac{h^2}{12}$$

astfel că ecuațiile (32) se reduc la

$$\left.\begin{aligned} \varphi_4(x) &= \frac{(x - x_3)^2}{2} - \frac{h}{2}(x - x_3) + \frac{h^2}{12} \\ \varphi_5(x) &= \frac{(x - x_4)^2}{2} - \frac{h}{2}(x - x_4) + \frac{h^2}{12} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

... şi aşa mai departe,

Prin urmare, *gradul de exactitate 1 al formulei* (2) *şi condiția* (α) *determină polinoamele* $\varphi_4(x)$, $\varphi_5(x)$, ...

Rămîn astfel doi parametri nedeterminați şi prin noi condiții vom determina şi polinoamele φ_1, φ_2, φ_3.

1°. Dacă se impune însă condiția

$$\varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2) = \varphi_2(x_2) - \varphi_3(x_3) \tag{36}$$

şi ca

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_3} \varphi_3(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{37}$$

se obţin ecuaţiile

$$A_2 = h,\ 6A_0 + 3A_1 + A_2 = \frac{20}{3}\, h. \tag{38}$$

Rezolvînd sistemul format de ecuaţiile (30), (34), (38) se găseşte

$$A_0 = \frac{13h}{36},\ A_1 = \frac{7h}{6},\ A_2 = h,\ A_3 = \frac{35}{36}\, h.$$

S-a obţinut astfel formula de cvadratură a lui *G. Coulmy* :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f \mathrm{d}x = \frac{13h}{36}\,[f(x_0) + f(x_n)] + \frac{7h}{6}\,[f(x_1) + f(x_{n-1})] + h\,[f(x_2) +\\ + f(x_{n-2})] + \frac{35h}{36}\,[f(x_3) + f(x_{n-3})] + h\,[f(x_4) + \ldots + f(x_{n-4})] + R.\end{aligned} \tag{39}$$

care este caracterizată prin urmare de gradul de exactitate 1, de condiţia (α) *exprimată prin formula* (33) *şi de condiţiile* (36), (37).

2°. Dacă însă pe lîngă ecuaţiile (30), (34) se adaugă condiţiile

$$\varphi_2(x_1) = \frac{11h^2}{72},\ \varphi_3(x_2) = \frac{7h^2}{72} \tag{40}$$

se obţine formula de cvadratură de tipul formulei lui G. Coulmy :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f \mathrm{d}x = \frac{25h}{72}\,[f(x_0) + f(x_n)] + \frac{29h}{24}\,[f(x_1) + f(x_{n-1})] +\\ + \frac{23h}{24}\,[f(x_2) + f(x_{n-2})] + \frac{71h}{72}\,[f(x_3) + f(x_{n-3})] +\\ + h\,[f(x_4) + \ldots + f(x_{n-4})] + R,\end{aligned} \tag{41}$$

pentru care avem evaluarea (24) a restului cu coeficientul K, dat de formula

$$K = 0{,}05197\ldots + \frac{n\sqrt{3}}{54} \tag{42}$$

cu puţin mai mic decît coeficientul din formula lui *G. Coulmy*.

Ne oprim aici cu aceste consideraţii care au avut scopul de a arăta cum se construiesc formulele de cvadratură (39) şi (13) ale lui *G. Coulmy* şi *Durand*, precum şi altele similare. Este remarcabil că s-a putut impune condiţii convenabile asupra funcţiei $\varphi(x)$ din expresia restului, care caracterizează formulele de cvadratură (13) şi (39) ale lui *Durand* şi *G. Coulmy*. Este de asemenea remarcabil că s-au putut alege aceste condiţii, astfel încît coeficientul K, din evaluarea lui $|R|$, să fie mai mic.

Astfel numărul K, corespunzător formulei (28), este mai mic decît numărul K corespunzător formulei lui *G. Coulmy*.

6. Pentru a încheia vom prezenta cîteva formule de tipul celor studiate în această lucrare, în care lipsesc în membrul al doilea valorile funcţiei $f(x)$ pe nodurile x_0 şi x_n.

1° Avem formula

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3h}{2}[f(x_1) + f(x_{n-1})] + h[f(x_2) + \ldots + f(x_{n-2})] + \\ + \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f''(x)\,\mathrm{d}x \tag{43}$$

în care funcţia $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... cu următoarele polinoame

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{(x - x_0)^2}{2} \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x - x_1)^2}{2} - \frac{h}{2}(x - x_1) + \frac{h^2}{12} \end{aligned} \tag{44}$$

. . . .

Funcţia $\varphi(x)$ este pozitivă pe intervalul (x_0, x_n) şi avem

$$|R| \leqslant \frac{5n - 6}{n^3} M_2 \frac{(b - a)^3}{12}. \tag{45}$$

2° Avem formula de cvadratură

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{23h}{12}[f(x_1) + f(x_{n-1})] + \frac{7h}{12}[f(x_2) + f(x_{n-2})] + \\ + h[f(x_3) + \ldots + f(x_{n-3})] + \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f''(x)\,\mathrm{d}x \tag{46}$$

analoagă *formulei lui Durand*, în care funcţia $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ... cu polinoamele

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{(x - x_0)^2}{2} \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x - x_1)^2}{2} - \frac{11h}{12}(x - x_1) + \frac{h^2}{2} \\ \varphi_3(x) &= \frac{(x - x_2)^2}{2} - \frac{h}{2}(x - x_2) + \frac{h^2}{12} \end{aligned} \tag{47}$$

. . . .

Avem

$$\int_{x_0}^{x_n} |\varphi(x)|\, \mathrm{d}x = \left(\frac{81 - 8\sqrt{3}}{108} + \frac{n\sqrt{3}}{54}\right) h^3.$$

Rezultă că pentru restul R din formula (46), avem

$$|R| \leqslant k\, M_2\, h^3,\ k = \frac{81 - 8\sqrt{3}}{108} + \frac{n\sqrt{3}}{54} = 0{,}6216 \ldots + \frac{n\sqrt{3}}{54}\cdot \tag{48}$$

3°. Avem formula de cvadratură

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{11h}{6} [f(x_1) + f(x_{n-1})] + \frac{3h}{4} [f(x_2) + f(x_{n-2})] +$$

$$+ \frac{11h}{12} [f(x_3) + f(x_{n-3})] + h\, [f(x_4) + \ldots + f(x_{n-4})] + \tag{49}$$

$$+ \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f''(x)\, \mathrm{d}x$$

analoagă formulei (23), unde funcția $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$, cu polinoamele

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \frac{(x - x_0)^2}{2} \\
\varphi_2(x) &= \frac{(x - x_1)^2}{2} - \frac{5h}{6}(x - x_1) + \frac{h^2}{2} \\
\varphi_3(x) &= \frac{(x - x_2)^2}{2} - \frac{7h}{12}(x - x_2) + \frac{h^2}{6} \\
\varphi_4(x) &= \frac{(x - x_3)^2}{2} - \frac{h}{2}(x - x_3) + \frac{h^2}{12}
\end{aligned} \tag{50}$$

. . . .

Avem

$$\int_{x_0}^{x_n} |\varphi(x)|\, \mathrm{d}x = \left(\frac{595 - 72\sqrt{3}}{648} + \frac{n\sqrt{3}}{54}\right) h^3$$

și prin urmare pentru restul R, al formulei (49), avem evaluarea

$$|R| \leqslant k\, M_2\, h^3,\ k = \frac{595 - 72\sqrt{3}}{648} + \frac{n\sqrt{3}}{54} = 0{,}7257 \ldots + \frac{n\sqrt{3}}{54}\cdot \tag{51}$$

4°. Avem formula de cvadratură

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{25h}{12}[f(x_1)+f(x_{n-1})] + \frac{h}{4}[f(x_2)+f(x_{n-2})] +$$

$$+\frac{7h}{6}[f(x_3)+f(x_{n-3})] + h[f(x_4)+\ldots+f(x_{n-4})] + \tag{52}$$

$$+\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f''(x)\,\mathrm{d}x,$$

unde funcţia $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$, ... cu polinoamele

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \frac{(x-x_0)^2}{2}\\
\varphi_2(x) &= \frac{(x-x_1)^2}{2} - \frac{13h}{12}(x-x_1) + \frac{h^2}{2}\\
\varphi_3(x) &= \frac{(x-x_2)^2}{2} - \frac{h}{3}(x-x_2) - \frac{h^2}{12}\\
\varphi_4(x) &= \frac{(x-x_3)^2}{2} - \frac{h}{2}(x-x_3) + \frac{h^2}{12}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{53}$$

Avem

$$\int_{x_0}^{x_n} |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x = \left(\frac{209+20\sqrt{10}-36\sqrt{3}}{324} + \frac{n\sqrt{3}}{54}\right)h^3.$$

Vom avea deci pentru restul R,

$$|R| \leqslant k\, M_2\, h^3,\ k = \frac{209+20\sqrt{10}-36\sqrt{3}}{324} + \frac{n\sqrt{3}}{54} = 0,6478\ldots + \frac{n\sqrt{3}}{54} \tag{54}$$

5°. Formula de cvadratură

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{79h}{36}[f(x_1)+f(x_{n-1})] + \frac{h}{6}[f(x_2)+f(x_{n-2})] +$$

$$+h[f(x_3)+f(x_{n-3})] + \frac{41h}{36}[f(x_4)+f(x_{n-4})] + \tag{55}$$

$$+h[f(x_5)+\ldots+f(x_{n-5})] + \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f''(x)\,\mathrm{d}x$$

corespunde la *formula lui G. Coulmy*. Funcția $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$, $[x_4, x_5]$, ... cu polinoamele

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \frac{(x-x_0)^2}{2}\\
\varphi_2(x) &= \frac{(x-x_1)^2}{2} - \frac{43h}{36}(x-x_1) + \frac{h^2}{2}\\
\varphi_3(x) &= \frac{(x-x_2)^2}{2} - \frac{13h}{36}(x-x_2) - \frac{7h^2}{36}\\
\varphi_4(x) &= \frac{(x-x_3)^2}{2} - \frac{13h}{36}(x-x_3) - \frac{h^2}{18} \qquad (56)\\
\varphi_5(x) &= \frac{(x-x_4)^2}{2} - \frac{h}{2}(x-x_4) + \frac{h^2}{12}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Avem

$$\int_{x_0}^{x_n} |\varphi(x)|\, dx = \left(\frac{553\sqrt{553}+313\sqrt{313}+25614-5184\sqrt{3}}{34992} + \frac{n\sqrt{3}}{54}\right) h^3$$

și de aici rezultă pentru rest evaluarea

$$|R| \leqslant k\, M_2\, h^3,$$

unde

$$k = \frac{553\sqrt{553}+313\sqrt{313}+25614-5184\sqrt{3}}{34992} + \frac{n\sqrt{3}}{54}$$

adică

$$k = 1,\ 00528\ \dots + \frac{n\sqrt{3}}{54}\,.$$

Primită la redacție la 6 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. G. Coulmy, *Opérations sur les courbes expérimentales*. C.R. des Séances de l'Ac. des Sciences, Paris, **246**, 1 799–1 800 (1958).
2. D. V. Ionescu, *Cîteva formule practice de cvadratură*. Comunicările Academiei R.P.R.
3. H. Mineur, *Téchniques de calcul numérique*. Librairie Polytechnique Ch. – Béranger, 1952, p. 244.

ASUPRA SCUFUNDĂRII SPAȚIULUI-TIMP REISSNER-WEYL V_4 ÎNTR-UN SPAȚIU PSEUDOEUCLIDIAN E_6

DE

STERE IANUŞ

1. În lucrarea [2] urmînd metoda matematicienilor T. Fujitani, M. Ikeda şi M. Matsumoto [1] am dat o clasificare pentru tensorul celei de-a doua forme fundamentale $b_{\alpha ij}$ a spaţiului-timp electrogravific Reissner-Weyl V_4 scufundat într-un spaţiu pseudoeuclidian E_6 şi am obţinut, pe baza acesteia, formulele de scufundare [1]) în cazul staţionar, adică în cazul cînd $b_{\alpha ij}$ sînt funcţii independente de timp. Ca şi în cazul spaţiului-timp Schwarzschild [1], problema determinării soluţiilor de scufundare în cazul general a rămas nerezolvată.

În lucrarea de faţă ne propunem să facem unele completări la lucrarea [2] şi să dăm unele proprietăţi ale scufundării spaţiului-timp Reissner-Weyl V_4 dată în [2].

Spaţiul-timp Reissner-Weyl V_4 electrogravific static cu simetrie sferică determinat de sarcina e_0 şi masa m_0 are (într-un anumit sistem de coordonate canonic K) metrica :

$$-\,\mathrm{d}s^2 \equiv g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k \equiv \frac{r^2}{r^2 - 2\,mr + e^2}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\,(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2) - \frac{r^2 - 2\,mr + e^2}{r^2}\,\mathrm{d}t^2 \tag{1}$$

$$i,\ j,\ k = 1, \ldots, 4\,; \qquad x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi,\ x^4 = t,$$

unde : t este timpul, r raza vectoare, θ şi φ unghiurile polare , $e = e_0\sqrt{k}/2c$ şi $m = m_0\,k$ sarcina electrică totală şi masa gravifică totală metrizate (k constanta gravifică einsteiniană, c viteza luminii în cîmp).

---

[1]) În [2], teorema IV, la cazurile (a) şi (b) trebuie pus h^{-1} în loc de h.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 6, P. 673–804, BUCUREŞTI, 1964.

În cazul $e = 0$ se obţine metrica lui Schwarzschild. După cum am arătat, spaţiul-timp Reissner-Weyl se poate scufunda într-un spaţiu pseudoeuclidian E_6. Am obţinut pentru scufundarea staţionară trei cazuri speciale pe care le-am denumit [1]: eliptic, hiperbolic şi parabolic. În cazul eliptic şi hiperbolic ne-am situat în ipoteza:

$$(A) \qquad m \leqslant e$$

şi am presupus în cazul eliptic că $r \geqslant a$ şi în cazul hiperbolic că $r \leqslant a$ (a fiind pentru electron de ordinul razei clasice Lorentz). În aceeaşi ipoteză (A) dacă luăm $k > e^3/4\,m^2$, scufundarea eliptică dată de noi se menţine pentru orice valoare a lui $r > 0$. În cazul hiperbolic luînd $k^2 < e^2/8\,m^3$, găsim că pentru $r > 1 + a$, signatura lui E_6 este $(+++-++)$.

2. În spaţiul E_6 pseudoeuclidian distanţa între două puncte infinit vecine $P\,(X^a)$ şi $P\,(X^a + \mathrm{d}X^a)$ este dată prin formula

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{a=1}^{6} \varepsilon_a\,(\mathrm{d}^a X^a)^2, \qquad a = 1, \ldots, 6. \tag{2}$$

Fie

$$X^a = f^a\,(x^1\, x^2\, x^3\, x^4), \quad (x^1\, x^2\, x^3\, x^4) = (r, \theta, \varphi, t) \tag{3}$$

reprezentarea parametrică a spaţiului-timp Reissner-Weyl V_4 în E_6. Să notăm cu $\bar{n}_\alpha$ $(\alpha = 5, 6)$ două normale ortogonale de-a lungul lui V_4 în E_6, astfel că notînd cu $(\overset{a}{n}_\alpha)$ componentele lor avem:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{a}) \quad \varepsilon_a\, n^a_\alpha\, n^a_\beta = e_\alpha\, \delta_{\alpha\beta} \qquad e_\alpha = \pm 1 \qquad \alpha, \beta = 5, 6 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \delta_{\alpha\alpha} = 1 \qquad \delta_{\alpha\beta} = 0 \text{ pentru } \alpha \neq \beta \\ &(\mathrm{b}) \quad \varepsilon_a \frac{\partial f^a}{\partial x^i}\, n^a_\alpha = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ε_a fiind signatura metricii lui E_6.

Ne propunem să obţinem elementul de arc $\mathrm{d}s$ al lui E_6 din metrica lui V_4.

Pentru aceasta facem transformarea lui Vrănceanu [3] (p. 254).

$$X^a = f^a + x^\alpha\, n^a_\alpha, \tag{5}$$

unde x^α $(\alpha = 5, 6)$ sînt două variabile noi.

Obţinem astfel:

$$\mathrm{d}s^2 = \varphi - 2\, x^\alpha\, \varphi_\alpha + 2\, x^\alpha\, \mathrm{d}x^\beta\, \psi_{\alpha\beta} + x^\alpha\, x^\beta\, \varphi_{\alpha\beta} + \Sigma\, e_\alpha\, (\mathrm{d}x^\alpha)^2, \tag{6}$$

unde am notat [3]:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{a}) \quad \varphi_\alpha = -\, \varepsilon_a\, \mathrm{d}f^a\, \mathrm{d}n^a_\alpha = \varepsilon_a\, n^a_\alpha\, \mathrm{d}^2 f^a = b_{\alpha ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j \\ &(\mathrm{b}) \quad \psi_{\alpha\beta} = -\, \psi_{\beta\alpha} = \varepsilon_a\, \mathrm{d}n^a_\alpha\, n^a_\beta = t_{\alpha\beta i}\, \mathrm{d}x^i \\ &(\mathrm{c}) \quad \varphi_{\alpha\beta} = \varepsilon_a\, \mathrm{d}n^a_\alpha\, \mathrm{d}n^a_\beta = c_{\alpha\beta ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j, \end{aligned} \tag{7}$$

unde φ este prima formă fundamentală a lui V_4 în E_6, φ_α formele fundamentale de-a doua categorie iar $\psi_{\alpha\beta}$ torsiunile. Coeficienţii formelor $\varphi_{\alpha\beta}$ se exprimă în funcţie de g_{ij}, $b_{\alpha ij}$ şi $t_{\alpha\beta i}$ [3] sub forma:

$$2c_{\alpha\beta ij} = g^{rs}(b_{\alpha is}\, b_{\beta jr} + b_{\alpha js}\, b_{\beta ir}) + t_{\lambda\beta i}\, t_{\lambda\alpha i} + t_{\lambda\beta j}\, t_{\lambda\alpha i}. \tag{8}$$

Noi am arătat că torsiunile spaţiului-timp Reissner-Weyl V_4 sînt nule şi atunci putem enunţa următorul rezultat:

Elementul de arc al spaţiului pseudoeuclidian E_6 de-a lungul spaţiului-timp Reissner-Weyl V_4 este dat de formula:

$$ds^2 = (g_{ij} - 2x^\alpha\, b_{\alpha ij} + 2x^\alpha\, x^\beta\, c_{\alpha\beta ij})\, dx^i\, dx^j + \Sigma\, e_\alpha\, (dx^\alpha)^2, \tag{9}$$

unde am pus:

$$2c_{\alpha\beta ij} = g^{rr}(b_{\alpha ir}\, b_{\beta jr} + b_{\alpha jr}\, b_{\alpha ir}). \tag{10}$$

Pe baza clasificării tensorilor $b_{\alpha ij}$ dată în [2] şi a formulei (10) rezultă că tensorii $c_{\alpha\beta ij}$ se clasifică în două tipuri ca şi $b_{\alpha ij}$. Avem prin urmare următorul rezultat:

Tensorii $c_{\alpha\beta ij}$ ai celei de-a treia forme fundamentale se clasifică astfel:

$$\left.\begin{aligned} &c_1: \quad c_{\alpha\beta i}^{k} = 0 \quad i \neq k \quad c_{\alpha\beta 2}^{2} = c_{\alpha\beta 3}^{3}, \quad c_{\alpha\beta 1}^{4} \neq 0 \\ &c_2: \quad c_{\alpha\beta i}^{k} = 0 \quad i \neq k \quad c_{\alpha\beta 2}^{2} = c_{\alpha\beta 3}^{3}, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

unde am pus

$$c_{\alpha\beta i}^{k} = g^{kk}\, c_{\alpha\beta ik}.$$

3. Deoarece torsiunile sînt nule, ecuaţiile netriviale ale lui Gauss şi Codazzi se scriu:

$$R_{ijkl} = \sum_{\alpha,\beta}^{5,6} e_\alpha\, (b_{\alpha ik}\, b_{\alpha jl} - b_{\alpha il}\, b_{\alpha jk}) \tag{12}$$

$$b_{\alpha ij,k} - b_{\alpha ik,j} = 0, \tag{13}$$

unde R_{ijkl} este tensorul de curbură al spaţiului-timp V_4 Reissner-Weyl iar $b_{\alpha ij,k}$, sînt derivatele covariante ale tensorilor $b_{\alpha ij}$ faţă de conexiunea lui Levi-Civita a spaţiului-timp Reissner-Weyl V_4. Calculînd componentele tensorului de curbură şi simbolii lui Christoffel obţinem:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma e_\alpha\, (b_{\alpha 4}^{4}\, b_{\alpha 1}^{1} - b_{\alpha 4}^{1}\, b_{\alpha 1}^{4}) = r^{-4}\, (2mr - 3e^2), \\ &\Sigma e_\alpha\, b_{\alpha 4}^{4}\, b_{\alpha 2}^{2} = -\, r^{-4}\, (rm - e^2), \\ &\Sigma e_\alpha\, b_{\alpha 1}^{1}\, b_{\alpha 2}^{2} = -\, r^{-4}\, (rm - e^2), \\ &\Sigma e_\alpha\, b_{\alpha 2}^{2}\, b_{\alpha 2}^{2} = r^{-4}\, (2mr - e^2), \\ &\Sigma e_\alpha\, b_{\alpha 4}^{1}\, b_{\alpha 2}^{2} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_1 b_{\alpha 4}^{4} - \partial_4 b_{\alpha 1}^{4} = (mr - e^2)\,[r\,(r^2 - 2mr + e^2)]^{-1}\,(b_{\alpha 4}^{4} - b_{\alpha 1}^{1}),\\
&\partial_1 b_{\alpha 4}^{1} - \partial_4 b_{\alpha 1}^{1} = 0,\\
&\partial_4 b_{\alpha 2}^{2} = r^{-1}\, b_{\alpha 4}^{1},\\
&\partial_1 b_{\alpha 2}^{2} = r^{-1}\,(b_{\alpha 1}^{1} - b_{\alpha 2}^{2}),\\
&\partial_2 b_{\alpha k}^{i} = \partial_3 b_{\alpha k}^{i} = 0 \qquad \text{or } i \text{ şi } k.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Pe baza ecuaţiilor (14) şi (15) putem demonstra teorema III din lucrarea [2] care afirmă că:

Tensorii $b_{\alpha i}^{k}$ sînt funcţii numai de r dacă şi numai dacă avem:

$$b_{\alpha 4}^{1} = 0. \tag{16}$$

Într-adevăr, din ultimele ecuaţii (15) rezultă că tensorul $b_{\alpha i}^{k}$ nu depinde de variabilele θ şi φ. Trebuie să mai arătăm că tensorul $b_{\alpha i}^{k}$ nu depinde de variabila t, dacă şi numai dacă $b_{\alpha 4}^{1} = 0$. Să dovedim că condiţia $b_{\alpha 4}^{1} = 0$ este suficientă. Pentru aceasta observăm că ecuaţia a doua şi ecuaţia a treia din (15) devin:

$$\partial_4 b_{\alpha 1}^{1} = 0 \text{ şi } \partial_4 b_{\alpha 2}^{2} = 0.$$

Trebuie să mai arătăm că $\partial_4 b_{\alpha 4}^{4} = 0$. Din primele două ecuaţii (14) putem scoate pe $b_{\alpha 4}^{4}$ în funcţie de $b_{\alpha 4}^{1}$ şi $b_{\alpha 2}^{2}$ care sînt funcţii numai de r, în ipoteza că determinantul

$$D \equiv b_{51}^{1} b_{62}^{2} - b_{52}^{2} b_{61}^{1} \neq 0.$$

Dacă presupunem că $D \equiv 0$, atunci din primele ecuaţii avem:

(i) $b_{52}^{2}/b_{51}^{1} = (rm - e^2)/(2mr - 3e^2)$

iar din a treia şi a patra avem:

(ii) $b_{52}^{2}/b_{51}^{1} = (2mr - e^2)/(mr - e^2)$.

Din (i) şi (ii) rezultă o contrazicere. Deci trebuie să presupunem $D \not\equiv 0$ şi în acest caz $b_{\alpha 4}^{4}$ este o funcţie numai de r. Invers, să presupunem că $\partial_4 b_{\alpha i}^{k} = 0$. Din a treia ecuaţie din (15) rezultă $b_{\alpha 4}^{1} = 0$ adică condiţia este şi necesară.

4. S-a arătat [1] că problema scufundării metricii Schwarzschild este echivalentă cu problema scufundării unui spaţiu-timp riemannian bidimensional într-un spaţiu pseudo-euclidian tridimensional. Acest rezultat obţinut de matematicienii T. Fujitani, M. Ikeda şi M. Matsumoto se extinde şi pentru alte spaţii decît cel al lui Schwarzschild şi noi urmărind demonstraţia pe care au dat-o în lucrarea [1] pas cu pas obţinem următorul rezultat:

Problema scufundării spaţiului-timp electrogravific Reissner-Weyl într-un spaţiu pseudoeuclidian E_6 este echivalentă cu scufundarea suprafeţei spaţio-temporale V_2 de metrică :

$$-(\mathrm{d}s^*)^2 \equiv \frac{2mr-e^2}{r^2-2mr+e^2}\,\mathrm{d}r^2 - \frac{r^2-2mr+e^2}{r^2}\,\mathrm{d}t^2$$

într-un spaţiu pseudoeuclidian E_3.

În cele ce urmează ne vom referi la geodezicele spaţiului-timp Reissner-Weyl.

Dacă u este parametrul pe geodezică, ecuaţiile geodezicelor se scriu astfel :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}u^2} + 2h^{-1}r^{-3}(mr-e^2)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u} = 0\\
&\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}u^2} + r^{-3}h(rm-e^2)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\right)^2 - r^{-3}h^{-1}(mr-e^2)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}\right)^2 -\\
&\qquad - rh\left[\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}\right)^2\right] = 0 \qquad (17)\\
&\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}u^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}\right)^2 = 0\\
&\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}u^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} + 2\,\mathrm{ctg}\,\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}\right) = 0
\end{aligned}$$

şi avem în plus condiţia

$$h^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2) - h\,\mathrm{d}t^2 = \varepsilon k^2\,\mathrm{d}u^2, \qquad (18)$$

unde $\varepsilon = \pm 1$, k^2 este o constantă şi $h = 1 - 2m/r + e^2/r^2$.

În cazul cînd $k^2 = 0$, obţinem geodezicele nule. Din ecuaţiile (17), (18) obţinem

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = a\,h^{-1}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}\right)^2 = a^2 + \frac{bh}{r^2} + \varepsilon k^2 h,\\
&\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}\right)^2 = -\frac{b}{r^4} - \frac{c^2}{r^4\sin^2\theta}, \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} = \frac{c}{r^2\sin^2\theta} \quad a, b, c = \text{constante.}
\end{aligned} \qquad (19)$$

Dacă facem $\theta = \text{const.}$ şi $\varphi = \text{const.}$, obţinem o suprafaţă spaţiu-timp bidimensională S. Geodezicele nule ale lui V conţinute de S se obţin foarte uşor. Într-adevăr, (18) ne dă $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = h$ iar ecuaţiile (17) ne dau

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}u^2} - \frac{2(mr-e^2)}{r^3}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\right)^2 = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}u^2} = 0.$$

Integrînd aceste ecuaţii obţinem

$$t = r + t_0 + m \ln (r^2 - 2mr + e^2) + \frac{2m^2 - e^2}{2\sqrt{m^2 - e^2}} \ln \frac{r - m - \sqrt{m^2 - e^2}}{r - m + \sqrt{m^2 - e^2}}. \tag{20}$$

Prin urmare:

Traiectoriile luminoase ale spaţiului timp Reissner-Weyl conţinute de suprafaţa spaţiu-timp S ($\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ *sînt date de ecuaţia* (20)).

Primită la redacţie la 27 martie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. T. Fujitani, M. Ikeda, M. Matsumoto, Journal of Math. Kyoto University, **I**, **II**, **III**, 43–61, 63–70, 255–269 (1961).
2. S. Ianuş, *Scufundarea metricii Reissner-Weyl*. Comunicările Acad. R.P.R., *10* (1963).
3. Gh. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*, vol. I, E.D.P., Bucureşti, 1962.

SPAŢII DE $n-3$ ORI SUBPROIECTIVE CU GRUP MAXIM DE MIŞCĂRI

DE

MARIAN ŢARINĂ

După definiţia lui F. Kagan [1] un spaţiu cu conexiune afină A_n este de k ori proiectiv, dacă există un sistem de coordonate în care k dintre cele $n-1$ ecuaţii finite ale curbelor autoparalele sînt liniare. Cu alte cuvinte, în sistemul de coordonate respectiv curbele autoparalele sînt situate în varietăţi liniare cu $n-k$ dimensiuni. Dacă aceste varietăţi liniare conţin o varietate liniară E_{n-k-2} cu $n-k-2$ dimensiuni, spaţiul se numeşte subproiectiv şi se notează P_n^k.

Se ştie că spaţiile de $n-2$ ori subproiective apar ca spaţii de mobilitate maximă, consecutive spaţiilor euclidiene şi celor proiectiv euclidiene. Astfel au fost studiate de către acad. Gh. Vrănceanu [3], [5] spaţiile A_n în care cel puţin una dintre componentele tensorului de curbură γ_{bcd}^a pe un sistem dat de congruenţe este diferită de zero pentru un anumit indice $a \neq b, c, d$. Aceste spaţii nu sînt proiectiv euclidiene şi admit grupuri maxime de mişcări cu n^2-2n+5 parametri, dacă γ_{bcd}^a sînt toate nule pentru indicii diferiţi b, c, d, respectiv cu n^2-3n+8 parametri în cazul în care componentele de mai sus nu sînt toate nule.

Maximele precedente sînt atinse pentru anumite spaţii de $n-2$ ori subproiective cu vector de conexiune nul. Au fost considerate de asemenea de către acad. Gh. Vrănceanu [4], [5] şi alte spaţii de $n-2$ ori subproiective cu grup maxim de mişcări.

Ne vom ocupa în cele ce urmează de problema mişcărilor spaţiilor de $n-3$ ori subproiective, folosind metodele acad. Gh. Vrănceanu, cu ajutorul cărora se pot da unele noi determinări de maxime.

Fiind dat un spaţiu cu conexiune afină A_n, definit într-un anumit sistem de coordonate x^i prin coeficienţii de conexiune Γ_{jk}^r, se numeşte mişcare a acestui spaţiu o transformare de variabile

$$x'^i = x'^i(x^1, \ldots, x^n)$$

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 6, P. 637–804, BUCUREŞTI, 1964.

care satisface condiţiile

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j\,\partial x^k} = \Gamma'^i_{rs}\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^r_{jk}\frac{\partial x'^i}{\partial x^r},$$

unde Γ'^r_{jk} sînt aceleaşi funcţii de x'^i cum sînt Γ^r_{jk} de x^i.

Într-un sistem de coordonate proiective neomogene, un spaţiu A_n de $n-3$ ori subproiectiv este determinat prin coeficienţii Γ^i_{rs} ($i = 1, 2$) şi prin funcţiile φ_r astfel ca

$$\Gamma^\alpha_{rs} = -\,\delta^\alpha_r\varphi_s - \delta^\alpha_s\varphi_r, \quad (\alpha = 3, \ldots, n) \tag{1}$$

Transformările de variabile care invariază formulele (1) sînt

$$\begin{aligned} x'^i &= x'^i(x^1, \ldots, x^n), & (i = 1, 2),\\ x'^\alpha &= a^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha, & (\alpha, \beta = 3, \ldots, n), \end{aligned} \tag{2}$$

unde x'^i sînt funcţii arbitrare de x^i, iar a^α_β, a^α sînt constante.

Vom considera transformări de variabile în raport cu care φ_r se transformă ca un vector covariant. De aceea spaţiile găsite vor admite forma invariantă $\varphi_r\,\mathrm{d}x^r$. În baza formulelor (2), legea de transformare a vectorului φ_r ne dă relaţiile

$$\varphi'_i\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \varphi_j, \quad \varphi'_i\frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha} + a^\beta_\alpha\varphi'_\beta = \varphi_\alpha. \tag{3}$$

În ceea ce priveşte coeficienţii de conexiune Γ^i_{rs}, din legea lor de transformare în raport cu formulele (2) se deduc relaţiile

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j\,\partial x^k} = \Gamma'^i_{hl}\frac{\partial x'^h}{\partial x^j}\frac{\partial x'^l}{\partial x^k} - \Gamma^h_{jk}\frac{\partial x'^i}{\partial x^h} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j\,\partial x^\alpha} = \Gamma'^i_{hl}\frac{\partial x'^h}{\partial x^j}\frac{\partial x'^l}{\partial x^\alpha} + \Gamma'^i_{h\beta}\frac{\partial x'^h}{\partial x^j}\,a^\beta_\alpha - \Gamma^h_{j\alpha}\frac{\partial x'^i}{\partial x^h} + \varphi_j\frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta} = {}& \Gamma'^i_{hl}\frac{\partial x'^h}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^l}{\partial x^\beta} + \Gamma'^i_{h\gamma}\frac{\partial x'^h}{\partial x^\alpha}\,a^\gamma_\beta + \Gamma'^i_{\gamma l}\frac{\partial x'^l}{\partial x^\beta}\,a^\gamma_\alpha + \Gamma'^i_{\gamma\delta}a^\gamma_\alpha\,a^\delta_\beta - \\ & - \Gamma^h_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^i}{\partial x^h} + \varphi_\beta\frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha} + \varphi_\alpha\frac{\partial x'^i}{\partial x^\beta}. \end{aligned} \tag{6}$$

Din ecuaţiile (3) rezultă că primele două componente φ_i ($i = 1, 2$) ale vectorului de conexiune în raport cu formulele (2) se transformă ele înşile ca un vector covariant în spaţiul variabilelor x^1, x^2. Vom nota acest vector cu $\bar{\varphi}_i$. Vectorul $\bar{\varphi}_i$ depinde parametric de variabilele x^α, dar anularea lui este un fapt invariant. Dacă $\bar{\varphi}_i = 0$, putem spune că vectorul de conexiune φ_r este tangent spaţiului euclidian E_{n-2} (x^3, $x^4, \ldots, x^n$) ale cărui drepte corespund ecuaţiilor liniare ale curbelor autoparalele din spaţiul subproiectiv.

Se mai observă că formulele (4) reprezintă tocmai legea de transformare a unei conexiuni afine Γ^i_{jk} $(i, j, k = 1, 2)$ în variabilele x^1, x^2 pe care o notăm cu $\bar{\Gamma}^i_{jk}$. Astfel operaţia de derivare covariantă a tensorilor din x_2 în raport cu conexiunea Γ^i_{jk} ne dă expresii invariante ale spaţiului considerat faţă de transformările (2).

În cele ce urmează va trebui să distingem spaţiile de $n - 3$ ori subproiective cu vector de conexiune nul, de cele care au acest vector diferit de zero.

A. SPAŢII P_n^{n-3} CU VECTOR DE CONEXIUNE NUL

În acest caz avînd $\varphi_r = 0$, ecuaţiile (3) sînt verificate identic. Pentru determinarea grupului de mişcări al unui astfel de spaţiu dat prin coeficienţii săi de conexiune, rămîn doar ecuaţiile (4), (5), (6).

Vom determina maxime ale ordinului grupului de mişcare plecînd de la consideraţii privitoare la componentele tensorului de curbură pe un sistem de congruenţe dat.

Se ştie că o mişcare a spaţiului induce o transformare de congruenţe

$$ds'^a = c^a_b \, ds^b. \tag{7}$$

Grupul de mişcări al spaţiului se obţine integrînd un sistem de ecuaţii cu diferenţiale totale [3] a cărui soluţie depinde de cel mult $n^2 + n$ constante arbitrare şi care posedă ca relaţii în termeni finiţi formulele de transformare ale componentelor tensorului de curbură şi de torsiune

$$\gamma'^a_{rst} \, c^r_b \, c^s_c \, c^t_d = \gamma^r_{bcd} \, c^a_r \tag{8}$$

$$t'^a_{rs} \, c^r_b \, c^s_c = t^r_{bc} \, c^a_r \tag{9}$$

precum şi cele corespunzătoare tensorilor derivaţi succesivi.

Dacă dintre aceste relaţii r sînt independente, ceea ce permite rezolvarea lor în raport cu r dintre funcţiile c^a_b, atunci spaţiul considerat admite un grup de mişcări cu $n^2 + n - r$ parametri.

Spaţii cu componente γ^1_{334}, γ^2_{443} *nenule.* Să presupunem că spaţiul posedă un sistem de congruenţe în care există cel puţin două componente nenule ale tensorului de curbură $\gamma^{a_1}_{bcd} \neq 0$, $\gamma^{a_2}_{efg} \neq 0$ $(a_1 \neq a_2)$, indicii a_1, a_2 fiind diferiţi de indicii inferiori b, c, d, e, f, g. Anume, se pot alege convenabil notaţiile ca $\gamma^1_{334} = 0$ iar apoi prin transformarea de congruenţe

$$\begin{aligned}
ds^1 &= c^1_1 \, ds^1 \\
ds^2 &= c^2_1 \, ds^1 + ds^2 \\
ds^3 &= c^3_1 \, ds^1 + ds^3 + c^3_4 \, ds^4 + c^3_k \, ds^k \\
ds^4 &= c^4_1 \, ds^1 + ds^4 + c^4_k \, ds^k \\
ds^k &= c^k_1 \, ds^1 + ds^k, \qquad k > 4
\end{aligned} \tag{10}$$

folosind coeficienţii respectivi, se pot anula unele dintre componente [5] obţinînd formulele

$$\gamma^1_{334} = 1,\ \gamma^\alpha_{334} = 0,\ \alpha \neq 1$$

$$\gamma^1_{434} = \gamma^1_{k34} = \gamma^1_{33k} = 0,\ k \neq 1,\ 3,\ 4. \qquad (11)$$

Avem deci $\gamma^2_{334} = 0$ şi atunci din relaţia

$$\gamma^2_{343} + \gamma^2_{343} + \gamma^2_{433} = 0$$

urmează $\gamma^2_{343} = 0$.

Să presupunem că în acest sistem de congruenţe există o componentă nenulă de forma $\gamma^2_{bbc} \neq 0$. Dacă indicii b, c sînt egali cu 3 sau 4, atunci aceasta este γ^2_{443}. Mai mult, admitem că aceasta este singura componentă nenulă de indice $a = 2$ şi că avem $\gamma^2_{443} = 1$.

Considerînd atunci formulele (8) pentru indicii $(a\,3\,3\,4)$ respectiv $(a\,4\,4\,3)$ obţinem relaţiile

$$\gamma'^a_{rst}\, c^r_3\, c^s_3\, c^t_4 = \gamma^1_{334}\, c^a_1 = c^a_1,$$

$$\gamma'^a_{rst}\, c^r_4\, c^s_4\, c^t_3 = \gamma^2_{443}\, c^a_2 = c^a_2. \qquad (12)$$

Aceste relaţii ne arată că ecuaţiile (8) se pot rezolva în raport cu coeficienţii c^a_1, c^a_2 $(a = 1, 2, \ldots, n)$.

Vom considera în continuare ecuaţiile $(1\,k\,34)$, $(133\,k)$, $k \neq 1$, 2, 3, 4 care se scriu

$$c^3_k\, \gamma'^1_{3fg}\, c^f_3\, c^g_4 + c^4_k\, \gamma'^1_{4fg}\, c^f_3\, c^g_4 + c^s_k\, \gamma'^1_{sfg}\, c^f_2\, c^g_3 - \gamma^\alpha_{k34}\, c^1_\alpha = 0$$

$$c^3_k\, \gamma'^1_{ef3}\, c^e_3\, c^f_3 + c^4_k\, \gamma'^1_{ef4}\, c^e_3\, c^f_3 + c^s_k\, \gamma'^1_{efs}\, c^e_3\, c^f_3 - \gamma^\alpha_{33k}\, c^1_\alpha = 0 \qquad (13)$$

şi formează un sistem de ecuaţii liniare în necunoscutele c^3_k, c^4_k.

Determinantul sistemului precedent, pentru transformarea identică

$$x'^i = x^i,\ c^\lambda_\mu = \delta^\lambda_\mu, \qquad (14)$$

este diferit de zero (egal cu 1), prin urmare acest sistem se poate rezolva în raport cu c^3_k, c^4_k, cel puţin într-o anumită vecinătate a identităţii. Soluţia se scrie

$$c^\rho_k = F^\rho_k\,(c^1_3, \ldots, c^1_n, \ldots, c^n_3, \ldots, c^n_n)$$

explicitînd astfel încă $2\,(n - 4)$ coeficienţi.

Considerăm apoi ecuaţiile $(2\,k\,4\,3)$, $(2\,4\,4\,k)$, de asemenea, pentru $k \neq 1, 2, 3, 4$. Ele scriu

$$c^3_k\, \gamma'^2_{3fg}\, c^f_4\, c^g_3 + c^4_k\, \gamma'^2_{4fg}\, c^f_4\, c^g_3 + c^s_k\, \gamma'^2_{sfg}\, c^f_4\, c^g_3 - \gamma^s_{k43}\, c^2_s = 0, \qquad (15)$$

$$c^3_k\, \gamma'^2_{ef3}\, c^e_4\, c^f_4 + c^4_k\, \gamma'^2_{ef4}\, c^e_4\, c^f_4 + c^s_k\, \gamma'^2_{efs}\, c^e_4\, c^f_4 - \gamma'^s_{44k}\, c^2_s = 0.$$

Ecuaţiile de mai sus formează un alt sistem liniar în variabilele c^3_k, c^4_k, al cărui determinant este tot diferit de zero pentru transformarea identică (14), fiind egal cu -1, şi obţinem prin rezolvare

$$c^\rho_k = \overline{F}^\rho_k\,(c^1_3, \ldots, c^1_n, \ldots, c^n_3, \ldots, c^n_n).$$

În mod necesar soluţiile sistemelor considerate trebuie să conducă la relaţii compatibile între coeficienţii c^a_b, de aceea se pun şi condiţiile

$$F^\rho_k = \overline{F}^\rho_k, \quad \rho = 3,4 \tag{16}$$

care, în cazul în care sînt independente, mai impun condiţii coeficienţilor c^a_b, limitînd numărul de parametri ai grupului.

Vom considera însă cazul cînd ecuaţiile (16) sînt identic verificate, deci cînd relaţiile (18) se pot rezolva în raport cu $4\,n - 8$ parametri şi anume c^a_1, c^a_2, c^3_k, c^4_k $(k > 4)$. Atunci spaţiul posedă un grup de mişcări cu cel mult $n^2 + n - (4n - 8) = n^2 - 3n + 8$ parametri.

Maximul precedent este atins de spaţiul care are toate componentele conexiunii nule afară de

$$\Gamma^1_{33} = x^4, \qquad \Gamma^2_{44} = x^3. \tag{17}$$

Singurele componente nenule ale tensorului de curbură pentru spaţiul (17) sînt

$$\Gamma^1_{334} = -\,\Gamma^1_{343} = 1, \qquad \Gamma^2_{443} = -\,\Gamma^2_{434} = 1. \tag{18}$$

Spaţiul (17) este, evident, un spaţiu de $n - 3$ ori subproiectiv cu vector de conexiune nul. De aceea grupul de mişcări al acestui spaţiu va fi de forma

$$\begin{aligned} x'^1 &= \varphi\,(x^1, \ldots, x^n), \\ x'^2 &= \psi\,(x^1, \ldots, x^n), \\ x'^\alpha &= a^\alpha_\beta\, x^\beta + a^\alpha, \qquad \alpha, \beta = 3, \ldots, n. \end{aligned} \tag{19}$$

Determinăm grupul de mişcare presupunînd că în variabilele x'^i conexiunea spaţiului (17) are singurele componente nenule

$$\Gamma'^1_{33} = x'^4 \qquad \Gamma'^2_{44} = x'^1$$

Din formulele (4), (5), (6) corespunzătoare indicelui $i = 1$ rezultă că funcţia φ satisface ecuaţiile

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i\, \partial xj} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i\, \partial x^\alpha} = 0, \quad (i,j = 1,2 \;\; \alpha > 2, \; \lambda > 4),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x^3)^2} = (a^3_3)^2\, x'^4 - \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}\, x^4, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^3 \partial x^4} = a^3_3\, a^3_4\, x'^4\,, \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x^4)^2} = (a^3_4)^2\, x'^4 - x^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\alpha\, \partial x^\lambda} = a^3_\alpha\, a^3_\lambda\, x'^4 \cdot$$

Din aceleaşi formule scrise pentru indicele $i = 2$ se obţin ecuaţii analoage pentru funcţia ψ, pe care le putem obţine din (20) schimbînd indicii în perechile 1, 2 şi 3, 4.

Sistemul de ecuații (13) în cazul considerat are soluția

$$a_\lambda^3 = a_\lambda^4 = 0.$$

Aceleași relații se obțin și din sistemul (15), astfel că relațiile (16) sînt identic verificate. Atunci din ecuațiile (20) și cele analoage rezultă că funcțiile φ și ψ sînt de forma

$$\begin{aligned} \varphi &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + f(x^\alpha), \\ \psi &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + g(x^\alpha), \end{aligned} \tag{21}$$

unde a_j^i sînt constante iar $f(x^\alpha)$ și $g(x^\alpha)$ sînt funcții de x^α în care variabilele x^λ apar liniar. În ceea ce privește variabilele x^3, x^4, ele impun atunci următoarele condiții funcției f:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^3)^2} &= (a_3^3)^2 a_3^4 x^3 + [(a_3^3)^2 a_4^4 - a_1^1] x^4 + (a_3^3)^2 a^4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^3 \partial x^4} &= a_3^3 a_4^3 (a_3^4 x^3 + a_4^4 x^4 + a^4) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial (x^4)^2} &= [(a_4^3)^2 a_3^4 - a_2^1] x^3 + (a_4^3)^2 a_4^4 x^4 + (a_4^3)^2 a^4. \end{aligned} \tag{22}$$

Observăm apoi că ecuațiile (1 3 3 4), (1 4 4 3), în cazul spațiului (17), se scriu

$$\begin{aligned} a_1^1 &= (a_3^3)^2 a_4^4 - a_3^3 a_4^3 a_3^4, \\ a_2^1 &= (a_4^3)^2 a_3^4 - a_3^3 a_4^3 a_4^4. \end{aligned}$$

Ținînd seama de aceste relații în ecuațiile (22), avînd în vedere și formulele (21), se obține sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^3)^2} &= (a_3^3)^2 a_3^4 x^3 + a_3^3 a_4^3 a_3^4 x^4 + a^4 (a_3^3)^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^3 \partial x^4} &= a_3^3 a_4^3 a_3^4 x^3 + a_3^3 a_4^3 a_4^4 x^4 + a_3^3 a_4^3 a^4, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial (x^4)^2} &= a_3^3 a_4^3 a_4^4 x^3 + (a_4^3)^2 a_4^4 x^4 + a^4 (a_4^3)^2. \end{aligned} \tag{23}$$

Din acesta rezultă prin integrare

$$\begin{aligned} f = {} & (a_3^3)^2 a_3^4 \frac{(x^3)^3}{6} + a_3^3 a_4^3 a_3^4 \frac{(x^3)^2}{2} x^4 + a_3^3 a_4^3 a_4^4 \frac{(x^4)^2}{2} x^3 + \\ & + (a_4^3)^2 a_4^4 \frac{(x^4)^3}{6} + \frac{a^4}{2} (a_3^3 x^3 + a_4^3 x^4)^2 + a_\alpha^1 x^\alpha + a^1. \end{aligned} \tag{24}$$

Calcule analoage se dezvoltă şi pentru funcţia g. Rezultatul se obţine direct permutînd mai sus indicii în perechile 1, 2 şi 3, 4, aşa încît avem

$$g = (a_3^3)^2 (a_3^4)^2 \frac{(x^3)^3}{6} + a_3^3\, a_4^4\, a_3^4 \frac{(x^3)^2}{2} x^4 + a_4^3\, a_3^4\, a_4^4\, x^3 \frac{(x^4)^2}{2} +$$

$$+ a_4^3 (a_4^4)^2 \frac{(x^4)^3}{6} + \frac{a^3}{2} (a_3^4\, x^3 + a_4^4\, x^4)^2 + a_\alpha^2\, x^\alpha + a^2. \qquad (25)$$

Astfel spaţiul (17) admite grupul de mişcări dat de formulele

$$\begin{aligned} x'^1 &= [(a_3^3)^2 a_4^4 - a_3^3\, a_4^3\, a_3^4]\, x^1 + [(a_4^3)^2 a_3^4 - a_3^3\, a_4^3\, a_4^4]\, x^2 + f, \\ x'^2 &= [(a_3^4)^2 a_4^3 - a_3^3\, a_3^4\, a_4^4]\, x^1 + [(a_4^4)^2 a_3^3 - a_4^3\, a_3^4\, a_4^4]\, x^2 + g, \qquad (26) \\ x'^3 &= a_3^3\, x^3 + a_4^3\, x^4 + a^3,\ x'^4 = a_3^4\, x^3 + a_4^4\, x^4 + a^4, \\ x'^\lambda &= a_\alpha^\lambda\, x^\alpha + a^\lambda,\ \alpha \geqslant 3,\ \lambda > 4, \end{aligned}$$

care posedă $n^2 - 3n + 8$ parametri şi anume a^1, a^2, a^3, a^4, a_3^3, a_4^3, a_3^4, a_4^4, a_α^1, a_α^2, a_α^λ, a^λ.

În ceea ce priveşte caracterul subproiectiv al acestui spaţiu, se poate afirma cu certitudine că el este un spaţiu de $n - 3$ ori subproiectiv propriu-zis, deoarece avem

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{334}^1 & \Gamma_{334}^2 \\ \Gamma_{443}^1 & \Gamma_{443}^2 \end{vmatrix} = 1$$

ceea ce, după cum se ştie [5], constituie o condiţie invariantă suficientă pentru ca spaţiul să nu fie de $n - 2$ ori subproiectiv.

B. SPAŢII P_n^{n-3} CU VECTOR DE CONEXIUNE NENUL

În acest caz, urmează să distingem din nou două situaţii, după cum vectorul $\overline{\varphi}_i$ al spaţiului X_2 (x^1, x^2) este nul sau diferit de zero.

Spaţii cu vector $\overline{\varphi}_i \neq 0$. Să presupunem mai întîi că forma Pfaff asociată vectorului $\overline{\varphi}_i$

$$\varphi_1\, dx^1 + \varphi_2\, dx^2 \qquad (27)$$

este o diferenţială totală exactă. Prin transformări de tipul (2) o putem aduce la forma dx^1, ceea ce revine la a lua $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 0$. Transformările de variabile care invariază această formă sînt

$$\begin{aligned} x'^1 &= x^1 + \psi\,(x^3, \ldots, x^n), \\ x'^2 &= x'^2\,(x^1, \ldots, x^n), \qquad (28) \\ x'^\alpha &= a_\beta^\alpha\, x^\beta + a^\alpha. \end{aligned}$$

În raport cu aceste transformări, celelalte formule (3) devin

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^{\alpha}} + a_{\alpha}^{\beta} \varphi_{\beta}' = \varphi_{\alpha} \tag{29}$$

formînd un sistem de ecuaţii pe care trebuie să-l satisfacă funcţia ψ.

Ecuaţiile (4) pentru indicii $i = 1$, $j = k = 2$, faţă de transformările (28), sînt

$$\Gamma_{22}^{\prime 1} \left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^2} \right)^2 = \Gamma_{22}^{1}$$

ceea ce înseamnează că Γ_{22}^{1} formează un invariant relativ în raport cu acestea. Pentru ca spaţiul să posede un grup maxim de mişcări trebuie să avem $\Gamma_{22}^{1} = 0$. Or, în acest caz rezultă tot din ecuaţiile (4) că Γ_{12}^{1} este un invariant relativ. Impunînd de asemenea condiţia $\Gamma_{12}^{1} = 0$, rezultă, în sfîrşit, că $\Gamma_{11}^{1} = I$ este un invariant absolut faţă de transformările (28).

Pe de altă parte, din ecuaţiile (5) scrise pentru indicii $i = 1$, $j = 2$ deducem

$$\Gamma_{2\beta}^{\prime 1} \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} a_{\alpha}^{\beta} = \Gamma_{2\alpha}^{1}$$

deci $\Gamma_{2\alpha}^{1}$ formează expresii care se transformă invariant şi sînt legate atît de spaţiul X_2 (x^1, x^2) cît şi de spaţiul E_{n-2} $(x^3, x^4, \ldots, x^n)$. Pentru a găsi spaţii de mobilitate maximă, vom lua $\Gamma_{2\alpha}^{1} = 0$.

Atunci, ţinînd seama de relaţiile (29), celelalte ecuaţii (5) devin

$$[\Gamma_{1\beta}^{\prime 1} - (1 + I)\, \varphi_{\beta}'] \, a_{\alpha}^{\beta} = \Gamma_{1\alpha}^{1} - (1 + I) \varphi_{\alpha} \tag{30}$$

şi astfel expresiile

$$V_{\alpha} = \Gamma_{1\alpha}^{1} - (1 + I)\, \varphi_{\alpha} \tag{31}$$

formează un vector covariant în spaţiul E_{n-2} $(x^3, x^4, \ldots, x^n)$.

Unele dintre condiţiile de integrabilitate ale ecuaţiilor (29) se scriu

$$\frac{\partial \varphi_{\beta}'}{\partial x'^2} \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} a_{\alpha}^{\beta} = \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x^2}$$

astfel că şi aceste relaţii restrîng grupul de mişcări al spaţiului afară de cazul cînd avem

$$\frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x^2} = 0.$$

În acest ultim caz, celelalte condiţii de integrabilitate ale ecuaţiilor (29) sînt

$$\frac{\partial \varphi_\beta'}{\partial x'^1} a_\alpha^\beta = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^1},$$

$$\left(a_\alpha^\gamma \frac{\partial \psi}{\partial x^\beta} - a_\beta^\gamma \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}\right) \frac{\partial \varphi_\gamma'}{\partial x'^1} + \left(\frac{\partial \varphi_\gamma'}{\partial x'^\delta} - \frac{\partial \varphi_\delta'}{\partial x'^\gamma}\right) a_\alpha^\gamma a_\beta^\delta = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x^\alpha}. \tag{32}$$

Din primele ecuaţii (32) rezultă că $\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^1}$ este un vector covariant al spaţiului E_{n-2}. Celelalte relaţii (31) se scriu şi ele sub formă invariantă, ţinînd seama de primele ecuaţii şi de ecuaţiile (29), anume

$$\Phi'_{\gamma\delta} a_\alpha^\gamma a_\beta^\delta = \Phi_{\alpha\beta},$$

unde s-a notat

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x^\alpha} + \varphi_\alpha \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x^1} - \varphi_\beta \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^1}, \quad \alpha, \beta = 3, \ldots, n. \tag{33}$$

Astfel sistemul de funcţii $\Phi_{\alpha\beta}$ formează un tensor covariant al spaţiului E_{n-2}.

Din formulele (6), scrise pentru indicele $i = 1$, în baza ecuaţiilor (29), (30), se deduc relaţiile

$$A'_{\gamma\delta} a_\alpha^\gamma a_\beta^\delta = A_{\alpha\beta},$$

unde s-a notat

$$A_{\alpha\beta} = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^1} \varphi_\beta + I \varphi_\alpha \varphi_\beta - \Gamma_{1\beta}^1 \varphi_\alpha - \Gamma_{1\alpha}^1 \varphi_\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^1. \tag{34}$$

Formulele găsite ne arată că sistemul $A_{\alpha\beta}$ formează de asemenea un tensor al spaţiului E_{n-2}. De altfel avem

$$\Phi_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}.$$

Astfel, spaţiul subproiectiv considerat posedă invariantul absolut $I = \Gamma_{11}^1$, vectorii covarianţi V_α, $\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^1}$ şi tensorul $\Phi_{\alpha\beta}$. Toţi ceilalţi invarianţi ai spaţiului se obţin din aceştia prin operaţii de derivare.

Tensorilor de mai sus li se asociază ca de obicei forme diferenţiale invariante şi spaţiul admite un grup maxim de mişcări dacă aceste forme se exprimă cu ajutorul aceleiaşi diferenţiale totale exacte.

Să considerăm mai întîi cazul în care condiţiile de integrabilitate ale ecuaţiilor (29) sînt identic satisfăcute, adică avem

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^1} = 0, \quad \Phi_{\alpha\beta} = 0.$$

În acest caz se poate lua $\varphi_\alpha=0$ şi atunci din relaţiile (29) rezultă $\psi = a^1 = \text{const.}$, deci spaţiul admite forma invariantă $\mathrm{d}x^1$.

Considerăm spaţiul care are singurele componente nenule ale conexiunii

$$\Gamma^1_{11} = I\,(\text{const.}), \quad \Gamma^\alpha_{\alpha 1} = -1, \tag{35}$$

unde indicele α nu exprimă însumare. Ecuaţiile (4), (5), (6) scrise pentru indicele $i = 2$ ne dau atunci condiţiile

$$\frac{\partial^2 x'^2}{\partial (x')^2} = -I\frac{\partial x'^2}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial^2 x'^2}{\partial x^1\,\partial x^\alpha} = \frac{\partial x'^2}{\partial x^\alpha},$$

$$\frac{\partial^2 x'^2}{\partial (x^2)^2} = \frac{\partial^2 x'^2}{\partial x^2\,\partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 x'^2}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta} = 0.$$

De aici deducem că grupul spaţiului (35) este dat de formulele

$$\begin{aligned} x'^1 &= x^1 + a^1 \\ x'^2 &= a^2_2\, x^2 = c\,\mathrm{e}^{-Ix^1} + a^2 \\ x'^\alpha &= a^\alpha_\beta\, x^\beta + a^\alpha, \quad \alpha,\beta = 3,\ldots,n \end{aligned} \tag{36}$$

şi posedă $n^2 - 3n + 6$ parametri, anume a^1, a^2, a^2_2, a^α, a^α_β, c.

Dacă vectorul $\dfrac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^1}$ nu este nul, presupunem că este constant şi redus la forma canonică $(1,0,\ldots,0)$, deci considerăm $\varphi_3 = x^1$, $\varphi_\lambda = 0$ $\lambda > 3$. Pentru ca forma $V_\alpha\,\mathrm{d}x^\alpha$ să se exprime cu diferenţiala $\mathrm{d}x^3$, vectorul de conexiune al spaţiului fiind $(1, 0, x^1, 0,\ldots,0)$, presupunem că singurele componente nenule ale conexiunii spaţiului sînt

$$\Gamma^1_{11} = I\,(\text{const.}), \quad \Gamma^1_{13} = (1 + I)\,x^1 + h, \quad \Gamma^3_{33} = -2x^1,$$

$$\Gamma^\alpha_{\alpha 1} = -1, \quad \Gamma^\lambda_{\lambda 3} = -x^1 \quad h = \text{const.} \tag{37}$$

Din formulele (29) rezultă condiţiile

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^3} + a^3_3\,\psi + \left[x^1 + \frac{h}{1+I}\right](a^3_3 - 1) = 0, \quad I \neq -1,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^\lambda} + a^3_\lambda\,\psi + \left(x^1 + \frac{h}{1+I}\right)a^3_\lambda = 0, \quad \lambda > 3.$$

Deoarece funcţia ψ nu depinde de variabila x^1, avem în mod necesar $a^3_3 = 1$, $a^3_\lambda = 0$, prin urmare

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x^3} + \psi = 0$$

şi astfel

$$\psi = c\,\mathrm{e}^{-x^3}.$$

Ecuaţiile (6) sînt verificate pentru $i = 1$, $\alpha = 3$, $\beta > 3$, iar pentru $i = 1$, $\alpha = 3$, $\beta = 3$ obţinem relaţia

$$c\,\mathrm{e}^{-x^3} = I\,c^2\,\mathrm{e}^{-2x^3} - 2c\,(I + 2)\,\mathrm{e}^{-x^3}\,x^1 - 2\,(1 + I)\,c^2\,\mathrm{e}^{-2x^3} - 2h\,c\,\mathrm{e}^{-x^3}$$

care este satisfăcută identic pentru $c = 0$. Dacă $c \neq 0$, relaţia este satisfăcută pentru $I = -2$, $h = -1/2$.

În ceea ce priveşte funcţia $x'^2(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, ea satisface condiţiile

$$\frac{\partial^2 x'^2}{\partial (x')^2} = -I\frac{\partial x'^2}{\partial x^1}, \frac{\partial^2 x'^2}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial^2 x'^2}{\partial (x^2)^2} = 0, \frac{\partial^2 x'^2}{\partial x^1 \partial x^3} = -[(1 + I)x^1 + h]\frac{\partial x'^2}{\partial x^1}$$

$$\frac{\partial^2 x'^2}{\partial x^1\,\partial x^\alpha} = \frac{\partial x'^2}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^2 x'^2}{\partial x^2\,\partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 x'^2}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta} = 0$$

din care rezultă

$$x'^2 = a_2^2\,x^2 + a^2.$$

Astfel spaţiul (37) pentru $I = -2$, $h = -\dfrac{1}{2}$ admite grupul de mişcări

$$\begin{aligned} &x'^1 = x^1 + c\,\mathrm{e}^{-x^3} \\ &x'^2 = a_2^2\,x^2 + a^2, \qquad x'^3 = x^3 + a^3 \\ &x'^\lambda = a_\beta^\lambda\,x^\beta + a^\lambda, \qquad \lambda = 4, \ldots, n, \end{aligned} \tag{38}$$

grup care posedă $n^2 - 4n + 7$ parametri şi anume a^2, a_2^2, a^3, a_β^λ, a^λ, c.

Spaţiul (37) admite forma invariantă $\mathrm{d}x^1 + x^1\mathrm{d}x^3$.

Să presupunem acum că forma (27) nu este diferenţială totală exactă. Atunci, printr-o transformare de variabile (2), ea se poate aduce la forma canonică $x^2\,\mathrm{d}x^1$, deci se poate lua $\varphi_1 = x^2$, $\varphi_2 = 0$. Spaţiul posedă un grup maxim de mişcări dacă posedă forma de mai sus ca formă invariantă. Grupul transformărilor (2) care invariază această formă canonică este

$$\begin{aligned} &x'^1 = \varphi(x^1) \quad x'^2 = \frac{x^2}{\varphi'(x^1)}, \\ &x'^\alpha = a_\beta^\alpha\,x^\beta + a^\alpha, \end{aligned} \tag{39}$$

unde φ este o funcţie arbitrară de x^1.

În raport cu acest grup, ecuaţiile (28) devin

$$\varphi_\alpha = a_\alpha^\beta \varphi_\beta' \tag{40}$$

deci componentele φ_α se transformă ca un vector covariant $\bar{\varphi}_\alpha$ al spaţiului E_{n-2}.

Dacă vectorul $\bar{\varphi}_\alpha$ este nul, $\varphi_\alpha = 0$, ecuaţiile (4), (5), (6) transcrise pentru grupul (39) restrîng mobilitatea spaţiului, în afară de cazul cînd avem $\Gamma^i_{rs} = 0$ $(i = 1, 2)$. De aceea considerăm spațiul care are singurele componente nenule ale conexiunii

$$\Gamma^\alpha_{1\alpha} = - x^2, \tag{41}$$

unde nu se însumează în raport cu indicele α. În acest caz se află

$$\varphi = ax^1 + b$$

iar spațiul (40) posedă grupul de mișcări

$$x'^1 = ax^1 + b, \quad x'^2 = \frac{x^2}{a} \tag{42}$$

$$x'^\alpha = a^\alpha_\beta \, x^\beta + a^\alpha$$

care are $n^2 - 3n + 4$ parametri și anume a^α_β, a^α, a, b.

Dacă vectorul $\bar{\varphi}_\alpha$ nu este nul, îl presupunem constant și redus la forma canonică $(1, 0,\ldots,0)$. Luăm din nou $\Gamma^i_{rs} = 0$ $(i = 1, 2)$, iar vectorul de conexiune fiind $(x^2, 0, 1, 0,\ldots,0)$, singurele componente nenule ale conexiunii spațiului sînt

$$\Gamma^\alpha_{1\alpha} = - x^2, \quad \Gamma^3_{33} = - 2, \quad \Gamma^\lambda_{3\lambda} = - 1, \quad \lambda > 3. \tag{43}$$

Spațiul (43) admite grupul de mișcări

$$x'^1 = ax^1 + b, \quad x'^2 = \frac{x^2}{a}, \quad x'^3 = x^3 + a^3, \tag{44}$$

$$x'^\lambda = a^\lambda_\alpha \, x^\alpha + a^\lambda, \qquad \lambda > 3,$$

care posedă $n^2 - 4n + 6$ parametri și anume a^3, a^λ_α, a^λ, a, b.

Spații cu vector $\bar{\varphi}_i = 0$. Dacă vectorul $\bar{\varphi}_i$ este nul, primele ecuații (3) sînt identic verificate, iar celelalte devin

$$\varphi_\alpha = a^\beta_\alpha \, \varphi'_\beta,$$

deci componentele φ_α formează de asemenea un vector covariant $\bar{\varphi}_\alpha$ al spațiului E_{n-2}. În mod necesar vectorul $\bar{\varphi}_\alpha$ nu este nul, căci atunci spațiul ar avea vectorul de conexiune nul. Să presupunem că vectorul $\bar{\varphi}_\alpha$ este constant și redus la forma canonică $(1, 0,\ldots,0)$. Pentru a obține un spațiu cu grup maxim de mișcări, luăm de asemenea $\Gamma^i_{rs} = 0$ $(i = 1, 2)$. Vectorul de conexiune fiind $(0, 0, 1, 0,\ldots,0)$, singurele componente nenule ale conexiunii spațiului sînt

$$\Gamma^3_{33} = - 2, \quad \Gamma^\lambda_{3\lambda} = - 1. \tag{45}$$

Deoarece din ecuațiile (4) rezultă acum $\dfrac{\partial^2 x'^i}{\partial x j \, \partial x^k} = 0$, grupul de mișcări al spațiului (45) va fi dat de formulele

$$x'^i = \rho^i_j \, x^j + \sigma^i, \quad x'^3 = x^3 + a^3, \quad x'^\lambda = a^\lambda_\beta \, x^\beta + a^\lambda, \tag{46}$$

unde ρ^i_j şi σ^i sînt funcţii ce depind numai de variabilele x^α.

Din ecuaţiile (5) şi (6) mai rezultă relaţiile

$$\frac{\partial \rho^i_j}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \frac{\partial^2 \sigma^i}{\partial (x^3)^2} = 2\,\frac{\partial \sigma^i}{\partial x^3}, \frac{\partial^2 \sigma^i}{\partial x^3\, \partial x^\lambda} = \frac{\partial \sigma^i}{\partial x^\lambda}, \frac{\partial^2 \sigma^i}{\partial x^\lambda\, \partial x^\mu} = 0$$

de unde deducem

$$\rho^i_j = \text{const.},\ \sigma^i = c^i_1\, \mathrm{e}^{2x^3} + c^i_2. \tag{47}$$

Astfel spaţiul (45) admite grupul de mişcări dat de formulele (46), (47) în care intervin $n^2 - 4n + 12$ parametri şi anume a^3, a^λ_β, a^λ, c^i_1, c^i_2, ρ^i_j.

Primită la redacţie la 14 februarie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. V. F. KAGAN, *Über eine Erweiterung des Begriffes von projektiven Räumen und dem zugehörigen Absolut.* Труды семинара по векторному и тензорному анализу, Москва, **I**, 12–101 (1933).
2. GH. VRĂNCEANU, *Sur les espaces partiellement projectifs.* Bull. Math. de la Soc. Roum., (**48**), 43–64 (1947).
3. — *Grupurile de mişcare ale spaţiilor cu conexiune.* Studii şi cercetări matematice, **II**, 415 (1951).
4. — *Automorfismele spaţiilor lui Kagan.* Lucrările sesiunii generale a Acad. R.P.R., 1950, p. 251.
5. — *Léçons de Géométrie différentielle*, vol. II, Bucarest, 1957.

MODULE CU DIFERENȚIALĂ GENERALIZATĂ[1]

DE

NICOLAE POPESCU

§ 1. INTRODUCERE

În lucrarea de față se consideră categoria $\mathcal{K}$ (d, n) definită în [2], asociată categoriei Λ-modulelor stîngi unitare peste inelul Λ (cu unitate). Se dovedește că această categorie este izomorfă cu o categorie de module, și anume cu categoria modulelor stîngi, unitare, peste algebra Γ^n, generalizare a algebrei numerelor duale. Folosind această interpretare a categoriei $\mathcal{K}$ (d, n) se explicitează functori Z'_i și Z_i. Se generalizează propoziția 2.1, Cap. IV. din [1], și se calculează functori sateliți pentru functori Z'_i, Z_i și H_i. Se arată că dacă $i = 1$, functorii H_1 și H_{n-1} sînt module de omologie pentru inelul cu augumentare $\Gamma^n \xrightarrow{\eta} \Lambda$.

În partea doua se consideră noțiunea de complex generalizat și se construiesc șirurile exacte asociate. Se dă, în fine, o construcție a omologiei Mayer, folosind rezultatele din prima parte, pentru complexe generalizate.

1. Fie Λ un inel cu identitate $1 \neq 0$. Considerăm inelul $\Gamma(d, n) = \Gamma^n$ format de elemente de forma:

$$\lambda_0 + \lambda_1 d + \ldots + \lambda_{n-1} d^{n-1}, \qquad \lambda_i \in \Lambda,\ i = 0, \ldots, n-1$$

(unde d este un simbol), cu înmulțirea definită astfel:

$$(\lambda_0 + \lambda_1 d + \ldots + \lambda_{n-1} d^{n-1})(\lambda'_0 + \lambda'_1 d + \ldots + \lambda'_{n-1} d^{n-1}) =$$
$$= \lambda_0 \lambda'_0 + (\lambda_0 \lambda'_1 + \lambda_1 \lambda'_0) d + \ldots + (\lambda_0 \lambda'_{n-1} + \lambda_1 \lambda'_{n-2} + \ldots + \lambda_{n-1} \lambda'_0) d^{n-1}.$$

Deducem de aici că: $d^n = 0$ și pentru $1 \leqslant i \leqslant n-1$

$$d^i \lambda = \lambda d^i; \qquad \lambda \in \Lambda.$$

---

[1] Apărută în l. franceză în Revue Roum. de math. pures et appl., *6* (1964).

Notăm cu Γ_i^n subalgebra lui Γ^n, formată din elementele de forma :

$$\lambda_0 + \lambda_i d^i + \lambda_{i+1} d^{i+1} + \ldots + \lambda_{n-1} d^{n-1}$$

(adică din elementele pentru care $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{i-1} = 0$).

Considerăm categoria $\mathcal{K}(d, n)$ definită în [2]. Identificăm orice obiect (A, d) al acestei categorii cu un Γ^n modul în mod evident : $dx = d(x)$, pentru $d \in \Gamma^n$, $x \in A$, iar $d(x)$ din partea dreaptă a egalității înseamnă imaginea lui x prin endomorfismul d. Orice Λ-modul se identifică cu un obiect al categoriei $\mathcal{K}(d, n)$, deci cu un Γ^n modul. Invers, un Γ^n modul este un Λ modul cu diferențială generalizată.

Fie Λ un obiect din categoria $\mathcal{K}(d, n)$; notăm :

$$Z_i(A) = \ker d^i, \qquad Z_i(A) = A/\operatorname{Im} d^i.$$

PROPOZIȚIA 1. *Pentru orice obiect A din categoria $\mathcal{K}(d, n)$ considerat ca Γ^n modul (și deci Γ_i^n modul) avem* ²)

$$Z_i'(A) = \Lambda \otimes_{\Gamma_i} A \,;\; Z_i(A) = \operatorname{Hom}_{\Gamma_i}(\Lambda, A).$$

Demonstrație. Primul izomorfism se dovedește verificînd că $Z_i'(A)$ satisface următoarele condiții :

a) Există o aplicație balansată $\Lambda \times A \overset{\varphi_i}{\rightarrow} Z_i'(A)$ definită astfel :

$$\varphi_i(\lambda, a) = \lambda\, \alpha_i(a),$$

unde $\alpha_i(a)$ este imaginea elementului a, prin homomorfismul canonic

$$\alpha_i : A \rightarrow Z_i'(A).$$

b) Dacă $f'' : \Lambda \times A \rightarrow G$ este o aplicație balansată într-un grup abelian G, atunci există un homomorfism unic $\varphi : Z_i'(A) \rightarrow G$ cu $\varphi^\circ \varphi_i = f$.

Demonstrarea celui de-al doilea izomorfism prescris în propoziția 1 se face direct ; fie $x \in Z_i(A)$, atunci $d^i(x) = 0$.

Definim homomorfismul $\alpha : Z_i(A) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\Gamma_i}(\Lambda, A)$ astfel : $\alpha(x)$, pentru $X \in Z_i(A)$ este homomorfismul care asociază lui $\lambda \in \Lambda$, elementul $\lambda x \in A$. Se verifică $\alpha(x)$ este un Γ_i-izomorfism. Propoziția e demonstrată.

Considerăm homomorfismul canonic :

$$\Lambda \overset{\eta}{\rightarrow} \Gamma^n.$$

PROPOZIȚIA 1.2. *Următoarele afirmații sînt echivalente* ;

a) Γ^n-*modulul A este η-proiectiv* ;

a′) Γ^n-*modulul A este η-injectiv* ;

b) *Există un Λ-endomorfism s al lui A astfel că* :

$$d^{n-1} s + d^{n-2} s d + \ldots + s d^{n-1} = 1_A,$$

(1_A este endomorfismul identic al lui A) ;

---

²) Λ este Γ modul, și se consideră obiect în categoria $\mathcal{K}(d, n)$ cu diferențială nulă.

c) *Există un* Λ-*modul* B *astfel că* $A \approx (\eta)\, B$;

c′) *Există un* Λ-*modul* B *astfel că* $A \approx {}^{(\eta)}B$.

Demonstrație. Pentru un Λ-modul B construim Γ^n-modulul B^x definit astfel: $B^x = B \oplus B \oplus \ldots \oplus B$ (B^x este suma directă a n exemplare izomorfe cu B). d acționează asupra lui B astfel:

$$d(b_0, b_1 \ldots b_{n-1}) = (0, b_0, b_1 \ldots, b_{n-2}).$$

Se dovedește ușor că:

$${}_{(\eta)}B = \Gamma \otimes_{\Lambda} A = B^x \approx \mathrm{Hom}_{\Lambda}(\Gamma, B) = {}^{(\eta)}B.$$

Admitem acum că Γ^n-modulul A posedă un Λ-endomorfism s care să satisfacă condiția b) din enunțul propoziției 1.2. Considerăm modulul $B_1(A) = \mathrm{Im}\, d^{n-1} = B$ și definim homomorfismul $\varphi : A \to B^x$ astfel:

$$\varphi(a) = (d^{n-1}a, d^{n-1}s\,d^{n-2}a, \ldots, d^{n-1}s\,a), \ a \in A.$$

φ este Γ^n-homomorfismul; într-adevăr

$$\varphi(d\,a) = (0, d^{n-1}s\,d^{n-1}a, d^{n-1}s\,d^{n-2}a, \ldots, d^{n-1}s\,d\,a) =$$
$$= (0, d^{n-1}a, d^{n-1}s\,d^{n-2}a, \ldots, d^{n-1}s\,d\,a)$$

deoarece, multiplicînd la dreapta cu d^{n-1} egalitatea din b), obținem

$$d^{n-1}s\,d^{n-1} = d^{n-1}.$$

Dacă $\varphi(a) = 0$, atunci

$$d^{n-1}a = d^{n-1}s\,d^{n-2}a = \ldots = d^{n-1}s\,a = 0.$$

Din b) se deduce pe rînd:

$$d^{n-1}s\,d^{n-2}a + s\,d^{n-2}s\,d^{n-1}a = d^{n-2}a = 0$$

. . . .

$$d^{n-3}a = d^{n-4}a = \ldots = da = 0$$

deci, înlocuind în expresia din b), obținem $a = 0$. Deci φ este monomorfism.

Fie $a \in B_1(A)$; atunci avem:

$$\varphi(a) = (0, 0, \ldots 0, d^{n-1}s\,a) = (0, 0, \ldots, 0, a),$$
$$\varphi(s\,a) = (d^{n-1}s\,a, d^{n-1}s\,d^{n-2}s\,a, \ldots, d^{n-1}s^2a) =$$
$$= (a, d^{n-2}s\,a, \ldots, d^{n-1}s^2a),$$
$$\varphi(d\,s\,a) = (0, a, \ldots),$$

. . . .

$$\varphi(d^i s\,a) = (0, \ldots 0, a, \ldots).$$

. . . .

Un element din B^x este de forma :

$$b = (b_0, b_1 \ldots b_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} (0, \ldots, 0, b_i\, 0, \ldots, 0).$$

Dar

$$(0, 0, \ldots 0, b_{n-1}) = \varphi (b_{n-1})$$

$$(0, 0 \ldots 0, b_{n-2}, 0) = \varphi (s, b_{n-2}) - \varphi (d^{n-1}\, s\, d^{n-1}\, s\, b_{n-2})$$

. . . .

În felul acesta putem dovedi că φ este un epimorfism. În concluzie, φ este izomorfism. Am demonstrat implicațiile *b*) ⇒ c) b) ⇒ c′. Din propoziția 6.3, Cap. II, [1], rezultă că c) ⇒ a) şi c′) ⇒ a′). Rămîne de dovedit că a) ⇒ b) și a′) ⇒ b′).

Considerăm pentru aceasta Γ^n-modulul A și modulele izomorfe ${}_{(\eta)}A$ şi A^x. Homomorfismul canonic (definit în mod evident) ${}_{(\eta)}A \to A$, se transformă în homomorfismul $f : A^x \to A$ definit astfel :

$$f(a_0, \ldots a_{n-1}) = a_0 + d a_1 + \ldots + d^{n-1}\, a_{n-1}.$$

Dacă modulul A este η — proiectiv, atunci există un Γ^n-homomorfism $g : A \to A^x$, astfel că $f \circ g = 1_A$.

Fie $g(a) = (x_0, x_1 \ldots x_{n-1})$. Definim $s : A \to A$ punînd $s(a) = x_{n-1}$. Evident, s este un Λ-homomorfism.

Deoarece g este Γ-homomorfism avem

$$s\, d^{n-1}\, a = x_0, s\, d^{n-2}\, a = x_1, \ldots, s\, a = x_{n-1}$$

deci

$$s\, d^{n-1}\, a + \ldots + d^{n-1}\, s\, a = x_0 + d x_1 + d^2 x_2 + \ldots + d^{n-1}\, x_{n-1} =$$
$$= f \circ g(a) = a,$$

aşadar s satisface condiția b).

Analog se dovedeşte că *a*′) ⇒ b). Propoziția este complet demonstrată.

CONSECINȚĂ. *Pentru orice* Γ^n- *modul* A, η-*injectiv sau* η-*proiectiv, și pentru orice* i,

$$H_i(A) = 0$$

Demonstrație. Într-adevăr, din b) rezultă, pentru $x \in Z_i(A)$:

$$d^{n-1}\, s\, x + \ldots + d^{n-i}\, s\, d^{i-1}\, x = x$$

sau

$$d^{n-i}\, (d^{i-1}\, s\, x + \ldots + s\, d^{i-1}\, x) = x$$

adică $x \in B_i(A) = \operatorname{Im} d^{n-i}$.

Considerăm un şir exact în categoria $\mathcal{K}\ (d,\ n)$

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

şi diagrama comutativă asociată pentru un indice i

$1 \leqslant i \leqslant n-1:$

$$\begin{tikzcd}
Z'_i\,(A') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'_i"] & Z'_i\,(A) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i"] & Z'_i\,(A'') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_i\,(A') \arrow[r] & Z_i\,(A) \arrow[r] & Z_i\,(A''),
\end{tikzcd}$$

unde α_i este homomorfismul canonic,

$$Z'_i\ (A) = A/\operatorname{Im} d^{n-i} \to \operatorname{Ker} d^i = Z_i\ (A).$$

Evident, [2], $\operatorname{Ker}\ \alpha_i = H_{n-i}\ (A)$; avem deci diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
H_i\,(A) \arrow[r] & H_i\,(A'') \arrow[r, "\Delta_{n-1}"] & H_{n-1}\,(A') \arrow[r] \arrow[d, "i'"] & H_{n-i}\,(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-i}(A'') \arrow[d] & \\
 & & Z'_i\,(A') \arrow[r] & Z'_i\,(A) \arrow[r] & Z'_i\,(A'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cu linii şi coloane exacte. Notăm $\partial_{n-i} = i' \circ \Delta_{n-i}$. Şirul

$$\cdots \to H_i\,(A) \to H_i\,(A'') \xrightarrow{\partial_{n-i}} Z'_i\,(A') \to Z'_i(A) \to Z'_i\,(A'') \to 0$$

este exact.

Deoarece $\operatorname{coker}\ \alpha_i = H_i\,(A)$, în mod dual rezultă şirul exact :

$$0 \to Z_i\,(A') \to Z_i\,(A) \to Z_i\,(A'') \xrightarrow{\partial_i} H_{n-i}\,(A') \to H_{n-i}\,(A) \to \dots$$

unde $\partial_i = \Delta_{n-i} \circ j''$, j'' fiind epimorfismul canonic $Z_i\ (A'') \to H_i\,(A'')$.

Homorfismele ∂_{n-i} şi ∂_i sînt naturale, adică pentru orice diagramă comutativă din categoria $\mathcal{K}\ (d,\ n)$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{a}$$

avem diagramele comutative :

$$\begin{tikzcd}
H_i\,(A'') \arrow[r, "\partial_{n-i}"] \arrow[d] & Z'_i\,(A') \arrow[d] \\
H_i\,(B'') \arrow[r, "\partial_{n-i}"] & Z'_i(B')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z_i\,(A'') \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d] & H_{n-i}\,(A') \arrow[d] \\
Z_i\,(B'') \arrow[r, "\partial_i"] & H_{n-i}\,(B')
\end{tikzcd}$$

homomorfismele verticale fiind induse din diagrama (a).

Mai mult, pentru orice modul Γ^n-injectiv sau Γ^n-proiectiv A, avem $H_i\,(A) = 0$ pentru orice i, după cum rezultă din consecinţele propoziţiei 1.2. Ţinînd seamă de definiţia axiomatică a functorilor sateliţi 1, Cap. III,

§5, deducem că pentru functorii Z'_i, Z_i, H_i definiţi pe categoria modulelor, cu valori în categoria -modulelor, avem respectiv:

$$S_q Z'_i(A) = \begin{cases} H_i \ (A) \text{ pentru } q \text{ par} \\ H_{n-i}(A) \text{ pentru } q \text{ impar} \end{cases}$$

$$S^q Z_i(A) = \begin{cases} H_{n-i}(A) \text{ pentru } q \text{ impar} \\ H_i \ (A) \text{ pentru } q \text{ par} \end{cases}$$

$$S_q H_i(A) = S^q H_i(A) = \begin{cases} H_{n-i}(A) \text{ pentru } q \text{ impar,} \\ H_i \ (A) \text{ pentru } q \text{ par.} \end{cases}$$

Pentru functorii Z'_i şi Z_i, functori sateliţi la stînga (respectiv dreapta) coincid cu functori derivaţi.

Observaţie. Considerăm inelul Γ^n şi homomorfismul $\varepsilon : \Gamma^n \to \Lambda$ care este un Γ^n-epimorfism definit astfel:

$$\varepsilon(\lambda_0 + \lambda_1 d + \ldots + \lambda_{n-1} d^{n-1}) = \lambda_0$$

Avem şirul exact:

$$0 \longleftarrow \Lambda \xleftarrow{\varepsilon} \Gamma^n \xleftarrow{d} \Gamma^n \xleftarrow{d^{n-1}} \Gamma^n \xleftarrow{d} \Gamma^n \xleftarrow{d^{n-1}} \ldots \tag{r}$$

d este homomorfismul lui Γ^n în Γ^n, obţinut prin multiplicare cu d; analog d^{n-1} (r) este o rezoluţie proiectivă a lui Λ peste Γ^n. Pentru orice Γ^n-modul stîng A, avem, înmulţind tensorial cu A,

$$0 \leftarrow \Lambda \otimes_{\Gamma^n} A \xleftarrow{\varepsilon} A \xleftarrow{d} A \xleftarrow{d^{n-1}} A \leftarrow \ldots$$

Aşadar, modulele de omologie ale inelului cu augmentare $\Gamma \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda$ sînt

$$H_0(\Lambda, A) = \Lambda \otimes_\Gamma A$$

$$H_q(\Lambda, A) = \begin{cases} H_1 \ (A) \text{ dacă } n \text{ este impar,} \\ H_{n-1}(A) \text{ dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$$

Analog modulele de coomologie.

§ 2. COMPLEXE GENERALIZATE

Numim complexe generalizate de ordinul n un sistem $C = (A_q, d_q)_{q \in Z}$ de Λ-module şi Λ-homomorfisme cu $d_q : A_q \to A_{q-1}$, astfel încît compunerea a n homomorfisme succesive să fie homomorfismul zero: $d_{q-n+1} \circ d_{q-n+2} \circ \ldots \circ d_q = 0$ oricare ar fi q.

Dacă $C = (A_q, d_q)_{q \in Z}$, $C' = (A'_q, d'_q)$ sînt două complexe generalizate, atunci prin morfism al lui C în C' se înţelege un sistem $f = (f_q)_{q \in Z}$ de Λ-homomorfisme, cu $f : A_q \to A'_q$ şi $f_{q-1} \circ d_q = d_q \circ f_q$, oricare ar fi q.

Familia complexelor generalizate de -module cu morfismele mai sus definite este o categorie de diagrame peste categoria $\Lambda\,\mathcal{C}$ (a modulelor stîngi unitare peste Λ) deci abeliană. Notăm cu $\mathcal{C}(\Lambda, n)$ această categorie.

Fie C şi C' două obiecte din $\mathcal{C}(\Lambda, n)$ şi $f, g: C \to C'$; zicem că f şi g sînt omotope, dacă pentru orice q este definit Λ-homomorfismul $s_{q,\,q+n-1}: A_q \to A_{q+n-1}$ astfel încît $f_q - g_q = d'_{q+1} \circ \cdots \circ d'_{q+n-1} \circ s_{q,q+n-1} + d'_{q+1} \circ d'_{q+1} \circ \cdots \circ s_{q-1,\,q+n-2} \circ d_q + \ldots + s_{q-n+1,q} \circ d_{q-n+1} \circ \cdots \circ d_{q+1}$ (elementele cu accent se referă la complexul C').

Oricărui obiect C din categoria $\mathcal{C}(\Lambda, n)$ îl asociem Λ-modulul graduat

$$A = \bigoplus_{q \in Z} A_q .$$

Modulul A înzestrat cu endomorfismul d, suma directă a homomorfismelor, d_q este un modul cu diferenţiala generalizată, deci un obiect din categoria $\mathcal{K}\ (d, n)$ considerată în § 1.

Fie obiectul $A = \bigoplus_{q \in Z} A_q$, cu diferenţială generalizată; considerăm modulele Z'_i, Z_i şi H_i pentru $1 \leqslant i \leqslant n-1$ (n fiind ordinul lui $d = \bigoplus_{q \in Z} dq$); aceste module sînt graduate de modulele $Z'_{i,q}$, $Z_{i,q}$ şi $H_{i,q}$ şi pentru un q oarecare avem şirul exact

$$0 \to H_{n-i,\,q+n-i}(A) \to Z'_{i,q}(A) \to Z_{i,q}(A) \to H_{i,q}(A) \to 0.$$

Dacă

$$0 \to C' \to C \to C'' \to 0 \qquad \text{(c)}$$

este un obiect din categoria $\mathcal{C}(\Lambda, n)$, atunci pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n-1$, şirul exact asociat şirului exact de module graduate (asociate complexelor (c) , [2], propoziţia 3), se desface în şirul exact infinit :

$$\cdots \to H_{n-i,\,q+n-i}(C) \to H_{n-i,\,q+n-i}(C'') \xrightarrow{\Delta_{n-i,q+n-i}} H_{i,q}(C') \to H_{i,q}(C) \to \cdots$$

Dacă $f = (f_q)_{q \in Z}$ este un morfism al complexului C în complexul C', atunci, pentru orice q şi $1 \leqslant i \leqslant n-1$, el induce homomorfismele

$$f_{i,q*}: H_{i,q}(C) \to H_{i,q}(C').$$

a) Dacă $f = 1_C$, adică coincide cu morfismul identic al lui C, atunci $f_{i,q*} = 1_{H_{i,q}(C)}$

b) Dacă $f: C \to C'$, $g: C' \to C''$, atunci

$$(g \circ f \circ)_{i.q*} = g_{i.q*} \circ f_{i.q*} : H_{i,q}(C) \to H_{i,q}(C'')$$

c) Pentru diagrama comutativă, din categoria $\mathscr{C}(\Lambda, n)$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & C'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_1' \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & C_1'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

avem diagrama comutativă (pentru orice q şi $1 \leqslant i \leqslant n-1$):

$$\begin{tikzcd} H_{i,q}(C'') \arrow[r, "\Delta_{i,q}"] \arrow[d, "f''_{i,q*}"'] & H_{n-i,q-n+i}(C') \arrow[d, "f_{n-i,q-n+i^*}"] \\ H_{i,q}(C_1'') \arrow[r, "\Delta_{i,q}"] & H_{n-i,q-n+i} \end{tikzcd}$$

d) Dacă $f: C \to C'$ este un izomorfism în categoria $\mathscr{C}(\Lambda, n)$, atunci, evident, pentru orice q şi $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $f'_{i,q*}: H'_{i,q}(C) \to H_{i,q}(C')$ este un izomorfism.

Ca o aplicaţie a celor expuse, construim omologia Mayer, asociată unui complex simplicial X, verificînd axiomele unei teorii de omologie [5].

Fie X un complex simplicial (sau un complex-semisimplicial). Pentru un simplex de dimensiune q, notăm cu $\partial_0, \partial_1, \ldots, \partial_q$ feţele sale care sînt simplexe de dimensiune $q-1$.

Fie $C_n(x)$ grupul liber, avînd ca bază mulţimea simplexelor de dimensiune n ale lui X. Definim, pentru orice q, homomorfismul d_q: $C_q(X) \to C_{q-1}(X)$ astfel:

$$d_q(x) = \sum_{i=0}^{q} (\partial_i x).$$

Fie acum G un grup abelian periodic, de perioadă n, unde n este un număr prim. Considerăm sistemul

$$C(X, G) = (C_q(X) \otimes G, d_q \otimes G).$$

Se vede uşor că acesta este un complex generalizat de ordinul n. Notăm cu $C_q(X, G)$ componentele sale şi cu $\mathrm{d}q$ diferenţiala sa generalizată ($\mathrm{d}q = \mathrm{d}_q \otimes G$).

Fie X şi X' două complexe şi $f: X \to X'$ o aplicaţie simplicială. Atunci, pentru orice q, f induce un homomorfism: $f_q: C_q(X, G) \to C_{q-1}$ (X, G) astfel că familia $f = (f_q)_{q \in z}$ este un homomorfism de complexe generalizate; deducem de aici că pentru $1 \leqslant i \leqslant n-1$, f induce homomorfismele

$$f_{i,q*}: H_{i,q}(X, G) \to H_{i,q}(X', G).$$

Fie acum $0 \leqslant k < i \leqslant n - i$. Considerăm familia de grupuri $(H_r^{i,k}(X, G)_{k \in z}$ astfel că:

$$H_r^{i,k}(X, G) = \begin{cases} H_{i,q}(X, G) \text{ cu } q = \dfrac{rn}{2} + k \text{ dacă } r \text{ e par} \\ H_{n-i,p}(X, G) \text{ cu } p = \dfrac{n(r+1)}{2} + k - i \text{ dacă } r \text{ e impar} \end{cases}$$

e) Dacă X_1 este un subcomplex al lui X, notînd

$$C_q(X, X_1;\, G) = C_q(X, G)/C_q(X_1, G)$$

şi considerînd, pentru q şi $q-1$, homomorfismul canonic

$$d_q'' : C_q(X, X_1; G) \to C_{q-1}(X, X_2; G) \text{ dedus din diagrama :}$$

$$\begin{tikzcd}
C_q(X, G) \arrow[r] \arrow[d, "d_q"] & C_q(X, X_1; G) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "d_q''"] & 0 \\
C_{q-1}(X, G) \arrow[r] & C_{q-1}(X, X_1; G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

atunci obţinem şirul exact de complexe generalizate, de ordin n:

$$0 \to C(X_1, G) \xrightarrow{i} C(X, G) \xrightarrow{j} C(X, X_1; G) \to 0$$

Cu notaţiile de mai sus, avem, pentru n par:

$$H_r^{i,k}(X, X_1; G) = H_{i,q}(X, X_1; G),$$

$$H_{r-1}^{i,k}(X_1; G) = H_{n-i,q-i}(X_1, G).$$

Deci, există homomorfismul

$$\partial_r^{i,k} = \Delta_{i,q};\; H_r^{i,k}(X, X_1; G) \to H_{r-1}^{i,k}(X_1, G)$$

de unde şirul exact,

$$\to H_r^{i,k}(X, G) \xrightarrow{i_{r*}^{i,k}} H_r^{i,k}(X, X_1; G) \xrightarrow{\partial_r^{i,k}} H_{n-1}^{i,k}(X_1, G) \to.$$

f) Dacă f, g sînt aplicaţii contigue3) ale complexului X în complexul X' (sau ale perechii (X, X) în perechea (X, X)), atunci, pentru orice q şi $1 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$f_{i,q*} \equiv g_{i,q*} : H_{i,q}(X, G) \to H_{i,q}(X', G)$$

[3], teorema 5. Acest fapt rezultă şi prin calcul direct, homomorfismele: $f, g : C(X, G) \to C(X', G)$, fiind omotope.

g) Dacă X_1, X_2 sînt două subcomplexe ale complexului X, avem izomorfismul:

$$\alpha : C(X_1, X_1 \cap X_2, G) \to C(X_1 \cup X_2, X_2; G),$$

dedus, în mod canonic, considerînd grupul: $C(X, G)$ şi subgrupurile sale $C(X_1 \cup X_2; G)$; $C(X_1 \cap X_2, G)$; $C(X_1; G)$; $C(X_2; G)$, pentru care avem în mod evident:

$$C(X_1 \cup X_2;\, G) = C(X_1, G) + C(X_2, G),$$

$$C(X_1 \cap X_2;\, G) = C(X_1; G) \cap C(X_2;\, G).$$

---

3) Două aplicaţii simpliciale se zic contigue dacă imaginea unui simplex din X prin cele două funcţii este conţinută în acelaşi simplex din X'.

Folosind a doua teoremă de homomorfism se obține izomorfismul ale cărui componente comută cu operatorul dq.

În concluzie, α induce (vezi punctul d)) izomorfismele:

$$\alpha_{i,q*} : H_{i,q}(X_1, X_1 \cap X_2, G) \to H_{i,q}(X_1 \cup X_2, X_2 ; G).$$

Cele expuse mai sus, relativ la grupurile $H_r^{i,k}(X, G)$, se pot rezuma în următoarele:

Fie K categoria ale cărui obiecte sînt perechi (X, X_1) de complexe (sau C.S.S.) iar morfisme sînt aplicațiile simpliciale. (Perechea (X, Φ) se identifică cu complexul X.)

Asociem, pentru orice r întreg ($r \geqslant 0$), perechii (X, X_1) grupul $H_r^{i,k}(X, X_1; G)$ definit mai sus și oricărei aplicații simpliciale $(X, X_1) \to (X', X_1')$ homomorfismul:

$$f_{r*}^{i,k} : H_r^{i,k}(X, X_1; G) \to H_r^{i,k}(X', X_1'; G).$$

Această asociere este un functor definit pe categoria K cu valori în categoria grupurilor. Afirmațiile de la punctele c) și e) arată că acest functor este un ∂-functor;

h) Dacă X este format dintr-un singur vîrf, rezultă ușor că $H_0^{i,k}(X, G) \approx 0$ și $H_r^{i,k}(X, G) \approx 0$ dacă $r \geqslant 1$.

Din f), g) și h) rezultă că acest functor este omologic, adică definește o teorie a omologiei.

Dacă ne referim la categoria K' a complexelor simpliciale finite, atunci, din teorema de unicitate a teoriei omologiei pe această categorie, rezultă, coincidența grupurilor $H_r^{i,k}(X, G)$ cu grupurile de omologie clasice pentru anumiți indici i, k [5].

Anume, dacă $H(X, X_1)$ sînt grupurile de omologie clasice ale perechii (X, X_1) cu coeficienții în grupul G, avem

$$H_r(X, X_1; G) = \begin{cases} H_r^{i,i-1}(X, X_1; G) = H_{i,p}(X, X_1; G) \text{ cu } p = \dfrac{nr}{2} + i - 1 \\ \qquad \text{dacă } r \text{ e par} \\ H_r^{n-i,n-i-1}(X, X_1; G) = H_{i,p}(X, X_1, G) \text{ cu } p = \dfrac{n(r+1)}{2} - 1 \\ \qquad \text{dacă } r \text{ e impar.} \end{cases}$$

Demonstrația afirmației de mai sus se află în [3], p. 5.

Primită la redacție la 28 noiembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. S. EILENBERG, H. CARTAN, *Homological algebra*. Princeton, 1956.
2. C. BONICA, N. POPESCU, *Diferențiale generalizate*. Com. Acad. R.P.R., *6* (1963).
3. H. E. SPANIER, *The Mayer homology theory*. Bulletin of the American Mathematical Society, 55, 2 (1949).
4. A. GROTHENDIECK, *Sur quelques points d'algebre homologique*. Tohoku Mathematical Journal, second series, 9, *2*, *3* (1957).
5. S. EILENBERG, N. STEENROD, *Foundation of Algebraic Topology*.

RECENZIE

CORNELIU CONSTANTINESCU und AUREL CORNEA, Ideale Ränder Riemannscher Flächen, *Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Neue Folge, Band 32, 1963, 240 Seiten, DM 68.*

Frontierele ideale reprezintă un capitol important al teoriei suprafeţelor riemanniene Cu toate acestea actualele tratate de teoria suprafeţelor riemanniene nu conţin practic nici un fel de informaţii în legătură cu aceste frontiere, care au început să devină în ultimul timp un instrument de cercetare foarte preţios şi a căror teorie este astăzi, pe liniile ei principale, suficient de bine conturată. Apariţia cărţii este binevenită, întrucît ea sistematizează, la nivelul anului 1962, rezultatele unui front al ştiinţei în plină activitate, multe din ele inedite, uşurînd cercetătorilor interesaţi luarea de contact cu problematica actuală din acest domeniu.

Metoda de cercetare cu ajutorul frontierelor ideale nu este specifică suprafeţelor riemanniene. Ea a apărut şi în alte domenii ca de exemplu în teoria proceselor Markov, a spaţiilor riemanniene, a spaţiilor Green sau, mai general, în teoria axiomatică a potenţialului, găsindu-se totuşi în aceste domenii într-un stadiu de dezvoltare mai puţin avansat. O mare parte din rezultatele conţinute în această monografie nu foloseşte în întregime proprietăţile suprafeţelor riemanniene şi este deci susceptibilă de a fi extinsă la domeniile sus-amintite.

Lucrarea se adresează în special cercetătorilor din teoria suprafeţelor riemanniene, putînd fi însă folositoare şi specialiştilor din alte domenii, în care intervin frontierele ideale. Se presupune că cititorii cunosc anumite rezultate elementare din topologie, funcţii reale şi complexe, teoria integralei. Cartea este logic independentă de orice tratat de teoria suprafeţelor riemanniene, dar cunoaşterea acestei teorii uşurează foarte mult parcurgerea materialului.

Experienţa dovedeşte că fiecărei probleme în parte i se asociază în mod natural o anumită frontieră ideală, cu ajutorul căreia ea poate fi studiată în modul cel mai convenabil. În prezenta monografie sînt introduse şi studiate amănunţit patru frontiere ideale şi anume frontierele ideale Wiener, Royden, Martin şi Kuramochi. Necesitatea introducerii a exact patru tipuri de frontiere ideale se explică pe de o parte prin dublul rol jucat de aceste frontiere ca mijloc simplu de cercetare în clasificarea suprafeţelor şi a aplicaţiilor analitice între aceste suprafeţe, acestui scop slujindu-i frontierele Wiener şi Royden, sau ca mijloc de extindere a teoremelor din teoria clasică a comportării funcţiilor armonice şi analitice la frontieră (formula Poisson, teorema lui Fatou etc.), acestui scop slujindu-i frontierele Martin şi Kuramochi — pe de altă parte prin paralelismul existent între clasele *HB* (funcţii armonice mărginite) şi *HD* (funcţii armonice cu integrala Dirichlet finită), paralelism ce duce la împărţirea frontierelor în frontiere de tip *B* (Wiener, Martin) şi frontiere de tip *D* (Royden, Kuramochi). Toate frontierele ideale se introduc în această carte printr-o metodă unică, aceea a compactificării asociată cu o clasă de funcţii, unificînd astfel în mare măsură teoriile acestor frontiere.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 6, P. 673–804, BUCUREŞTI, 1964.

Cartea începe cu un paragraf introductiv (§ 0 ; p. 5—10) în care se precizează terminologia şi se demonstrează cîteva teoreme cu caracter auxiliar. Paragrafele 1—5 (p. 10—54) sînt consacrate unei expuneri sistematice, dar fără indicaţii bibliografice, a teoriei potenţialului pe suprafeţele riemanniene : studiul funcţiilor superarmonice, problema Dirichlet, principiile fundamentale ale potenţialelor avînd ca nucleu funcţia Green (principiul unicităţii reprezentării potenţialelor, principiul local al maximului, principiul continuităţii, principiul baleiajului pe mulţimi închise, teorema de descompunere a lui Riesz, principiul energiei, principiul echilibrului, teorema lui Cartan de cvasicontinuitate. Paragrafele 6 şi 7 (p. 54—85) se ocupă cu studiul spaţiilor de funcţii Wiener şi Dirichlet. O funcţie Wiener este o funcţie cvasicontinuă f, care pe orice subdomeniu hiperbolic se scrie sub forma $f = u_1 - u_2 + f$, unde u_1, u_2 sînt funcţii armonice nenegative iar f este majorat de un potenţial. O funcţie Dirichlet este o funcţie cvasicontinuă cu integrala Dirichlet finită, adică derivabilă în sens generalizat şi cu gradientul de pătrat sumabil.

Teoria frontierelor ideale începe abia cu paragraful 8 (p. 85—96). Ele sînt introduse cu ajutorul compactificărilor : o compactificare a unei suprafeţe riemanniene este un spaţiu compact, care conţine suprafeţe ca subspaţiu deschis dens ; frontiera ideală asociată compactificării este mulţimea punctelor compactificării, care nu aparţine suprafeţei. În acest paragraf se studiază cîteva aspecte comune tuturor compactificărilor, în particular problema Dirichlet pe frontiera ideală, pentru care se dau criterii de rezolutivitate, din care va rezulta, ulterior, că toate cele patru frontiere studiate în prezenta lucrare sînt rezolutive, şi frontiera armonică (mulţimea zerourilor comune tuturor potenţialelor prelungite pe frontiera ideală cu limita inferioară), care, în cazul rezolutivităţii problemei Dirichlet, coincide cu suportul măsurii armonice. Frontierele Wiener şi Royden sînt introduse şi studiate în paragraful 9 (p. 96—109) ; el conţine cea mai mare parte din rezultatele cunoscute astăzi în acest domeniu şi anume : nici un punct al frontierei ideale Wiener sau Royden nu este accesibil şi nu posedă un sistem fundamental numărabil de vecinătăţi ; frontierele Wiener şi Royden sînt nicăieri disconectante în compactificările respective ; punctele frontierei Wiener sau Royden de măsură armonică pozitivă posedă un sistem fundamental de vecinătăţi conexe ; frontiera armonică Wiener este un spaţiu Stone. Se caracterizează apoi cu ajutorul frontierei Wiener (resp. Royden) mulţimile deschise de tip SO_{HB} (resp. SO_{HD}). În paragraful 10 (p. 109 — 119) se studiază comportarea aplicaţiilor analitice între suprafeţele riemanniene pe frontierele Wiener şi Royden, şi se introduc două clase de astfel de aplicaţii : aplicaţiile Fatou şi aplicaţiile Dirichlet, care sînt aplicaţiile prelungibile pe compactificările Wiener, respectiv Royden şi care se dovedesc a fi generalizări ale funcţiilor analitice mărginite, respectiv ale funcţiilor analitice cu integrala Dirichlet finită. Tot în acest paragraf se studiază aplicaţiile Blaschke, introduse de M. Heins, şi relaţiile lor cu frontiera Wiener. În continuare, în paragraful 11 (p. 119—128), se aplică rezultatele obţinute în paragrafele 9 şi 10 la clasificarea suprafeţelor riemanniene. Frontierele Wiener şi Royden se dovedesc cu această ocazie a fi un instrument foarte util investigării în acest domeniu. Este de remarcat faptul că aproape toate demonstraţiile din paragrafele 9—11 sînt făcute simultan pentru cazul B şi D.

Cu paragraful 12 începe studiul frontierelor ideale Martin şi Kuramochi. În acest paragraf (p. 128—134) se demonstrează teorema de reprezentare a lui Martin cu o metodă nouă într-o teorie uşor axiomatizată, care conţine teoria pe compactificările Martin şi Kuramochi ca nişte cazuri particulare. Frontiera Martin este studiată în paragraful 13 (p. 134—144), demonstrîndu-se printre altele următoarele teoreme : toate punctele minimale ale frontierei sînt accesibile, frontiera Martin este rezolutivă, funcţia Green tinde la zero în punctele de măsură armonică pozitivă. Se caracterizează apoi cu ajutorul frontierei Martin, anumite clase de suprafețe riemanniene. Paragraful 14 (p. 145—154) se ocupă cu comportarea aplicațiilor analitice între suprafețe riemanniene pe frontiera Martin și conține cîteva din rezultatele principale ale prezentei cărți și anume analoagele teoremelor lui Riesz, Fatou, Plessner, în care limitele unghiulare sînt înlocuite cu limitele fine introduse de L. Naïm și J. L. Doob. Pentru construirea și studierea frontierei Kuramochi e necesară o teorie modificată a potențialului; ea este prezentată în paragraful 15 (p. 154—166). Frontierei Kuramochi îi este consacrat paragraful 16 (p. 166—177). Nucleele Kuramochi pot fi utilizate pentru a construi o teorie a potențialului pe compactificarea Kuramochi, care posedă toate proprietățile teoriei potențialului în nuclee Green. Acestei teorii îi este consacrat paragraful 17 (p. 177—220), care este divizat în următoarele puncte: funcții superarmonice pe compactificarea Kuramochi, energie, capacitate, extremizare și baleiaj, efilare și topologie fină, puncte singulare și problema Dirichlet, derivate pe normală pe frontiera ideală Kuramochi. În paragraful 18 (p. 220—222) se demonstrează o teoremă referitoare la comportarea aplicațiilor Dirichlet pe frontiera Kuramochi, analogul teoremei lui Beurling, în care limitele unghiulare sînt înlocuite cu limitele în topologia fină. Teoremele generale din paragrafele 14 și 18 sînt utilizate în paragraful 19 (p. 222—237) pentru obținerea teoremelor relative la limitele unghiulare ale aplicațiilor analitice ale cercului unitate în suprafețe riemanniene arbitrare, compactificate metrizabil. Aceste teoreme generalizează teoremele clasice ale lui Riesz, Fatou-Nevanlinna, Beurling.

Cartea pare a fi mai utilă acelor cititori, care o vor citi sistematic, și e mai puțin adaptată pentru foiletare. Un rezumat amănunțit a fost publicat de autori în Revue de math., pures et appl., **8**, 227—242 (1963). Bibliografia conține numai titlurile citate în monografie. Unele paragrafe conțin indicații foarte sumare cu caracter istoric, autorii rezumîndu-se la a indica la teoremele mai importante numele acelora ce au contribuit la demonstrarea lor.

M. Jurchescu

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoremele de descompunere ale algebrei)**, 619, 25,50 lei.

D. BARBILIAN, **Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)**, 380 p., 7 lei.

JANKO BÉLA, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații liniare**, 223 p., 8,85 lei.

N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU și A. CORNEA, **Seminar S. Stoilow (1959—1960). Teoria potențialului pe suprafețe riemanniene**, 160 p., 5 lei.

G. CIUCU și R. THEODORESCU, **Procese cu legături complete**, 232 p., 9,85 lei.

C. CONSTANTINESCU, **Seminar M. Neculcea, Teoria mulțimilor**, 108 p., 3,25 lei.

C. CORDUNEANU, **Funcții aproape — periodice**, 191 p., 8,30 lei.

ROMULUS CRISTESCU, **Spații liniare ordonate**, 332 p., 11,10 lei.

I. CUCULESCU, **Seminar O. Onicescu, Algebre Lie**, 148 p., 5,15 lei.

C. FOIAȘ, **Seminar M. Nicolescu 1959—1960. Teoria spectrală în algebre Banach** (**necomutative**) **axată pe noțiunea de rezolventă**, 82 p., 2,85 lei.

ALEXANDRU FRODA, **Algebra superioară** (**fundamente : mulțimi și operații, divizibilitate, spații liniare, forme pătratice**), 455 p., 24,50 lei.

GH. GALBURĂ, **Corpuri de funcții algebrice și varietăți algebrice**, 180 p., 7,85 lei.

M. GHERMĂNESCU, **Ecuații funcționale**, 523 p., 25,60 lei.

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale**, 484 p., 21,50 lei.

CAIUS IACOB, **Introduction mathématique à la mécanique des fluides**, 1 288 p., 66,50 lei.

TRAIAN LALESCU, **Introducere în teoria ecuațiilor integrale**, 135 p., 5,90 lei.

LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice și hidraulice**, 52 p., 18,50 lei.

* * * **Lucrările celui de-al IV-lea Congres al matematicienilor romîni**, 228 p., 8,55 lei.

* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie și topologie, Iași 2—5 iunie 1958**, 264 p., 9,75 lei.

* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie diferențială din 9—12 iunie 1955, organizată de Secția de științe matematice și fizice a Academiei R.P.R.**, 368 p., 9,50 lei.

G. MARINESCU, **Spații vectoriale normate**, 295 p., 6 lei.

G. MARINESCU, **Spații vectoriale topologice și pseudotopologice**, 219 p., 8,80 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie neeuclidiană**, 144 p., 4,30 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferențială neeuclidiană**, 387 p., 13 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă**, 495 p., 25,90 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă. Teoria corespondenței**, 232 p., 10,50 lei.

GH. MIHOC și V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 732 p., 30,70 lei.

GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 142 p., 8,55 lei ; vol. II, 155 p., 8,25 lei.

GR. C. MOISIL, **Funcționarea în mai mulți timpi a schemelor cu relee ideale**, 279 p., 12 lei.

GR. C. MOISIL, **Introducere în algebră**, I. **Inele și ideale**, vol. I, 256 p., 9,10 lei.

GR. C. MOISIL, **Matricele asociate sistemelor de ecuații cu derivate parțiale. Introducere în studiul cercetărilor lui I. N. Lopatinschi**, 64 p., 1,20 lei.

GR. C. MOISIL, **Scheme cu comandă directă cu contacte și relee**, 205 p., 9,65 lei.

ALEXANDRU MYLLER, **Scrieri matematice**, 595 p. + 1 pl., 30,40 lei.

VERA MYLLER-LEBEDEV, **Lecții de algebră**, 396 p., 8,75 lei.

MIRON NICOLESCU, **Analiza matematică**, vol. II, 420 p., 11,90 lei.

OCTAV ONICESCU, **Numere și sisteme aleatoare**, 260 p., 11,20 lei.

OCTAV ONICESCU, **Strategia jocurilor. Cu aplicații la programarea liniară**, 228 p., 8,45 lei.

OCTAV ONICESCU și colab., **Calculul probabilităților și aplicații**, 788 p., 15 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU și R. THEODORESCU, **Seminar de funcții suma sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 123 p., 4,25 lei.

* * * **Opera matematică a lui Alexandru Pantazi**, 496 p., 24,20 lei.

DIMITRIE POMPEI, **Opera matematică**, 535 p. + 1 pl., 30,20 lei.

N. RANCU şi L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicaţii în producţie**, 898 p. + 20 pl., 45 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Teoria funcţiilor de o variabilă complexă**, vol. I, 308 p., 10 lei ; vol. II în colaborare cu Cabiria Andreian-Cazacu, 379 p., 25,70 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. I, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.

GHEORGHE ŢIŢEICA, **Geometria diferenţială proiectivă a reţelelor**, 287 p., 8 lei.

DRAGOŞ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 76 p., 3,15 lei.

SERGIU VASILACHE, **Elemente de teoria mulţimilor şi structurilor algebrice**, 235 p., 5 lei.

GH. VRĂNCEANU, **Leçons de géometrie différentielle**, vol. I, 407 p., 26,50 lei ; vol. II, 428 p., 27,60 lei.

GH. VRĂNCEANU, **Lecţii de geometrie diferenţială**, vol. III, 454 p., 15 lei.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1883

17

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugați să înainteze articolele, notele și recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuș, pe hîrtie de calc. Tabelele și ilustrațiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planșe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea acelorași date în text, tabele și grafice. Explicația figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Citarea bibliografiei în text se va face în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de inițială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanțelor internaționale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conținutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondența privind manuscrisele, schimbul de publicații etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacție, str. Mihail Eminescu, nr. 47, București.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 6, P. 673—804, BUCUREŞTI, 1964

I. P. „Informaţia" —c. 1949

43831

Lei — 12.

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

7

TOMUL 16
1 9 6 4

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎN

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
GH. MARINESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție

Pentru a se asigura colecția completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pe anul 1965.

În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134 — 135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție pe adresa: str. Mihail Eminescu, nr. 47,
București

Revista apare de 10 ori pe an.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1883

TOM. 16, Nr. 7
1964

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

O aniversare scumpă 807

D. MANGERON, Contribuţii la studiul ecuaţiilor polivibrante. I. Metode de calcul numeric al unor noi clase de probleme de contur neliniare 811

SORIN GOGONEA, Cîteva mişcări în medii poroase, în prezenţa unor contururi de alimentare finite 825

IULIAN POPOVICI şi ANDREI POPOVICI, Determinarea cvadrispinorilor ataşaţi cîmpurilor de spin maxim 1 şi 1/2 837

ANATOLIE P. HRISTEV, Teoria covariantă a relaţiilor algebrice spinoriale ale cîmpurilor de spin maxim 1 şi 1/2 . . . 849

VALERIU ȘT. UDRESCU, Asupra spaţiilor fibrate Serre . 861

EUGEN SOÓS, O problemă mixtă pentru un cilindru elastic circular, anizotrop cu neomogeneitate discontinuă 871

MARCEL N. ROȘCULEȚ, Operatori integrali care generalizează ecuaţiile diferenţiale. V. Formule de medie pentru soluţiile analitice ale ecuaţiilor cu derivate parţiale, liniare cu coeficienţi constanţi 885

ELENA UNGUREANU, O metodă de aproximaţie a soluţiei ecuaţiei lui Boussinesq 909

TOMA ALBU, Asupra aplicaţiilor monotone între spaţii topologice 915

V. VODNEV, Asupra unei clase de spaţii riemanniene cu geodezice plane 927

ST. CERC. MAT. TOM., 16, NR. 7, P. 805–934, BUCUREȘTI, 1964

O ANIVERSARE SCUMPĂ

Insurecția armată din august 1944 a constituit începutul revoluției populare, pregătind calea celor mai profunde transformări în toate sectoarele activității umane din țara noastră. Puternică, liberă, stăpînă pe soarta sa, Romînia a înflorit în acești ani ai puterii populare, s-a transformat într-o țară înaintată, cu o industrie înfloritoare, cu o agricultură socialistă în continuă dezvoltare, într-o țară în care pulsează viguros întreaga viață cultural-socială.

Avîntul întregii economii naționale, succesele obținute de poporul nostru în construcția socialistă, descătușarea inepuizabilelor energii creatoare ale maselor, au creat condiții deosebit de prielnice și pentru dezvoltarea științelor.

Construcția bazei economice a societății noi presupune dezvoltarea continuă a științei și a tehnicii, cunoașterea temeinică a celor mai noi descoperiri științifice.

Reforma învățămîntului, efectuată în 1948, a pus întreaga școală pe baze științifice, legînd-o de practica construcției socialiste. Prin această reformă, care a creat facultățile de matematică și de fizică sub forma unor unități precis profilate, au apărut condiții deosebit de favorabile pentru dezvoltarea învățămîntului matematic și pentru formarea într-un timp scurt a unui mare număr de tineri matematicieni.

Înființarea Academiei Republicii Populare Romîne, cel mai înalt for științific al țării, a avut efecte deosebite și asupra avîntului cercetării matematice, în special prin crearea, în 1949, a Institutului de matematică din București, urmată la scurte intervale, de crearea Institutului de matematică al Filialei din Iași și a Institutului de calcul al Filialei din Cluj. În acest mod, în țara noastră se inaugura o formă *nouă* de activitate științifică, în care tinerii matematicieni, alături și sub directa îndrumare a profesorilor lor, se puteau dedica *exclusiv* muncii de cercetare și de creație matematică.

Grație perseverenței, elanului și talentului acestui tineret crescut și format în anii puterii populare, a fost posibilă crearea într-un timp extraordinar de scurt a numeroase nuclee de cercetători în cele mai moderne discipline ale matematicii, care și-au făcut un loc propriu în cercetarea mondială.

Congresul al IV-lea al matematicienilor romîni (1956) a constituit un serios examen al eforturilor depuse de matematicienii romîni. Examenul a fost trecut în mod strălucit. Lucrările Congresului, la care au participat 400 de matematicieni romîni și 74 invitați sau delegați străini, veniți din 18 țări ale lumii, au pus clar în evidență faptul că cea mai mare parte din diversele domenii ale matematicii începeau să fie serios și temeinic cultivate de cercetătorii noștri, îndeosebi de *tinerii* noștri cercetători, și că aportul lor personal în diversele direcții devenea tot mai important. Nivelul înalt al pregătirii și contribuției tinerei noastre generații de matematicieni, orizontul vast al documentării acestora, au fost deosebit elogiate, în mod public, de mulți dintre oaspeții străini ca Hadamard, Hille, Vekua, Denjoy, Segre, Godeaux, Villa etc.

Tinerii absolvenți din 1956, care provocau admirația savanților străini, au justificat pe deplin aprecierile de acum opt ani. Ei sînt astăzi tineri șefi de școală în domeniul respectiv de cercetare. Lucrările acestora sînt frecvent citate, utilizate și continuate de matematicieni din diverse părți ale lumii. Mai mult decît atît, cei mai mulți dintre aceștia (C. Constantinescu, A. Cornea, S. Marcus, A. Halanay etc.) au fost invitați să scrie monografii în colecții străine de largă circulație ; alții au fost invitați să țină cursuri, sau să întocmească rapoarte de sinteză în domeniul specialității respective, la diverse congrese sau conferințe internaționale.

Cercetarea matematică romînă, bucurîndu-se de sprijinul larg al regimului nostru de democrație populară, s-a putut dezvolta prodigios, atît în adîncime cît și în întindere, ajungînd la un nivel neatins pînă acum în istoria țării noastre. Au apărut domenii noi de cercetare, ca topologia generală, analiza funcțională, topologia algebrică, teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale, algebra mecanismelor automate, capitole speciale de mecanică (teoria elasticității, teoria plasticității), lingvistica matematică, statistica matematică etc. Domenii tradiționale de cercetare ale școlii matematice romînești, ca geometria, teoria ecuațiilor cu derivate parțiale, teoria probabilităților, mecanica fluidelor, au fost considerabil lărgite.

Cercetarea matematică efectuată în cadrul secției de științe matematice a Academiei R.P.R. este bogat și semnificativ ilustrată prin amploarea celor două periodice : „Studii și cercetări matematice”, cu 10 fascicole anual, totalizînd 1300 pagini și „Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées”, cu 1000 pagini anual.

Ea se mai reflectă și în numărul crescînd de monografii sau tratate, publicate de Editura Academiei R.P.R., sau de alte edituri de specialitate. Multe din acestea au fost distinse cu premiul de Stat.

Printre acestea citām tratatul de teoria funcțiilor de o variabilă complexă, de acad. S. Stoilow, tratatul de geometrie diferențială de acad. G. Vrănceanu, tratatul de analiză matematică de acad. Miron Nicolescu, lucrarea acad. N. Teodorescu, monografia acad. Caius Iacob, monografia acad. G. Mihoc și O. Onicescu, lucrarea consacrată algebrei mecanismelor automate a acad. Gr. C. Moisil etc.

Alte monografii sau lucrări au fost distinse cu premiul Academiei R.P.R.

Citām, printre acestea, lucrările cercetătorilor A. Halanay, A. Cornea, C. Foiaș și Corneliu Constantinescu.

Această scurtă trecere în revistă a unora dintre aspectele muncii de cercetare în domeniul matematicii, de la Eliberare și pînă astăzi, oferă o imagine a muncii prodigioase, entuziaste, depuse de matematicienii noştri în ultimii douăzeci de ani, au sprijinul activ şi înțelept al guvernului şi partidului, pentru afirmarea tot mai puternică pe plan internațional a şcolii matematice romîne, pentru creşterea de cadre tinere, cu înaltă pregătire, în dragoste de muncă şi de patria noastră socialistă.

Avem astăzi o generație de tineri matematicieni cu care s-ar putea mîndri orice şcoală matematică din lume.

Acesta este darul cel mai prețios pe care astăzi, la această a douazecea aniversare a Eliberării, matematicienii mai vîrstnici îl aduc patriei noastre, împreună cu angajamentul de a răspunde cu sforțări înnoite şi cu noi succese încrederii pe care conducerea de Stat şi de Partid o pune în munca oamenilor noştri de ştiință.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL ECUAȚIILOR POLIVIBRANTE

I. METODE DE CALCUL NUMERIC AL UNOR NOI CLASE DE PROBLEME DE CONTUR NELINIARE

DE

D. MANGERON [1]

1. Cu ocazia simpozionului consacrat vibrațiilor neliniare, desfășurat la Kiev sub egida Uniunii Internaționale de Mecanică Teoretică și Aplicată (IUTAM) autorul a prezentat, într-o elaborare succintă, o nouă metodă interesînd mecanica neliniară a vibrațiilor, numită *metoda ecuațiilor integrale* [1], extinsă între timp, în colaborare cu L.E. Krivoșein [2], [3], la alte schematizări matematice ale variatelor fenomene ale naturii și folosite și de alți cercetători [4]–[6].

În cele ce urmează se expun, sprijinindu-ne pe unele rezultate enunțate de autor în [7] și demonstrate în detaliu într-un vast studiu aflat în *Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università di Padova* [8], cîteva metode de aproximație a soluțiilor unor probleme de contur relative la ecuații integro-diferențiale neliniare „polivibrante"

$$M^k[v(\xi_0,\eta_0)]+\sum_{i=k-2}^{0}\sum_{j=k-2}^{0}A_{ij}(\xi_0,\eta_0)\frac{\partial^{i+j}v(\xi_0,\eta_0)}{\partial\xi_0^i\,\partial\eta_0^j}=f^\star[\xi_0,\eta_0;v(\xi_0,\eta_0)]+$$
$$+\iint\limits_{P^\star}K^\star(\xi_0,\eta_0;\ \xi^\star,\eta^\star)\,f[\xi^\star,\eta^\star;\ v(\xi^\star,\eta^\star)]\,d\xi^\star d\eta^\star,\quad P^\star=[a^\star,c^\star]\times[b^\star,d^\star]. \tag{1}$$

Aceste ecuații sînt caracterizate prin prezența operatorului diferențial exterior polivibrant

$$M^k\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial\eta_0^2}\right)^{(k)}. \tag{2}$$

---

[1] Institutul politehnic Iași.

Ele se reduc, în urma transformării de variabile

$$\xi_0 = \frac{1}{2}(x+y),\ \eta_0 = \frac{1}{2}(x-y), \tag{3}$$

la ecuaţii integro-diferenţiale neliniare cu derivata de ordin superior a lui M. Picone [9],

$$\begin{aligned} D^k u(A) + \sum_{i=k-2}^{0} \sum_{j=k-2}^{0} B_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} = f_1[A, u(A)] + \\ + \iint_P K(A, B) f_2 [B, u(B)] \, \mathrm{d}B. \end{aligned} \tag{4}$$

Atare ecuaţii au fost amplu studiate în diferite cazuri liniare, ca de exemplu,

$$\begin{aligned} D^k u(A) + \lambda \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} = f(A) + \\ + \lambda \iint_S \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} \, dB, \end{aligned} \tag{5}$$

în colaborare cu L.E. Krivoşein [10].

2. Se consideră problema lui Dirichlet

$$u(A)|_{\mathrm{FR}} = \varphi_0(A),\ D^i u(A)|_{R_1} = \varphi_i(A) \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1), \tag{6}$$

relativă la ecuaţia integro-diferenţială neliniară (4), în care prin simbolul $D^k \equiv \dfrac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k}$ s-a notat derivata totală de ordin k în sensul lui M. Picone [11], $B_{ij}(A) \equiv B_{ij}(x, y)$, $\varphi_i(A)$, $K(A, B)$ sînt funcţii date continue în raport cu toate argumentele sale pentru toţi $A, B \in P = [a, c] \times [b, d]$; $\mathrm{d}B = \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta : f_1[A, u(A)], f_2[B, u(B)]$ sînt funcţii date, în general vorbind, neliniare în raport cu cel de-al doilea argument pentru toţi $A, B, u \in g \{P, r_1 \leqslant |u| \leqslant r_2\}$; FR este frontierea domeniului P şi

$$R_1 = \begin{cases} x = a, & b \leqslant y \leqslant d, \\ y = b, & a \leqslant x \leqslant c. \end{cases}$$

Fie $\Phi(A)$ o funcţie cunoscută de $2k$ ori continuu derivabilă satisfăcînd condiţiile de contur neomogene (6) şi $M(A, B)$ funcţia [2] analogă funcţiei lui Green relativă la problema de contur

$$u(A)|_{\mathrm{FR}} = 0,\ D^i u(A)|_{R_1} = 0\ (i = 1, 2, \ldots, k-1),\ D^k u(A) = 0, \tag{7}$$

---

[2] Funcţia $M(A, B)$ a fost numită de mai mulţi autori „funcţia lui Mangeron'' [12]–[14].

$$M(A, B) \equiv \begin{cases} \dfrac{[(x-a)(c-\xi)(y-b)(d-\eta)]^{k-1}}{[(c-a)(d-b)]^{k-1}(k-1)!^2}, & x \leqslant \xi,\ y \leqslant \eta, \\ \left\{\dfrac{[(x-a)(c-\xi)]^{k-1}}{(c-a)^{k-1}} - (x-\xi)^{k-1}\right\} \cdot \\ \qquad\qquad \dfrac{[y-b)(d-\eta)]^{k-1}}{(d-b)^{k-1}(k-1)!}, & x \geqslant \xi,\ y \leqslant \eta, \\ \left\{\dfrac{[(y-b)(d-\eta)]^{k-1}}{(d-b)^{k-1}} - (y-\eta)^{k-1}\right\} \cdot \\ \qquad\qquad \dfrac{[(x-a)(c-\xi)^{k-1}}{(c-a)^{k-1}(k-1)!}, & x \leqslant \xi,\ y \geqslant \eta, \\ \left\{\dfrac{[(x-a)(c-\xi)]^{k-1}}{(c-a)^{k-1}} - (x-\xi)^{k-1}\right\} \cdot \\ \left\{\dfrac{[(y-b)(d-\eta)]^{k-1}}{(d-b)^{k-1}} - (y-\eta)^{k-1}\right\}, & x \geqslant \xi,\ y \geqslant \eta. \end{cases} \tag{8}$$

Din (4) şi (6) se obţine

$$\begin{aligned} u(A) = \Phi(A) + \iint_P M(A, B)\,[f_1[B, u(B)]\,\mathrm{d}B - \sum_{i=k-2}^{0} \sum_{j=k-2}^{0} B_{ij}(B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} + \\ + \iint_P K(B, C) f_2[C, u(C)]\,dC]\,\mathrm{d}B = \Phi(A) - \iint_P M(A, B)\,S[u(B)]\,\mathrm{d}B + \\ + \iint_P f_3[A, B, u(B)]\,\mathrm{d}B, \end{aligned} \tag{9}$$

în care s-a notat

$$\begin{aligned} f_3[A, B, u(B)] &\equiv M(A, B) f_1[B, u(B)] + f_2[B, u(B)] \iint_P M(A, C) K(C, B)\,\mathrm{d}C, \\ S[u(B)] &\equiv \sum_{i=k-2}^{0} \sum_{j=k-2}^{0} B_{ij}(B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j}. \end{aligned} \tag{10}$$

Introducînd funcţia

$$\varphi(A) \equiv S[u(A)] \tag{11}$$

şi operînd cu operatorul S [.] asupra ecuaţiei (9) se parvine la următoarea ecuaţie integrală

$$\varphi(A) = \Phi_1(A) + \iint_P M_2(A, B) \varphi(B)\,\mathrm{d}B + \iint_P f_4[A, B, u(B)]\,\mathrm{d}B, \tag{12}$$

în care $\Phi_1 (A)$, $M_2 (A, B)$ sînt funcţii cunoscute pentru toţi $A, B \in P$; $f_4[A, B, u(B)] \equiv S_A [f_3(A, B,, u (B)]$. Fie $\Gamma (A, B)$—nucleul rezolvant al nucleului $M_2 (A, B)$. Din (12) rezultă

$$\begin{aligned} \varphi(A) = \Phi_1(A) + \iint_P f_4[A, B, u(B)]\,\mathrm{d}B + \iint_P \Gamma(A, B)[\,\Phi_1(B) + \\ + \iint_P f_4[B, C, u(C)\,\mathrm{d}C]\,\mathrm{d}B \equiv \Phi_2(A) + \iint_P f_6\,[A, B, u(B)]\mathrm{d}B \end{aligned} \tag{13}$$

şi prin urmare, din (13), ţinînd seama de (9), se obţine ecuaţia integrală chivalentă

$$u(A) = \Phi_3(A) + \iint_P f_6[A, B, u(B)]\,\mathrm{d}B. \tag{14}$$

3. Pentru rezolvarea cu aproximaţie a ecuaţiei (14) vom folosi metoda ecuaţiilor integrale expusă de autor în [1]. Formăm în acest scop ecuaţia funcţională auxiliară

$$w(A) = \Phi_3(A) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} c_{ij} f_6\,[A, (x_i, y_j), w(x_i, y_j)], \; (x_i, y_j) \in P, \tag{15}$$

în care c_{ij} sînt coeficienţi cunoscuţi, corespunzători cu formula de cubatură aleasă în procesul de aproximaţie[3]). Punînd în (15) $i = 1, 2,\ldots,s$; $j = 1, 2,\ldots r$, se parvine la un sistem de ecuaţii numerice neliniare, pe care-l vom transcrie sub forma vectorial-matricială

$$W = \Phi_4 + T(W). \tag{16}$$

Din (16) rezultă că dacă norma operatorului T satisface inegalitatea

$$\| T \| < 1, \tag{17}$$

soluţia sistemului (16) există şi este unică. Prin urmare, funcţia $w(A)$ se determină într-un mod univoc. Dacă soluţia sistemului (16) se determină cu aproximaţie, atunci şi funcţia $w(A)$ se determină şi ea cu aproximaţie. Fie σ_{ij} ($i = 1, 2,\ldots s$; $j = 1, 2,\ldots, r$) o soluţie (exactă sau cu aproximaţie) a sistemului (16). În corespondenţă cu solutia σ_{ij}, soluţia aproximativă a problemei (4), (6) este reprezentată prin funcţia

$$u_{sr}(A) = \Phi_3(A) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} c_{ij} f_6[A, (x_i, y_j), \sigma_{ij}]. \tag{18}$$

---

[3]) Numeroase formule de cubatură noi au fost stabilite cu ocazia recentului Colocviu de aproximarea funcţiilor cu aplicaţii la Calculul numeric, Cluj, 15–19.XI.1963, iar o metodă nouă de calcul a coeficienţilor de cubatură a fost dată de S. D. Sobolev [15].

În cazul cînd nucleul rezolvant $\Gamma\ (A,\ B)$ nu este cunoscut, construim, folosind (12), în vederea determinării aproximative a funcției $\varphi\ (A)$, ecuația redusă

$$\overline{\varphi}(A)=\Phi_1(A)+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} c_{ij}M_2(A,(x_i,y_j))\,\overline{\varphi}(x_i,y_j)+\psi\,[A,\overline{u}], \tag{19}$$

în care s-a notat

$$\psi\,[A,\overline{u}]\equiv\iint_P f_4[A,\ B,\ \overline{u}(B)]\,\mathrm{d}B.$$

Dacă inegalitatea

$$\det \| c_{ij}\, M_2\,[(x\alpha,\ x\beta),(x_i,\ y_j)]\,\| \neq 0 \tag{20}$$

este îndeplinită, din (19) se determină mai întîi $\varphi\ (x_i,\ y_j)$ și se obține apoi

$$\overline{\varphi}(A)=\Phi_{sr}(A)+\iint_P f_7[A,\ B,\ \overline{u}(B)]\,\mathrm{d}B, \tag{21}$$

în care $\Phi_{sr}(A)$ și $f_7[A,\ B,\ \overline{u}\ (B)]$ sînt funcții cunoscute de argumentele lor. Introducînd în (9) expresia funcției $\overline{\varphi}\ A$, dată prin (21), se obține următoarea ecuație integrală

$$\begin{aligned} z_{sr}(A)=\Phi(A)+\iint_P f_3\,[A,\ B,\ z_{sr}(B)]\,\mathrm{d}B-\iint_P M(A,\ C)\,[\Phi_{sr}(C)\ +\\ +\iint_P f_7[C,B,\ z_{sr}(B)]\,\mathrm{d}B]\mathrm{d}C\equiv\psi_{sr}(A)+\iint_P f_8[A,\ B,\ z_{sr}(B)]\mathrm{d}B, \end{aligned} \tag{22}$$

din care vom căuta să determinăm soluția aproximativă $z_{sr}(A)$ a problemei luată în studiu.

Din (22) rezultă că pentru existență și unicitate a funcției $z_{sr}(A)$ ajunge să fie satisfăcute inegalitățile

$$|\,f_8\,[A,\ B,\ v_2\,(B)]-f_8\,[A,\ B,\ v_1(B)]\,|\leqslant l\,(A,B)\,|\,v_2\,(B)-v_1(B)\,|, \tag{23}$$

$$\max_P \iint_P l\,(A,\ B)\,\mathrm{d}B<1, \tag{24}$$

în care $\{\,v_1,\ v_2,\ A\,\}\in g$ și $l\ (A,\ B)$ este „constanta" lui Lipschitz.

Dacă inegalitățile (23), (24) sînt satisfăcute, funcția $z_{sr}\ (A)$ poate fi efectiv construită prin aplicarea metodei aproximațiilor succesive a lui Picard. În ipoteza că inegalitățile (23), (24) nu sînt satisfăcute, construim ecuația redusă de forma (15) :

$$u_{sr}(A)=\psi_{sr}(A)+\sum_{\alpha=1}^{\nu}\sum_{\beta=1}^{\lambda} c_{\alpha\beta}f_8\,[A,(x_\alpha,\ y_\beta),\ u_{sr}(x_\alpha,\ y_\beta)]\ ;\ (x_\alpha,\ y_\beta)\in P \tag{25}$$

și procedăm în mod analog cu ceea ce s-a expus în legătură cu ecuația redusă (15) și anume : formăm sistemul de ecuații

$$u_{sr}(x_i, y_j) = \psi_{sr}(x_i, y_j) + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{\beta=1}^{\lambda} c_{\alpha\beta} f_8 \left[(x_i, y_j), (x_\alpha, y_\beta), u_{sr}(x_\alpha, y_\beta)\right],$$
$$(i = 1,2,\ldots,\nu\,;\; j = 1,2,\ldots,\lambda), \qquad (26)$$

din care determinăm (exact sau cu aproximație) $\overline{u}_{sr}(x_\alpha, y_\beta)$, de unde se deduce soluția aproximativă $\overline{u}_{sr}(A)$ a problemei (4), (6).

Raționamentele expuse mai sus permit să se enunțe următoarele teoreme.

TEOREMA 1. *Dacă* : a) *problema* (4), (6) *posedă în domeniul* P *o soluție unică de 2k ori continuu derivabilă* ; b) *sînt îndeplinite inegalitățile* (20), (23), (24), *atunci soluția aproximativă a problemei* (4), (6) *poate fi reprezentată sub forma*

$$\overline{u}_{sr}(A) = \psi_{sr}(A) + \iint_P f_8 [A, B, \omega_{sr}(B)]\, \mathrm{d}B, \qquad (27)$$

în care prin $\omega_{sr}(A)$ *s-a notat soluția* (*exactă sau aproximativă*) *a ecuației integrale*

$$v(A) = \psi_{sr}(A) + \iint_P f_8 [A, B, v(B)]\, \mathrm{d}B \qquad (28)$$

ce poate fi construită prin aceeași metodă care s-a folosit la construcția funcției (*18*).

TEOREMA 2. *Dacă* : a) *problema* (4), (6) *posedă o soluție unică de 2k ori continuu derivabilă în domeniul* P ; b) $\Gamma(A, B)$ *este nucleul rezolvant al nucleului* $M_2(A, B)$; c) *este îndeplinită inegalitatea* (*17*), *atunci soluția aproximativă a problemei considerate poate fi construită pe baza formulei* (*18*).

4. Dacă funcția $f_6[A, B, u(B)]$ posedă în domeniul g derivate continue de primul și al doilea ordin în raport cu cel de-al treilea argument, soluția aproximativă a problemei (4), (6) poate fi construită pe baza metodei lui Newton, sub forma preconizată de L. V. Kantorovici [16].

Drept aproximație de ordinul n a funcției $u(A)$ se consideră în acest caz soluția ecuației

$$\begin{aligned} u_n(A) - \iint_P \frac{\partial f_6[A, B, u_{n-1}]}{\partial u_{n-1}} [u_n(B) - u_{n-1}(B)]\, \mathrm{d}B &= \\ = \iint_P f_6 [A, B, u_{n-1}(B)]\, \mathrm{d}B + \Phi_3(A). \end{aligned} \qquad (29)$$

Aplicînd metoda inducției matematice complete se demonstrează următoarele teoreme.

TEOREMA 3. *Presupunem că în domeniul* g : 1) *funcțiile* $f_6[A, B, u(B)]$, $\frac{\partial f_6[A, B, u(B)]}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 f_6[A, B, u(B)]}{\partial^2 u}$ *există și sînt continue, fiind totodată* $\left|\frac{\partial^2}{\partial u^2} f_6[A, B, u(B)]\right| \leqslant \alpha = const.$; 2) *1 nu este o valoare proprie a nucleului*

$$\frac{\partial}{\partial u} f_6[A, B, u_0(B)]; \tag{30}$$

$$3)\ u_0(A) \mid \leqslant M, \iint_P \mid R_0(A, B) \mid \mathrm{d}B \leqslant \beta = \text{const.}, \tag{31}$$

în care prin $R_0\,(A, B)$ *s-a notat nucleul rezolvant al nucleului* (30); 4) *are loc inegalitatea*

$$\varepsilon_0 \leqslant 1 : [2\delta\,(1 + \beta)], \tag{32}$$

în care s-a notat

$$\varepsilon_n = \max_P \mid \varepsilon_n(A) \mid,$$

$$\varepsilon_n(A) \equiv \Phi_3(A) + \iint_P f_6[A, B, u_n(B)]\, \mathrm{d}B - u_n(A), \tag{33}$$

$$\delta = \alpha\,(1 + \beta)\,(a - c)\,(b - d).$$

atunci, dacă funcția $\Phi_3\,(A)$ *este continuă, ecuația* (29) *posedă o soluție unică* $u_n\,(A)$ *și de 2k ori continuu derivabilă astfel încît toate valorile* $u_n\,(A)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *sînt cuprinse într-o bandă* h, *definită prin*

$$\mid u_n(A) - u_0(A) \mid \leqslant h,\ h = \{1 - [1 - 2\,\varepsilon_0\,\delta\,(1 + \beta)^{\frac{1}{2}}]\} : \delta,\ A \in P.$$

TEOREMA 4. *Succesiunea* $\{u_n\,(A)\}$ *converge pentru toți* $A \in P$ *către funcția* $u\,(A)$ *absolut și uniform, deviația* $\mid u_n\,(A) - u\,(A) \mid$ *fiind caracterizată prin evaluarea*

$$\varepsilon_n \leqslant [\alpha(a-c)\,(b-d)\ h^2 : 2\}\,\{\delta h : [2\,(1 - \delta h)]\}2^{n-2} \quad (n = 1,2,\ldots). \qquad (34$$

Dacă are loc totodată și inegalitatea

$$l = 1 - \max_g \iint_P \left| \frac{\partial f_6[A, B, u]}{\partial u} \right| \mathrm{d}B > 0, \tag{35}$$

atunci eroarea corespunzătoare pasului de ordin n este evaluată pe baza inegalității

$$\max_P \left| u_n(A) - u(A) \right| \leqslant \varepsilon_n : l\ (A \in P). \tag{36}$$

5. Dacă nu este cunoscut nucleul rezolvant al nucleului ce figurează în ecuația (29), se poate determina funcția $u_n(A)$ cu aproximație. Să folosim în acest scop metoda expusă la punctul 3. Din (29) avem

$$\delta_n(A) - \iint_P M_{n-1}(A, B)\,\delta_n(B)\,\mathrm{d}B = \varepsilon_n(A), \tag{37}$$

în care s-a pus

$$M_{n-1}(A, B) \equiv \frac{\partial}{\partial u_{n-1}} f_6[A, B, u_{n-1}(B)]. \tag{38}$$

Să folosim formula

$$\iint_P M_{n-1}(A,B)\delta_n(B)\,\mathrm{d}B = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} c_{ij} M_{n-1}(A, (x_i, y_j))\delta_n(x_i, y_j) + R_{sr}(A), \tag{39}$$

în care c_{ij} sînt coeficienți cunoscuți corespunzători la formula de cubatură aleasă, iar R_{sr} (A) este restul unei atare formule. Presupunem că determinantul Δ_{sr} al sistemului

$$\sigma_{\alpha\beta} - \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} c_{ij} M_{n-1}[(x_\alpha, y_\beta), (x_i, y_j)]\sigma_{i_j} = \varepsilon_n(x_\alpha, y_\beta) + R_{sr}(x_\alpha, y_\beta), \tag{40}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, s;\ \beta = 1, 2, \ldots, r),$$

este diferit de zero. Atunci din (40) se deduce

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{r} \Delta_{ij\,\alpha\beta}[\varepsilon_n(x_\alpha, y_\beta) + R_{sr}(x_\alpha, y_\beta)], (\alpha=1, 2, \ldots, s;\ \beta=1, 2, \ldots, r), \tag{41}$$

în care prin $\Delta_{ij\alpha\beta}$ s-au notat numere cunoscute. În corespondență cu aceasta drept soluție aproximativă a problemei de contur considerate (4), (6) se consideră funcția

$$\begin{gathered} u_{nsr}(A) = \Phi_3(A) + \iint_P \Big\{ f_6[A, B, u_{n-1}(B)] + \frac{\partial f_6[A, B, u_{n-1}(B)]}{\partial u_{n-1}} \times \\ \times \Big[\varepsilon_n(B) + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} c_{ij} M_{n-1}[B, (x_i, y_j)] \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{r} \Delta_{ij\,\alpha\beta}\,\varepsilon_n(x_\alpha, y_\beta) \Big]\Big\}\,\mathrm{d}B. \end{gathered} \tag{42}$$

Prin urmare, dacă pentru toți $A \in P$ au loc inegalitățile

$$|u(A) - u_n(A)| \leqslant \rho_n;\quad |u_{nsr}(A) - u_n(A)| \leqslant \theta_{nsr},$$

atunci

$$|u(A) - u_{nsr}(A)| \leqslant \rho_n + \theta_{nsr},\quad A \in P. \tag{43}$$

6. Presupunem acum că în (4) avem $B_{ij}(A) \equiv 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k-r)$.

Atunci ecuația (9) ia forma

$$\begin{gathered} u(A) = \Phi(A) + \iint_P M(A, B)\{f_1[B, u(B)] - B_{00}(B)\,u(B) + \\ + \iint_P K(B, C) f_2[C, u(C)]\,\mathrm{d}C\}\,\mathrm{d}B \equiv \Phi(A) + \iint_P f_9[A, B, u(B)]\,\mathrm{d}B. \end{gathered} \tag{44}$$

Prin urmare soluţia ecuaţiei (44) este totodată şi soluţia problemei luată în studiu (4), (6). Presupunem că funcţia $f_9\,[A,\ B,\ u\,(B)]$ admite derivata finită în raport cu u şi că

$$\frac{\partial f_9\,[A,\ B,\ u]}{\partial u} \geqslant 0, \qquad \Phi\,(A) \geqslant 0, \tag{45}$$

$$l = 1 - \max_{g} \iint_P \frac{\partial f_9\,[A,\ B,\ u\,(B)]}{\partial u}\,\mathrm{d}B > 0,\ A,\ u \in g. \tag{45a}$$

Atunci, dacă funcţia $\varphi_0\,(A)$ este astfel încît este îndeplinită inegalitatea integrală

$$L\,[\varphi_0] \equiv \varphi_0\,(A) - \Phi\,(A) - \iint_P f_9[A,\ B,\ \varphi_0(B)]\,\mathrm{d}B \equiv \xi_0\,(A) \leqslant 0,\ \ A \in P, \tag{46}$$

rezultă

$$\varphi_0(A) \leqslant u(A),\ \ A \in P. \tag{47}$$

În adevăr, avem succesiv

$$\varphi_0\,(A) - u\,(A) \leqslant \iint_P \{f_9[A,\ B,\ \varphi_0\,(B)] - f_9[A,\ B,\ u\,(B)]\}\,\mathrm{d}B =$$
$$= \iint_P \frac{\partial f_9\,[A,\ B,\ \bar{u}]}{\partial \bar{u}}\,[\varphi_0(B) - u\,(B)]\,\mathrm{d}B,$$

de unde se deduce nemijlocit inegalitatea (47).

Printr-o verificare directă ne convingem că funcţiile

$$\varphi_i\,(A) = \Phi\,(A) + \iint_P f_9[A,\ B,\ \varphi_{i-1}(B)]\,\mathrm{d}B, \qquad (i=1,2,...) \tag{48}$$

satisfac, pentru toţi $A \in P$, şirul de inegalităţi

$$\varphi_0(A) \leqslant \varphi_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_i(A) \leqslant \ldots \leqslant u\,(A). \tag{49}$$

Dacă funcţia $\psi_0\,(A)$ este astfel încît are loc inegalitatea

$$L[\psi_0] \equiv \eta_0(A) \geqslant 0,\ \ A \in P, \tag{50}$$

se parvine, făcînd şirul de raţionamente cu totul analog şirului de raţionamente precedente, la mulţimea de inegalităţi

$$u\,(A) \leqslant \ldots \leqslant \psi_i(A) \leqslant \ldots \leqslant \psi_1(A) \leqslant \psi_0(A), \tag{51}$$

în care funcţiile $\psi_i(A)$ se determină prin formulele

$$\psi_i\,(A) = \Phi\,(A) + \iint_P f_9[A,\ B,\ \psi_{i-1}(B)]\,\mathrm{d}B, \qquad (i = 1,\ 2,\ldots). \tag{52}$$

Pe baza celor expuse mai sus avem

$$\left.\begin{matrix} u(A)-\varphi_i(A) \\ \psi_i(A)-u(A) \end{matrix}\right] \leqslant \psi_i(A)-\varphi_i(A),\ A\in P. \tag{53}$$

Totodată, în virtutea condiției (45a), au loc inegalitățile

$$\lim_{i\to\infty}\psi_i(A)=\lim_{i\to\infty}\varphi_i(A)=u(A),\ A\in P. \tag{54}$$

Prin aceasta s-a demonstrat următoarea teoremă :

TEOREMA 5. *Dacă* $B_{ij}(A)\equiv D$ $(i, j=1, 2,\ldots, k-2)$ *sînt satisfăcute, inegalitățile* (45), (45a) *și funcțiile* $\varphi_0(A)$, $\psi_0(A)$ *de 2k ori continuu derivabile sînt astfel încît se verifică respectiv inegalitățile* (46), (50), *atunci procesul algoritmic construit pe baza formulelor* (48), (52) *converge absolut și uniform către soluția problemei* (4), (6), *iar deviația între funcțiile* $\varphi_i(A)$, $\psi_i(A)$ *și soluția* $u(A)$ *a problemei considerate este evaluată pe baza inegalității* (53).

Observații. Dacă, de exemplu, sînt îndeplinite condițiile

$$\Phi(A)\geqslant 0,\ \frac{\partial f_9[A,\ B,\ u]}{\partial u}\leqslant 0,\ l=1-\max_g\iint_P\left|\frac{\partial f_9}{\partial u}\right|\mathrm{d}B>0, \tag{55}$$

atunci avem succesiv șirul de inegalități

$$\begin{aligned}\varphi_0(A)\leqslant\varphi_2(A)\leqslant\ldots\leqslant\varphi_{2i}(A)\leqslant\ldots\leqslant u(A)\leqslant\ldots\leqslant\varphi_{2i-1}(A)\leqslant\ldots\leqslant\\ \leqslant\varphi_3(A)\leqslant\varphi_1(A)\end{aligned} \tag{56}$$

$$\left.\begin{matrix} u(A)-\varphi_{2i}(A) \\ \hline \varphi_{2i+1}(A)-u(A) \end{matrix}\right]\leqslant\varphi_{2i+1}(A)-\varphi_{2i}(A) \tag{57}$$

și prin urmare și egalitățile la limită

$$\lim_{i\to\infty}\varphi_{2i}(A)=\lim_{i\to\infty}\varphi_{2i+1}(A)=u(A). \tag{58}$$

7. Dacă condițiile de anulare identică a funcțiilor $B_{ij}(A)$ $(i, j=1, 2,\ldots, k-2)$ nu au loc, atunci, așa cum a observat L.E. Krivoșein în [17] se poate construi, în ipoteză că anumite condiții sînt îndeplinite (de exemplu, analogele matriciale ale condițiilor (45), (45a), (46), (50)), trecînd la ecuația matricială

$$U_0(A)=\Phi_0(A)+\iint_P M[A,\ B,\ U_0(B)]\,\mathrm{d}B, \tag{59}$$

procesul de aproximație a lui S.A. Ciaplîghin, folosit în hidrodinamică de acad. C. Iacob [18].

8. Metodele expuse mai sus pot fi aplicate cu succes, cu modificările corespunzătoare inerente, la rezolvarea problemei de contur (6) relativă la ecuaţia integro-diferenţială

$$\begin{aligned} D^k u(A) + \sum_{i=k-2}^{0} \sum_{j=k-2}^{0} B_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} &= f_1[A, u(A)] + \\ &+ \iint_P K[A, B, u(B)]\,\mathrm{d}B \end{aligned} \tag{60}$$

şi, fireşte, la diferite clase de ecuaţii integro-diferenţiale polivibrante liniare, aşa cum s-a făcut, de exemplu, acest lucru într-un studiu vast datorit lui D. Mangeron şi L.E. Krivoşein [10] în legătură cu clasa de ecuaţii

$$\begin{aligned} D^k u(A) = f(A) + \lambda \iint_S \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j}\,\mathrm{d}B - \\ - \lambda \sum_{i=k-2}^{0} \sum_{j=k-2}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} \end{aligned} \tag{61}$$

ş. a.

9. Rezultatele obţinute, ce vor fi continuate în [19] printr-un studiu amplu relativ la comportarea calitativă a soluţiilor problemelor

$$D^i u\big|_{x=a} = \alpha_i(y), \quad D^i u\big|_{y=b} = \beta_i(x), \qquad (i = 0, 1, \ldots, k-1), \tag{62}$$

referitoare la clase de ecuaţii integro-diferenţiale

$$D^k u(A) = f_1[A, u(A)] + \iint_{ab}^{xy} K(A, B) f_2[B, u(B)]\,\mathrm{d}B \tag{63}$$

şi

$$\begin{aligned} D^k u(A) + \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} A_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} - \iint_{P_1} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial t^i \partial \tau^j}\,\mathrm{d}B = \\ = f(A) + \iint_P K(A, B) S[B, u(B)]\,\mathrm{d}B, \end{aligned} \tag{64}$$

$$P_1 = \{a \leqslant t \leqslant x;\ b \leqslant \tau \leqslant y\},$$

răspund la problematica crescîndă a schematizărilor matematice sub forma de ecuaţii sau sisteme de ecuaţii integro-diferenţiale de ordin superior, liniare sau neliniare, cu operatori diferenţiali exteriori calorici şi policalorici [20], [21]. Ele se referă la operatori ai undelor polivibranţi, eliptici şi în particular armonici şi poliarmonici [22], [23], aşa după cum rezultă, de exemplu, din [24], [24, p. 185–186]; [24, p. 180], [24, p. 107]. Metodele elaborate de autor, singur sau în colaborare cu L.E. Krivoşein, conduc între altele la rezolvarea cu aproximaţie dorită a unor recente schematizări de seamă a fenomenelor naturii sau de tehnică inginerească, cum sînt acelea din cadrul teoriei matematice a jeturilor laterale, elaborată şi experimentată cu deosebit succes de acad. Elie Carafoli [25]. Ele nu cuprind încă schematizări matematice ale unor fenomene de magnetofluidogazodinamică [26], [27] sau de fizica reactorilor [28] şi fizica nucleară [29], sub forma în care aceste ecuaţii au fost prezentate în lucrările citate mai sus.

Primită la redacţie la 16 martie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. D. Mangeron, *The Integral Equations Method in Nonlinear Mechanics.* Труды Международного Симпозиума по нелинейным колебаниям, Акад. Наук Украин. ССР, Киев, 347—350 (1963).
2. D. Mangeron, *Risolubilità e struttura delle soluzioni dei problemi al contorno non omogenei di Goursat e di Dirichlet per le equazioni integro-differenziali lineari e derivate parziali d'ordine superiore.* Accademia Naz. dei Lincei, Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, **XXXIV**, *2*, 118–122 (1963).
3. D. Mangeron, L. E. Krivošein, *Valutazione degli errori commessi in alcuni metodi di calcolo numerico delle soluzioni di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali d'ordine superiore.* Academia Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat., s8., **XXXIV**, *2*, 123–129 (1963).
4. St. Rusciór, *Sul metodo integrale applicato ad alcuni equazioni integro-differenziali non lineari.* Accademia Naz. dei Lincei. Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat., s.8, **XXXV**, *6* (1963).
5. F. S. Rossi, *Sul metodo di Mangeron in alcuni problemi non lineari.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **IX(XIII)**, *3–4* (1963).
6. F. G. Mazzella, *Alcuni teoremi concernenti i problemi di Mangeron-Krivošein.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **IX(XIII)**, *3–4* (1963).
7. D. Mangeron, *O teoremă de existenţă şi de unicitate a soluţiilor problemelor lui Dirichlet pentru o clasă de ecuaţii integro-diferenţiale neliniare cu derivate parţiale.* Comunic. Acad. R.P.R., **XIII**, *12*, 1031–1034 (1963).
8. D. Mangeron, L. E. Krivošein, *Sulla risoluzione di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate parziali.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **XXXIV**, *1*–250, 1964.
9. M. Picone, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica.* Annales Sci. de l'Univ. de Jassy, I. Sectionn (Math., Phys., Chimie), **XXVI**, *1*, 183–232 (1940).
10. D. Mangeron, L. E. Krivošein, *Sopra i problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate parziali con derivata d'ordine superiore di Picone.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **XXXIII**, 226–266 (1963).
11. D. Mangeron, L. E. Krivošein, *Sopra una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone* (*A Mauro Picone nel suo 75° compleanno*). Accademia Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat. s.8, **XXXI**, *1–2*, 27–32 (1961).
12. M. Salvadori, *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica.* Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa, s. II, **V**, 51–72 (1963).
13. Stampacchia G., *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali del tipo iperbolico.* Giorn. di Mat., s. **IV**, **78**, 81–96 (1948–1949).
14. F. Manaresi, *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caracteristiche reali doppie.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **XXIII**, 163–213 (1954).
15. С. Д. Соболев, *Об одном приеме вычисления коеффициентов для формул механических кубатур.* Доклады АН СССР, **150**, *6*, 1238—1241 (1963).
16. Л. В. Канторович, *Об одном методе нахождения приближенных решений дифференциальных уравнений.* Успехи мат. наук, **3**, *6*, 89—185 (1948).

17. D. Mangeron, L. E. Krivošein, *Some computation methods concerning boundary value problems related to Nonliniar Mechanics*. Revue Roumaine Sci. Techn., Mécanique appl., **I(IX)**, 1964 (sub tipar).
18. C. Iacob, *Introduction mathématique a la Mécanique des fluides*. Acad. R.P.R., Gauthier-Villars, Paris, 1960.
19. D. Mangeron, L. E. Krivošein, *Probleme de contur pentru ecuaţii integro-diferenţiale cu operatori de tip parabolic*. Studii şi cercetări matematice, **XIV** (1964).
20. E. J. Scott, *On the Non-Linear One-Dimensional Diffusion Equation with a Source or Sink*. Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **X(XIV)**, *1–2* (1964).
21. Miron Nicolescu, *Ecuaţia iterată a căldurii*. Studii şi cercetări matematice, **V**, *3–4*, 243–332 (1954).
22. D. Mangeron, *Sur une classe de problèmes à la frontière non elliptiques d'ordre supérieur*. C.R. Acad. Sci., Paris, **255**, 2894–2896 (1962).
23. Miron Nicolescu, *Les fontions polyharmoniques*. Hermann, Paris, 1936.
24. * * * *Аннотации докладов*. Второй Всесоюзный Съезд по теоретической и прикладной механике. Акад. наук СССР, Москва, 1964.
25. Elie Carafoli, *Theoretical considerations on the lateral fluid jets*. Rev. Méc. Appl. **VII**, 6, 1049–1062 (1962).
26. M. Z. v. Krzywoblocki, *On a two-dimensional Compressible Jet in Magneto-Hydrodynamics*. Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **VII(XI)**, 1–2, 59–96 (1961).
27. R. Jancel, Th. Kahan, *Èlectrodynamique des Plasmas, I. Processus Physiques et Méthodes Mathématiques*. Dunod, Paris, 1963.
28. R. Bellman, J. M. Richardson, *On the Stability of Solutions of the Linearized Plasma Equation*. J. Math. Analysis, and Appl., **1** *3–4*, 308–313 (1960).
29. J. J. Levin, J. A. Nohel, *On a System of Integro-Differential Equations Occuring in Reactor Dynamics*. J. Math. and Mech., **9**, *3*, 347–368 (1960).

CÎTEVA MIŞCĂRI ÎN MEDII POROASE, ÎN PREZENŢA UNOR CONTURURI DE ALIMENTARE FINITE

DE

SORIN GOGONEA

1. Datorită deosebitei importanţe practice, scurgerea fluidelor în medii poroase către nişte puţuri practicate în strate permeabile a făcut obiectul a numeroase cercetări (de exemplu [4], [5]). De obicei, mediul poros este presupus nelimitat cel puţin într-o anumită direcţie, iar alimentarea puţurilor se face prin nişte suprafeţe ce coincid parţial sau total cu frontierea domeniului ocupat de mediul poros.

Limitîndu-ne la cazul plan, în majoritatea cazurilor contururile de alimentare erau presupuse avînd puncte în vecinătatea punctului de la infinit. În cele ce urmează, situîndu-ne în ipotezele uzuale de lucru, vom considera cazul cînd frontiera de alimentare este formată dintr-o curbă simplă închisă, ale cărei puncte sînt situate deci în întregime la distanţă finită.

2. Fie deci un mediu poros ce ocupă întregul domeniu situat în exteriorul unui cilindru, suprafaţa acestui cilindru constituind o suprafaţă de alimentare prin care fluidul se scurge spre nişte puţuri practicate în mediul poros.

Presupunînd mişcarea ca fiind plană, şi anume identică în plane orizontale perpendiculare pe generatoarele cilindrului, vom asimila, aşa cum se procedează de obicei, puţurile cu izvoare negative pentru a evita conexiunea multiplă a domeniului.

Mediul poros va fi presupus omogen, sau omogen pe porţiuni separate între ele prin anumite curbe de discontinuitate pentru coeficientul de filtraţie.

Schema mişcărilor considerate va fi deci următoarea : mediul poros ocupă un domeniu D din planul $z = x + iy$ exterior unei curbe închise C care constituie conturul de alimentare pentru nişte izvoare negative situate în punctele de afixă z_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 7, p. 825–835, BUCUREŞTI, 1964

3. Fie mai întîi mediul poros omogen, coeficientul de filtrație fiind k. Situîndu-ne în ipoteza legii liniare de filtrație a lui Darcy, notînd cu φ potențialul vitezelor și cu ψ funcția de curent, vom avea de rezolvat următoarea problemă :

Să se determine o funcție $f(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y)$ analitică peste tot în domeniul D, cu excepția punctelor z_j $(j = 1, 2,\ldots,n)$, unde ea are singularități logaritmice, și care satisface următoarele condiții la limită [1] :

a) este mărginită la infinit ;

b) Re $\{f(z)\} = K = \text{const.}$ $z \in C$;

c) Re $\{f(z)\} = kH_j$, pentru $|z - z_j| = \delta_j$,

unde δ_j este raza puțului circular cu centrul în z_j, iar H_j este diferența de nivel dintre fluidul liber și fluidul din puț ;

d) în vecinătatea punctelor z_j, $f(z)$ admite dezvoltarea

$$f(z) = \frac{q_j}{2\pi}\ln(z - z_j) + g_j(z), \quad (j = 1,2,\ldots, n),$$

unde $q_j < 0$ sînt debitele izvoarelor, iar g_j sînt funcții analitice regulate.

Așa cum se obișnuiește, pentru simplificare vom înlocui condiția *c*) prin condiția

c') Re $\{f(z)\} = k\,H_j$ numai într-un singur punct z_j^* de pe cercul $|z - z_j| = \delta_j$. Aceasta revine la a afirma că cercul coincide cu o izobară, ipoteză foarte apropiată de realitate.

4. Pentru început vom considera că C este cercul cu centrul în origine $|z| = R$. Așa cum se procedează în metoda imaginilor, vom considera că în punctele inverse față de cerc ale punctelor z_j sînt plasate izvoare pozitive de același debit. Vom lua deci pe $f(z)$ sub forma

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{2\pi}\left[\ln(z - z_j) - \ln\left(z - \frac{R^2}{\bar{z}_j}\right)\right] + g(z), \tag{1}$$

$g(z)$ fiind o funcție analitică regulată în D ce urmează să o determinăm din condițiile la limită.

Din (1) rezultă

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{2\pi}\ln\frac{\bar{z}_j(z - z_j)}{z\bar{z}_j - R^2} + g(z). \tag{2}$$

Fără a particulariza problema, putem lua constanta $K = 0$, și punînd

$$z_j = r_j\, e^{i\alpha_j}, \quad r_j > R \tag{3}$$

rezultă printr-un calcul simplu că :

$$\mathrm{Re}\{f(z)\}_{z\in C} = \sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{2\pi}\ln\frac{r_j}{R} + \mathrm{Re}\{g(z)\}_{z\in C} = 0$$

şi prin urmare

$$g(z) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{2\pi} \ln \frac{r_j}{R} + i\,m \quad (m - \text{real}).$$

Deci, abstracţie făcînd de o constantă aditivă pur imaginară,

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{2\pi} \ln \frac{R\bar{z}_j (z - z_j)}{|z_j|(z\bar{z}_j - R^2)} \cdot \tag{4}$$

În cazul unui singur izvor, potenţialul complex va fi

$$f(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{R\bar{z}_1 (z - z_1)}{|z_1|(z\bar{z}_1 - R^2)} \tag{5}$$

$z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$ fiind afixa izvorului.

Debitul q va fi determinat din condiţia c') luînd pe z_1^* sub forma $z_1^* = z_1 + \delta_1 e^{i\alpha_1}$, deci pe diametrul puţului ce trece prin origine. Vom obţine

$$q = \frac{2\pi k H}{\ln \dfrac{R\delta_1}{(r_1 + \delta_1) r_1 - R^2}} \cdot \tag{6}$$

În cazul general

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{2\pi} \ln \left| \frac{R(z - z_j)}{z\bar{z}_j - R^2} \right| .$$

şi vom alege punctele z_j^* în acelaşi mod ca mai înainte adică $z_j^* = z_j + r_j e^{i\alpha_j} = (r_j + \delta_j) e^{i\alpha_j}$. Atunci din

$$\varphi(z_s^*) = kH_s$$

vom obţine

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{2\pi} \ln (RA_{j,s}) = k\,H_s, \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

unde

$$A_{j,s} = \sqrt{\frac{(r_s + \delta_s)^2 - 2r_j (r_s + \delta_s) \cos(\alpha_j - \alpha_s) + r_j^2}{r_j^2 (r_s + \delta_s)^2 - 2R^2 r_j (r_s + \delta_s) \cos(\alpha_j - \alpha_s) + R^4}} . \tag{8}$$

Relaţiile (7) constituie un sistem liniar din care se pot determina debitele.

Să presupunem acum că puţurile au centrele situate pe acelaşi cerc, razele egale şi lucrează sub aceeaşi presiune luînd deci

$$r_s = r;\ \delta_s = \delta;\ H_s = H,\ s = 1, 2, \ldots, n.,$$

Vom avea

$$A_{j,s} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(r + \delta)^2 - 2r(r + \delta) \cos(\alpha_j - \alpha_s) + r^2}{r^2 (r + \delta)^2 - 2R^2 r (r + \delta) \cos(\alpha_j - \alpha_s) + R^4}} = A_{j,s}^{*}, & j \neq s \\ \dfrac{\delta}{r(r + \delta) - R^2} = B, & j = s \end{cases} \tag{9}$$

Se poate ușor dovedi că

$$RA^*_{j,s} < 1 ;\; RB < 1 ;\; B < A^*_{j,s}. \tag{10}$$

Într-adevăr, ținînd seama de (9), prima inegalitate devine

$$(R^2 - r^2)\,[(r + \delta)^2 - R^2] < 0$$

iar celelalte două

$$\delta\,(R - r) < r^2 - R^2,$$

relații evident valabile, deoarece $R < r$.

Sistemul (7) se poate atunci scrie sub forma

$$\sum_{j \neq s} \frac{q_j}{2\pi} \ln (RA^*_{j,s}) + \frac{q_s}{2\pi} \ln (RB) = kH \qquad (s = 1,2, \ldots n).$$

Dacă însemnăm prin

$$A = \max (A^*_{j,s}) \quad (j, s = 1, 2, \ldots, n)$$

și prin

$$Q = \sum_{j=1}^{n} q_j, \tag{11}$$

vom obține

$$Q < \frac{2\,\pi\, n\, k}{\ln (RB) + (n - 1) \ln (RA)}. \tag{12}$$

Relațiile obținute pot pune în evidență pierderile de debit datorită interferenței izvoarelor. Să notăm

$$Q^* = nq, \tag{13}$$

q fiind debitul unui izvor în cazul cînd ar activa singur în condițiile de mai sus, dat deci de relația (6) în care facem $r_1 = r$, $\delta_1 = \delta$. Din această relație și din (12) deducem

$$\frac{Q^*}{Q} > 1 + (n - 1) \frac{\ln (RA)}{\ln (RB)}. \tag{14}$$

Cum din inegalitățile (10) rezultă că $\frac{\ln (RA)}{\ln (RB)} > 0$, urmează că

$$\frac{Q^*}{Q} > 1, \tag{15}$$

acest raport crescînd cu n.

Pe de altă parte, din (13) și (14) rezultă că

$$\frac{q}{Q} > \frac{1}{n} + \frac{n - 1}{n} \frac{\ln (RA)}{\ln (RB)},$$

şi deci

$$\frac{Q}{q} < n. \tag{16}$$

5. Fie acum C o curbă oarecare şi $z = z(\zeta)$ funcţia ce reprezintă conform exteriorul cercului unitate din planul ζ pe exteriorul lui C cu corespondenţa punctelor de la infinit. Cercurile $|z - z_j| = \delta_j$ care reprezintă conturul puţurilor se vor transforma în nişte curbe închise pe care le vom aproxima prin cercuri, într-unul din punctele cărora este îndeplinită condiţia c'). Potenţialul complex corespunzător se va obţine atunci din relaţia (4) în care $R = 1$:

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{2\pi} \ln \frac{\overline{\zeta(z_j)}\,[\zeta(z) - \zeta(z_j)]}{|\zeta(z_j)|\,[\zeta(z)\,\overline{\zeta(z_j)} - 1]}, \tag{17}$$

$\zeta = \zeta(z)$ fiind funcţia ce rezultă din inversarea funcţiei $z = z(\zeta)$. Debitele se vor determina din următorul sistem

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{2\pi} \ln \left| \frac{\overline{\zeta(z_j)}[\zeta(z_s^*) - \zeta(z_j)]}{|\zeta(z_j)|\,[\zeta(z_s^*)\overline{\zeta(z_j)} - 1]} \right| = kH_s, \tag{18}$$

unde $z_s^* = z_s + r_s e^{i\alpha_s}$.

6. Să considerăm acum curba C ca fiind elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ în exteriorul căreia se găseşte un puţ cu centrul în $z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$.

Funcţia

$$z = \frac{a+b}{2}\zeta + \frac{a-b}{2}\frac{1}{\zeta} \tag{19}$$

reprezintă conform exteriorul cercului $|\zeta| = 1$ pe exteriorul elipsei [3]. Ţinînd seama că punctele de la infinit se corespund, vom avea

$$\zeta = \frac{1}{a+b}\left[z + \sqrt{z^2 + c^2}\right], \quad c^2 = a^2 - b^2, \tag{20}$$

alegînd acea determinaţie a radicalului care devine $\sqrt{x^2 - c^2}$ pentru z real şi mai mare ca c.

Atunci din (17) rezultă imediat

$$f(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \left\{ (a+b) \frac{\bar{z}_1 + \sqrt{z_1^2 - c^2}}{|z_1 + \sqrt{z_1^2 - c^2}|} \; \frac{z - z_1 + \sqrt{z^2 - c^2} - \sqrt{z_1^2 - c^2}}{(z + \sqrt{z^2 - c^2})(\bar{z}_1 + \sqrt{\bar{z}_1^2 - c^2}) - (a+b)^2} \right\}. \tag{21}$$

Debitul se va determina în conformitate cu (18) din relaţia

$$\frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{\zeta[(r_1 + \delta_1) e^{i\alpha_1}] - \zeta(r_1 e^{i\alpha_1})}{\zeta[(r_1 + \delta_1) e^{i\alpha_1}] \cdot \overline{\zeta(r_1 e^{i\alpha_1})} - 1} \right| = k\,H. \tag{22}$$

Deoarece δ_1 este foarte mic față de r_1, putem neglija termenii ce conțin puterile superioare ale lui δ_1, ceea ce revine la a scrie că [5]

$$\zeta[(r_1 + \delta_1)\,e^{i\alpha_1}] - \zeta\,(r_1\,e^{i\alpha_1}) = \delta_1\,e^{i\alpha_1}\,\zeta'\,(z_1)$$

$$\zeta[(r_1 + \delta_1)\,e^{i\alpha_1}] \cdot \overline{\zeta\,(r_1 e^{i\alpha_1})} = |\,\zeta\,(z_1)\,|^2,$$

și vom deduce din (20) și (22)

$$q = \frac{2\pi\,kH}{\ln\left\{\delta_1 (a+b)\dfrac{|\,z_1 + \sqrt{z_1^2 - c^2}\,|}{|\sqrt{z_1^2 - c^2}\,| \cdot [\,|\,z_1 + \sqrt{z_1^2 - c^2}\,|^2 - (a+b)^2]}\right\}}, \tag{23}$$

sau, în coordonate polare,

$$q = \frac{2\pi\,kH}{\ln\left\{\delta_1\,(a+b)\dfrac{\sqrt{F\,(r_1, \alpha_1)}}{G\,(r_1, \alpha_1)[F\,(r_1, \alpha_1) - (a+b)^2]}\right\}}, \tag{24}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} G\,(r_1, \alpha_1) &= (r_1^4 - 2r_1^2\,c^2 \cos 2\alpha_1 + c^4)^{\frac{1}{4}} \\ F\,(r_1, \alpha_1) &= r_1^2 + G^2\,(r_1, \alpha_1) + \sqrt{2}\,r_1\,(\sin\alpha_1 - \cos\alpha_1)[G^2\,(r_1, \alpha_1) - r_1^2 \cos 2\alpha_1 + c^2]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

În particular, dacă izvorul se află pe axa mică a elipsei la distanța d de centru $\left(\alpha_1 = \dfrac{\pi}{2},\ r_1 = d\right)$, atunci

$$G\,(r_1, \alpha_1) = \sqrt{d^2 + c^2}\,;\quad F\,(r_1, \alpha_1) = [d + \sqrt{d^2 + c^2}]^2,$$

și deci

$$q = \frac{2\pi\,kH}{\ln\left\{\delta_1\,(a+b)\dfrac{d + \sqrt{d^2 + c^2}}{\sqrt{d^2 + c^2}\,[(d + \sqrt{d^2 + c^2})^2 - (a+b)^2]}\right\}}. \tag{26}$$

Se vede ușor că în valoare absolută q este o funcție descrescătoare de d și tinde către zero pentru $d \to \infty$.

7. Dacă în (19) facem $b = 0$, conturul elipsei se reduce la o tăietură de lungime $2a$ de pe axa reală, iar formulele precedente ne dau elementele mișcării într-un mediu poros exterior acestei tăieturi. Configurația ar putea schematiza mișcarea fluidului dintr-un bazin extrem de îngust.

Din (26) obținem, făcînd $b = 0$,

$$q = \frac{2\pi\,kH}{\ln\dfrac{\delta_1\,a}{2d\sqrt{d^2 + a^2}}} \tag{27}$$

ceea ce reprezintă debitul unui puţ plasat pe o direcţie perpendiculară pe mijlocul tăieturii la distanţa d. O formulă asemănătoare a fost obţinută de Muskat, considerînd segmentul de lungime $2a$ drept linie de alimentare şi introducînd într-un plan auxiliar prin metoda imaginilor un şir infinit de izvoare [4].

Din formula (27) se obţine imediat, făcînd $a \to \infty$, formula cunoscută ce ne dă debitul unui puţ în cazul cînd frontiera de alimentare este întreaga axă reală :

$$q^* = \frac{2\pi k H}{\ln \dfrac{\delta_1}{2d}} \tag{28}$$

Se poate calcula uşor măsura în care diferenţa dintre debitele calculate prin (27) şi (28) devine neglijabilă. Dacă vrem, de exemplu, ca

$$\left| 1 - \frac{q^*}{q} \right| < \frac{p}{100}$$

va trebui să fie satisfăcută inegalitatea

$$a > d \left[\left(\frac{2d}{\delta_1} \right)^{\frac{p}{50}} - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} . \tag{29}$$

De exemplu, dacă $\dfrac{2d}{\delta_1} = 10^4$, $p = 1$ rezultă că $d < 0{,}45\ a$.

8. Fie acum cazul unui mediu poros neomogen, domeniul D fiind, ca şi mai înainte, exteriorul cercului $|z| = R$. În coroana circulară $R < |z| < a$ (domeniul D_1) coeficientul de filtraţie este k_1 iar pentru $|z| > a$ (domeniul D_2) el are valoarea k_2. În punctul $z_0 = r_0 e^{i\alpha}$, $(r_0 > R)$ este plasat centrul puţului de debit q. Potenţialele complexe în domeniile D_i $(i = 1{,}2)$ le vom scrie sub forma [2]

$$f_i(z) = f_0(z) + f_i^*(z), \quad i = 1{,}2, \qquad (30$$

unde f_0 (z) este potenţialul complex corespunzător mediului omogen dat de relaţia (5),

$$f_0(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{R \bar{z}_0 (z - z_0)}{|z_0| (z\bar{z}_0 - R^2)}, \tag{31}$$

iar f_i^* sînt potenţialele „perturbatoare” ce apar datorită neomogenităţii mediului poros. Ele vor trebui astfel determinate încît să fie îndeplinite următoarele condiţii de limită :

$$\operatorname{Re}\{f_1(z)\} = 0, \quad z \in \Gamma \tag{32}$$

$$\operatorname{Im}\{f_1^*(z) - f_2^*(z)\} = 0, \quad z \in \Gamma_1, \tag{33}$$

$$\operatorname{Re}\{k_2 f_1^*(z) - k_1 f_2^*(z) + (k_2 - k_1) f_0(z)\} = 0, \quad z \in \Gamma_1, \qquad (34$$

Γ fiind cerul $|z| = R$ iar Γ_1 cercul $|z| = a$. Condiția (32) a apărut și în cazul mediului omogen, iar celelalte două reprezintă transcrierea sub formă complexă a condițiilor de continuitate pentru viteza normală și respectiv presiune, la traversarea lui Γ_1.

Funcția $f_1^*(z)$ fiind analitică într-o coroană circulară o vom reprezenta sub forma unei serii Laurent

$$f_1^*(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{1,n} z^n + C, \tag{35}$$

unde $a_{1,n} = \alpha_n + i\,\beta_n$ iar C o constantă reală a cărei necesitate va apărea mai tîrziu.

Funcția $f_2^*(z)$ fiind analitică în exteriorul cercului Γ_1, va putea fi reprezentată sub forma

$$f_2^*(z) = \sum_{1}^{\infty} a_{2,n} z^{-n}, \tag{36}$$

unde $a_{2,n} = \lambda_n + i\,\mu_n$.

Cum $\operatorname{Re}\{f_0(z)\}_\Gamma = 0$, condiția (32) devine $\operatorname{Re}\{f_1^*(z)\}_\Gamma = 0$. Introducînd în (35) vom obține

$$\alpha_0 = -C,\ \alpha_{-p} = -R^{2p}\alpha_p;\ \beta_{-p} = R^{2p}\beta_p,\ p = 1,2,\ldots$$

β_0 rămînînd pentru un moment nedeterminat. Va rezulta atunci

$$f_1^*(z) = \sum_{1}^{\infty}\left(a_{1,n} z^n - \bar{a}_{1,n}\frac{R^{2n}}{z^n}\right) - C + i\beta_0.$$

Făcînd în această relație și în (36) $z = a\,e^{i\theta}$ și introducînd dezvoltările respective în (33), vom obține

$$\beta_0 = 0;\ \mu_n = \beta_n(a^{2n} + R^{2n});\ \lambda_n = -\alpha_n(a^{2n} + R^{2n}),\ n = 1,2\ldots \tag{37}$$

Pentru a folosi condiția (34) este necesar să dezvoltăm în serie pe $f_0(z)$. Forma acestei dezvoltări va diferi după cum $z_0 \in D_1$ sau $z_0 \in D_2$.

Să presupunem la început că $z_0 \in D_2$. Atunci în vecinătatea punctelor lui Γ_1 vom avea $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, $\left|\frac{R^2}{z\bar{z}_0}\right| < 1$, și deci

$$\ln(z - z_0) = \ln z_0 - \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_0}\right)^n.$$

$$\ln(z\bar{z}_0 - R^2) = \ln z\bar{z}_0 - \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{R^2}{z\bar{z}_0}\right)^n.$$

Introducînd aceste dezvoltări în (34), identificînd din nou coeficienții și ținînd seama de relațiile (37), obținem

$$C = \frac{(k_2 - k_1)q}{2\pi k_2}\ln\frac{R}{a}. \tag{38}$$

Constanta C este deci necesară pentru ca să avem efectiv $k_1 \neq k_2$. Ea s-ar fi putut adăuga şi la $f_2^{*}(z)$, dar aceasta ar fi dus la o altă distribuţie a presiunii la infinit, diferită de cea în cazul neperturbat [1].

Apoi,

$$\alpha_n = \frac{(k_2 - k_1) q \cos n\alpha}{2\pi n r_0^n} \cdot \frac{a^{2n} - R^{2n}}{k_2(a^{2n} - R^{2n}) + k_1(a^{2n} + R^{2n})}, \tag{39}$$

$$\beta_n = \frac{(k_2 - k_1) q \sin n\alpha}{2\pi n r_0^n} \cdot \frac{a^{2n} - R^{2n}}{k_2(a^{2n} - R^{2n}) + k_1(a^{2n} + R^{2n})}, \tag{40}$$

şi deci

$$a_{1,n} = \frac{(k_2 - k_1) q}{2\pi n z_0^n} \cdot \frac{a^{2n} - R^{2n}}{k_2(a^{2n} - R^{2n}) + k_1(a^{2n} + R^{2n})}. \tag{41}$$

Cum din (37) rezultă că $a_{2,n} = -\bar{a}_{1,n}(a^{2n} + R^{2n})$, vom avea

$$a_{2,n} = \frac{(k_1 - k_2) q}{2\pi n \bar{z}_0^n} \cdot \frac{a^{4n} - R^{4n}}{k_2(a^{2n} - R^{2n}) + k_1(a^{2n} + R^{2n})}. \tag{42}$$

Potenţialele complexe $f_1(z)$ şi $f_2(z)$ se vor scrie atunci, punînd $\lambda = \frac{k_1}{k_2}$, $\rho = \frac{R}{a}$, sub forma

$$f_1(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{R\bar{z}_0(z - z_0)}{|z_0|(z\bar{z}_0 - R^2)} + \frac{(1-\lambda) q}{2\pi} \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{1}{1 + \lambda \dfrac{1 + \rho^{2n}}{1 - \rho^{2n}}} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{z}{z_0} \right)^n - \left(\frac{R^2}{z\bar{z}_0} \right)^n \right] \right\} + C \tag{43}$$

$$f_2(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{R\bar{z}_0(z - z_0)}{|z_0|(z\bar{z}_0 - R^2)} - \frac{(1-\lambda) q}{2\pi} \sum_1^{\infty} \left[\frac{a^{2n}(1 - \rho^{4n})}{1 - \rho^{2n} + \lambda(1 + \rho^{2n})} \cdot \frac{1}{n(z\bar{z}_0)^n} \right]. \tag{44}$$

Se observă uşor că făcînd $k_1 = k_2$, cele două potenţiale devin egale cu $f_0(z)$, adică cu potenţialul complex corespunzător mediului omogen, ceea ce era de aşteptat. Debitul q se va determina ca şi mai înainte, punînd condiţia ca partea reală a lui $f_2(z)$ calculată în punctul $z^{*} = z_0 + \delta e^{i\alpha}$ de pe conturul puţului să aibă valoarea $k_2 H$, H avînd aceeaşi semnificaţie ca mai sus. Vom obţine astfel, păstrînd numai termenii ce conţin pe δ la puterea întîi,

$$q = \frac{2\pi k_2 H}{\ln \dfrac{R\delta}{r_0(r_0 + \delta) - R^2} - (1-\lambda) \displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{a^{2n}(1 - \rho^{4n})}{1 - \rho^{2n} + \lambda(1 + \rho^{2n})} \cdot \frac{1}{r_0^{2n-1}(r_0 + n\delta)}}. \tag{45}$$

Calcule analoage se pot face și în cazul cînd $z_0 \in D_1$. În acest caz ținînd seamă că în vecinătatea punctelor lui Γ_1, $\left|\frac{z_0}{z}\right| < 1$ și $\left|\frac{R^2}{z\bar{z}_0}\right| < 1$ și putem scrie pentru $f_0\,(z)$ o dezvoltare de forma

$$f_0\,(z) = \frac{q}{2\pi}\left[\ln\frac{R}{|\,z_0\,|} - \sum_1^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z_0}{z}\right)^n + \sum_1^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{R^2}{z\bar{z}_0}\right)^n\right]. \tag{46}$$

Urmînd șirul raționamentelor făcute mai sus, se obțin pentru coeficienții nedeterminați expresiile

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{(k_2-k_1)\,q}{2\pi\,k_2}\ln\frac{R}{r_0} \\ a_{1,n} &= \frac{(k_2-k_1)q}{2\pi\,n\,z_0^n}\cdot\frac{r_0^{2n}-R^{2n}}{k_2\,(a^{2n}-R^{2n})+k_1\,(a^{2n}+R^{2n})}, \\ a_{2,n} &= \frac{(k_1-k_2)\,q}{2\pi\,n\,\bar{z}_0^n}\cdot\frac{(r_0^{2n}-R^{2n})\,(a^{2n}+R^{2n})}{k_2\,(a^{2n}-R^{2n})+k_1\,(a^{2n}+R^{2n})}. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

De aici se deduc pe aceeași cale potențialele complexe, precum și debitul.

9. Dezvoltarea (46) a funcției $f_0\,(z)$ valabilă pentru $\left|\frac{z_0}{z}\right| < 1$ ne permite studierea unui caz în care domeniul ocupat de mediul poros este mărginit. Anume, vom considera că frontiera Γ_1 de ecuație $|\,z\,| = a$ este impermeabilă. Va trebui deci să determinăm funcția analitică $f(z)$ regulată în coroana circulară $R < |\,z\,| < a$ cu excepția punctului z_0 în care ea are o singularitate logaritmică și satisfăcînd următoarele condiții la limită :

$$\operatorname{Re}\{f\,(z)\}_{\Gamma} = 0, \tag{48}$$

$$\operatorname{Im}\{f\,(z)\}_{\Gamma_1} = 0. \tag{49}$$

Vom pune din nou

$$f\,(z) = f_0\,(z) + f_1\,(z),$$

unde $f_0\,(z)$ este dat de (31) iar

$$f_1\,(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{1,n}\,z^n.$$

Condiția (48) va conduce exact ca mai înainte la faptul că $f_1(z)$ se va scrie sub forma

$$f_1\,(z) = \sum_1^{\infty}\left(a_{1,n}z^n - \bar{a}_{1,n}\frac{R^{2n}}{z^n}\right) + i\,\beta_0. \tag{50}$$

Condiţia (49) se mai poate scrie făcînd $z = a\,e^{i\theta}$

$$\frac{q}{2\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\frac{R^{2n}-r_0^{2n}}{a^n\,r_0^{\,n}}\,\sin n(\alpha-\theta)+\sum_{1}^{\infty}\frac{a^{2n}+R^{2n}}{a^n}\,(\beta_n\cos n\theta+\alpha_n\sin n\theta)=0$$

şi prin identificarea coeficienţilor se găseşte că

$$a_{1,n}=\frac{q}{2\pi}\,\frac{R^{2n}-r_0^{2n}}{n\,z_0^n\,(a^{2n}+R^{2n})}. \tag{51}$$

Deci

$$f(z)=\frac{q}{2\pi}\ln\frac{R\,\overline{z}_0\,(z-z_0)}{|\,z_0\,|\,(z\overline{z}_0-R^2)}+\frac{q}{2\pi}\sum_{1}^{\infty}\left\{\frac{R^{2n}-r_0^{2n}}{n\,(a^{2n}+R^{2n})}\left[\left(\frac{z}{z_0}\right)^n-\frac{R^{2n}}{(z\,\overline{z}_0)^n}\right]\right\}. \tag{52}$$

Punînd condiţia ca în punctul $z = z_0 + \delta\,e^{i\alpha}$ partea reală a lui $f(z)$ să fie egală cu kH, obţinem

$$q=\frac{2\pi\,kH}{\ln\dfrac{R\delta}{r_0(r_0+\delta)-R^2}+\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{R^{2n}-r_0^{2n}}{n\,(a^{2n}+R^{2n})}\left[\left(1+\frac{n\,\delta}{r_0}\right)-\frac{R^{2n}}{r_0^{2n-1}\,(r_0+n\,\delta)}\right]}. \tag{53}$$

Primită la redacţie la 1 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, *Capitole din teoria mişcărilor în mediile poroase.* Bucureşti, 1957.
2. ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, *Asupra mişcării apelor arteziene.* Analele Univ. C. I. Parhon, Buc., Seria Şt. Naturii, *15*, 51–57 (1957).
3. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides.* Bucureşti–Paris, 1961.
4. M. MUSKAT, *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous media.* Michigan, 1946.
5. П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА, *Теория движения грунтовых вод.* Москва, 1952.

DETERMINAREA CVADRISPINORILOR ATAȘAȚI CÎMPURILOR DE SPIN MAXIM 1 ȘI 1/2[1]

DE

IULIAN POPOVICI și ANDREI POPOVICI

I. TEORIA HEXADIMENSIONALĂ

1. Fie (în notațiile din [1], [2], [3])

$$i_z = \begin{cases} i_{ab} = -\, i_{ba}\,(a \neq b) \\ I\ (a = b) \end{cases} \tag{1}$$

($z = 1, \ldots, 16$; $a, b, \ldots = 1, \ldots, 6$) matricele de bază ale algebrei Dirac A_{4^2} și $\overset{1}{\varphi}_i$, $\overset{2}{\varphi}_i$ ($i, j \ldots = 1, \ldots, 4$) doi spinori arbitrari din $\sum_4$.

Se pot defini următoarele mărimi în E_6 pseudoeuclidian de signatură $+++-+-$ și de metrică δ_{ab}:

$$(a) \qquad \underset{z}{p}_{ab} = -\underset{z}{p}_{ba} = \underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_i\,(i_{ab})_{ij}\,\overset{1}{\varphi}_j\,; \ \text{(b)} \qquad \underset{z}{N}_0 = \underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_i\,\overset{1}{\varphi}_i\,, \tag{2}$$

unde

$$\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_j = \overset{2}{\varphi}{}^{*}_i\,(i_z)_{ij}\,; \quad \overset{2}{\varphi}{}^{*}_j = \underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_i\,(i_z)_{ij}\,, \quad (i_z^2 = I). \tag{2'}$$

Notînd în acest memoriu tensorii mezonici (tensorii L. de Broglie unificați în E_6) prin $p^{\pm}_{ab}$, $N^{\pm}_0$ în loc de $q^{\pm}_{(ab)}, J'^{\pm}_{(0)}$ din memoriile anterioare [1], [3], componentele $p^{\pm}_{ab}$ sînt [4]:

$$\begin{aligned} &p^{+}_{\beta\gamma} = -\,i p^{-}_{4\alpha} = M_\alpha\,;\ p^{+}_{4\alpha} = -\,i p^{-}_{\beta\gamma} = -i\,N_\alpha \\ &p^{+}_{5i} = -\,p^{-}_{6i} = -\,U_i\,;\ p^{+}_{6i} = p^{-}_{5i} = -\,i\,V_i \\ &p^{+}_{56} = i\,N^{-}_0 = i\,M_0\,;\ p^{-}_{56} = -\,i N^{+}_0 = -\,i\,N_0 \\ &(U_\alpha = \mathfrak{U}_\alpha\,;\ U_4 = i\,\mathfrak{U}_4\,;\ V_\alpha = \mathcal{V}_\alpha\,;\ V_4 = i\,\mathcal{V}_4), \end{aligned} \tag{3}$$

α, β, γ fiind permutările ciclice ale indicilor 1, 2, 3.

---

[1] Articol apărut în versiune franceză în „Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées", **IX**, *7* (1964).

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 7, P. 837–847, BUCUREȘTI, 1964.

3–c. 2487

Luînd pentru matricele i_z respectiv γ_4, α_5, I (a se vedea [1], [2], [3]) mărimile $\underset{z}{p}_{ab}$ și $\underset{z}{N}_0$ corespunzătoare sînt p^+_{ab} și N^+_0, p^-_{ab} și N^-_0, p_{ab} și $\mathscr{V}_4$. Tensorul p^+_{ab} determină signatura $+++\;-+\;-$ a lui E_6 [4]. Identitățile (2) și identitățile matriciale ale lui A. Hristev [2] dau imediat :

$$\text{(a)}\qquad \underset{z}{p}_{ac}\,\underset{z}{p}_{bc} = \underset{z}{N}{}_0^2\,\delta_{ab}$$

$$\text{(b)}\qquad \frac{1}{8}\,\varepsilon_{abcdef}\,\underset{z}{p}_{cd}\,\underset{z}{p}_{ef} = \underset{z}{N}_0\,\underset{z}{p}_{ab} \tag{4}$$

(indicii care variază de la 1 la 16 nu sînt supuși convenției einsteiniene de sumare). Pentru $\underset{z}{N}_0 \neq 0$ (z fix), (4a) și (4b) sînt echivalente [2].

Prin contracția lui (4a) în a și b, obținem :

$$\underset{z}{p}_{ab}\,\underset{z}{p}_{ab} = 6\,\underset{z}{N}{}_0^2 \tag{4'}$$

Identitățile (4), (4′) conțin identitățile tensoriale pure de ordinul doi în $p^{\pm}_{ab}$; $N^{\pm}_0$ ca un caz particular [3].

2. Identitățile lui Pauli sînt [2], [3], [5] :

$$\text{(a)}\qquad \frac{1}{2}\,(i_{ab})_{ij}(i_{ab})_{kl} + \delta_{ij}\,\delta_{kl} = 4\,\delta_{il}\,\delta_{kj} \tag{5}$$

sau

$$\text{(b)}\qquad \sum_z (i_z)_{ij}(i_z)_{kl} = 4\,\delta_{il}\,\delta_{kj}.$$

Urmele matricelor i_{ab} și $i_{ab}\,i_{cd}$ sînt respectiv [2]:

$$\text{(a)}\qquad \sum_i\,(i_{ab})_{ii} = 0\,;\ (b)\ \sum_i\,(i_{ab}\,i_{cd})_{ii} = 2\,\delta_{<ac}\,\delta_{bd>}. \tag{5'}$$

(5′a) rezultă și direct din (5a) prin contracție în i și j.

Contracția lui (2a) cu $(i_{ab})_{kl}$ dă, ținînd seama de (5a),

$$\underset{z}{\overset{1}{\varphi}}_i\,\overset{2}{\varphi}_j = \frac{1}{8}\,\underset{z}{p}_{ab}\,(i_{ab})_{ij} + \frac{1}{4}\,\underset{z}{N}_0\,\delta_{ij}. \tag{6}$$

Contracția lui (6) în i și j dă, conform lui (5′a),

$$\overset{1}{\varphi}_i\,\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_i = \underset{z}{N}_0\,. \tag{7}$$

Notînd :

$$\text{(a)}\quad \underset{z}{p}_u = \underset{z}{p}_{ab}\ (u = 1,\ldots,15)\,;\ \underset{z}{p}_{16} = \underset{z}{N}_0\,;\qquad \text{(b)}\quad \underset{z}{\Pi}_{ij} = \overset{1}{\varphi}_i\,\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_j \tag{8}$$

$$\underset{z}{S}_{ij} = \frac{1}{8}\,\underset{z}{p}_{ab}\,(i_{ab})_{ij} + \frac{1}{4}\,\underset{z}{N}_0\,\delta_{ij} \tag{9}$$

(2) şi (6) devin respectiv:

$$\underset{z}{p}_{z'} = (i_{z'})_{ij}\, \underset{z}{\Pi}_{ji}\ (z\,;\ z' = 1,\ldots,16) \tag{10}$$

$$\text{(a)}\quad \underset{z}{\Pi}_{ij} = \underset{z}{S}_{ij}\,;\quad \text{sau}\quad \text{(b)}\quad 4\, \underset{z}{\Pi}_{ij} = \sum_{z'} (i_{z'})_{ij}\, \underset{z}{p}_{z'}\,. \tag{11}$$

Pentru $i_z = \gamma_4,\ \alpha_5,\ I$, mărimile $\underset{z}{\Pi}_{ij}$ şi $\underset{z}{S}_{ij}$ iau respectiv următoarele valori: Π^+_{ij} şi S^+_{ij}, Π^-_{ij} şi S^-_{ij}, Π_{ij} şi S_{ij}.

Conform lui (5b), determinantul coeficienţilor $(i_{z'})_{ij}$ în (10) şi (11b) este 2^{16}. Sistemele (10) şi (11b) (echivalente) admit deci soluţie unică ($\underset{z}{\Pi}_{ij}$ respectiv $\underset{z}{p}_{z'}$, z fix); pentru $i_z = I$ a se vedea [6].

(6) şi (7) dau imediat:

$$\underset{z}{S}_{ij}\, \underset{z}{S}_{jk} = \underset{z}{N}_0\, \underset{z}{S}_{ik}\,. \tag{12}$$

Pentru $\overset{1}{\varphi}_i = \overset{2}{\varphi}_i = \varphi_i$ mărimile (2 a, b) se reduc la mărimile sarcină-curent corespunzătoare (tensorii lui Dirac unificaţi în E_6) $\underset{z}{\varphi}_{ab}$, $\underset{z}{J}_0$. Pentru $i_z = \gamma_4,\ \alpha_5,\ I$, mărimile $\underset{z}{\varphi}_{ab}$ şi $\underset{z}{J}_0$ sînt respectiv [1] [2] [3]: φ^+_{ab} şi J^+_0, φ^-_{ab} şi J^-_0, φ_{ab} şi $\mathcal{C}_4$.

3. Pe baza lui (2) se pot stabili relaţii între mărimile $\underset{z'}{p}_{ab}$, $\underset{z'}{N}_0$ şi $\underset{z''}{p}_{ab}$; $\underset{z''}{N}_0$ pentru fiecare pereche de valori z', z'' a lui z, relaţiile (3) între p^+_{ab}, N^+_0 şi p^-_{ab}, N^-_0 fiind un caz particular.

Aceste relaţii nedepinzînd explicit de matricele i_z sau de spinorii $\overset{1}{\varphi}_i$, $\overset{2}{\varphi}_i$, putem construi, pentru un tensor antisimetric p^+_{ab} şi un invariant N^+_0 daţi în E_6, toate mărimile $\underset{z}{p}_{ab}$ şi $\underset{z}{N}_0$ ca funcţii depinzînd doar de p^+_{ab}, N^+_0 şi de asemenea mărimile $\underset{z}{S}_{ij}$ date de (9).

Definim în continuare mărimile:

$$\underset{z}{S}_{ikjl} = \underset{z}{S}_{ij}\, \underset{z}{S}_{kl} - \underset{z}{S}_{il}\, \underset{z}{S}_{kj} \tag{13}$$

care verifică evident identităţile:

$$\underset{z}{S}_{ikjl} = -\underset{z}{S}_{kijl} = -\underset{z}{S}_{iklj}\,. \tag{14}$$

Numărul componentelor distincte $\underset{z}{S}_{ikjl}$ (z fix) este atunci egal cu 36.

Pentru $\underset{z}{S}_{ij} = \underset{z}{S}_{ji}$ avem de asemenea

$$\underset{z}{S}_{ikjl} = \underset{z}{S}_{jlik}\,;\ \underset{z}{S}_{i\,|kjl|} = 0. \tag{15}$$

$\underset{z}{S}_{ikjl}$ au atunci proprietăţile de simetrie ale tensorului de curbură. În cele ce urmează nu vom presupune proprietatea de simetrie a mărimilor $\underset{z}{S}_{ij}$

[deci existența relațiilor (15)] decît atunci cînd acest lucru va fi specificat. De altfel, această proprietate nu este covariantă în $\sum_4$.

4. Fiind dat un tensor antisimetric p^+_{ab} și un invariant N^+_0 în E_6 verificînd, într-un anumit sistem de coordonate, o pereche (corespunzătoare unei aceleiași valori a lui z) din identitățile (4), sînt valabile următoarele teoreme (A — H).

TEOREMA A. $\underset{z}{S}_{ijkl}$ *definit de* (13) *verifică identitatea* :

$$\underset{z}{S}_{ijkl} = 0 \tag{16}$$

Demonstrație. Avem următoarele identități matriciale [3] :

$$\begin{aligned}&[(i_{ab})_{ij}(i_{cd})_{kl} - 2(i_{ab})_{il}(i_{cd})_{kj} + \frac{1}{2}(i_{<ac})_{ij}(i_{bd>})_{kl} - \delta_{<ac}(i_b{}^e)_{ij}(i_{d>e})_{kl} + \\ &\quad + \frac{1}{2}\varepsilon_{abcdef}(i_{ef})_{ij}\,\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{kj}\delta_{<ac}\delta_{bd>}] + [ij \longleftrightarrow kl] = 0\end{aligned} \tag{17}$$

$$[(i_{a|b})_{ij}(i_{cd|})_{kl} + \frac{1}{2}\varepsilon_{abcdef}(i_{ef})_{ij}\,\delta_{kl} - \varepsilon_{abcdef}(i_{ef})_{il}\,\delta_{kj}] + [ij \leftrightarrow kl] = 0, \tag{18}$$

(18) fiind o consecință a lui (17) [3].

Identitatea care rezultă din contracția lui (17) cu $\underset{z}{p}_{ab}\ \underset{z}{p}_{cd}$ poate fi adusă cu ajutorul unor calcule simple la forma :

$$\begin{aligned}&\underset{z}{p}_{ab}\underset{z}{p}_{cd}[(i_{ab})_{ij}(i_{cd})_{kl} - (i_{ab})_{il}(i_{cd})_{kj} - \frac{1}{2}(i_{\omega|b})_{ij}(i_{cd|})_{kl} + \frac{1}{8}\varepsilon_{abcdef}(i_{ef})_{ij}\,\delta_{kl} + \\ &\quad + \frac{1}{8}\varepsilon_{abcdef}(i_{ef})_{kl}\,\delta_{ij}] - 2\underset{z}{p}_{ac}\underset{z}{p}_{bc}(i_{ad})_{ij}(i_{bd})_{kl} + 2\delta_{il}\,\delta_{kj}\underset{z}{p}_{ab}\underset{z}{p}_{ab} = 0.\end{aligned} \tag{19}$$

Ținînd seama de (18), identitatea (19) devine :

$$\begin{aligned}&\underset{z}{p}_{ab}\underset{z}{p}_{cd}\Big\{(i_{ab})_{ij}(i_{cd})_{kl} - (i_{ab})_{il}(i_{cd})_{kj} + \frac{1}{4}\varepsilon_{abcdef}[(i_{ef})_{ij}\delta_{kl} + (i_{ef})_{kl}\,\delta_{ij} - \\ &\quad -(i_{ef})_{il}\delta_{kj} - (i_{ef})_{kj}\delta_{il}]\Big\} - 2\underset{z}{p}_{ac}\underset{z}{p}_{bc}(i_{ad})_{ij}(i_{bd})_{kl} + 2\delta_{il}\delta_{kj}\underset{z}{p}_{<ab}\underset{z}{p}_{ab} = 0.\end{aligned} \tag{20}$$

Din (4a), (4b), (4′) și (20) se deduce imediat :

$$\begin{aligned}&\underset{z}{p}_{ab}\underset{z}{p}_{cd}[(i_{ab})_{ij}(i_{cd})_{kl} - (i_{ab})_{il}(i_{cd})_{kj}] + 2\underset{z}{N}_0\underset{z}{p}_{ab}[(i_{ab})_{ij}\,\delta_{kl} + (i_{ab})_{kl}\,\delta_{ij} - \\ &\quad - (i_{ab})_{il}\delta_{kj} - (i_{ab})_{kj}\,\delta_{il}] + 2\underset{z}{N}{}_0^2\,[6\,\delta_{il}\delta_{kj} - (i_{ab})_{ij}(i_{ab})_{kl}] = 0.\end{aligned} \tag{21}$$

În sfîrșit, pe baza identității (5a) a lui Pauli, (21) devine :

$$\begin{aligned}&\underset{z}{p}_{ab}\underset{z}{p}_{cd}[(i_{ab})_{ij}(i_{cd})_{kl} - (i_{ab})_{il}(i_{cd})_{kj}] + 2\underset{z}{N}_0\underset{z}{p}_{ab}[(i_{ab})_{ij}\,\delta_{kl} + \\ &\quad + (i_{ab})_{kl}\,\delta_{ij} - (i_{ab})_{il}\delta_{kj} - (i_{ab})_{kj}\,\delta_{il}] + 4\underset{z}{N}{}_0^2(\delta_{ij}\,\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{kj}) = 0.\end{aligned} \tag{22}$$

Identitatea (16) rezultă imediat grupînd în mod convenabil termenii în (22).

5. Din teorema A rezultă următoarea consecință :

TEOREMA A'. *Printre mărimile* $\underset{z}{S}_{ij}$ *[sau, în virtutea lui* (11), $\underset{z}{\Pi}_{ij}$*] sînt* 7 *mărimi independente* (*z fix*). *Identitățile* (11) *conțin* 9 *identități independente* (*primare*).

Demonstrație. Mărimile $\underset{z}{S}_{ii}$ (*i* fix) nu pot fi toate nule, deoarece, în caz contrar, din (16) se deduce imediat $\underset{z}{S}_{ij} = 0$, ceea ce echivalează cu cazul banal $\underset{z}{p}_{ab} = 0$ (matricele i_z fiind liniar independente).

Presupunînd, de exemplu, $\underset{z}{S}_{11} \neq 0$, vom alege mărimile $\underset{z}{S}_{ij}$ corespunzătoare următoarelor perechi de indici :

$$(ij) = (11), (12), (21), (13), (31), (14), (41). \tag{23}$$

Din (16) deducem :

$$\underset{z}{S}_{ij} = \frac{\underset{z}{S}_{1j}\,\underset{z}{S}_{i1}}{\underset{z}{S}_{11}}.$$

$\underset{z}{S}_{ij}$ se exprimă deci în funcție de cele 7 mărimi definite de (23), cărora identitatea (16) nu le impune nici o relație suplimentară.

Luînd $i_z = I$ ($\underset{z}{p}_{ab} = p_{ab}$), se obține, ca un caz particular, o teoremă a lui Kofink [6], dedusă de acesta sub o formă necovariantă.

6. Situîndu-ne în ipotezele teoremei A, ne propunem să studiem problema existenței soluției relațiilor (11), considerate ca ecuații determinînd spinorii $\overset{1}{\varphi}_i$ și $\overset{2}{\varphi}_i$.

Pentru $\underset{z}{p}_{ab} = 0$, deci $\underset{z}{S}_{ij} = 0$, unul din spinorii $\overset{1}{\varphi}_i$, $\overset{2}{\varphi}_i$ trebuie să fie nul, celălalt rămînînd nedeterminat.

Cu excepția acestui caz banal, are loc următoarea teoremă :

7. TEOREMA B. *Identitățile* (11) *considerate ca ecuații pentru spinorii* $\overset{1}{\varphi}_i$, $\overset{2}{\varphi}_i$ *au soluții determinate pînă la o transformare „conformă" a spinorilor* :

$$\overset{1}{\varphi}{}'_i = \lambda\,\overset{1}{\varphi}_i\,;\ \overset{2}{\varphi}{}'_i = \frac{1}{\lambda^*}\,\overset{2}{\varphi}_i\left(\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}{}'_i = \frac{1}{\lambda}\,\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_i\right). \tag{24}$$

(λ *fiind un invariant arbitrar, complex, nenul*).

Demonstrație. Alegînd o pereche *kl* de indici ficși astfel ca $\underset{z}{S}_{kl} \neq 0$, fie spinorii $\overset{1}{\varphi}_i$, $\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_j$ definiți de :

$$\overset{1}{\varphi}_i = \mu\,\underset{z}{S}_{il}\,,\ \underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_j = \nu\,\underset{z}{S}_{kj}\,, \tag{25}$$

ν fiind factori arbitrari nenuli.

Pe baza teoremei A, au loc identităţile (16). Spinorii $\overset{1}{\varphi}_i$, $\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_j$ definiţi de (25) verifică deci (11) pentru

$$\mu\nu = \frac{1}{\underset{z}{S}_{kl}} \tag{26}$$

şi numai în acest caz.

Să arătăm că spinorii (25) nu depind [în afara unei transformări (24)] de alegerea mărimii $\underset{z}{S}_{kl}$. În adevăr, fie $\underset{z}{S}_{k'l'} \neq 0$ şi

$$\overset{1}{\varphi}{}'_i = \mu' \underset{z}{S}_{il'}\,; \quad \underset{z}{\overset{2}{\varphi}}{}'_j = \nu' \underset{z}{S}_{k'j} \tag{25'}$$

cu :

$$\mu'\nu' = \frac{1}{\underset{z}{S}_{k'l'}}\cdot \tag{26'}$$

Din (25), (25′) şi (16) se deduce :

$$\frac{\overset{1}{\varphi}{}'_i}{\overset{1}{\varphi}_i} = \frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{\underset{z}{S}_{kl'}}{\underset{z}{S}_{kl}}\,;\frac{\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}{}'_j}{\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_j} = \frac{\nu'}{\nu}\cdot\frac{\underset{z}{S}_{k'l}}{\underset{z}{S}_{kl}}\cdot \tag{27}$$

Ţinînd seama de (16), (26), (26′), formulele (27) devin :

$$\frac{\overset{1}{\varphi}{}'_i}{\overset{1}{\varphi}_i} = \frac{\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_j}{\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}{}'_j} = \lambda\,;\ \lambda = \frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{\underset{z}{S}_{kl'}}{\underset{z}{S}_{kl}} = \frac{\nu}{\nu'}\cdot\frac{\underset{z}{S}_{kl}}{\underset{z}{S}_{k'l}}\cdot \tag{24'}$$

În (24′) factorul λ este un invariant, exprimînd raportul a doi spinori proporţionali.

Astfel, existenţa soluţiei lui (11) este demonstrată. Pentru a stabili forma generală a soluţiei, fie $\overset{1}{\varphi}_i$, $\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_j$ doi spinori care verifică (11). Aceşti spinori fiind nenuli, din (11) şi (16) se deduce imediat :

$$\overset{1}{\varphi}_{[i}\,\underset{z}{S}_{k]l} = 0\,; \quad \underset{z}{S}_{k[l}\,\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_{j]} = 0. \tag{28}$$

(28) dă (25) ; spinorii $\overset{1}{\varphi}_i$, $\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_i$ [sau, conform lui (2′), $\overset{1}{\varphi}_i$, $\overset{2}{\varphi}_i$] sînt deci determinaţi în afara unei transformări (24).

Demonstraţia teoremei B este deci terminată.

(11) şi (28) dau :

$$\frac{\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_j}{\underset{z}{S}_{kj}} = \frac{1}{\overset{1}{\varphi}_k}\,; \quad \frac{\overset{1}{\varphi}_i}{\underset{z}{S}_{il}} = \frac{1}{\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_l} \quad (k,\ l,\ z \text{ ficşi}). \tag{29}$$

sau

$$\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_j = \underset{z}{S}_{kj} / \overset{1}{\varphi}_k ; \quad \overset{1}{\varphi}_i = \overset{1}{\varphi}_k \underset{z}{S}_{il} / \underset{z}{S}_{kl} , \tag{29'}$$

$$\overset{1}{\varphi}_i = \underset{z}{S}_{il} / \underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_l ; \quad \underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_j = \underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_l \underset{z}{S}_{kj} / \underset{z}{S}_{kl} . \tag{29''}$$

În (29′) ,(29″), $\overset{1}{\varphi}_k$ (k fix) respectiv $\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_l$ (l fix) sînt parametri arbitrari.

Formulele (29′), (29″) dau spinorii $\overset{1}{\varphi}_i$; $\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_j$ în funcție de $\overset{1}{\varphi}_k$ sau $\underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_l$ (k, l, z fixe).

8. TEOREMA C. *Există doi spinori nenuli* $\overset{1}{\varphi}_i$ *și* $\overset{2}{\varphi}_i$ *determinați în afara unei transformări* (24) *care verifică relațiile* (2).

Demonstrație. Va fi suficient să stabilim relațiile (2) numai pentru valoarea lui z care figurează în enunț. Aceasta rezultă pe baza trecerii de la un sistem de mărimi $\underset{z}{p}_{ab}$, $\underset{z}{N}_0$ la altul, indicată în § 3.

Din teorema B rezultă existența a doi spinori determinați în afara unei transformări (24) care verifică (11). Contractînd (11) cu $(i_{cd})_{ji}$ și δ_{ij}, se obține respectiv :

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \qquad \underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_i \, (i_{cd})_{ij} \, \overset{1}{\varphi}_j = \frac{1}{8} \underset{z}{p}_{ab} \, (i_{ab} \, i_{cd})_{ii} + \frac{1}{4} \underset{z}{N}_0 \, (i_{cd})_{ii} , \\ &\text{(b)} \qquad \underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_i \overset{1}{\varphi}_i = \frac{1}{8} \underset{z}{p}_{ab} \, (i_{ab})_{ii} + \underset{z}{N}_0 . \end{aligned} \tag{30}$$

Pe baza lui (5′a, b), (30a, b) se reduc la relațiile (2a, b). Teorema C justifică faptul că funcțiile de undă Π_{ij} ale particulei de spin maxim 1 au fost presupuse ca produse de doi cvadrispinori arbitrari.

9. În încheierea acestei părți vom expune cîteva consecințe ale teoremei C.

α. Mai întîi, două perechi oarecare din identitățile (4a, b) (corespunzătoare la două valori arbitrare ale lui z) sînt echivalente.

În adevăr, se pot determina spinorii $\overset{1}{\varphi}_i$, $\overset{2}{\varphi}_i$ care verifică (2a, b). Folosind identitățile matriciale ale lui A. Hristev, putem deduce toate celelalte identități (4a, b), ele fiind invariante la transformările (24).

β. Printre identitățile (4a, b) se găsește o pereche de identități tensoriale (covariante în E_6). Rezultă că toate aceste identități sînt covariante în E_6, cu toate că mărimile $\underset{z}{p}_{ab}$, $\underset{z}{N}_0$ nu sînt în general componentele unui tensor în E_6.

γ. Rezultă posibilitatea de a stabili și alte ecuații pentru determinarea spinorilor $\overset{1}{\varphi}_i$, $\overset{2}{\varphi}_i$, covariante în $\sum_4$.

În adevăr, contractînd relațiile (28) în i și l, respectiv în k și j, se obține :

$$(\underset{z}{S}_{ki} - \delta_{ki} \underset{z}{S}_{jj}) \, \overset{1}{\varphi}_i = 0 ; \quad \underset{z}{\overset{2}{\varphi}}_j \, (\underset{z}{S}_{jl} - \delta_{jl} \underset{z}{S}_{ii}) = 0 . \tag{28'}$$

Luînd o valoare pentru z astfel ca $\underset{z}{N_0} \neq 0$, se demonstrează pe baza lui (7) şi (16) echivalenţa relaţiilor (28) şi (28′). Pentru $\underset{z}{N_0} \neq 0$, matricea $(\underset{z}{S}_{ik} - \delta_{ik} \underset{z}{S}_{jj})$ este de rang trei.

8. Din teorema C rezultă de asemenea o nouă demonstraţie a teoremei A′. În adevăr, conform teoremei C, printre componentele spinorilor $\overset{1}{\varphi}_i$, $\overset{2}{\varphi}_i$, şapte sînt independente. Fiecărei perechi din identităţile (4a, b) îi corespund atunci 9 identităţi independente.

10. Vom examina următoarea teoremă de completitudine:

TEOREMA D. *Orice identitate verificată de toţi tensorii antisimetrici* p^+_{ab}, N^+_0 *în* E_6 *care verifică o pereche din identităţile* (4a, b) *este o consecinţă a acestora.*

Demonstraţie. Fie J o identitate verificată de tensorii p^+_{ab}, N^+_0 care nu ar rezulta din (4a, b). În virtutea relaţiilor (2b), existenţa unei astfel de identităţi J ar conduce la o identitate spinorială J', covariantă faţă de transformările (24). Atunci, printre componentele spinorilor $\overset{1}{\varphi}_i$, $\overset{2}{\varphi}_i$, numai şase vor fi arbitrare, fapt care contrazice teorema C.

11. Au loc următoarele două teoreme:

TEOREMA E. *Condiţia necesară şi suficientă de proporţionalitate a spinorilor* $\overset{1}{\varphi}_i$, $\overset{2}{\varphi}{}_i^+$ *este simetria matricei* S_{ij}.

TEOREMA F. *Condiţia necesară şi suficientă ca spinorii* $\overset{1}{\varphi}_i$ *şi* $\overset{2}{\varphi}_i$ *să verifice relaţia*

$$\overset{2}{\varphi}_i = \rho \overset{1}{\varphi}_i \qquad (\rho \text{ — real}) \tag{31}$$

este ca matricea S_{ij} *să fie hermitică.*

Demonstraţia teoremelor E şi F este imediată. Teorema E nu este covariantă în $\sum_4$.

12. Are loc următoarea teoremă:

TEOREMA G. *Dacă matricea* S_{ij} *este hermitică, atunci există un spinor* φ_i [*determinat pînă la o transformare* (24) *cu* λ *complex unimodular*] *care verifică relaţiile*:

$$\underset{z}{p_{ab}} = \pm \varphi_i^* (i_z i_{ab})_{ij} \varphi_j ; \quad \underset{z}{N_0} = \pm \varphi_i^* (i_z)_{ij} \varphi_j . \tag{32}$$

Demonstraţie. În virtutea teoremei C, există doi spinori $\overset{1}{\varphi}_i$, $\overset{2}{\varphi}_i$ care verifică (2a, b). Conform teoremei F, aceşti spinori verifică (31).

Pe baza lui (24) putem defini spinorii:

$$\overset{2}{\varphi}{}_i' = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \overset{2}{\varphi}_i ; \quad \overset{1}{\varphi}{}_i' = \sqrt{\rho}\, \overset{1}{\varphi}_i . \tag{24''}$$

Din (24″) şi (31) deducem:

$$\pm \overset{2}{\varphi}{}_i' = \overset{1}{\varphi}{}_i' \; (= \varphi_i) \tag{33}$$

după cum $\rho > 0$ sau $\rho < 0$.

Vom presupune acum că matricele i_{ab} sînt hermitice.

În acest caz, matricea S_{ij} este hermitică dacă și numai dacă toate mărimile p_{ab}, $\mathcal{V}_4$ sînt reale. Din teoremele F și G rezultă atunci :

TEOREMA H. *Condiția necesară și suficientă de reducere în* E_6 *a tensorilor mezonici* $p^{\pm}_{ab}$, $N^{\pm}_0$ *la tensorii sarcină-curent* $\varphi^{\pm}_{ab}$, $J^{\pm}_0$ [*adică valabilitatea condițiilor* (33)] *este ca mărimile* p_{ab} $\mathcal{V}_4$ *să fie reale.*

Se poate arăta ușor că teorema D de completitudine rămîne valabilă de asemenea și pentru tensorii sarcină-curent $\varphi^{\pm}_{ab}$, $J^{\pm}_0$.

II. TEORIA CVADRIDIMENSIONALĂ

1. Fie β_i matricele de bază ale algebrei cuaternionice A_{2^2} a lui Pauli ($\beta_0 = \beta_4 = I$; $i, j \ldots 0, 1, 2, 3 = 1, 2, 3, 4$), verificînd legile :

$$\beta_\alpha \beta_\beta = i \beta_\gamma ; \; \beta_i^2 = I. \tag{34}$$

Matricele de tip L. de Broglie β^i_j se obțin prin metoda fuziunii [5], înlocuind β_j în β_i. Ele dau o reprezentare m_z a bazei algebrei lui Dirac A_{4^2}. Notăm [1] :

$$\sigma_i = \beta^0_i ; \; \alpha_i = \beta^1_i ; \; \gamma_\alpha = \beta^2_\alpha ; \; \gamma_4 = \beta^3_0 ; \; \delta_\alpha = \beta^3_\alpha ; \; \delta_4 = -\beta^2_0. \tag{35}$$

Luînd β_i hermitice, matricele m_z de tip L. de Broglie sînt și ele hermitice. Pentru

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \; \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} ; \; \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

componentele $(m_z)_{ij}$ sînt :

ij	11	12	13	14	21	22	23	24	31	32	33	34	41	42	43	44
σ_0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
σ_1	0	−1	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	−1	0
σ_2	0	i	0	0	$-i$	0	0	0	0	0	0	i	0	0	$-i$	0
σ_3	1	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	−1
α_0	0	0	−1	0	0	0	0	−1	−1	0	0	0	0	−1	0	0
α_1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
α_2	0	0	0	$-i$	0	0	i	0	0	$-i$	0	0	i	0	0	0
α_3	0	0	−1	0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	1	0	0
γ_0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	−1
γ_1	0	0	0	$-i$	0	0	$-i$	0	0	i	0	0	i	0	0	0
γ_2	0	0	0	−1	0	0	1	0	0	1	0	0	−1	0	0	0
γ_3	0	0	i	0	0	0	0	$-i$	$-i$	0	0	0	0	i	0	0
δ_0	0	0	$-i$	0	0	0	0	$-i$	i	0	0	0	0	i	0	0
δ_1	0	−1	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
δ_2	0	i	0	0	$-i$	0	0	0	0	0	0	$-i$	0	0	i	0
δ_3	1	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	1

(36′)

2. Pentru $i_z = \gamma_4$, identitatea (6) ia forma :

$$4\overset{1}{\varphi}_i \overset{2}{\varphi}{}_j^{+} = (M_\alpha \sigma_\alpha + iN_\alpha \alpha_\alpha + U_i \delta_i - iV_i \gamma_i + iM_0\alpha_0 + N_0\sigma_0)_{ij}. \quad (37)$$

Sînt valabile formule analoage pentru $\varphi^{\mp}_{ab}$, $J^{\pm}_0$:

$$4\, \varphi_i\varphi_j^{+} = (I_\alpha \sigma_\alpha + iJ_\alpha\alpha_\alpha + S_i\, \delta_i - i\,C_i\gamma_i + i\,I_0\alpha_0 + J_0\sigma_0)_{ij}. \quad (37')$$

Luînd matricele (36′) de tip L. de Broglie, relațiile (37) se descompun în patru grupe, fiecare grupă depinzînd de patru componente tensoriale :

$$\begin{aligned}
&B_1 : \begin{cases} 4\Pi^{+}_{11} = M_3 + N_0 + \mathcal{U}_3 + \mathcal{V}_4 ;\ 4\Pi^{+}_{22} = -M_3 + N_0 - \mathcal{U}_3 + \mathcal{V}_4, \\ 4\Pi^{+}_{33} = M_3 + N_0 - \mathcal{U}_3 - \mathcal{V}_4 ;\ 4\Pi^{+}_{44} = -M_3 + N_0 + \mathcal{U}_3 - \mathcal{V}_4 ; \end{cases}\\
&B_2 : \begin{cases} 4\Pi^{+}_{13} = -iN_3 - iM_0 + \mathcal{V}_3 + \mathcal{U}_4 ;\ 4\Pi^{+}_{31} = -iN_3 - iM_0 - \mathcal{V}_3 - \mathcal{U}_4, \\ 4\Pi^{+}_{24} = iN_3 - iM_0 - \mathcal{V}_3 + \mathcal{U}_4 ;\ 4\Pi^{+}_{42} = iN_3 - iM_0 + \mathcal{V}_3 - \mathcal{U}_4 ; \end{cases}\\
&B_3 : \begin{cases} 4\Pi^{+}_{12} = -M_1 + iM_2 + \mathcal{U}_1 - i\mathcal{U}_2 ;\ 4\Pi^{+}_{21} = -M_1 - iM_2 - \mathcal{U}_1 - i\mathcal{U}_2, \\ 4\Pi^{+}_{34} = -M_1 + iM_2 - \mathcal{U}_1 + i\mathcal{U}_2 ;\ 4\Pi^{+}_{43} = -M_1 - iM_2 + \mathcal{U}_1 + i\mathcal{U}_2 ; \end{cases} \quad (38)\\
&B_4 : \begin{cases} 4\Pi^{+}_{14} = iN_1 + N_2 - \mathcal{V}_1 + i\mathcal{V}_2 ;\ 4\Pi^{+}_{41} = iN_1 - N_2 + \mathcal{V}_1 + i\mathcal{V}_2, \\ 4\Pi^{+}_{23} = iN_1 - N_2 - \mathcal{V}_1 - iV_2 ;\ 4\Pi^{+}_{32} = iN_1 + N_2 + \mathcal{V}_1 - i\mathcal{V}_2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Inversele formulelor (38) sînt :

$$\begin{aligned}
&B'_1 : \begin{cases} M_3 = \Pi^{+}_{11} - \Pi^{+}_{22} + \Pi^{+}_{33} - \Pi^{+}_{44} ;\ N_0 = \Pi^{+}_{11} + \Pi^{+}_{22} + \Pi^{+}_{33} + \Pi^{+}_{44}, \\ \mathcal{U}_3 = \Pi^{+}_{11} - \Pi^{+}_{22} - \Pi^{+}_{33} + \Pi^{+}_{44} ;\ \mathcal{V}_4 = \Pi^{+}_{11} + \Pi^{+}_{22} - \Pi^{+}_{33} - \Pi^{+}_{44} ; \end{cases}\\
&B'_2 \begin{cases} iN_3 = -\Pi^{+}_{13} + \Pi^{+}_{24} - \Pi^{+}_{31} + \Pi^{+}_{42} ;\ iM_0 = -\Pi^{+}_{13} - \Pi^{+}_{24} - \Pi^{+}_{31} - \Pi^{+}_{42}, \\ \mathcal{V}_3 = \Pi^{+}_{13} - \Pi^{+}_{24} - \Pi^{+}_{31} + \Pi^{+}_{42} ;\ \mathcal{U}_4 = \Pi^{+}_{13} + \Pi^{+}_{24} - \Pi^{+}_{31} - \Pi^{+}_{42} ; \end{cases}\\
&B'_3 : \begin{cases} M_1 = -\Pi^{+}_{12} - \Pi^{+}_{43} - \Pi^{+}_{34} - \Pi^{+}_{21} ;\ iM_2 = \Pi^{+}_{12} - \Pi^{+}_{43} + \Pi^{+}_{34} - \Pi^{+}_{21}, \\ \mathcal{U}_1 = -\Pi^{+}_{12} + \Pi^{+}_{43} + \Pi^{+}_{34} - \Pi^{+}_{21} ;\ i\mathcal{U}_2 = \Pi^{+}_{12} + \Pi^{+}_{43} - \Pi^{+}_{34} - \Pi^{+}_{21} ; \end{cases} \quad (38')\\
&B'_4 : \begin{cases} iN_1 = \Pi^{+}_{14} + \Pi^{+}_{41} + \Pi^{+}_{32} + \Pi^{+}_{23} ;\ N_2 = \Pi^{+}_{14} - \Pi^{+}_{41} + \Pi^{+}_{32} - \Pi^{+}_{23}, \\ \mathcal{V}_1 = -\Pi^{+}_{14} + \Pi^{+}_{41} + \Pi^{+}_{32} - \Pi^{+}_{23} ;\ i\mathcal{V}_2 = \Pi^{+}_{14} + \Pi^{+}_{41} - \Pi^{+}_{32} - \Pi^{+}_{23}. \end{cases}
\end{aligned}$$

(38′) dau descompunerea în E_4 a identităților (10), pentru $i_z = \gamma_4$.

3. Formele canonice ale tensorilor sarcină-curent $\varphi^{\pm}_{ab}$, $J^{\pm}_0$ sînt (în afara unui factor $\varepsilon = \pm 1$) :

$$\left.\begin{aligned} I_1 = I_2 = 0 ;\ I_3 = J_0 ;\ \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_3 = 0 ;\ \mathcal{C}_4 = \omega \\ J_1 = J_2 = 0 ;\ I_3 = I_0 ;\ \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_4 = 0 ;\ \mathcal{S}_3 = \omega \end{aligned}\right. \quad (\omega = \sqrt{J_0^2 + I_0^2}) \quad (39)$$

$$\left.\begin{aligned} I_\alpha = 0 ;\ J_0 = 0 ;\ \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = 0 ;\ \mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_4 = \rho \\ J_\alpha = 0 ;\ I_0 = 0 ;\ \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = 0 ;\ \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4 = \rho \end{aligned}\right. \quad (\rho > 0). \quad (39')$$

(39), (39′) rezultă imediat din (3) și (4), folosind transformările Lorentz.

Pe baza lui (38), spinorul φ_i corespunzător formelor canonice (39) şi (39′) este:

$$\varphi_1 = \sqrt{(\omega + J_0)/2}\, \mathrm{e}^{i\theta}\,;\ \varphi_3 = \sqrt{(\omega - J_0)/2}\, \mathrm{e}^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}\,;\ \varphi_2 = \varphi_4 = 0 \tag{40}$$

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\rho}{2}}\, \mathrm{e}^{i\theta}\,;\ \varphi_3 = \sqrt{\frac{\rho}{2}}\, \mathrm{e}^{i(\theta - \pi)}\,;\ \varphi_2 = \varphi_4 = 0. \tag{40′}$$

(θ real, arbitrar.)

Calculul în E_4 al spinorilor $\overset{1}{\varphi}_i$, $\overset{2}{\varphi}_i$ ataşaţi tensorilor mezonici $p^{\pm}_{ab}, N^{\pm}_{0}$ se bazează pe determinarea formelor canonice tensoriale respective. Această problemă va constitui obiectul unei lucrări ulterioare.

Primită la redacţie la 19 martie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. A. Popovici, Revue de Math. pures et appl., Acad. R.P.R., **IV**, *4* (1959); **V**, *2* (1960); Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **248** (1959).
2. A. Hristev, Comunicările Acad. R.P.R., **XI**, *7* (1961).
3. I. Popovici, Comunicările Acad. R.P.R., **XII**, *4*, (1962).
4. A. Popovici, A. Hristev, I. Popovici, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **257** (1963).
5. L. De Broglie, *Théorie générale des particules à spin*, II-e ed., Paris, 1954.
6. W. Kofink, Ann. Phys., 5, 36 (1940).

TEORIA COVARIANTĂ A RELAȚIILOR ALGEBRICE SPINORIALE ALE CÎMPURILOR DE SPIN MAXIM 1 ȘI 1/2 [1]

DE

ANATOLIE P. HRISTEV

Comunicarea de față se încadrează într-un ansamblu vast de cercetări (v. de ex. [1], [2], [3]) (prof. A. Popovici și colab.) asupra teoriei conforme polidimensionale a particulelor elementare.

UNIFICAREA MATRICELOR DIRAC ȘI A CÎMPURILOR MEZONICE. DOUĂ TEOREME – „ALGORITM"

1. Cu ajutorul celor 4 matrice Dirac anticomutative de ordinul IV, γ_i $(i, j, k, l = 1, \ldots, 4)$, se construiește într-un spațiu pseudoeuclidian E_6 de signatură $+++-+-$ „tensorul matricial" antisimetric $i_{(ab)} \equiv - i_{(ba)}$ $(a, b, c, \ldots = 1, \ldots, 6)$ [1]:

$$\begin{gathered} i_{(ij)} \equiv - i\, \gamma_i\, \gamma_j (i \neq j),\ i_{(5j)} \equiv - i\, \gamma_5\, \gamma_j,\ i_{(6j)} \equiv \gamma_j,\ i_{(65)} \equiv \gamma_5, \\ \gamma_5 \equiv \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4,\ i \equiv \sqrt{-1},\ \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2 \delta_{ij}. \end{gathered} \tag{1}$$

Fie $\overset{1}{\varphi}$, $\overset{2}{\varphi}$ două cîmpuri spinoriale (particule de spin 1/2) în spațiul-timp pseudoeuclidian E_4 (de signatură $+++-$) (φ, $\varphi^\star$ – cvadrispinori complex conjugați). Se construiesc în E_6 tensorii *mezonici* antisimetrici „duali" $p^{\pm}_{(ab)} \equiv - p^{\pm}_{(ba)}$ (tensorii L. de Broglie unificați în E_6) [1], [4]:

$$p^{\pm}_{(ab)} \equiv \overset{2}{\varphi}{}^{\pm}\, i_{(ab)} \overset{1}{\varphi},\ N^{\pm}_0 \equiv \overset{2}{\varphi}{}^{\pm} \overset{1}{\varphi};\ \varphi^{+} \equiv \varphi^\star \gamma_4,\ \varphi^{-} \equiv i \varphi^\star \gamma_4 \gamma_5. \tag{2}$$

În cazul $\overset{1}{\varphi} \equiv \overset{2}{\varphi}$, $p^{\pm}_{(ab)}$ trec în tensorii antisimetrici „duali" *sarcină-curent* (tensorii Dirac unificați în E_6) $\varphi^{\pm}_{(ab)}$. Asupra semnificației în E_4 relativist a componentelor $p^{\pm}_{(ab)}$, $\varphi^{\pm}_{(ab)}$ a se vedea [1], [2], [3].

---

[1] Această lucrare a apărut în versiune franceză în „Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées", **IX**, 7 (1964).

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 7, P. 849–860, BUCUREȘTI, 1964

E_6 este definit de congruențele ortogonale ale spațiului riemannian V_6:

$$ds^{(a)} \equiv l_b^{(a)}\, dx^b, \qquad ds^2 \equiv G_{ab}\, dx^a\, dx^b = ds^{(a)^2}. \tag{3}$$

În cele ce urmează vom emite pentru simplificare parantezele relative la indicii pe congruențele ortogonale.

Vom nota: $[abc\ldots]$ — antisimetrizarea (suma după permutările indicilor, ținînd seama de paritatea permutării); $|abc\ldots|$ — suma după permutările *ciclice* ale indicilor; $\varepsilon_{abcdef} = \pm 1$ — pseudotensorul unitate al lui Levi-Civita în E_6; $[A, B] \equiv AB - BA$, $\{A, B\} \equiv AB + BA$.

În [2] au fost stabilite identitățile matriciale pentru elementele de matrice $(i_{ab})_{ij}$ pe care le vom folosi aici. Introducem următoarele „matrice (anti)simetrizate de fuziune" (de ordinul $4^2 = 16$)

$$\left.\begin{aligned}
&(a) && \Gamma^1_{ab.\,ijkl} \equiv \delta_{ab}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}(i_{c|a})_{ij}(i_{b|c})_{kl},\\
&(a') && \Gamma^1_{ijkl} \equiv \frac{1}{2}\Gamma^1_{aa.\,ijkl} \equiv 3\,\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{1}{2}(i_{ab})_{ij}(i_{ab})_{kl},\\
&(b) && \Gamma^2_{ab.\,ijkl} \equiv (i_{ab})_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ij}(i_{ab})_{kl} - \frac{1}{4}\varepsilon_{abcdef}(i_{cd})_{ij}(i_{ef})_{kl},\\
&(c, d) && \Gamma^{3,4}_{ab.\,ijkl} \equiv (i_{ab})_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ij}(i_{ab})_{kl} \pm \frac{1}{2i}(i_{c[a})_{ij}(i_{b]c})_{kl},\\
&(e) && \Gamma^5_{ab.\,ijkl} \equiv (i_{ab})_{ij}\,\delta_{kl} + \delta_{ij}(i_{ab})_{kl} + \frac{1}{12}\varepsilon_{abcdef}(i_{cd})_{ij}(i_{ef})_{kl},\\
&(f) && \Gamma_{ijkl} \equiv 5\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \frac{1}{2}(i_{ab})_{ij}(i_{ab})_{kl}
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

cu proprietățile de simetrie:

$$\Gamma^{1,2,5}_{ab.\,ijkl} \equiv \Gamma^{1,2,5}_{ab.\,klij}, \qquad \Gamma^{3,4}_{ab.\,ijkl} \equiv -\Gamma^{3,4}_{ab.\,klij}, \qquad \Gamma_{ijkl} \equiv \Gamma_{klij}, \tag{5}$$

Atunci *identitățile matriciale* exprimă următoarele proprietăți de simetrie [2]:

$$\left.\begin{aligned}
&(a)\ \Gamma^{\alpha}_{ab.\,ijkl} = -\Gamma^{\alpha}_{ab.\,ilkj}\ (\alpha = 1, 2, 3), \qquad (a')\,\Gamma^1_{ijkl} = -\Gamma^1_{ilkj},\\
&(b)\ \Gamma^{r}_{ab.\,ijkl} = \Gamma^{r}_{ab.\,ilkj}\ (r = 4, 5), \qquad (c)\,\Gamma_{ijkl} = \Gamma_{ilkj}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

sau, în virtutea proprietăților (5):

$$\left.\begin{aligned}
&(a)\ \Gamma^{\beta}_{ab.\,ijkl} = -\Gamma^{\beta}_{ab.\,kjil}\ (\beta = 1, 2, 4), \quad (a')\,\Gamma^1_{ijkl} = -\Gamma^1_{kjil},\\
&(b)\ \Gamma^{s}_{ab.\,ijkl} = \Gamma^{s}_{ab.\,kjil}\ (s = 3, 5), \qquad (c)\,\Gamma_{ijkl} = \Gamma_{kjil}.
\end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

2. Indicăm o *teoremă-„algoritm"* care „automatizează" obținerea identităților algebrice spinoriale și tensoriale generale. Fie M, N, ...

matricele de elemente $(M)_{ij}$, $(N)_{kl}, \ldots$, $\overset{j}{\varphi}(i, j, k, l, \ldots = 1, 2, \ldots)$ spinori arbitrari (de ordin $2^{\nu} \equiv N$ în $E_{2\nu}$), $\overset{i}{\varphi}{}^{\pm}$ spinorii „adjuncți" (convenabil definiți). Se construiesc tensorii de tip L. de Broglie $\overset{ij}{P}{}^{\pm}$, $\overset{kl}{Q}{}^{\pm}, \ldots$ prin definiție : $\overset{ij}{P}{}^{\pm} \equiv \overset{i}{\varphi}{}^{\pm} M \overset{j}{\varphi}$, $\overset{kl}{Q}{}^{\pm} \equiv \overset{k}{\varphi}{}^{\pm} N \overset{l}{\varphi}, \ldots$ Fie identitățile matriciale : $\ldots + (M)_{ij}(N)_{kl} \ldots + \ldots = 0$. Atunci pentru a obține identitățile *spinoriale* generale cu un număr dat de spinori, se alege un număr egal de indici matriciali $i, j, k, l, \ldots$ și pentru fiecare indice matricial ales, prim sau inițial $j, l, \ldots$ (secund sau final $i, k, \ldots$), se înmulțește matricea respectivă la dreapta (respectiv la stînga) cu spinorul $\overset{j}{\varphi}, \overset{l}{\varphi}, \ldots$ (respectiv, cu spinorul $\overset{i}{\varphi}{}^{\pm}, \overset{k}{\varphi}{}^{\pm}, \ldots$). De exemplu :

$$\ldots (M)_{ij} \ldots \rightarrow (M\overset{j}{\varphi})_i \text{ sau } (\overset{i}{\varphi}{}^{\pm} M)_j \text{ sau } (\overset{i}{\varphi}{}^{\pm} M \overset{j}{\varphi}) \text{ etc.}$$

Identitățile tensoriale generale sînt exact „izomorfe" cu identitățile matriciale, elementele de matrice $(M)_{ij}, \ldots$ fiind înlocuite prin tensorii respectivi $\overset{ij}{P}{}^{\pm}, \ldots$, adică „ridicînd" pur și simplu indicii matriciali peste tensorii respectivi.

În particular, în E_6 vom avea cîmpurile mezonice :

$$\overset{ij}{p}{}^{\pm}_{ab} \equiv \overset{i}{\varphi}{}^{\pm} i_{ab} \overset{j}{\varphi}, \quad \overset{ij}{N}{}^{\pm}_{0} \equiv \overset{i}{\varphi}{}^{\pm} \overset{j}{\varphi}, \tag{7}$$

iar identitățile tensoriale generale (biliniare mezonice sau cvadriliniare spinoriale) se obțin conform teoremei prin substituția :

$$(i_{ab})_{ij} \rightarrow \overset{ij}{p}{}^{\pm}_{ab}, \quad \delta_{ij} \rightarrow \overset{ij}{N}{}^{\pm}_{0}. \tag{8}$$

Proprietățile „matricelor de fuziune" exprimate prin identitățile matriciale (6) sau (6′) dau condiții de simetrie sau antisimetrie în raport cu permutarea cîmpurilor spinoriale, respectiv a cîmpurilor spinoriale adjuncte.

II. IDENTITĂȚI PENTRU DOUĂ ȘI TREI CÎMPURI SPINORIALE

3. Peste tot unde apar indicii $+$, $-$ etajați se iau simultan fie semnele superioare fie cele inferioare ; de asemenea, peste tot $\alpha = 1, 2, 3$; $r = 4, 5$; $\beta = 1, 2, 4$; $s = 3, 5$ ca în (6), (6′).

Fie *matricele asociate* cîmpului mezonic $\overset{ij}{p}{}^{\pm}_{ab}$ $(\nu = 1, \ldots, 5)$ cu elementele :

$$\overset{ij}{D}{}^{\nu\pm}_{ab,kl} \equiv \overset{i}{\varphi}{}^{\pm}_{i'} \, \Gamma^{\nu}_{ab,i'j'kl} \overset{j}{\varphi}_{j'} \equiv \Gamma^{\nu}_{ab,ijkl} \; [(i_{cd})_{ij} \rightarrow \overset{ij}{p}{}^{\pm}_{cd}, \; \delta_{ij} \rightarrow \overset{ij}{N}{}^{\pm}_{0}], \tag{9}$$

în particular pentru $\overset{21}{p}_{ab} \equiv p_{ab}$ (indicii ± subînțeleși) matricele:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{a}) \quad D^1_{ab} \equiv N_0 \delta_{ab} + \frac{1}{2} p_{c|a} i_{b|c} \equiv N_0 \delta_{ab} - \frac{1}{2} p_{c|a} \delta_{b|d} i_{cd} \equiv N_0 \delta_{ab} - \hat{D}^1_{ab},\\
&(\mathrm{a}') \quad D^1 \equiv \frac{1}{2} D^1_{aa} \equiv 3N_0 - \frac{1}{2} p_{ab} i_{ab} \equiv 3N_0 - \hat{D},\ \hat{D} \equiv \frac{1}{2} \hat{D}^1_{aa},\\
&(\mathrm{b}) \quad D^2_{ab} \equiv p_{ab} + N_0 i_{ab} - \frac{1}{4} \varepsilon_{abcdef} p_{cd} i_{ef} \equiv\\
&\qquad \equiv p_{ab} + \left(N_0 \delta_{ac} \delta_{bd} - \frac{1}{4} \varepsilon_{abcdef} p_{ef}\right) i_{cd} \equiv p_{ab} + \hat{D}^2_{ab},\\
&(\mathrm{c, d}) \quad \hat{D}^{3,4}_{ab} \equiv p_{ab} - N_0 i_{ab} \pm \frac{1}{2i} p_{c[a} i_{b]c} \equiv \qquad\qquad (10)\\
&\qquad \equiv p_{ab} - (N_0 \delta_{ac} \delta_{bd} \pm \frac{1}{2i} p_{c[a} \delta_{b]d}) i_{cd} \equiv p_{ab} - \hat{D}^{3,4}_{ab},\\
&(\mathrm{e}) \quad D^5_{ab} \equiv p_{ab} + N_0 i_{ab} + \frac{1}{12} \varepsilon_{abcdef} p_{cd} i_{ef} \equiv\\
&\qquad \equiv p_{ab} + (N_0 \delta_{ac} \delta_{bd} + \frac{1}{12} \varepsilon_{abcdef} p_{ef}) i_{cd} \equiv p_{ab} + \hat{D}^5_{ab},\\
&(\mathrm{f}) \quad D \equiv 5N_0 + \frac{1}{2} p_{ab} i_{ab} \equiv 5N_0 + \hat{D}.
\end{aligned}
$$

Prin substituția $p_{ab} \leftrightarrow i_{ab}$, $N_0 \leftrightarrow I$, formele (10 a, a′, b, e, f) rămîn invariante, iar (10 c, d) schimbă semnul.

Se pot defini matrice analoge, asociate unui tensor antisimetric oarecare, în particular pentru $\varphi^{\pm}_{ab}$ pentru care vom folosi simbolurile $\Delta^{\nu\pm}_{ab}$.

Identitățile biliniare pentru două cîmpuri spinoriale se clasifică în următoarele patru categorii:

I) „Relațiile de interacțiune” (biliniare) a două cîmpuri spinoriale:

$$(\mathrm{a})\ \Gamma^{\alpha}_{ab,\,ijkl} \overset{|1}{\varphi}_j \overset{2|}{\varphi}_l = 0,\ (\mathrm{b})\ \Gamma^{r}_{ab,\,ijkl} \overset{[1}{\varphi}_j \overset{2]}{\varphi}_l = 0,\ (\mathrm{c})\ \Gamma_{ijkl} \overset{[1}{\varphi}_j \overset{2]}{\varphi}_l = 0 \qquad (11)$$

și a cîmpurilor spinoriale adjuncte:

$$(\mathrm{a})\ \overset{|1}{\varphi}{}^{\pm}_i \overset{2|}{\varphi}{}^{\pm}_k \Gamma^{\beta}_{ab,\,ijkl} = 0,\ (\mathrm{b})\ \overset{[1}{\varphi}{}^{\pm}_i \overset{2]}{\varphi}{}^{\pm}_k \Gamma^{s}_{ab,\,ijkl} = 0,\ (\mathrm{c})\ \overset{[1}{\varphi}{}^{\pm}_i \overset{2]}{\varphi}{}^{\pm}_k \Gamma_{ijkl} = 0. \qquad (11')$$

Prin simpla substituție $\overset{2}{\varphi}{}^{\pm} \to \overset{2}{\varphi}{}^{\mp}$ în (11′) se obțin identitățile „mixte”. (11) și (11′) exprimă condițiile satisfăcute de combinația simetrică sau antisimetrică a spinorilor, respectiv a spinorilor adjuncți.

II) „Relațiile de autoacțiune” (pătratice) a unui cîmp spinorial $(\overset{1}{\varphi} \equiv \overset{2}{\varphi})$:

$$(\mathrm{a})\ \Gamma^{\alpha}_{ab,\,ijkl} \varphi_j \varphi_l = 0, \qquad (\mathrm{b})\ \varphi^{\pm}_i \varphi^{\pm}_k \Gamma_{ab,\,ijkl} = 0, \qquad (12)$$

(11 b, c) și (11′ b, c) fiind acum identic satisfăcute.

III) „Relațiile de fuziune” a două cîmpuri spinoriale : relațiile între cîmpul mezonic și cele două cîmpuri spinoriale componente :

$$\begin{aligned} &(a)\ D^{\alpha\pm}_{ab,\,kl} = -\overset{2}{\varphi}{}^{\pm}_{i}\,\Gamma^{\alpha}_{ab,\,ilkj}\,\overset{1}{\varphi}_{j}, &&(a')\ D^{1\pm}_{kl} = -\overset{2}{\varphi}{}^{\pm}_{i}\,\Gamma_{ilkj}\,\overset{1}{\varphi}_{j}, \\ &(b)\ D^{r\pm}_{ab,\,kl} = \overset{2}{\varphi}{}^{\pm}_{i}\,\Gamma^{r}_{ab,\,ilkj}\,\overset{1}{\varphi}_{j}, &&(c)\ D^{\pm}_{kl} = \overset{2}{\varphi}{}^{\pm}_{i}\,\Gamma_{ilkj}\,\overset{1}{\varphi}_{j} \end{aligned} \tag{13}$$

avînd de exemplu consecința :

$$N_0^{\pm}\,\delta_{kl} + \frac{1}{2}\,p^{\pm}_{ab}\,(i_{ab})_{kl} = 4\,\overset{2}{\varphi}{}^{\pm}_{l}\,\overset{1}{\varphi}_{k} \tag{13'}$$

care exprimă produsul cîmpurilor spinoriale $\overset{2}{\varphi}{}^{\pm}_{l}\,\overset{1}{\varphi}_{k}$ liniar prin cîmpul mezonic $p^{\pm}_{ab}$, $N_0^{\pm}$, coeficienții fiind elementele de matrice $\frac{1}{4}\,(i_{ab})_{kl}$, $\frac{1}{4}\,\delta_{kl}$.

IV) „Relațiile de autofuziune” a unui cîmp spinorial, care exprimă densitățile sarcină-curent $\varphi^{\pm}_{ab}$ prin cîmpul spinorial φ și adjunctul său $\varphi^{\pm}$, se obțin din (13) prin substituția $\overset{1}{\varphi} \equiv \overset{2}{\varphi}$, $p^{\pm}_{ab} \rightarrow \varphi^{\pm}_{ab}$, $D^{\nu\pm}_{ab} \rightarrow \Delta^{\nu\pm}_{ab}$.

4. Fie $\overset{ij}{p}{}^{\pm}_{ab}$ și $\overset{ji}{p}{}^{\pm}_{ab} \equiv \overset{\widetilde{ij}}{p}{}^{\pm}_{ab}$ cîmpurile mezonice „conjugate” (avînd cîmpurile spinoriale permutate), $\overset{i}{\varphi}{}^{\pm}_{ab}$ $(\equiv \overset{ii}{p}{}^{\pm}_{ab})$ și $\overset{j}{\varphi}{}^{\pm}_{ab}$ cele două densități sarcină-curent asociate, în particular :

$$\overset{21}{p}_{ab} \equiv p_{ab},\ \overset{12}{p}_{ab} \equiv \widetilde{p}_{ab},\ \overset{1}{\varphi}_{ab} \equiv \varphi'_{ab},\ \overset{2}{\varphi}_{ab} \equiv \varphi''_{ba}.$$

Datorită caracterului pseudoeuclidian al lui E_6 (signatura $+++-+-$) și alegerii sistemului de coordonate (x_4, x_6 imaginare), conjugatul complex al unui tensor se definește corect prin formula :

$$\overset{\star}{T}_{abc\ldots} = \varepsilon_a\,\varepsilon_b\,\varepsilon_c \ldots T^{\star}_{abc\ldots},\ \{\varepsilon_a\} = \{+\,+\,+\,-\,+\,-\}, \tag{14}$$

unde $T^{\star}_{abc\ldots}$ este conjugatul complex ordinar al lui $T_{abc\ldots}$. Pentru fiecare indice a, b, c, ... egal cu 4 sau 6, trebuie deci schimbat semnul.

În virtutea proprietății de comutare

$$\gamma_4 i_{ab}\,\gamma_4 = \varepsilon_a\,\varepsilon_b\,i_{ab},$$

conjugatul complex al lui $\overset{ij}{p}{}^{+}_{ab}$ coincide cu „conjugatul” definit mai sus $\overset{\widetilde{ij}}{p}{}^{+}_{ab} \equiv \overset{ji}{p}{}^{+}_{ab}$:

$$\overset{\star ij}{p}{}^{+}_{ab} \equiv \varepsilon_a\,\varepsilon_b\,(\overset{i}{\varphi}{}^{\star}\gamma_4 i_{ab}\,\overset{j}{\varphi})^{\star} \equiv \overset{j}{\varphi}{}^{\star}\gamma_4 i_{ab}\overset{i}{\varphi} \equiv \overset{ji}{p}{}^{+}_{ab} \equiv \overset{\widetilde{ij}}{p}{}^{+}_{ab}, \tag{14'}$$

în particular $\overset{\star}{p}{}^{+}_{ab} \equiv \overset{12}{p}{}^{+}_{ab} \equiv \widetilde{p}{}^{+}_{ab}$. Pentru p^{+}_{ab} operația conjugării complexe coincide cu permutarea celor doi spinori componenți. Cîmpul mezonic fiind complex, descrie particule încărcate. Densitatea $\varphi^{+}_{ab} \equiv \overset{\star}{\varphi}{}^{+}_{ab}$ este reală.

Aplicînd teorema-algoritm la trei cîmpuri spinoriale, se obțin *identități triliniare* ai căror termeni au o structură analogă celei a lagrangienilor de interacție (produse contractate ale tensorilor cîmpurilor în interacțiune). De aceea ele constituie „relații generale de interacțiune" între cîmpurile mezonice și cele spinoriale, anume :

$$\text{(a)}\ \overset{i|j}{D}{}^{\alpha\pm}_{ab}\,\overset{l|}{\varphi}=0,\qquad \text{(b)}\ \overset{i[j}{D}{}^{r\pm}_{ab}\,\overset{l]}{\varphi}=0,\qquad \text{(c)}\ \overset{i[j}{D}{}^{\pm}\,\overset{l]}{\varphi}=0,\tag{15}$$

identitățile „adjuncte" :

$$\text{(a)}\ \overset{|k}{\varphi}{}^{\pm}\,\overset{i|j}{D}{}^{\beta\pm}_{ab}=0,\qquad \text{(b)}\ \overset{[k}{\varphi}{}^{\pm}\,\overset{i]j}{D}{}^{s\pm}_{ab}=0,\qquad \text{(c)}\ \overset{[k}{\varphi}{}^{\pm}\,\overset{i]j}{D}{}^{\pm}=0\tag{15'}$$

și identitățile „mixte" :

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\ \overset{k}{\varphi}{}^{\pm}\,\overset{ij}{D}{}^{\beta\mp}_{ab}=-\overset{i}{\varphi}{}^{\mp}\,\overset{kj}{D}{}^{\beta\pm}_{ab},\qquad \text{(b)}\ \overset{k}{\varphi}{}^{\pm}\,\overset{ij}{D}{}^{s\mp}_{ab}=\overset{i}{\varphi}{}^{\mp}\,\overset{kj}{D}{}^{s\pm}_{ab},\\&\text{(c)}\ \overset{k}{\varphi}{}^{\pm}\,\overset{ij}{D}{}^{\mp}=\overset{i}{\varphi}{}^{\mp}\,\overset{kj}{D}{}^{\pm}\ (\alpha=1,2,3;\ r=4,5;\ \beta=1,2,4;\ s=3,5).\end{aligned}\tag{15''}$$

Aceste relații exprimă proprietățile de simetrie sau antisimetrie ale „interacțiunilor" amintite, în raport cu permutările cîmpurilor spinoriale sau a celor adjuncte. Ele se pot clasifica în două categorii :

I) „Relațiile de interacțiune" între cîmpurile mezonice și cele spinoriale (nu se sumează după indici superiori repetați) :

$$\text{(a)}\ \overset{ij}{D}{}^{\alpha\pm}_{ab}\,\overset{j}{\varphi}=0,\qquad \text{(b)}\ \overset{i}{\varphi}{}^{\pm}\,\overset{ij}{D}{}^{\beta\pm}_{ab}=0;\tag{16}$$

$$\text{(a)}\,\overset{i}{\varphi}{}^{\pm}\overset{ij}{D}{}^{\beta\mp}_{ab}=-\overset{i}{\varphi}{}^{\mp}\,\overset{ij}{D}{}^{\beta\pm}_{ab},\quad \text{(b)}\ \overset{i}{\varphi}{}^{\pm}\,\overset{ij}{D}{}^{s\mp}_{ab}=\overset{i}{\varphi}{}^{\mp}\,\overset{ij}{D}{}^{s\pm}_{ab},\quad \text{(c)}\ \overset{i}{\varphi}{}^{\pm}\,\overset{ij}{D}{}^{\mp}=\overset{i}{\varphi}{}^{\mp}\,\overset{ij}{D}{}^{\pm}.\tag{16'}$$

În particular ($i=j$), se obțin identitățile pentru densitățile sarcină-curent $\varphi^{\pm}_{ab}$.

Iată un exemplu explicit al sistemului (16) :

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\ \left(N^{\pm}_{0}\,\delta_{ab}+\frac{1}{2}\,p^{\pm}_{c|a}i_{b|c}\right)\overset{1}{\varphi}=0\rightarrow\quad \text{(a')}\ \left(3N^{\pm}_{0}-\frac{1}{2}\,p^{\pm}_{ab}i_{ab}\right)\overset{1}{\varphi}=0,\\&\text{(b)}\ \left(p^{\pm}_{ab}-N^{\pm}_{0}\,i_{ab}-\frac{1}{4}\,\varepsilon_{abcdef}\,p^{\pm}_{cd}i_{ef}\right)\overset{1}{\varphi}=0,\\&\text{(c)}\ \left(p^{\pm}_{ab}-N^{\pm}_{0}\,i_{ab}+\frac{1}{2i}p^{\pm}_{c[a}i_{b]c}\right)\overset{1}{\varphi}=0;\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\ \overset{2}{\varphi}{}^{\pm}\left(N^{\pm}_{0}\,\delta_{ab}+\frac{1}{2}\,p^{\pm}_{c|a}i_{b|c}\right)=0\rightarrow\quad \text{(a')}\ \overset{2}{\varphi}{}^{\pm}\left(3N^{\pm}_{0}-\frac{1}{2}\,p^{\pm}_{ab}i_{ab}\right)=0,\\&\text{(b)}\ \overset{2}{\varphi}{}^{\pm}\left(p^{\pm}_{ab}+N^{\pm}_{0}\,i_{ab}-\frac{1}{4}\,\varepsilon_{abcdef}\,p^{\pm}_{cd}i_{ef}\right)=0,\\&\text{(c)}\ \overset{2}{\varphi}{}^{\pm}\left(p^{\pm}_{ab}-N^{\pm}_{0}\,i_{ab}-\frac{1}{2i}\,p^{\pm}_{c[a}i_{b]c}\right)=0.\end{aligned}\tag{17'}$$

Fiecare identitate (17a—c), (17′a—c) constituie un sistem *liniar* şi *omogen* în $\overset{1}{\varphi}_j$, respectiv $\overset{2}{\varphi}{}_i^{\pm}$, şi permite în principiu exprimarea (pînă la un factor de proporţionalitate a) cîmpului spinorial $\overset{1}{\varphi}$ (sau $\overset{2}{\varphi}{}^{\pm}$) prin cîmpul mezonic $p_{ab}^{\pm}$, $N_0^{\pm}$, de exemplu (17a′), (17′a′) se scriu :

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a})\quad D^{1\pm}\overset{1}{\varphi}=0\rightarrow\left[3N_0^{\pm}\delta_{ij}-\frac{1}{2}p_{ab}^{\pm}(i_{ab})_{ij}\right]\overset{1}{\varphi}_j=0,\\
&(\mathrm{b})\quad \overset{2}{\varphi}{}^{\pm}D^{1\pm}=0\rightarrow\overset{2}{\varphi}{}_i^{\pm}\left[3N_0^{\pm}\delta_{ij}-\frac{1}{2}p_{ab}^{\pm}(i_{ab})_{ij}\right]=0, && (17'')\\
&(\mathrm{c})\quad \| p_{ab}^{\pm}(i_{ab})_{ik}-6N_0^{\pm}\delta_{ik}\|=0 \ \text{sau}\ \|\overset{2}{\varphi}{}_k^{\pm}\overset{1}{\varphi}_i-N_0^{\pm}\delta_{ki}\|=0.
\end{aligned}$$

Spinorul $\overset{1}{\varphi}$ (respectiv $\overset{2}{\varphi}{}^{\pm}$) este deci vector propriu (caracteristic) al matricei $\frac{1}{2}p_{ab}^{\pm}i_{ab}$ (respectiv al matricei transpuse) corespunzător valorii proprii $3N_0^{\pm}$.

II) „Relaţiile de interacţiune combinate” ale cîmpurilor mezonice şi densităţilor sarcină-curent cu cîmpurile spinoriale, sau altfel : „relaţiile de echivalenţă” între „interacţiile” mezonice-spinoriale şi „interacţiile” sarcinii-curentului cu cîmpurile spinoriale :

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a})\ \overset{ij}{D}{}_{ab}^{\alpha\pm}\overset{i}{\varphi}=-\overset{i}{\Delta}{}_{ab}^{\alpha\pm}\overset{j}{\varphi}, &&(\mathrm{b})\ \overset{ij}{D}{}_{ab}^{r\pm}\overset{i}{\varphi}=\overset{i}{\Delta}{}_{ab}^{r\pm}\overset{j}{\varphi}, &&(\mathrm{c})\ \overset{ij}{D}{}^{\pm}\overset{i}{\varphi}=\overset{i}{\Delta}{}^{\pm}\overset{j}{\varphi}; && (18)\\
&(\mathrm{a})\ \overset{j}{\varphi}{}^{\pm}\overset{ij}{D}{}_{ab}^{\beta\pm}=-\overset{i}{\varphi}{}^{\pm}\overset{j}{\Delta}{}_{ab}^{\beta\pm}, &&(\mathrm{b})\ \overset{j}{\varphi}{}^{\pm}\overset{ij}{D}{}_{ab}^{s\pm}=\overset{i}{\varphi}{}^{\pm}\overset{j}{\Delta}{}_{ab}^{s\pm}, &&(\mathrm{c})\ \overset{j}{\varphi}{}^{\pm}\overset{ij}{D}{}^{\pm}=\overset{i}{\varphi}{}^{\pm}\overset{j}{\Delta}{}^{\pm}; && (18')\\
&(\mathrm{a})\ \overset{j}{\varphi}{}^{\pm}\overset{ij}{D}{}_{ab}^{\beta\mp}=-\overset{i}{\varphi}{}^{\mp}\overset{j}{\Delta}{}_{ab}^{\beta\pm}, &&(\mathrm{b})\ \overset{j}{\varphi}{}^{\pm}\overset{ij}{D}{}_{ab}^{s\mp}=\overset{i}{\varphi}{}^{\mp}\overset{j}{\Delta}{}_{ab}^{s\pm}, &&(\mathrm{c})\ \overset{j}{\varphi}{}^{\pm}\overset{ij}{D}{}^{\mp}=\overset{i}{\varphi}{}^{\mp}\overset{j}{\Delta}{}^{\pm}. && (18'')
\end{aligned}$$

Structura „relaţiilor de interacţie″ (16)—(18) evidenţiază anumite proprietăţi de simetrie şi de reciprocitate între cîmpurile mezonice şi cele două densităţi sarcină-curent asociate :

a) Invarianţa faţă de permutarea cîmpurilor spinoriale între ele şi a cîmpurilor mezonice conjugate între ele :

$$\overset{1}{\varphi}\leftrightarrow\overset{2}{\varphi},\ p_{ab}\leftrightarrow\widetilde{p}_{ab}\ (\text{în particular},\ p_{ab}^{+}\leftrightarrow\overset{*}{p}{}_{ab}^{+}). \qquad (19)$$

b) Echivalenţa dintre „interacţiile” mezonice-spinoriale şi cele dintre cîmpurile sarcină-curent şi cele spinoriale în sensul lui (18).

c) Reciprocitatea între cîmpurile mezonice şi densităţile sarcină-curent, adică invarianţa „interacţiilor” (16a), (18) (respectiv (16b), (18′)) faţă de înlocuirea reciprocă a cîmpurilor mezonice prin densităţile sarcină-curent :

$$(\mathrm{a})\ \overset{ij}{p}_{ab}\leftrightarrow\overset{j}{\varphi}_{ab},\ \text{respectiv}\ (\mathrm{b})\ \overset{ij}{p}_{ab}\leftrightarrow\overset{i}{\varphi}_{ab}. \qquad (19')$$

IDENTITĂȚI TENSORIALE (BILINIARE MEZONICE SAU CVADRILINIARE SPINORIALE)

5. Fie formele biliniare mezonice (cvadriliniare spinoriale) „izomorfe” cu (4) conform teoremei-„algoritm” ($\nu = 1, \ldots, 5$):

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a})\ L^{\nu\pm}_{ab,\,ijkl} \equiv \overset{i}{\varphi}{}^{\pm}_{i'}\, \overset{k}{\varphi}{}^{\pm}_{k'}\, \Gamma^{\nu}_{ab,\,i'j'k'l'}\, \overset{j}{\varphi}_{j'}\, \overset{l}{\varphi}_{l'} \equiv \overset{ij}{D}{}^{\nu\pm}_{ab}\, (i_{cd} \to \overset{kl}{p}{}^{\pm}_{cd},\ I \to \overset{kl}{N}{}^{\pm}_{0}) \equiv \\
&\qquad \equiv \Gamma^{\nu}_{ab,\,ijkl}\, ((i_{cd})_{mn} \to \overset{mn}{p}{}^{\pm}_{cd},\ \delta_{mn} \to \overset{mn}{N}{}^{\pm}_{0}), \\
&(\mathrm{b})\ L^{\nu+-}_{ab,\,ijkl} \equiv \overset{i}{\varphi}{}^{\pm}_{i'}\, \overset{k}{\varphi}{}^{\mp}_{k'}\, \Gamma^{\nu}_{ab,\,i'j'k'l'}\, \overset{j}{\varphi}_{j'}\, \overset{l}{\varphi}_{l'} \equiv \overset{ij}{D}{}^{\nu\pm}_{ab}\, (i_{cd} \to \overset{kl}{p}{}^{\mp}_{ab},\ I \to \overset{kl}{N}{}^{\mp}_{0}) \equiv \\
&\qquad \equiv \Gamma^{\nu}_{ab,\,ijkl}\, ((i_{cd})_{ij} \to \overset{ij}{p}{}^{\pm}_{cd},\ (i_{cd})_{kl} \to \overset{kl}{p}{}^{\mp}_{cd}\ \text{etc.})
\end{aligned} \tag{20}$$

cu proprietăți „izomorfe” lui (5). Explicit avem:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a})\quad \overset{1}{L}_{ab,\,ijkl} \equiv \overset{ij}{N}_0\, \overset{kl}{N}_0\, \delta_{ab} + \frac{1}{2}\, \overset{ij}{p}_{c|a}\, \overset{kl}{p}_{b|c}, \\
&(\mathrm{a}')\quad \overset{1}{L}_{ijkl} \equiv \frac{1}{2}\, \overset{1}{L}_{aa,\,ijkl} = 3\overset{ij}{N}_0\, \overset{kl}{N}_0 - \frac{1}{2}\, \overset{ij}{p}_{ab}\, \overset{kl}{p}_{ab}, \\
&(\mathrm{b})\quad \overset{2}{L}_{ab,\,ijkl} \equiv \overset{ij}{N}_0\, \overset{kl}{p}_{ab} + \overset{ij}{p}_{ab}\, \overset{kl}{N}_0 - \frac{1}{4}\, \varepsilon_{abcdef}\, \overset{ij}{p}_{cd}\, \overset{kl}{p}_{ef}, \\
&(\mathrm{c,d})\ \overset{3,4}{L}_{ab,\,ijkl} \equiv -\overset{ij}{N}_0\, \overset{kl}{p}_{ab} + \overset{ij}{p}_{ab}\, \overset{kl}{N}_0 \pm \frac{1}{2i}\, \overset{ij}{p}_{c[a}\, \overset{kl}{p}_{b]c}, \\
&(\mathrm{e})\quad \overset{5}{L}_{ab,\,ijkl} \equiv \overset{ij}{N}_0\, \overset{kl}{p}_{ab} + \overset{ij}{p}_{ab}\, \overset{kl}{N}_0 + \frac{1}{12}\, \varepsilon_{abcdef}\, \overset{ij}{p}_{cd}\, \overset{kl}{p}_{ef}, \\
&(\mathrm{f})\quad L_{ijkl} \equiv 5\overset{ij}{N}_0\, \overset{kl}{N}_0 + \frac{1}{2}\, \overset{ij}{p}_{ab}\, \overset{kl}{p}_{ab}.
\end{aligned} \tag{20'}$$

Formele „mixte” se obțin imediat prin substituția: $\overset{kl}{p}{}^{\pm}_{ab} \to \overset{kl}{p}{}^{\mp}_{ab}$.

În cazul densităților sarcină-curent, vom folosi simbolurile $\Lambda^{\nu}_{ab,\,ik} \equiv \equiv L^{\nu}_{ab,\,iikk}$, unde convenim să nu sumăm după indicii repetați.

Identitățile mezonice biliniare cele mai generale, cu patru spinori arbitrari, sînt

$$(\mathrm{a})\ \overset{\alpha}{L}_{ab,\,ijkl} = -\overset{\alpha}{L}_{ab,ilkj}; \qquad (\mathrm{b})\ \overset{r}{L}_{ab,\,ijkl} = \overset{r}{L}_{ab,\,ilkj}, \qquad (\mathrm{c})\ L_{ijkl} = L_{ilkj} \tag{21}$$

sau identitățile echivalente

$$(\mathrm{a})\ \overset{\beta}{L}_{ab,\,ijkl} = -\overset{\beta}{L}_{ab,\,kjil}, \qquad (\mathrm{b})\ \overset{s}{L}_{ab,\,ijkl} = \overset{s}{L}_{ab,\,kjil}, \qquad (\mathrm{c})\ L_{ijkl} = L_{kjil}. \tag{21'}$$

(21) sînt valabile și pentru formele „mixte” (20b).

„Relațiile generale de interacție” între cîmpurile mezonice (21) se clasifică în patru categorii:

I) ,,Relaţiile de interacţie'' a două cîmpuri mezonice avînd fie primul fie al doilea spinor comun :

$$\text{(a)}\ L^{\alpha}_{ab,\,ijkj} = 0, \qquad \text{(b)}\ L^{\beta}_{ab,\,ijil} = 0, \tag{22}$$

(21 b, c) şi (21′ b, c) fiind identic satisfăcute. Notînd $p'_{ab} \equiv \overset{31}{p}_{ab}$, $N'_0 \equiv \overset{31}{N}_0$, avem, de exemplu,

$$\text{(a)}\ N_0 N'_0 \delta_{ab} + \frac{1}{2} p_{c|a} p'_{b|c} = 0 \rightarrow \text{(a′)}\ 3N_0 N'_0 - \frac{1}{2} p_{ab} p'_{ab} = 0,$$

$$\text{(b)}\ N_0 p'_{ab} - \frac{1}{4} \varepsilon_{abcdef}\, p_{cd}\, p'_{ef} = 0, \tag{22′}$$

$$\text{(c)}\ -N_0 p'_{ab} + \frac{1}{2i} p_{c[a} p'_{b]c} = 0.$$

Prin substituţia $p'^{\pm}_{ab} \rightarrow p'^{\mp}_{ab}$ se obţin identităţile ,,mixte''.

În cazul $p'_{ab} \equiv p_{ab}$ se obţin de aici ,,relaţiile de autoacţiune'' ale cîmpului mezonic [1], [2], [3].

II) ,,Relaţiile de autoacţiune'' ale densităţilor sarcină-curent $\varphi^{\pm}_{ab}$ se obţin imediat cînd toţi spinorii sînt egali [1], [2].

III) ,,Relaţiile de interacţiune'' între cîmpurile mezonice şi densităţile sarcină-curent asociate, analoge lui (16) :

$$\text{(a)}\ L^{\alpha}_{ab,\,ijjj} = 0, \quad \text{(a′)}\ L^{\alpha}_{ab,\,jjij} = 0\,; \quad \text{(b)}\ L^{\beta}_{ab,\,jijj} = 0, \quad \text{(b′)} L^{\beta}_{ab,\,jjji} = 0, \tag{23}$$

de exemplu cazul concret, analog lui (17) :

$$\text{(a)}\ N_0 J'_0 \delta_{ab} + \frac{1}{2} p_{c|a} \varphi'_{b|c} = 0 \rightarrow \text{(a′)}\ 3N_0 J'_0 - \frac{1}{2} p_{ab} \varphi'_{ab} = 0,$$

$$\text{(b)}\ N_0 \varphi'_{ab} + p_{ab} J'_0 - \frac{1}{4} \varepsilon_{abcdef}\, p_{cd}\, \varphi'_{ef} = 0, \tag{23′}$$

$$\text{(c)}\ -N_0 \varphi'_{ab} + p_{ab} J'_0 + \frac{1}{2i} p_{c[a} \varphi'_{b]c} = 0.$$

IV) ,,Relaţiile de fuziune şi fisiune'' între cîmpurile mezonice şi densităţile sarcină-curent :

$$\text{(a)}\ L^{\alpha}_{ab,\,ijji} = -\Lambda^{\alpha}_{ab,\,ij}, \qquad \text{(b)}\ L^{r}_{ab,\,ijji} = \Lambda^{r}_{ab,\,ij}, \qquad \text{(c)}\ L_{ijji} = \Lambda_{ij} \tag{24}$$

sau

$$\text{(a)}\ L^{\beta}_{ab,\,ijji} = -\Lambda^{\beta}_{ab,\,ji}, \qquad \text{(b)}\ L^{s}_{ab,\,ijji} = \Lambda^{s}_{ab,\,ji}, \qquad \text{(c)}\ L_{ijji} = \Lambda_{ji} \tag{24′}$$

(24) sînt valabile şi pentru formele ,,mixte''.

Structura sistemelor (23), (24) ne dezvăluie importante proprietăți de simetrie și de reciprocitate între cîmpurile mezonice și densitățile sarcină-curent : anume, *invarianța* acestor relații față de următoarele transformări :

a) Permutarea cîmpurilor mezonice conjugate (în particular, complex conjugate) între ele și a densităților sarcină-curent asociate, între ele :

$$p_{ab} \leftrightarrow \widetilde{p}_{ab} \ (p^{+}_{ab} \leftrightarrow \overset{*}{p}{}^{+}_{ab}), \ \ \varphi'_{ab} \leftrightarrow \varphi''_{ab}. \tag{25}$$

b), b′) Permutarea densităților sarcină-curent (respectiv, a cîmpurilor mezonice conjugate) și schimbarea semnului unității imaginare $i \equiv \sqrt{-1}$ în coeficienții egalităților (în speță în $L^{3,4}_{ab}$) :

$$\varphi'_{ab} \leftrightarrow \varphi''_{ab} \ \text{(respectiv, } p_{ab} \leftrightarrow \widetilde{p}_{ab}), \ \ i \leftrightarrow \overset{*}{i} = -1. \tag{25′}$$

Transformările b) + b′) dau a).

c) Înlocuirea reciprocă a cîmpurilor mezonice prin densitățile sarcină-curent (proprietatea de reciprocitate) :

$$\overset{ij}{p}_{ab} \leftrightarrow \overset{j}{\varphi}_{ab} \ \text{ sau } \ \overset{ij}{p}_{ab} \leftrightarrow \overset{i}{\varphi}_{ab}. \tag{25″}$$

Se poate spune că într-un anumit sens cîmpurile mezonice complex conjugate p^{+}_{ab}, $\overset{*}{p}{}^{+}_{ab}$ sînt echivalente cu cele două cîmpuri reale asociate φ'^{+}_{ab}, φ''^{+}_{ab}.

CONCLUZII FIZICE FINALE

6. Rezultatele obținute mai sus sînt strîns legate de teoria conformă a particulelor elementare și de teoria fuziunii (L. de Broglie).

Se știe că ecuațiile lui Maxwell sînt covariante nu numai față de grupul Lorentz, ci față de grupul conform general cu 15 parametri (E. Cunningham, H. Bateman, 1910). De asemenea, geometria matricelor Dirac este hexadimensională (H. Mandel 1929, K. Nikolski 1930, 1933 ; J. Schouten, J. Haantjes, 1933). Într-adevăr, comutatorii [2] :

$$[i_{ab}, \ i_{cd}] = 2\, i \ \delta_{|ac} i_{bd|} \, , \tag{26}$$

reprezintă pentru $I_{ab} = \frac{1}{2}\, i\, i_{ab}$ exact ecuația de structură a grupului de rotații în varietatea pseudoeuclidiană E_6, grup izomorf cu grupul conform al spațiului-timp E_4 (în general grupul conform al unui spațiu E_n este izomorf cu grupul rotațiilor spațiului pseudoeuclidian E_{n+2} cu signatura suplimentară + —). Spațiul E_6 în care am unificat cîmpurile mezonice p_{ab}, φ_{ab} este exact spațiul reprezentării *hexadimensionale* a grupului conform al spațiului-timp E_4. Există de asemenea două reprezentări *spinoriale cvadridimensionale* (neechivalente) ale acestui grup, exact ceea ce am admis în construcţia tensorilor mezonici p_{ab} sau φ_{ab} cu ajutorul cvadrispinorilor după (2) (anume reprezentarea spinorială dată de operatorii infinitezimali I_{ab} menţionaţi mai sus; cealaltă reprezentare se obţine prin substituţia $\gamma_{a'} \to -\gamma_{a'}$, v. de asemenea [6]).

Covarianţa conformă este astăzi deosebit de importantă pentru teoria particulelor elementare (de exemplu ecuaţia spinorială universală, neliniară, a lui Heisenberg). Grupul conform este legat de covarianţa legilor fizice faţă de schimbarea unităţilor de măsură (a etaloanelor).

Unele amănunte asupra grupului conform se pot găsi de exemplu în [5]. Studiul detaliat al reprezentărilor grupului conform, construcţia tensorilor conformi, conjugarea de sarcină, precum şi generalizarea pentru algebre Clifford oarecare constituie obiectul unei alte lucrări.

7. Prin fuziunea a două particule de spin 1/2 (cîmpuri spinoriale) se obţin particule de spin 0 şi 1 (de spin maxim 1), adică mezoni (pseudo) scalari (spin 0) şi vectoriali (spin 1) (în particular fotoni). Relaţiile de fuziune şi fisiune (24) bazate numai pe identităţile matriciale, fără nici o ipoteză suplimentară, constituie o demonstraţie a teoremei fuziunii. Prin simpla combinare a relaţiilor (24) se obţine :

$$\begin{aligned} &(\mathrm{a})\quad \overset{ij}{N_0}\,\overset{ji}{p}_{ab} = \overset{i}{J_0}\,\overset{j}{\varphi}_{ab} + \overset{i}{\varphi}_{ab}\overset{j}{J_0} + \frac{1}{4}\varepsilon_{abcdef}\,\overset{i}{\varphi}_{cd}\,\overset{j}{\varphi}_{ef} - \frac{1}{2i}\,\overset{i}{\varphi}_{c[a}\,\overset{j}{\varphi}_{b]c},\\ &(\mathrm{b})\quad 4\,\overset{ij}{N_0}\,\overset{ji}{N_0} = \overset{i}{J_0}\,\overset{j}{J_0} + \frac{1}{2}\overset{i}{\varphi}_{ab}\,\overset{j}{\varphi}_{ab}, \end{aligned} \tag{27}$$

în particular,

$$\begin{aligned} &(\mathrm{a})\quad \overset{*}{N}{}_0^{+}\,p_{ab}^{+} = J_0^{'+}\,\varphi_{ab}^{''+} + J_0^{''+}\,\varphi_{ab}^{'+} + \frac{1}{4}\,\varepsilon_{abcdef}\,\varphi_{cd}^{'+}\,\varphi_{ef}^{''+} + \frac{1}{2i}\,\varphi_{c[a}^{'+}\varphi_{b]c}^{''+},\\ &(\mathrm{b})\quad 4\,|N_0^{+}|^2 = J_0^{'+}\,J_0^{''+} + \frac{1}{2}\,\varphi_{ab}^{'+}\,\varphi_{ab}^{''+}, \end{aligned} \tag{27'}$$

de unde se obţin uşor valorile absolute pentru p_{ab}^{+} şi N_0^{+}.

Proprietăţile de simetrie evidenţiate constituie o extindere a legii reciprocităţii (simetria legilor fizice faţă de permutarea variabilelor canonic conjugate —M. Born; v. şi [1]).

Prin fuziunea a patru particule de spin 1/2 se obţin particule de spin maxim 2. Identităţile tensoriale (21a) sau (22'a) sau (23'a) dau tensorul metric (= potenţialul gravific) ca o formă cvadriliniară a cîmpurilor spinoriale : teorema fuziunii (şi fisiunii) rezultă deci automat şi pentru cîmpul gravific (graviton) (v. şi [1]). În cazul cel mai general (fuziunea a 4 cîmpuri spinoriale arbitrare) avem :

$$(\mathrm{a})\quad G_{ab} = -\frac{1}{2}\left(\overset{ij}{p}_{(c)|a}\overset{kl}{p}_{b|(c)} + \overset{il}{p}_{(c)|a}\,\overset{kj}{p}_{b|(c)}\right) : \left(\overset{ij}{N_0}\,\overset{kl}{N_0} + \overset{il}{N_0}\,\overset{kj}{N_0}\right) \tag{28}$$

şi cazurile particulare :

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\ G_{ab} = -\frac{1}{2} p_{(c)|a} p'_{b|(c)} : N_0 N'_0,\\ &\text{(b)}\ G_{ab} = -\frac{1}{2} p_{(c)|a} \varphi'_{b|(c)} : N_0 J'_0 \quad \text{etc.}\end{aligned} \tag{28'}$$

8. Cu ajutorul operatorilor (matricelor) $\hat{D}^{\nu}_{ab}$ (10) se pot construi formele pătratice (v. [1]) şi biliniare :

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\ \mathrm{d}\hat{\sigma}^{2\pm} \equiv \hat{D}^{1\pm}_{ab}\, \mathrm{d}x_a \mathrm{d}x_b,\ (\hat{D}^{1+}_{ab} \pm i\hat{D}^{1-}_{ab})\, \mathrm{d}x_a \mathrm{d}x_b,\ (\hat{D}^{1+}_{ab} \mp i\gamma_5 \hat{D}^{1-}_{ab})\, \mathrm{d}x_a \mathrm{d}x_b,\\ &\text{(b)}\ \hat{\Delta}\sigma^{\pm} \equiv \hat{D}^{2\pm}_{ab}\, \mathrm{d}x_a \delta x_b,\ \hat{D}^{3\pm}_{ab}\, \mathrm{d}x_a \delta x_b \quad \text{etc.}\end{aligned} \tag{29}$$

avînd, în baza identităţilor (16), vectorii şi valorile proprii :

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\ \mathrm{d}\hat{\sigma}^{2\pm} \overset{1}{\varphi} = N^{\pm}_0\, \mathrm{d}s^2 \overset{1}{\varphi}, \qquad \overset{2}{\varphi}{}^{\pm}\, \mathrm{d}\hat{\sigma}^2 = N^{\pm}_0\, \mathrm{d}s^2 \overset{2}{\varphi}{}^{\pm} \quad \text{etc.}\\ &\text{(b)}\ \hat{\Delta}\sigma^{\pm} \overset{1}{\varphi} = -p^{\pm}_{ab}\, \mathrm{d}x_a \delta x_b \overset{1}{\varphi}, \qquad \overset{2}{\varphi}{}^{\pm} \hat{\Delta}\sigma^{\pm} = -p^{\pm}_{ab}\, \mathrm{d}x_a \delta x_b \overset{2}{\varphi}{}^{\pm} \quad \text{etc.}\end{aligned} \tag{29'}$$

Formele de mai sus generalizează geometria ondulatorie a şcolii din Hiroshima [7].

Acest memoriu este urmat de un memoriu [8] asupra teoriei covariante (în V_6) a identităţilor *diferenţiale* spinoriale şi tensoriale (în teoriile „c" şi „q")[2].

Primită la redacţie la 1 martie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. A. Popovici, Dokladî U.R.S.S., **111**, *1*, 74 (1956); J.E.T.F. (U.R.S.S.) **32**, *4*, 781 (1957); Comunic. Acad. R.P.R., **VIII**, *9*, 877 (1958); **IX**, *7*, 671 (1959); Rev. Math. pur. et appl., **IV**, *4*, 577 (1959); **V**, *2*, 411 (1960); **VIII**, (1963); Bull. Math. R.P.R., **3**, *1*, 93 (1959); C.R. Paris, **248**, 528 (1959); **267** (1963); A. Popovici, G. Mărgulescu, I. Teodorescu, C. R. Paris, **248**, 1690 (1959); A. Popovici, A. P. Hristev, J. Popovici, C. R. Paris, **257**, 3120 (1963); A. Popovici, I. Popovici, Comunic. Acad. R.P.R., **XIV** (1964); Rev. Math. pur. et appl., **IX** (1964).
2. A. P. Hristev, Lucr. consf. intern. de geom. şi topol., Iaşi, 1958; Comunic. Acad. R.P.R., **XI**, *7*, 755 şi 761 (1961); Bull. Math. R.P.R. **4**, *1–2*, 23 (1961).
3. I. Popovici, Comunic. Acad. R.P.R., **XII**, *4*, 409, 415 (1962); **XII**, *9*, 979 (1962); **XIV** (1964).
4. L. de Broglie, *Théorie générale des particules à spin.* 2e éd., Paris 1954; J. Géhéniau, *Mécanique ondulatoire de l'électron et du photon.* Paris, 1938.
5. A. P. Hristev, Rev. Math. pures et appl., **IX** (1964).
6. H. A. Kastrup, Ann. d. Phys., **9**, *7–8*, 388 (1962).
7. I. Mimura, Jap. J. Phys., **14**, **17** (1942).
8. A. P. Hristev, Analele Universităţii Bucureşti, seria matematică (1964).

---

[2] Rezultate de tipul (22′), (23′), (24) au fost obţinute în mod independent de I. Popovici (comunicare orală) într-o lucrare consacrată tensorilor mezonici complex conjugaţi etc. (în curs de apariţie).

ASUPRA SPAȚIILOR FIBRATE SERRE[1]

DE

VALERIU ȘT. UDRESCU

Generalizăm ușor conceptul de fibrare Serre [15], [20] și propozițiile imediat atașate lui.

§ 1

1.1. Fie Y un spațiu topologic și $\alpha \in Y$.

DEFINIȚIE. *Triada* (X, B, p), *în care* X *și* B *sînt spații topologice iar* $p: X \to B$ *o aplicație continuă, se numește spațiu* Y*-fibrat dacă, oricare ar fi spațiul topologic* W *și aplicațiile continue* $f: W \times Y \to B$, $g: W \to X$, *din comutativitatea diagramei* :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] & B \\
W \arrow[u, "g"] \arrow[r, "i_\alpha"] & W \times Y \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

în care i_α *este injecția definită prin* $i_\alpha(w) = (w, \alpha)$, *rezultă existența unei aplicații continue* $h: W \times Y \to X$, *astfel ca diagrama* :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] & B \\
W \arrow[u, "g"] \arrow[r, "i_\alpha"] & W \times Y \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă.

---

[1] Această lucrare a apărut în versiune engleză în „Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées", **IX**, 7 (1964).

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 7, P. 861–869, BUCUREȘTI, 1964

1.2. Spaţiile I-fibrate cu suplimentarea : W poliedru finit — I fiind segmentul unitate $[0, 1]$ cu topologia uzuală — coincid cu spaţiile fibrate introduse de J.-P. Serre [15], [20].

1.3. *O fibrare trivială* [20] *este o Y-fibrare, oricare ar fi Y*. Întradevăr, dacă X este produsul topologic $A \times B$ iar p proiecţia $A \times B \to B$, atunci, dată fiind diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "p"] & B \\
W \arrow[u, "g"] \arrow[r, "i_\alpha"] & W \times Y \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

putem defini pe $h : W \times Y \to A \times B$ prin $h(w, y) = (\mathrm{pr}_1\, g(w), f(w, y))$, pr_1 fiind proiecţia $A \times B \to A$.

1.4. Fie $\alpha, \beta \in X$ cu $\alpha \neq \beta$. Notăm :

$$\tilde{X} = (\{\alpha\} \times X) \cup (X \times \{\alpha\}) \cup (X \times \{\beta\}).$$

1.5. Fie Y un spaţiu topologic astfel ca $\tilde{Y}$ să fie o submulţime închisă a lui $Y \times Y$ (de exemplu, suficient, Y un T_1-spaţiu).

DEFINIŢIE. *O familie de spaţii topologice constituie o Y-clasă $\mathcal{K}$, dacă satisface cererile următoare:*

1. *F închisă* $\subset X \in \mathcal{K} \Rightarrow F \in \mathcal{K}$;
2. $X \in \mathcal{K} \Rightarrow X \times Y \in \mathcal{K}$.

Rezultă imediat, $X \times \tilde{Y} \in \mathcal{K}$, dacă $X \in \mathcal{K}$.

1.6. DEFINIŢIE. *O $\tilde{Y}$-clasă este o Y-clasă pentru care $\tilde{Y}$ este homeomorf cu* Y.

1.7. O întrebare rămîne deschisă : *cînd* (condiţii necesare şi suficiente) $\tilde{Y}$ *este homeomorf cu Y?*

1.8. *O Y-clasă este o clasă în sensul lui* [10], ceea ce, tacit, se va folosi.

1.9. DEFINIŢIE. *Triada (X, B, p) este o Y-fibrare de Y-clasă $\mathcal{K}$, dacă :*

1. *este o Y-fibrare;*
2. $W \in \mathcal{K}$.

1.10. Evident, dacă (X, U, p) şi (U, B, q) sînt Y-fibrări, respectiv Y-fibrări de Y-clasă $\mathcal{K}$, atunci şi (X, B, qp) este o Y-fibrare, respectiv o Y-fibrare de Y-clasă $\mathcal{K}$: *compusa* Y-fibrărilor, respectiv Y-fibrărilor de Y-clasă $\mathcal{K}$, precedente.

§ 2

2.1. Fie $\alpha, \beta \in Y$ cu $\alpha \neq \beta$ şi fie X^Y spaţiul aplicaţiilor continue $Y \to X$ topologizat cu topologia compact-deschisă [7], [18]. Definim clasic :

$$E(X; A, B) = \{f \mid f \in X^Y \text{ cu } f(\alpha) \in A \ \& \ f(\beta) \in B\};$$

$$E(X, A) = E(X; X, A); \quad E(X, x_0) = E(X, \{x_0\});$$

$$\Omega(X, A, x_0) = E(X; \{x_0\}, A); \quad \Omega(X, x_0) = E(X; \{x_0\}, \{x_0\}).$$

2.2. DEFINIȚIE. *Spațiul topologic X are proprietatea retractei de fibrare, dacă $\widetilde{X}$ este o retractă a lui $X \times X$.*

Existența unor astfel de spații topologice rezultă din [9] și [10].

2.3. PROPOZIȚIE. *Dacă Y este local bicompact, Hausdorff și are proprietatea retractei de fibrare, atunci $(E(X; A, B), A \times B, p)$, cu $p(f) = (f(\alpha), f(\beta))$, este o Y-fibrare.*

Demonstrație. Fie :

$$\begin{tikzcd}
E(X; A,B) \arrow[rrr, "p"] & & & A \times B \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\
& & A & & B \\
W \arrow[uu, "g"] \arrow[rrr, "i_\alpha"] & & & W \times Y \arrow[uu, "f"'] \arrow[ul, dashed, "\mathrm{pr}_1 f"] \arrow[ur, dashed, "\mathrm{pr}_2 f"'] &
\end{tikzcd}$$

o diagramă comutativă dată și fie $g^\star : W \times Y \to X$ aplicația indusă [18] de aplicația g. Spațiul Y fiind local bicompact și Hausdorff, $g^\star$ este continuă și :

$$g^\star(w, \alpha) = \mathrm{pr}_1 f(w, \alpha) \ \& \ g^\star(w, \beta) = \mathrm{pr}_2 f(w, \alpha).$$

Acum, deoarece Y are proprietatea retractei de fibrare, $W \times \widetilde{Y}$ este o retractă a lui $W \times Y \times Y$ și deci se poate obține o aplicație continuă $h^\star : W \times Y \times Y \to X$, astfel ca :

$h^\star(w, \alpha, y) = g^\star(w, y)$, pentru $y \in Y$,
$h^\star(w, u, \alpha) = \mathrm{pr}_1 f(w, u)$, pentru $u \in Y$ și
$h^\star(w, u, \beta) = \mathrm{pr}_2 f(w, u)$, pentru $u \in Y$,

ceea ce termină demonstrația.

2.4. PROPOZIȚIE. *Fie Y un spațiu Hausdorff, local bicompact și $\mathcal{K}$ o Y-clasă. Dacă X este un extensor absolut pentru clasa $\mathcal{K}$, atunci $(E(X; A, B), A \times B, p)$, cu $p(f) = (f(\alpha), f(\beta))$ este o Y-fibrare de Y-clasă $\mathcal{K}$.*

Demonstrație. Fie :

$$\begin{tikzcd}
E(X; A,B) \arrow[rrr, "p"] & & & A \times B \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\
& & A & & B \\
W \arrow[uu, "g"] \arrow[rrr, "i_\alpha"] & & & W \times Y \arrow[uu, "f"'] \arrow[ul, dashed, "\mathrm{pr}_1 f"] \arrow[ur, dashed, "\mathrm{pr}_2 f"'] &
\end{tikzcd}$$

o diagramă comutativă dată și fie $g^\star : W \times Y \to X$ aplicația continuă indusă de aplicația g, ce verifică relațiile :

$$g^\star(w, \alpha) = \mathrm{pr}_1 f(w, \alpha) \ \& \ g^\star(w, \beta) = \mathrm{pr}_2 f(w, \alpha).$$

Acum, deoarece $W \times \widetilde{Y} \in \mathcal{K}$, $W \times Y \times Y \in \mathcal{K}$ iar X este un extensor absolut pentru clasa $\mathcal{K}$, rezultă existenţa unei aplicaţii continue $h^* : W \times Y \times Y \to X$, astfel că :

$h^*(w, \alpha, y) = g^*(w, y)$, pentru $y \in Y$,
$h^*(w, u, \alpha) = \mathrm{pr}_1 f(w, u)$, pentru $u \in Y$ şi
$h^*(w, u, \beta) = \mathrm{pr}_2 f(w, u)$, pentru $u \in Y$,
cu care conchidem.

2.5. Condiţia «minimală» pentru Y este cea enunţată : Y Hausdorff şi local bicompact. Pentru diferitele Y-clase $\mathcal{K}$, ea poate fi întărită. Aducem acum cîteva exemple de Y-fibrări de Y-clasă $\mathcal{K}$.

2.6. PROPOZIŢIE. *Fie Y un spaţiu Hausdorff, bicompact şi $\mathcal{K}$ o Y-clasă de T_1-spaţii normale. Dacă X este un spaţiu Banach separabil, atunci $(E(X; A, B), A \times B, p)$, cu $p(f) = (f(\alpha), f(\beta))$, este o Y-fibrare de Y-clasă $\mathcal{K}$.*

Demonstraţie. Un spaţiu Banach separabil este o retractă absolută de spaţii normale ([10], p. 340) şi deci (Hanner, [10], p. 325), un extensor absolut pentru aceleaşi spaţii. Restul, din propoziţia 2.4.

2.7. Existenţa unor Y-clase de T_1-spaţii normale este banală : orice familie de spaţii Hausdorff, bicompacte (considerate ca spaţii normale), constituie o Y-clasă, dacă Y este Hausdorff şi bicompact (ceea ce am presupus).

2.8. PROPOZIŢIE. *Fie Y un spaţiu Hausdorff, local bicompact şi $\mathcal{K}$ o Y-clasă de spaţii paracompacte. Dacă X este un spaţiu Banach, atunci $(E(X; A, B); A \times B, p)$, cu $p(f) = (f(\alpha), f(\beta))$, este o Y-fibrare de Y-clasă $\mathcal{K}$.*

Demonstraţie. Un spaţiu Banach este o retractă absolută pentru spaţiile «fully normal» (Arens, [1]) şi deci un extensor absolut pentru aceleaşi spaţii (Hanner, [10]). În plus, conceptele «fully normal» (Tuckey, [17]) şi «paracompact» (Dieudonné, [3]) sînt logic echivalente, cum a arătat A. H. Stone [16].

2.9. Propoziţia precedentă rămîne încă valabilă dacă înlocuim adjectivul «paracompact» prin «colectiv normal» («collectionwise normal», Bing [2]), ceea ce rezultă din propoziţia 2.4 şi dintr-o teoremă a lui Hanner ([10], teorema 14.3).

2.10. PROPOZIŢIE. *Fie Y un spaţiu Hausdorff, local bicompact şi $\mathcal{K}$ o Y-clasă de spaţii colectiv normale. Dacă X este un spaţiu Hilbert generalizat* (deci, neseparabil), *atunci $(E(X; A, B), A \times B, p)$ cu $p(f) = (f(\alpha), f(\beta))$, este o Y-fibrare de Y-clasă $\mathcal{K}$.*

Demonstraţie. Direct, propoziţia rezultă din 2.4 şi o lemă a lui Dowker ([4], lema 2).

2.11. PROPOZIŢIE. *Fie Y un spaţiu Hausdorff, local bicompact şi $\mathcal{K}$ o Y-clasă de spaţii paracompacte. Dacă X este metrizabil, topologic complet şi retractă absolută de spaţii metrice, atunci $(E(X; A, B), A \times B, p)$, cu $p(f) = (f(\alpha), f(\beta))$, este o Y-fibrare de Y-clasă $\mathcal{K}$.*

Demonstraţie. Un spaţiu metrizabil, topologic complet şi retractă absolută de spaţii metrice, este retractă absolută şi de spaţii paracompacte ([13], p. 793) şi deci, un extensor absolut pentru aceleaşi spaţii [10].

2.12. Rezultă, în plus (Dugundji, [6]), că X este contractibil și local contractibil și deci și C^∞ și LC^∞. Notăm că X metric și local bicompact implică X topologic complet ([12], [13]).

2.13. PROPOZIȚIE. *Fie* Y *un spațiu Hausdorff, local bicompact și* $\mathcal{K}$ *o* Y*-clasă de spații perfect normale. Dacă* X *este metrizabil, separabil și retractă absolută de spații metrice, atunci* $(E(X; A, B), A \times B, p)$, *cu* $p(f) = (f(\alpha), f(\beta))$, *este o* Y*-fibrare de* Y*-clasă* $\mathcal{K}$.

Demonstrație. Rezultă din propoziția 2.4, dintr-o teoremă a lui Michael [(13], p. 793) și o teoremă a lui Hanner [10].

2.14. PROPOZIȚIE. *Fie* Y *un spațiu Hausdorff, bicompact și* $\mathcal{K}$ *o* Y*-clasă de* T_1*-spații normale. Dacă* X *este metrizabil, separabil, topologic complet și retractă absolută de spații metrice, atunci* $(E(X; A, B), A \times B, p)$, *cu* $p(f) = (f(\alpha), f(\beta))$, *este o* Y*-fibrare de* Y*-clasă* $\mathcal{K}$.

Demonstrație. Este analogă demonstrației precedente.

2.15. PROPOZIȚIE. *Fie* Y *un spațiu Hausdorff, bicompact și* $\mathcal{K}$ *o* Y*-clasă de* T_1*-spații normale. Dacă* X *este o retractă absolută de spații Tihonov, atunci* $(E(X; A, B), A \times B, p)$, *cu* $p(f) = (f(\alpha), f(\beta))$, *este o* Y*-fibrare de* Y*-clasă* $\mathcal{K}$.

Demonstrație. Din propoziția 2.4 și din faptul că o retractă absolută de spații Tihonov este un extensor absolut de T_1-spații normale (Hu, [11], p. 1052).

2.16. PROPOZIȚIE. *Fie* Y *un spațiu metric, local bicompact și* $\mathcal{K}$ *o* Y*-clasă de spații metrice. Dacă* X *este o submulțime convexă a unui spațiu vectorial topologic local convex, atunci* $(E(X; A, B), A \times B, p)$ *cu* $p(f) = (f(\alpha), f(\beta))$, *este o* Y*-fibrare de* Y*-clasă* $\mathcal{K}$.

Demonstrație. Din propoziția 2.4, dintr-o teoremă a lui Dugundji [5] și o teoremă a lui Hanner [10].

COROLAR. *Fie* Y *un spațiu metric, local bicompact și* $\mathcal{K}$ *o* Y*-clasă de spații metrice. Există un spațiu Hausdorff, bicompact* X, *astfel ca* $(E(X; A, B), A \times B, p)$, *cu* $p(f) = (f(\alpha), f(\beta))$, *să fie o* Y*-fibrare de* Y*-clasă* $\mathcal{K}$.

Demonstrație. Din propoziția precedentă și un corolar al unei propoziții a lui V. E. Klee și E. Michael ([13], p. 802).

2.17. PROPOZIȚIE. *Fie* Y *un spațiu metric, local bicompact și* $\mathcal{K}$ *o* Y*-clasă de spații metrice. Dacă* X *este un poliedru simplicial «full», atunci* $(E(X; A, B), A \times B, p)$, *cu* $p(f) = (f(\alpha) \cdot f(\beta))$, *este o* Y*-fibrare de* Y*-clasă* $\mathcal{K}$.

Demonstrație. Un poliedru simplicial «full» (pentru definiție a se vedea [10]), este un extensor absolut de spații metrice (Hanner, [10]) și aceasta, indiferent de-i înzestrat cu topologia slabă ([19], [10]) sau cu topologia metrică. Restul, din 2.4.

2.18. Sfîrșim aici șirul acestor exemple ce poate fi încă mult continuat, cu observația că ele nu sînt, în definitiv, nimic altceva decît derivate ale rezultatului punctului 2.4.

2.19. PROPOZIȚIE. *Dacă* $(E(X; A, B), A \times B, p)$ *este o* Y*-fibrare, respectiv o* Y*-fibrare de* Y*-clasă* $\mathcal{K}$, *atunci* $(E(X; A, B), A, p_1)$, *cu* $p_1(f) = f(\alpha)$, *este o* Y*-fibrare, respectiv o* Y*-fibrare de* Y*-clasă* $\mathcal{K}$.

Demonstraţie. Este compusa Y-fibrării, respectiv Y-fibrării de Y-clasă $\mathcal{K}$, date cu fibrarea trivială $(A \times B, A, \mathrm{pr}_1)$, pr_1 fiind proiecţia $A \times B \to A$.

§ 3

3.1. Fie (X, B, p) o Y-fibrare, respectiv o Y-fibrare de Y-clasă $\mathcal{K}$ şi fie x_0 un punct bază în X. Ca de obicei, $p(x_0) = b_0$ se consideră punct bază în B, iar $F = p^{-1}(b_0)$ fibra respectivă. În semne : $F \to X \xrightarrow{p} B$.

3.2. PROPOZIŢIE. *Dacă* $x_0 \in A \subset X$ *şi dacă* $(E(X; A, B), A \times B, p)$ *este o Y-fibrare, respectiv o Y-fibrare de Y-clasă* $\mathcal{K}$, *atunci diagrama :*

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega(X, A, x_0) \arrow[r] \arrow[d, "="] & E(X, A) \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "P_1"] & X \\
\Omega(X, x_0) \arrow[r] & \Omega(X, A, x_0) \arrow[r, "q"] & A &
\end{tikzcd}$$

în care $p_0(f) = f(\alpha)$, $p_1(f) = f(\beta)$, $q(f) = f(\beta)$, *este comutativă, orizontalele ei reprezentînd Y-fibrări, respectiv Y-fibrări de Y-clasă* $\mathcal{K}$.

Demonstraţie. Din propoziţiile 2.3 şi 2.4.

3.3. PROPOZIŢIE. *Dacă* Y *este un spaţiu Hausdorff, local bicompact şi astfel ca* $\widetilde{Y}$ *să fie homeomorf cu* Y *şi dacă* $F \to X \xrightarrow{p} B$ *este o Y-fibrare, atunci şi* $\Omega(F, x_0) \to \Omega(X, x_0) \to \Omega(B, b_0)$ *este o Y-fibrare.*

Demonstraţie. Diagrama comutativă dată :

$$\begin{tikzcd}
\Omega(X, x_0) \arrow[r] & \Omega(B, b_0) \\
W \arrow[r] \arrow[u, "g"] & W \times Y \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

induce diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] & B \\
W \times \widetilde{Y} \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[u, "g^\star"] & W \times Y \times Y \arrow[u, "f^\star"']
\end{tikzcd}$$

în care $i_\alpha(w, x) = (w, r(x), \alpha)$, $x \in \widetilde{Y}$, r fiind un homeomorfism $\widetilde{Y} \to Y$, ce se lasă completată cu o aplicaţie continuă $h^\star : W \times Y \times Y \to X$, deoarece, prin ipoteză, (X, B, p) este o Y-fibrare.

3.4. PROPOZIŢIE. *Dacă* Y *este un spaţiu Hausdorff, local bicompact şi dacă* $F \to X \xrightarrow{p} B$ *este o Y-fibrare de Y-clasă* $\mathcal{K}$, *atunci şi* $\Omega(F, x_0) \to \Omega(X, x_0) \to \Omega(B, b_0)$ *este o Y-fibrare de Y-clasă* $\mathcal{K}$.

Demonstraţie. Argumentaţie analoagă precedentei (a se vedea şi 1.6).

3.5. PROPOZIȚIE. *Dacă Y este un spațiu Hausdorff, local bicompact și astfel ca $\widetilde{Y}$ să fie homeomorf cu Y și dacă $F \to X \xrightarrow{p} B$ este o Y-fibrare, atunci diagrama :*

$$\begin{tikzcd}
\Omega(F, x_0) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega(X, x_0) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega(B, b_0) \arrow[d, "="] \\
E'(F, x_0) \arrow[r] \arrow[d, "q'"] \arrow[dr, phantom, "="] & \Omega(X, F, x_0) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "q"] & \Omega(B, b_0) \\
F \arrow[r] & F &
\end{tikzcd}$$

în care $r(f) = pf$, $q'(f) = q(f) = f(\beta)$, iar $E'(F, x_0) = \{f \mid f \in F^Y \,\&\, f(\alpha) = x_0\}$, este comutativă, orizontalele ei reprezentînd Y-fibrări.

Demonstrație. Parțial din propoziția 3.3 iar restul, cu argumente asemănătoare.

3.6. PROPOZIȚIE. *Dacă Y este un spațiu Hausdorff, local bicompact și dacă $F \to X \xrightarrow{p} B$ este o Y-fibrare de $\widetilde{Y}$-clasă $\mathcal{K}$, atunci diagrama :*

$$\begin{tikzcd}
\Omega(F, x_0) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega(X, x_0) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega(B, b_0) \arrow[d, "="] \\
E'(F, x_0) \arrow[r] \arrow[d, "q'"] \arrow[dr, phantom, "="] & \Omega(X, F, x_0) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "q"] & \Omega(B, b_0) \\
F \arrow[r] & F &
\end{tikzcd}$$

în care $r(f) = pf$, $q'(f) = q(f) = f(\beta)$, iar $E'(F, x_0) = \{f \mid f \in F^Y \,\&\, f(\alpha) = x_0\}$, este comutativă, orizontalele ei reprezentînd Y-fibrări de $\widetilde{Y}$-clasă $\mathcal{K}$.

3.7. PROPOZIȚIE. *Dacă Y este un spațiu Hausdorff, local bicompact și astfel ca $\widetilde{Y}$ să fie homeomorf cu Y și dacă $F \to X \xrightarrow{p} B$ este o Y-fibrare, atunci diagrama :*

$$\begin{tikzcd}
 & & \Omega(X, F, x_0) \arrow[r] \arrow[d, "="] & E(X, F) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \\
 & \Omega(X, x_0) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \Omega(X, F, x_0) \arrow[r] \arrow[d] & F & \\
\Omega(F, x_0) \arrow[r] & \Omega(X, x_0) \arrow[r] & \Omega(B, b_0) & &
\end{tikzcd}$$

în care $p_1(f) = f(\alpha)$, $p_2(f) = f(\beta)$, este comutativă, orizontalele ei reprezentînd Y-fibrări.

Demonstrație. Se folosesc propozițiile precedente.

3.8. PROPOZIŢIE. *Dacă Y este un spaţiu Hausdorff, local bicompact şi dacă $F \to X \xrightarrow{p} B$ este o Y-fibrare de $\widetilde{Y}$-clasă $\mathcal{K}$, atunci diagrama* :

$$\begin{tikzcd}
 & & \Omega(X,F,x_0) \arrow[r] \arrow[d, "="] & E(X,F) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \\
 & \Omega(X,x_0) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \Omega(X,F,x_0) \arrow[r] \arrow[d] & F & \\
\Omega(F,x_0) \arrow[r] & \Omega(X,x_0) \arrow[r] & \Omega(B,b_0) & &
\end{tikzcd}$$

în care $p_1(f) = f(\alpha)$, $p_2(f) = f(\beta)$, este comutativă, orizontalele ei reprezentînd Y-fibrări de $\widetilde{Y}$-clasă $\mathcal{K}$.

3.9. Propoziţiile paragrafului al doilea sînt proprii unui cadru cu mult mai general. Pentru Y-fibrări, formularea lui este următoarea : *fie $\mathcal{T}$ o topologie oarecare în spaţiul aplicaţiilor continue şi fie X, Y şi W astfel încît continuitatea lui $f \in (X^Y)^W$ să fie echivalentă cu continuitatea lui $f^* \in X^{W \times Y}$*, în timp ce pentru Y-fibrările de Y-clasă $\mathcal{K}$, cererii precedente îi este adjuncţionată cererea ca *$\widetilde{Y}$ să fie o submulţime închisă a lui $Y \times Y$* (a se vedea şi punctul 1.5).

Cît priveşte propoziţiile paragrafului al treilea, acestea primesc la cererile respective ale paragrafului al doilea, cererea suplimentară ca *$\widetilde{Y}$ să fie homeomorf cu Y.*

Apare clar acum că actuala formulare a paragrafelor în discuţie, este o urmare firească a alegerii făcute pentru topologia spaţiului aplicaţiilor continue : topologia compact-deschisă.

În fine, pentru alte topologii în spaţiul aplicaţiilor continue trimitem la [8] şi [14].

BIBLIOGRAFIE

1. R. ARENS, *Extensions of functions on fully normal spaces.* Pacific J. Math., **2**, 11–22 (1952).
2. R. H. BING, *Metrization of topological spaces.* Canadian J. Math., **3**, 175–186 (1951).
3. J. DIEUDONNÉ, *Une généralisation des espaces compacts*, J. Math. Pures Appl., **23**, 65–76 (1944).
4. C. H. DOWKER, *On a theorem of Hanner*, Ark. Math., **2**, 307–313 (1952).
5. J. DUGUNDJI, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math., **1**, 353–367 (1951).
6. J. DUGUNDJI, *Absolute neighborhood retracts and local connectedness in arbitrary metric spaces.* Compositio Math., **13**, 229–246 (1958).
7. R. H. FOX, *On topologies for function spaces.* Bull. Amer. Math. Soc., **51**, 429–432 (1945).
8. M. FRÉCHET, *Sur quelques points du calcul functionnel.* Thèse, Paris, 1906.
9. P. J. HILTON şi colab., *On the decomposition of spaces in cartesian products and unions.* Proc. Camb. Phil. Soc., **55**, 248–256 (1959).
10. O. HANNER, *Retraction and extension of mappings of metric and non-metrics spaces.* Ark. Math., **2**, 315–360 (1952).

11. S.-T. Hu, *A new generalization of Borsuk's theory of retracts*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc., **50**, 1051–1055 (1947).
12. K. Kouratowski, *Topologie* I, Warszawa-Lwów, 1933.
13. E. Michael, *Some extension theorems for continuous functions*, Pacific, J. Math., **3**, 789–806 (1953).
14. S. Mrówka, *On function spaces*, Fundam. Math., **45**, 273–282 (1958).
15. J.-P. Serre, *Homologie singulière des espaces fibrés*. Ann. of Math., 54, 425–505 (1951).
16. A. H. Stone, *Paracompactness and product spaces*. Bull. Amer. Math. Soc., **54**, 977–982 (1948).
17. J. W. Tukey, *Convergence and uniformity in topology*. Priceton, 1940.
18. G. W. Whitehead, *Homotopy theory*, Lecture notes, Massachusetts Institute of Technology, 1953.
19. J. H. C. Whitehead, *Combinatorial homotopy I*, Bull. Amer. Math. Soc., **55** 213–245 (1949).
20. M. Zisman, *Espaces fibrés et groupes d'homotopie*, Séminaire H. Cartan, E.N.S., 1958–1959.

O PROBLEMĂ MIXTĂ PENTRU UN CILINDRU ELASTIC CIRCULAR, ANIZOTROP CU NEOMOGENEITATE DISCONTINUĂ[1])

DE

EUGEN SOÓS

I. INTRODUCERE

Love [1] a arătat că pentru corpuri izotrope și omogene determinarea stării de tensiune și de deformație în probleme axial simetrice se reduce la găsirea unei funcții biarmonice cu anumite condiții la limită date. Lehnitský [2], [3] generalizează funcția lui Love pentru corpuri cu izotropie transversală. Folosind doi potențiali elastici, Elliot [4] reduce problema găsirii stării de tensiune și deformație în cazul axial simetric la determinarea a două funcții „armonice". Hu Hai-chang [5] și Kröner [6] regăsesc independent funcția lui Lehnitsky. Eubanks și Sternberg [7] arată că soluția găsită de Elliot reprezintă integrala generală a ecuațiilor de echilibru.

Cu utilizarea rezultatelor lui Lehnitsky și Elliot problemele axial simetrice pentru corpuri cu izotropie transversală se rezolvă cu metoda transformatelor integrale, dacă domeniul ocupat de corp este nemărginit [9], [10], [11] sau folosind metoda separării variabilelor pentru domenii finite [12].

Lucrările lui Beltrami [13] și Picard [14] ridică problema definirii unor funcții complexe cu proprietăți analitice determinate prin anumite sisteme de ecuații diferențiale cu derivate parțiale. Folosind această idee, Bers și Gelbart [15], [16] introduc funcțiile Σ-monogene, iar Polojii [18], [19] definește funcțiile p-analitice. Aceste funcții pseudo-analitice sînt legate de sistemul generalizat al lui Cauchy-Riemann.

---

[1]) Această lucrare a apărut în versiune engleză în „Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées", **IX**, 7 (1964).

Se știe că în problema plană a corpurilor elastice izotrope și omogene starea de tensiune și de deformație este caracterizată prin două funcții analitice de variabilă complexă introduse de Kolosov și Mushelișvili. În lucrarea [18] Polojii construiește soluția generală a problemei axial simetrice pentru corpuri izotrope și omogene cu ajutorul a două funcții r-analitice. Lehnitsky [19] arată că în problema plană a corpurilor anizotrope și omogene găsirea stării de tensiune și de deformație se reduce la determinarea a două funcții analitice de variabilă complexă, funcțiile fiind definite în două plane diferite.

În această lucrare vom arăta că dacă rădăcinile ecuației lui Lehnitsky-Elliot sînt reale și distincte, integrala generală a ecuațiilor de echilibru pentru corpuri elastice omogene, cu izotropie transversală, în problema axial simetrică, se exprimă prin două funcții r-analitice, definite în două plane complexe diferite.

a. SOLUȚIA LUI LEHNITSKY-ELLIOT

Folosim un sistem de coordonate cilindrice, axa Oz fiind axa anizotropiei cilindrice, Or și $O\theta$ găsindu-se în planul de izotropie. Vom nota cu $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ componentele tensorului tensiune, cu u, v, w componentele vectorului deplasare, cu $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\theta z}$ componentele deformației specifice în sistemul de coordonate ales.

Legea lui Hooke va fi :

$$\begin{aligned} &\sigma_r = a\varepsilon_r + (a-2\bar{\mu})\varepsilon_\theta + b\varepsilon_z, && \tau_{r\theta} = \bar{\mu}\varepsilon_{r\theta}, \\ &\sigma_\theta = (a-2\bar{\mu})\varepsilon_r + a\varepsilon_\theta + b\varepsilon_z, && \tau_{\theta z} = \mu\varepsilon_{\theta z}, \\ &\sigma_z = b(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + \bar{a}\varepsilon_z, && \tau_{rz} = \mu\varepsilon_{rz}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Constantele din legea lui Hooke satisfac relațiile :

$$a, \bar{a}, \mu, \bar{\mu} > 0, \quad a > \bar{\mu}, \quad a\bar{a} - b^2 - \bar{a}\mu > 0. \tag{1.2}$$

În problemele axial simetrice avem :

$$u = u(r,z), v = 0, w = w(r,z). \tag{1.3}$$

Utilizînd relațiile dintre deformații specifice și deplasări din legea lui Hooke cu relațiile (1.3), obținem :

$$\begin{aligned} &\sigma_r = a\frac{\partial u}{\partial r} + (a-2\bar{\mu})\frac{u}{r} + b\frac{\partial w}{\partial z}, && \tau_{r\theta} = 0, \\ &\sigma_\theta = (a-2\bar{\mu})\frac{\partial u}{\partial r} + a\frac{u}{r} + b\frac{\partial w}{\partial z}, && \tau_{\theta z} = 0, \\ &\sigma_z = b\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) + \bar{a}\frac{\partial w}{\partial z}, && \tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ecuațiile de echilibru în deplasări au forma următoare :

$$a\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(b+\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial z}=0,$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\bar{a}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+(b+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)=0. \tag{1.5}$$

Eubanks și Sternberg [7] au arătat că dacă $\mu + b \neq 0$, ceea ce vom presupune în cele ce urmează, soluția generală a sistemului (1.5) este

$$u=-\frac{\mu+b}{a\mu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial z},\qquad w=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{a}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, \tag{1.6}$$

dacă funcția $\Phi(r, z)$ verifică ecuația

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\alpha_1^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\alpha_2^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi=0, \tag{1.7}$$

$\frac{1}{\alpha_1^2}$, $\frac{1}{\alpha_2^2}$ fiind rădăcinile ecuației

$$x^2-\frac{a\bar{a}-h^2-2\mu h}{a}x+\frac{\bar{a}}{a}=0. \tag{1.8}$$

Ecuația (1.8) are rădăcini reale și distincte, reale și egale sau complex conjugate după cum

$$a\bar{a}-(2\mu+b)\gtreqless 0. \tag{1.9}$$

Dacă rădăcinile ecuației lui Lehnitsky-Elliot (1.8) sînt distincte, în virtutea teoremei lui Boggio (citat de [7]) soluția generală a ecuației (1.7) este :

$$\Phi(r,z)=\varphi_1(r,z)+\varphi_2(r,z), \tag{1.10}$$

dacă funcțiile $\varphi_i(r, z)$ satisfac ecuațiile :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\alpha_i^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_i=0. \tag{1.11}$$

În cele ce urmează vom considera numai cazul în care rădăcinile ecuației (1.8) sînt reale ; rezultatele experimentale arată că pentru multe materiale această condiție este îndeplinită [4].

b. FUNCȚIA r-ANALITICĂ

După Bers-Gelbart [15] și Polojii [17] spunem că în planul variabilei complexe $\mathfrak{z} = r + iz$ funcția $f(\mathfrak{z}) = \varphi(r, z) + i\,\psi(r, z)$ este r-monogenă sau r-analitică dacă sînt îndeplinite condițiile :

$$r\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\partial\psi}{\partial z},\qquad r\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{1.12}$$

Prin definiție, r-derivata unei funcții $g(\mathfrak{z}) = X(r, z) + iY(r, z)$, în raport cu $\mathfrak{z}$ sau $\bar{\mathfrak{z}}$ este :

$$
\begin{aligned}
\frac{{}^{\backprime}\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\mathfrak{z}} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + i\,\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial z} - r\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right),\\
\frac{{}^{\backprime}\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + i\,\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial z} + r\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right).
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

Din definiție rezultă că o funcție $g(\mathfrak{z})$ este r-analitică dacă și numai dacă r-derivata sa în raport cu $\bar{\mathfrak{z}}$ este identic nulă iar dacă $f(\mathfrak{z})$ este r-analitică, atunci :

$$
\frac{{}^{\backprime}\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathfrak{z}} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - i\,\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - i\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}. \tag{1.14}
$$

Funcția obținută prin r-derivarea (1.14) este de asemenea r-analitică. Fie $X(r, z)$ o funcție reală ; folosind relațiile (1.13) obținem :

$$
\frac{{}^{\backprime}\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}\mathfrak{z}\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}} = \frac{\partial^2X}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\partial^2X}{\partial z^2}. \tag{1.15}
$$

Utilizînd r-integrala unei funcții r-analitice definită prin relația :

$$
{}^{\backprime}\!\!\int f(\mathfrak{z})\,\mathrm{d}\mathfrak{z} = \int_{\mathfrak{z}_0}^{\mathfrak{z}} -\varphi\,\mathrm{d}z - \psi\,\frac{\mathrm{d}r}{r} + i\int_{\mathfrak{z}_0}^{\mathfrak{z}} -\psi\,\mathrm{d}z + \varphi r\,\mathrm{d}r \tag{1.16}
$$

și faptul că funcția obținută prin r-integrare este tot r-analitică, rezultă că soluția generală a ecuației

$$
\frac{\partial^2X}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\partial^2X}{\partial z^2} = 0 \tag{1.17}
$$

este

$$
X(r, z) = f(\mathfrak{z}) + \overline{f(\mathfrak{z})}, \tag{1.18}
$$

$f(\mathfrak{z})$ fiind o funcție r-analitică arbitrară.

c. SOLUȚIA GENERALĂ A SISTEMULUI (1.5)

Introducem variabilele complexe :

$$
\mathfrak{z}_j = r + i\alpha_j z = r + iz_j, \qquad (j = 1, 2). \tag{1.19}
$$

Conform relației (1.15) rezultă că ecuațiile (1.11) sînt echivalente cu

$$
\frac{{}^{\backprime}\mathrm{d}^2\varphi_j}{\mathrm{d}\mathfrak{z}_j\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}_j} = 0,
$$

deci soluțiile generale ale acestor ecuații sînt :

$$
\varphi_j(r, z) = f_j(\mathfrak{z}_j) + \overline{f_j(\mathfrak{z}_j)},
$$

$f_j(\mathfrak{z}_j)$ fiind funcții r-analitice arbitrare definite în planele complexe $\mathfrak{z}_j$.

Utilizînd relația (1.10) obținem pentru funcția lui Lehnitsky-Elliot următoarea expresie :

$$\Phi(r, z) = \mathrm{Re}\,[f_1(\mathfrak{z}_1) + f_2(\mathfrak{z}_2)]. \tag{1.20}$$

Un rezultat analog a fost obținut în problema plană a corpurilor anizotrope în legătură cu funcția lui Airy [19].

Pentru exprimarea componentelor vectorului deplasare și ale tensorului tensiune prin funcțiile r-analitice introduse vom utiliza relațiile (1.4), (1.6), (1.20) și definiția r-derivatei (1.14). Efectuînd calculele obținem :

$$\begin{aligned} U = ru &= p_1 \,\mathrm{Im}\, g_1(\mathfrak{z}_1) + p_2 \,\mathrm{Im}\, g_2(\mathfrak{z}_2), \\ w &= P_1 \mathrm{Re}\, g_1(\mathfrak{z}_1) + P_2 \,\mathrm{Re}\, g_2(\mathfrak{z}_2), \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\alpha_1 a_1 \mathrm{Re}\, \frac{{}^{\backprime}\mathrm{d} g_1}{\mathrm{d}\mathfrak{z}_1} - \alpha_2 a_2 \,\mathrm{Re}\, \frac{{}^{\backprime}\mathrm{d} g_2}{\mathrm{d}\mathfrak{z}_2} + \frac{m-1}{r^2}\,[\alpha_1 \,\mathrm{Im}\, g_1(\mathfrak{z}_1) + \alpha_2 \,\mathrm{Im}\, g_2(\mathfrak{z}_2)], \\ \sigma_\theta &= -\alpha_1 a_1' \,\mathrm{Re}\, \frac{{}^{\backprime}\mathrm{d} g_1}{\mathrm{d}\mathfrak{z}_1} - \alpha_2 a_2 \,\mathrm{Re}\, \frac{{}^{\backprime}\mathrm{d} g_2}{\mathrm{d}\mathfrak{z}_2} - \frac{m-1}{r^2}\,[\alpha_1 \,\mathrm{Im}\, g_1(\mathfrak{z}_1) + \alpha_2 \,\mathrm{Im}\, g_2(\mathfrak{z}_2)], \\ \sigma_z &= A_1 \mathrm{Re}\, \frac{{}^{\backprime}\mathrm{d} g_1}{\mathrm{d}\mathfrak{z}_1} + A_2 \,\mathrm{Re}\, \frac{{}^{\backprime}\mathrm{d} g_2}{\mathrm{d}\mathfrak{z}_2}, \\ r\,\tau_{rz} &= a_1 \,\mathrm{Im}\, \frac{{}^{\backprime}\mathrm{d} g_1}{\mathrm{d}\mathfrak{z}_1} + a_2 \,\mathrm{Im}\, \frac{{}^{\backprime}\mathrm{d} g_2}{\mathrm{d}\mathfrak{z}_2}, \end{aligned} \tag{1.22}$$

unde am notat :

$$a_j = 1 + \alpha_j \frac{b}{a}, \quad a_j' = n + \alpha_j^2 \frac{b}{a}, \quad p_j = -\alpha_j \frac{\mu + b}{\mu a},$$

$$A_j = \alpha_j \left(n - \alpha_j^2 \frac{\bar{a}}{a}\right), P_j = \frac{\mu \alpha_j^2 - a}{\mu a},$$

$$m = \frac{a\mu - 2 b\bar{\mu} - 2\mu\bar{\mu}}{a\mu}, \quad n = \frac{a\bar{a} - b^2 - b\mu}{a\mu},$$

funcțiile $g(\mathfrak{z}_j)$ fiind definite prin relațiile :

$$g_j(\mathfrak{z}_j) = \frac{{}^{\backprime}\mathrm{d}^2 f_j}{\mathrm{d}\mathfrak{z}_j^2}, \qquad (j = 1,2).$$

Relațiile (1.21) și (1.22) arată că funcțiile $g_j(\mathfrak{z}_j)$ trebuie să îndeplinească condițiile :

$$\mathrm{Im}\, g_j(\mathfrak{z}_j) = 0, \quad \mathrm{Im}\, \frac{{}^{\backprime}\mathrm{d} g_j}{\mathrm{d}\mathfrak{z}_j} = 0 \text{ pentru } r = 0.$$

Formulele (1.21) și (1.22) sînt analoge cu cele obținute în problema plană a corpurilor anizotrope [19]; ele reduc problema determinării stării de tensiune și de deformație în corp la o problemă la limită pentru două funcții r-analitice definite în planele complexe $\mathfrak{z}_j$.

II

Vom folosi rezultatele obținute pentru rezolvarea unei probleme mixte în cazul unui cilindru circular cu izotropie transversală și neomogeneitate discontinuă. În lucrarea [21], Kapșivii rezolvă aceeași problemă pentru un cilindru izotrop, utilizînd formula lui Polojii [18]. Funcțiile r-analitice folosite de Kapșivii, în rezolvarea problemei, se obțin din funcții analitice obișnuite cu ajutorul operatorului definit de Polojii în lucrarea [22]. În rezolvarea problemei vom utiliza funcții r-analitice, construite în planele complexe $\mathfrak{z}_j$ în același mod.

Considerăm un cilindru circular drept de rază R, alcătuit din n straturi de înălțime $2h_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ cu proprietăți mecanice diferite. Presupunem că axa de simetrie a cilindrului coincide cu axa anizotropiei cilindrice și orice plan perpendicular pe generatoarele cilindrului este plan de izotropie pentru stratul respectiv. Presupunem că cilindrul se găsește pe un fundament rigid, suprafața sa laterală fiind acoperită cu un strat de asemenea rigid. Prin ipoteză între fundament și baza cilindrului, între învelișul rigid și suprafața laterală a cilindrului și între straturile cilindrului nu există frecare. Vom presupune că în timpul deformației straturile rămîn lipite. Pe capătul liber al cilindrului acționează o forță normală a cărei distribuție depinde numai de r. Sistemele de coordonate sînt indicate în figură.

Conform ipotezelor avem următoarele condiții pe contur:

$$\sigma_z^{(1)}(r, h_1) = Z(r), \text{ o funcție dată,} \tag{2.1}$$

$$\tau_{rz}^{(k)}(r, h_k) = 0, \tag{2.2}$$

$$\tau_{rz}^{(k)}(0, z) = 0, \quad \tau_{rz}^{(k)}(R, z)\ 0, \tag{2.3}$$

$$u_k(0, z) = 0, \quad u_k(R, z) = 0, \tag{2.4}$$

$$w_n(r, -h_n) = 0, \tag{2.5}$$

$$\sigma_z^{(k)}(r, -h_k) = \sigma_z^{(k+1)}(r, h_{k+1}), \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{2.6}$$

$$w_k(r, -h_k) = w_{k+1}(r, h_{k+1}), \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{2.7}$$

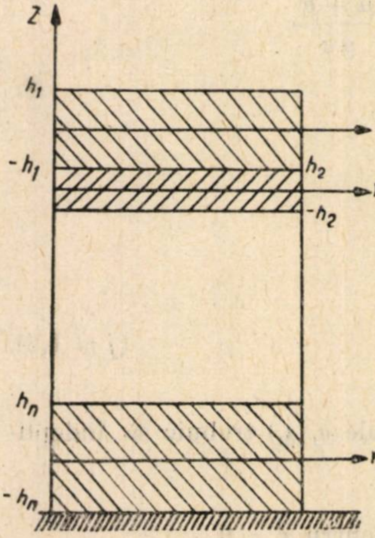


Fig. 1

Vom nota cu $a_k, \bar{a}_k, b_k, \mu_k, \bar{\mu}_k$ constantele elastice din stratul de ordinul k, cu α_{jk}^{-2} rădăcinile corespunzătoare ale ecuațiilor (1.8); presupunem că aceste rădăcini sînt reale pentru fiecare strat și $b_k + \mu_k \neq 0$.

Introducem variabilele complexe

$$\mathfrak{z}_{jk} = r + i\alpha_{jk} z = r + iz_{jk}, \quad (j = 1,2\,;\ k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.8}$$

Conform rezultatelor obținute, starea de tensiune și de deformație în fiecare strat este caracterizată de două funcții r-analitice și avem :

$$\begin{aligned} U_k &= p_{1k}\,\mathrm{Im} f_{1k}(\mathfrak{z}_{1k}) + p_{2k}\,\mathrm{Im} f_{2k}(\mathfrak{z}_{2k}), \\ w_k &= P_{1k}\,\mathrm{Re} f_{1k}(\mathfrak{z}_{1k}) + P_{2k}\,\mathrm{Re} f_{2k}(\mathfrak{z}_{2k}), \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(k)} &= A_{1k}\,\mathrm{Re}\frac{{}^{\backprime}\mathrm{d} f_{1k}}{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}_{1k}} + A_{2k}\,\mathrm{Re}\frac{{}^{\backprime}\mathrm{d} f_{2k}}{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}_{2k}}, \\ \tau_{rz} &= a_{1k}\,\mathrm{Im}\frac{{}^{\backprime}\mathrm{d} f_{1k}}{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}_{1k}} + a_{2k}\,\mathrm{Im}\frac{{}^{\backprime}\mathrm{d} f_{2k}}{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}_{2k}}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Constantele a_{jk}, p_{jk}, A_{jk}, P_{jk} se determină din relațiile (1.23).

Vom căuta funcțiile necunoscute $f_{jk}(\mathfrak{z}_{jk})$ sub forma următoarelor serii de funcții r-analitice :

$$\begin{aligned} f_{1k}(\mathfrak{z}_{1k}) &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[-c_{sk}\,{}^{\backprime}(\cos\gamma_s \mathfrak{z}_{1k}) + d_{sk}\,{}^{\backprime}(i\sin\gamma_s \mathfrak{z}_{1k})\right] + B_k\,{}^{\backprime}(i\,\mathfrak{z}_{1k}) + C_k \\ f_{2k}(\mathfrak{z}_{2k}) &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[-e_{sk}\,{}^{\backprime}(\cos\gamma_s \mathfrak{z}_{2k}) + g_{sk}\,{}^{\backprime}(i\sin\gamma_s \mathfrak{z}_{2k})\right] + D_k\,{}^{\backprime}(i\,\mathfrak{z}_{2k}), \end{aligned} \tag{2.11}$$

unde semnul ${}^{\backprime}$ arată că ${}^{\backprime}(\cos\gamma_s \mathfrak{z}_{jk})$, ${}^{\backprime}(i\sin\gamma_s \mathfrak{z}_{jk})$, ${}^{\backprime}(i\,\mathfrak{z}_{jk})$ sînt funcții r-analitice în planele complexe $\mathfrak{z}_{jk}$, obținute din funcțiile analitice obișnuite $\cos\gamma_s \mathfrak{z}_{jk}$, $i\sin\gamma_s \mathfrak{z}_{jk}$ și $i\,\mathfrak{z}_{jk}$ cu ajutorul operatorului lui Polojii.

Constantele c_{sk}, d_{sk}, e_{sk}, g_{sk}, B_k, C_k și D_k sînt reale, iar γ_s sînt rădăcinile ecuației :

$$J_1(\gamma_s R) = 0. \tag{2.12}$$

Funcțiile r-analitice introduse au următoarele expresii :

$$\begin{aligned} {}^{\backprime}(\cos\gamma_s \mathfrak{z}_{jk}) &= \mathrm{ch}\,\gamma_s z_{jk} J_0(\gamma_s r) - ir\,\mathrm{sh}\,\gamma_s z_{jk} J_1(\gamma_s r), \\ {}^{\backprime}(i\sin\gamma_s \mathfrak{z}_{jk}) &= -\mathrm{sh}\,\gamma_s z_{jk} J_0(\gamma_s r) + ir\,\mathrm{ch}\,\gamma_s z_{jk} J_1(\gamma_s r), \end{aligned} \tag{2.13}$$

$${}^{\backprime}(i\,\mathfrak{z}_{jk}) = -z_{jk} + i\frac{r^2}{2}\cdot$$

Utilizînd relația

$$\frac{{}^{\backprime}\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}_{jk}} = -\frac{\partial}{\partial z_{jk}} \tag{2.14}$$

din (2.9) –(2.14), obținem

$$u_k = \sum_{s=1}^{\infty} [p_{1k} (c_{sk} \,\mathrm{sh}\, \gamma_s z_{1k} + d_{sk} \,\mathrm{ch}\, \gamma_s z_{1k}) + p_{2k} (e_{sk} \,\mathrm{sh} \gamma_s z_{2k} + g_{sk} \,\mathrm{ch} \gamma_s z_{2k})] J_1(\gamma_s r) +$$

$$+ (p_{1k} B_k + p_{2k} D_k) \frac{r^2}{2} \cdot \tag{2.15}$$

$$w_k = - \sum_{s=1}^{\infty} [P_{1k} (c_{sk} \,\mathrm{ch} \gamma_s z_{1k} + d_{sk} \,\mathrm{sh} \gamma_s z_{1k}) + P_{2k} (e_{sk} \,\mathrm{ch} \gamma_s z_{2k} + g_{sk} \,\mathrm{sh} \gamma_s z_{2k})] J_0(\gamma_s r) -$$

$$- (P_{1k} B_k z_{1k} + P_{2k} D_k z_{2k}) + C_k P_{1k}$$

$$\sigma_z^{(k)} = \sum_{s=1}^{\infty} [A_{1k} (c_{sk} \,\mathrm{sh}\, \gamma_s z_{1k} + d_{sk} \,\mathrm{ch}\, \gamma_k z_{1k}) + A_{2k} (e_{sk} \,\mathrm{sh}\, \gamma_s z_{2k} +$$

$$+ g_{sk} \,\mathrm{ch}\, \gamma_s z_{2k})] \gamma_s J_0 (\gamma_s r) + A_{1k} B_k + A_{2k} D_k \tag{2.16}$$

$$\tau_{rz}^{(k)} = - \sum_{s=1}^{\infty} [a_{1k} (c_{sk} \,\mathrm{ch}\, \gamma_s z_{1k} + d_{sk} \,\mathrm{sh}\, \gamma_s z_{1k}) + a_{2k} (e_{sk} \,\mathrm{ch}\, \gamma_s z_{2k} +$$

$$+ g_{sk} \,\mathrm{sh}\, \gamma_s z_{2k})] \gamma_s J_1 (\gamma_s r).$$

Din relațiile (2.12), (2.15) și (2.16) rezultă că condițiile (2.3) și (2.4) sînt identic satisfăcute dacă avem

$$p_{1k} B_k + p_{2k} D_k = 0. \tag{2.17}$$

Din (2.2) obținem

$$e_{sk} = - a_{1k} a_{2k}^{-1} \,\mathrm{ch}\, \xi_{sk} \,\mathrm{ch}^{-1} \eta_{sk} \,.\, c_{sk}, \;\; g_{sk} = - a_{1k} a_{2k}^{-1} \,\mathrm{sh}\, \xi_{sk} \,\mathrm{sh}^{-1} \eta_{sk} \cdot d_{sk}, \tag{2.18}$$

$$D_k = p_{1k} p_{2k}^{-1} B_k, \tag{2.18'}$$

unde am utilizat notațiile

$$\xi_{sk} = \gamma_s \alpha_{1k} h_k, \qquad \eta_{sk} = \gamma_s \alpha_{2k} h_k . \tag{2.19}$$

Pentru determinarea constantelor c_{sk}, d_{sk}, B_k și C_k vom utiliza metoda întrebuințată în lucrările [20] și [21]. Dezvoltăm funcțiile $\sigma_z^{(k)} (r, h_k)$ și $w_k (r, h_k)$ în serii Fourier-Dini [25]; obținem

$$\sigma_z^{(k)} (r, h_k) = \delta_{0k} + \sum_{s=1}^{\infty} \delta_{sk} J_0 (\gamma_s r), \;\; w_k (r, h_k) = \varepsilon_{0k} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_{sk} J_0 (\gamma_s r). \tag{2.20}$$

Utilizînd relațiile (2.15) –(2.18), obținem

$$c_{sk} = a_{2k}^{-1} \Delta_{sk}^{-1} \,\mathrm{sh}^{-1} \eta_{sk} [\delta_{sk} (a_{2k} P_{1k} - a_{1k} P_{2k}) \,\mathrm{sh}\, \xi_{sk} \,\mathrm{sh}\, \eta_{sk} +$$

$$+ \varepsilon_{sk} \gamma_s (a_{2k} A_{1k} \,\mathrm{ch}\, \xi_{sk} \,\mathrm{sh}\, \eta_{sk} - a_{1k} A_{2k} \,\mathrm{sh}\, \xi_{sk} \,\mathrm{ch}\, \eta_{sk})], \tag{2.20'}$$

$$d_{sk} = a_{2k}^{-1} \Delta_{sk}^{-1} \,\mathrm{ch}^{-1} \eta_{sk} [\delta_{sk} (a_{1k} P_{2k} - a_{2k} P_{1k}) \,\mathrm{ch}\, \xi_{sk} \,\mathrm{ch}\, \eta_{sk} +$$

$$+ \varepsilon_{sk} \gamma_s (a_{1k} A_{2k} \,\mathrm{sh}\, \eta_{sk} \,\mathrm{ch}\, \xi_{sk} - a_{2k} A_{1k} \,\mathrm{sh}\, \xi_{sk} \,\mathrm{ch}\, \eta_{sk})], \tag{2.21}$$

unde

$$\Delta_{sk} = \gamma_s a_{2k}^{-2} (a_{1k} P_{2k} - a_{2k} P_{1k}) D_{sk}, \; D_{sk} = (a_{2k} A_{1k} \operatorname{sh} 2\eta_{sk} - \\ - a_{1k} A_{2k} \operatorname{sh} 2\xi_{sk}) \operatorname{sh}^{-2} 2\eta_{sk} \qquad (2.22)$$

$$B_k = p_{2k} (p_{2k} A_{1k} - p_{1k} A_{2k})^{-1} \delta_{0k}, \; D_k = -p_{1k} (p_{2k} A_{1k} - p_{1k} A_{2k})^{-1} \delta_{0k}, \qquad (2.23)$$

$$C_k = (\alpha_{1k} p_{2k} - \alpha_{2k} p_{1k}) (p_{2k} A_{1k} - p_{1k} A_{2k})^{-1} h_k \delta_{0k} + \varepsilon_{0k},$$

Rezolvarea problemei este deci redusă la găsirea constantelor δ_{sk}, ε_{sk}, δ_{0k}, ε_{0k}. Utilizînd relațiile (2.15), (2.16), (2.21), (2.22), (2.23) și condițiile la limită (2.6), (2.7), obținem următoarele relații de recurență :

$$\delta_{s,k+1} = (a_{1k} P_{2k} - a_{2k} P_{1k})^{-1} D_{sk}^{-1} \{ \delta_{sk} (a_{1k} P_{2k} - a_{2k} P_{1k})(a_{2k} A_{1k} \operatorname{ch} 2\xi_{sk} - \\ - a_{1k} A_{2k} \operatorname{sh} 2\xi_{sk} \operatorname{cth} 2\eta_{sk}) + \varepsilon_{sk} \gamma_s [2 a_{1k} a_{2k} A_{1k} A_{2k} (\operatorname{ch}^2 \xi \operatorname{th} \eta_{sk} + \\ + \operatorname{sh}^2 \xi_{sk} \operatorname{cth} \eta_{sk}) - (a_{1k}^2 A_{2k}^2 + a_{2k}^2 A_{1k}^2) \operatorname{sh} 2\xi_{sk}]\}, \qquad (2.24)$$

$$\varepsilon_{s,k+1} = \gamma_s^{-1} D_{sk}^{-1} [\delta_{sk} (a_{2k} P_{1k} - a_{1k} P_{2k}) \operatorname{sh} 2\xi_{sk} + \varepsilon_{sk} \gamma_s (a_{2k} A_{1k} \operatorname{ch} 2\xi_{sk} - \\ - a_{1k} A_{2k} \operatorname{sh} 2\xi_{sk} \operatorname{cth} 2\eta_{sk})], \qquad (2.25)$$

$$\delta_{0,k+1} = \delta_{0,k}, \quad \varepsilon_{0,k+1} = \varepsilon_{0,k}. \qquad (2.25')$$

Pentru determinarea constantelor mai avem la dispoziție condițiile (2.1) și (2.7). Vom dezvolta funcția cunoscută $Z(r)$ în serie Fourier-Dini. Presupunem că $Z(r)$ este continuă pe porțiuni cu variație mărginită în intervalul $(0, R)$ [25]. Obținem astfel :

$$Z(r) = Z_0 + \sum_{s=1}^{\infty} Z_s J_0(\gamma_s r). \qquad (2.26)$$

Constantele Z_0, Z_s se determină din relațiile următoare :

$$Z_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r Z(r) \, \mathrm{d}r, \qquad Z_s = \frac{2}{R^2 J_0^2(\gamma_s R)} \int_0^R r Z(r) J_0(\gamma_s r) \, \mathrm{d}r. \qquad (2.27)$$

Utilizînd condițiile la limită obținem

$$\delta_{0,1} = Z_0, \quad \delta_{s1} = Z_s, \qquad (2.28)$$

$$\delta_{sn} (a_{2n} P_{1n} - a_{1n} P_{2n}) \operatorname{sh} 2\xi_{sn} + \varepsilon_{sn} \gamma_s (a_{2n} A_{1n} \operatorname{ch} 2\xi_{sn} - a_{1n} A_{2n} \operatorname{sh} 2\xi_{sn} \operatorname{cth} 2\eta_{sn}) = 0, \qquad (2.29)$$

$$\varepsilon_{0,n} = 0. \qquad (2.29')$$

Prin utilizarea formulelor de recurență, din (2.29) putem determina constantele ε_{s1}.

Relațiile (2.25') cu (2.29') dau :

$$\varepsilon_{0,k} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

iar din (2.23) și (2.28) obținem :

$$B_k = p_{2k} (p_{2k} A_{1k} - p_{1k} A_{2k})^{-1} \delta_{01}, \quad D_k = -p_{1k} (p_{2k} A_{1k} - p_{1k} A_{2k})^{-1} \delta_{01}, \\ C_k = (\alpha_{1k} p_{2k} - \alpha_{2k} p_{1k}) (p_{2k} A_{1k} - p_{1k} A_{2k})^{-1} h_k \delta_{01}.$$

Astfel problema este rezolvată şi soluţia unic determinată.

Dacă $Z(r) = C$ (constant), rezultă $Z_s = 0$, $Z_0 = C$, deci :

$$\delta_{01} = C, \quad c_{sk} = d_{sk} = e_{sk} = g_{sk} = 0,$$

de unde rezultă

$$f_{1k}(\mathfrak{z}_{1k}) = B_k \backprime(i\,\mathfrak{z}_{1k}) + C_k\,, \; f_{2k}(\mathfrak{z}_{2k}) = D_k \backprime(i\,\mathfrak{z}_{2k}).$$

Dacă

$$\int_0^R rZ(r)\,\mathrm{d}r = 0, \qquad (*)$$

rezultă $Z_0 = 0$, deci obţinem

$$\delta_{01} = 0, \quad B_k = C_k = D_k = 0.$$

Dacă condiţia (*) este îndeplinită, rezultatele obţinute se extind uşor pentru cazul în care stratul de ordinul n este foarte lung ($h_n = \infty$). Trebuie să punem condiţia ca componentele tensorului tensiune şi ale deplasării să tindă la zero cînd $z \to -\infty$; această condiţie va fi îndeplinită dacă considerăm :

$$f_{1n}(\mathfrak{z}_{1n}) = \sum_{s=1}^{\infty} c_{sn} \backprime(\mathrm{e}^{-i\gamma_s \mathfrak{z}_{1n}}), \; f_{2n}(\mathfrak{z}_{2n}) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{sn} \backprime(\mathrm{e}^{-i\gamma_s \mathfrak{z}_{2n}}). \qquad (2.30)$$

Funcţiile r-analitice din seriile considerate se obţin din funcţiile analitice obişnuite $\mathrm{e}^{-i\gamma_s \mathfrak{z}_{jn}}$, cu ajutorul operatorului lui Polojii ; avem

$$\backprime(\mathrm{e}^{-i\gamma_s \mathfrak{z}_{jn}}) = \mathrm{e}^{\gamma_s z_{jn}}\,[J_0(\gamma_s r) - irJ_1(\gamma_s r)]. \qquad (2.31)$$

Presupunem bineînţeles că $\alpha_j > 0$, ceea ce totdeauna este posibil.

Dacă avem o placă nemărginită ($R = \infty$), cu grosime finită, trebuie să punem condiţia ca componentele tensorului tensiune şi ale deplasării să tindă la zero cînd $R \to \infty$. Problema plană analoagă a fost rezolvată de Sevliakov şi Privarnikov cu ajutorul transformatelor Fourier [20].

Condiţiile, legate de comportarea componentelor la mari distanţe de axa cilindrului, vor fi satisfăcute dacă considerăm :

$$f_{1k}(\mathfrak{z}_{1k}) = \int_0^{\infty} [-c_k(p) \backprime(\cos p\,\mathfrak{z}_{1k}) + d_k(p) \backprime(i \sin p\,\mathfrak{z}_{1k})]\mathrm{d}p,$$

$$f_{2k}(\mathfrak{z}_{2k}) = \int_0^{\infty} [-e_k(p) \backprime(\cos p\,\mathfrak{z}_{2k}) + g_k(p) \backprime(i \sin p\,\mathfrak{z}_{2k})]\,\mathrm{d}p,$$

p fiind un parametru real.

Funcţiile necunoscute $c_k(p)$, $d_k(p)$, $e_k(p)$ şi $g_k(p)$ se determină utilizînd un procedeu analog celui întrebuinţat în cazul cilindrului finit. Bineînțeles dezvoltările în serie Fourier-Dini trebuie să fie înlocuite cu transformate Hankel de ordinul zero [26]. Fie deci

$$\begin{aligned} p^{-1}\,\delta_k(p) &= \int_0^\infty r\,\sigma_z^{(k)}(r, h_k)\,J_0(pr)\,\mathrm{d}r \\ p^{-1}\,\varepsilon_k(p) &= \int_0^\infty r w_k(r, h_k)\,J_0(pr)\,\mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Utilizînd teorema de inversiune găsim

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(k)}(r, h_k) &= \int_0^\infty \delta_k(p)\,J_0(pr)\,\mathrm{d}p, \\ w_k(r, h_k) &= \int_0^\infty \varepsilon_k(p)\,J_0(pr)\,\mathrm{d}p. \end{aligned} \tag{2.32'}$$

Relațiile din care se determină funcțiile necunoscute se obțin din (2.18), (2.20) — (2.25) dacă în ele înlocuim constantele ξ_{sk}, η_{sk} cu ξ_k respectiv η_k, unde

$$\xi_k = p\,\alpha_{1k}h_k, \quad \eta_k = p\alpha_{2k}h_k.$$

Pentru determinarea funcțiilor $\delta_k(p)$ și $\varepsilon_k(p)$ folosim condițiile la limită (2.1) și (2.5). Presupunem că funcția $Z(r)$ este nulă în afara unui interval finit. Fie

$$p^{-1}\,\overline{Z}(p) = \int_0^\infty rZ(r)\,J_0(pr)\,\mathrm{d}r, \tag{2.33}$$

deci conform relației (2.32) obținem

$$\delta_1(p) = \overline{Z}(p) \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} \delta_n(p)\,(a_{2n}P_{1n} - a_{1n}P_{2n})\,\mathrm{sh}\,2\xi_n + \varepsilon_n(p)\,p\,(a_{2n}A_{1n}\,\mathrm{ch}\,2\xi_n - \\ - a_{1n}A_{2n}\,\mathrm{sh}\,2\xi_n\,\mathrm{cth}\,2\eta_n) = 0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Utilizarea formulelor de recurență împreună cu relațiile (2.34) și (2.35) permite determinarea lui $\varepsilon_1(p)$. Astfel principial problema este rezolvată.

Dacă stratul de ordinul n este nemărginit și în direcția axei Oz ($h_n = \infty$), adică avem o placă neomogenă pe un semispațiu elastic, trebuie să punem condiția ca în semispațiu componentele tensorului tensiune și ale deplasării să tindă la zero cînd $z \to -\infty$. În lucrarea [24] Kogan rezolvă această problemă pentru un corp izotrop, extinzînd rezultatele la cazul unui semispațiu cu neomogeneitate continuă.

Condiția legată de comportarea mărimilor la mari distanțe în direcția axei Oz va fi satisfăcută dacă utilizăm în stratul de ordinul n următoarele funcții r-analitice :

$$f_{1n}(\mathfrak{z}_{1n}) = \int_0^\infty c_n(p)\,{}^\backprime(\mathrm{e}^{-ip\mathfrak{z}_{1n}})\,\mathrm{d}p, \quad f_{2n}(\mathfrak{z}_{2n}) = \int_0^\infty \mathrm{e}_n(p)\,{}^\backprime(\mathrm{e}^{-ip\mathfrak{z}_{2n}})\,\mathrm{d}p. \tag{2.36}$$

III

Vom aplica rezultatele obținute în cazul particular cînd există numai două straturi cu proprietăți mecanice diferite.

a. CILINDRU CU LUNGIME FINITĂ

Introducem notațiile :

$$g_k = a_{1k}P_{2k} - a_{2k}P_{1k}, \quad l_{sk} = a_{2k}A_{1k}\,\mathrm{ch}\,2\xi_{sk} - a_{1k}A_{2k}\,\mathrm{sh}\,2\xi_{sk}\,\mathrm{cth}\,2\eta_{sk}$$

$$m_{sk} = 2\,a_{1k}a_{2k}A_{1k}A_{2k}(\mathrm{ch}^2\xi_{sk}\,\mathrm{th}\,\eta_{sk} + \mathrm{sh}^2\xi_{sk}\,\mathrm{cth}\,\eta_{sk}) - (a_{1k}^2A_{2k}^2 + a_{2k}^2A_{1k}^2)\,\mathrm{sh}\,2\xi_{sk}$$

Constantele cunoscute g_k, l_{sk}, m_{sk} depind evident de proprietățile mecanice și de grosimile straturilor.

Utilizînd relațiile de recurență (2.24), (2.25) și condiția (2.29) obținem :

$$\gamma_s\varepsilon_{s1} = g_{1k}(g_{1k}l_{s2}\,\mathrm{sh}\,2\xi_{s1} + g_2l_{s1}\,\mathrm{sh}\,2\xi_{s2})(g_1l_{s1}l_{s2} - g_2m_{s2}\,\mathrm{sh}\,2\xi_{s2})^{-1}\delta_{s1}$$

b. PLACĂ INFINITĂ CU GROSIME FINITĂ

Introducem notațiile :

$$l_k(p) = a_{2k}A_{1k}\,\mathrm{ch}\,2\xi_k - a_{1k}A_{2k}\,\mathrm{sh}\,2\xi_k\,\mathrm{cth}\,2\eta_k$$

$$m_k(p) = 2a_{1k}a_{2k}A_{1k}A_{2k}(\mathrm{ch}^2\xi_k\,\mathrm{th}\,\eta_k + \mathrm{sh}^2\xi_k\,\mathrm{cth}\,\eta_k) - (a_{1k}^2A_{2k}^2 + a_{2k}^2A_{1k}^2)\,\mathrm{sh}\,2\eta_k$$

Utilizînd relațiile de recurență analoge cu (2.24) și (2.25) pentru $k = 1$ și condiția (2.36) pentru $n = 2$ obținem :

$$p\,\varepsilon_1(p) = g_1[g_2l_2(p)\,\mathrm{sh}\,2\xi_1 + g_2l_1(p)\,\mathrm{sh}\,2\xi_2]\,[g_1l_1(p)l_2(p) - g_2m_1(p)\,\mathrm{sh}\,2\xi_2]^{-1}\delta_1(p).$$

Analog se pot rezolva următoarele două probleme :

c. Cilindru cu un strat nemărginit.

d. Placă nemărginită pe un semispațiu elastic.

Evident, în problemele c și d, trebuie să luăm originea axelor de coordonate în frontiera comună a celor două straturi.

Utilizînd metoda lui Kogan [24], rezultatele obținute se pot extinde pentru corpuri cu neomogenitate continuă.

Primită la redacție la 11 februarie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. A. E. H. Love, *A treatise on the Mathematical theory of elasticiticy.* New York, 1944.
2. С. Г. Лехницкий, Прикл. Мат. и Мех., **4**, *3* (1940).
3. — *Теория упругости анизотропного тела.* Москва, 1950
4. H. A. Elliot, Proceedings of the Cambridge Phil. Soc., **44**, *4* (1948).
5. Hu Hai-chang, Acta scientica sinica, **2**, *2* (1953).
6. E. Kröner, Zeitschrift für Physik, Berlin, **136**, *4* (1953).
7. R. A. Eubanks-E. Sternberg, Journal of Rat. Mech. and Anal., **3**, *1* (1954).

8. T. **Boggio**, Ann. di Mat. pura ed applicata, **8**, ser. 3 (1903).
9. H. A. **Elliot**, Proceedings of the Cambridge Phil. Soc., **45**, *4* (1949).
10. J. G. **Chakravorty**, Bull. Calcutta Math. Soc., **48**, *4* (1956).
11. — Indian Journal Theorethical Phys., **3**, *3* (1955).
12. А. А. **Боблоян**, Изв. Акад. Наук Арм. ССР, **14**, *4* (1961).
13. E. **Beltrami**, Rend. del Reale Instituto Lombardo, 2, **11** (1878).
14. E. **Picard**, Compte Rendus, **112** (1891).
15. L. **Bers**-A. **Gelbart**, Quarterly of Applied Mathematics, **1**, *1* (1943).
16. — Trans. of the Am. Math. Soc., **58** (1944).
17. Г. Н. **Положий**, Докл. Акад. Наук СССР, **58**, *7* (1947).
18. — *Исследования по проблемам теории функций комплексного переменного*. Москва, 1960.
19. С. Г. **Лехницкий** *Анизотропные пластинки*. Москва, 1947.
20. Ю. А. **Шевляков** – А. К. **Приварников**, Прикладна механика, **8**, *2* (1962).
21. О. О. **Капшивий**, Прикладна механика, **9**, *6* (1963).
22. Г. Н. **Положий**, Вісник Київского Університету, **2**, *1* (1959).
23. Г. Н. **Положий** — О. О. **Капшивий**, Прикладна механика, **7**, *6* (1961).
24. Б. И. **Коган**, Изв. А Н СССР, Отд. Техн. Наук, *6* (1958).
25. G. N. **Watson**, *A treatise on the theory of Bessel function*, 1945.
26. I. N. **Sneddon**, *Fourier transforms*, 1951.

OPERATORI INTEGRALI CARE GENERALIZEAZĂ ECUAȚIILE DIFERENȚIALE

V. FORMULE DE MEDIE PENTRU SOLUȚIILE ANALITICE ALE ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE, LINIARE CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

DE

MARCEL N. ROȘCULEȚ

INTRODUCERE

În această lucrare stabilim formule de medie pentru soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^q u}{\partial x_1^{\beta_1}\,\partial x_2^{\beta_2}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}+a\frac{\partial u}{\partial y}+bu=0.$$

În continuare se construiesc formule de medie și pentru ecuații de forma

$$a\,\frac{\partial^p u}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}+b\,\frac{\partial^q u}{\partial x_1^{\beta_1}\,\partial x_2^{\beta_2}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}=0.$$

Procedeul folosit pentru acest tip de ecuații arată calea ce trebuie urmată pentru stabilirea de formule de medie pentru soluțiile analitice ale ecuațiilor cu derivate parțiale cu coeficienți constanți de ordin oarecare într-un număr oarecare de variabile. Dificultățile care se pot ivi nu sînt decît de ordin algebric.

Lucrarea continuă lucrările anterioare [2], [3], [4], [5].

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 7, P. 885–907. BUCUREȘTI, 1964

CAPITOLUL I

ECUAŢII DE TIP HIPERBOLIC

1. Fie $f(x, y)$ o funcţie analitică în variabilele x, y şi să considerăm integrala

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + ae^{i\theta},\ y + be^{-i\theta})\,\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

deoarece avem

$$f(x + ae^{i\theta},\ y + be^{-i\theta}) = f(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,!}\left(a\frac{\partial}{\partial x}e^{i\theta} + b\frac{\partial}{\partial y}e^{-i\theta}\right)^{(k)} f(x, y) \tag{2}$$

obţinem, înlocuind în (1), următoarea formulă integrală

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + ae^{i\theta},\ y + be^{-i\theta})\,\mathrm{d}\theta = f(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ab)^k}{(k\,!)^2}\frac{\partial^{2k} f}{\partial x^k \partial y^k} \tag{3}$$

încît putem enunţa

Teorema 1.1. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{4}$$

verifică următoarea formulă de medie

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + ae^{i\theta},\ y + be^{-i\theta})\,\mathrm{d}\theta. \tag{5}$$

Teorema 1.2. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda^2 u = 0 \tag{6}$$

verifică următoarea formulă de medie

$$J_0(2\sqrt{ab}\lambda) f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + ae^{i\theta},\ y + be^{-i\theta})\,\mathrm{d}\theta, \tag{7}$$

unde $J_0(z)$ este funcţia lui Bessel de ordinul zero şi argument z.

În ceea ce priveşte domeniul de analiticitate, el rezultă din (5) sau (7), anume dacă considerăm funcţia $f(z_1, z_2)$ de variabilele complexe $z_1 = x + i\xi$, $z_2 = y + i\eta$, f trebuie să fie analitică într-un domeniu D_1 din planul z_1 care conţine cercul $|z_1 - x| = |a|$, şi într-un domeniu D_2 din planul z_2 care conţine cercul $|z_2 - y| = |b|$. Funcţia $f(z_1, z_2)$ se reduce de-a lungul axelor Ox, Oy din planele complexe z_1, z_2 la funcţia reală $f(x, y)$ de variabilele reale x, y.

Dacă aplicăm lui (3) operatorul integral

$$Y = \int_0^\infty e^{-a}da, \quad a > 0, \tag{8}$$

obţinem

TEOREMA 1.3. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda^2 u = 0$$

verifică următoarea formulă de medie

$$e^{-\lambda^2 b} f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-a}da \int_0^{2\pi} f(x + ae^{i\theta}, \ y + be^{-i\theta})\, d\theta, \tag{9}$$

λ, b fiind parametrii reali.

2. Dacă presupunem pe $f(x, y)$ analitică în integrala

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + ae^{im\theta}, \ y + be^{-in\theta})\, d\theta,$$

m şi n fiind două numere naturale prime între ele, avem, ţinînd seamă de dezvoltarea

$$f(x + ae^{im\theta}, \ y + be^{-in\theta}) = f(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(ae^{im\theta}\frac{\partial}{\partial x} + be^{-in\theta}\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k)} f(x, y),$$

următoarea formulă integrală

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + ae^{im\theta}, \ y + be^{-in\theta})d\theta = f(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{nk} b^{mk}}{(nk)!(mk)!} \cdot \frac{\partial^{k(m+n)} f}{\partial x^{nk} \partial y^{mk}} \tag{10}$$

care ne permite să enunţăm

TEOREMA 1.4. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^n \partial y^m} = 0 \tag{11}$$

m, n prime între ele, verifică următoarea formulă de medie

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + ae^{im\theta}, \ y + be^{-in\theta})d\theta, \tag{12}$$

a, b fiind doi parametri oarecare.

TEOREMA 1.5. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^n \partial y^m} + \lambda u = 0 \tag{13}$$

m, n prime între ele, verifică următoarea formulă de medie

$$\Phi(a, b, \lambda) f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + a\mathrm{e}^{im\theta},\ y + b\mathrm{e}^{-in\theta}) \mathrm{d}\theta, \tag{14}$$

unde

$$\Phi(a, b, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^{nk} b^{mk} \lambda^k}{(mk)!\,(nk)!} \tag{15}$$

a, b, λ fiind arbitrari.

Domeniul de analiticitate al funcţiei $f(z_1, z_2)$ a cărei *urmă* este $f(x, y)$ este acelaşi ca la punctul precedent.

Dacă aplicăm lui (10) operatorul (8) deci $a > 0$, obţinem

TEOREMA 1.6. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^n \partial y^m} + \lambda^m u = 0$$

m, n prime între ele, verifică următoarea formulă de medie

$$ap(b\lambda) f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-a} \mathrm{d}a \int_0^{2\pi} f(x + a\mathrm{e}^{im\theta},\ y + b\mathrm{e}^{-in\theta}) \mathrm{d}\theta, \tag{16}$$

unde $ap(z)$ este cosinusul lui P. Appell dat de

$$ap(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{mk}}{(mk)!}.$$

Funcţia $ap(z)$ verifică următoarea ecuaţie diferenţială

$$w^{(m)} + w = 0.$$

3. Să presupunem că $f(x, y)$ este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^{m'+n'} u}{\partial x^{n'} \partial y^{m'}} = 0,$$

unde n' şi m' nu sînt prime între ele. Putem scrie

$$n' = pn,\ m' = pm$$

cu m şi n prime între ele. Dacă presupunem pe f şi analitică, atunci avem următoarea formulă integrală, dedusă din (10)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + a\mathrm{e}^{im\theta},\ y + b\mathrm{e}^{-in\theta}) \mathrm{d}\theta = f(x, y) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{a^{nk} b^{mk}}{(nk)!\,(mk)!} \cdot \frac{\partial^{k(m+n)} f}{\partial x^{nk} \partial y^{mk}} \cdot \tag{17}$$

Dacă dăm lui b valorile $b_1, b_2, \ldots, b_p$, distincte, obţinem după procedeul expus în [1]

TEOREMA 1.7. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^{p(m+n)}u}{\partial x^{pn}\partial y^{pm}}=0$$

m, n prime între ele, verifică următoarea formulă de medie

$$f(x,y)=\frac{\begin{vmatrix} Y_1 & b_1^m & b_1^{2m} \dots b_1^{(p-1)m} \\ Y_2 & b_2^m & b_2^{2m} \dots b_2^{(p-1)m} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_p & b_p^m & b_p^{2m} \dots b_p^{(p-1)m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b_1^m & b_1^{2m} \dots b_1^{(p-1)m} \\ 1 & b_2^m & b_2^{2m} \dots b_2^{(p-1)m} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & b_p^m & b_p^{2m} \dots b_p^{(p-1)m} \end{vmatrix}}, \tag{18}$$

unde

$$Y_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+a\mathrm{e}^{im\theta},\ y+b_k\mathrm{e}^{-in\theta})\mathrm{d}\theta.$$

Dacă dăm lui a valorile $a_1, a_2, \dots, a_p$ distincte, obținem :

TEOREMA 1.8. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^{p(m+n)}u}{\partial x^{pn}\partial y^{pm}}=0,$$

m, n prime între ele, verifică următoarea formulă de medie

$$f(x,y)=\frac{\begin{vmatrix} Y_1 & a_1 & a_1^2 \dots a_1^{p-1} \\ Y_2 & a_2 & a_2^2 \dots a_2^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_p & a_p & a_p^2 \dots a_p^{p-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \dots a_1^{p-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 \dots a_2^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_p & a_p^2 \dots a_p^{p-1} \end{vmatrix}},$$

unde

$$Y_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,(x + a_k^{\frac{1}{n}} e^{im\theta},\ y + b e^{-in\theta}) d\theta.$$

În mod asemănător cu teorema 1.7 obţinem

TEOREMA 1.9. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\frac{\partial^{p(m+n)}u}{\partial x^{pn}\,\partial y^{pm}} + \lambda u = 0,$$

m, n prime între ele, verifică următoarea formulă de medie

$$f(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} Y_1 & \alpha_1(\lambda, a, b_1) & \ldots & \alpha_{p-1}(\lambda, a, b_1) \\ Y_2 & \alpha_1(\lambda, a, b_2) & \ldots & \alpha_{p-1}(\lambda, a, b_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_p & \alpha_1(\lambda, a, b_p) & \ldots & \alpha_{p-1}(\lambda, a, b_p) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_0(\lambda, a, b_1) & \alpha_1(\lambda, a, b_1) & \ldots & \alpha_{p-1}(\lambda, a, b_1) \\ \alpha_0(\lambda, a, b_2) & \alpha_1(\lambda, a, b_2) & \ldots & \alpha_{p-1}(\lambda, a, b_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_0(\lambda, a, b_p) & \alpha_1(\lambda, a, b_p) & \ldots & \alpha_{p-1}(\lambda, a, b_p) \end{vmatrix}}, \tag{19}$$

unde

$$\alpha_k(\lambda, a, b_h) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{a^{kn+spn}\, b_h^{km+spm} \cdot \lambda^{sp}}{(kn+spn)!\,(km+spm)!}, \quad k = 0,1,\ldots, p-1$$

şi

$$Y_h = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + a e^{im\theta},\ y + b_h e^{-in\theta}) d\theta,$$

$b_1, b_2, \ldots, b_p$ *fiind distincte.*

4. Să considerăm acum integrala

$$\mathcal{I} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \ldots \int_0^{2\pi} f(x_1 + a_1 e^{\alpha_1\theta}, \ldots, x_n + a_n e^{\alpha_n\theta}) d\theta_n, \tag{20}$$

unde $\alpha_k\theta = i_1 m_{1k}\theta_1 + i_2 m_{2k}\theta_2 + \ldots + i_n m_{nk}\theta_n$, m_{ij} fiind n^2 numere întregi care vor îndeplini condiţii ce le vom enumera mai jos, iar $i_k^2 + 1 = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Presupunem pe f analitică în toate argumentele; avem

$$f(x_1 + a_1 e^{\alpha_1\theta}, \ldots, x_n + a_n e^{\alpha_n\theta}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(a_1 e^{\alpha_1\theta}\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + a_n e^{\alpha_n\theta}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(k)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

însă

$$\frac{1}{k!}\left(a_1 e^{\alpha_1\theta}\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+a_n e^{\alpha_n\theta}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(k)} f(x_1,\ldots,x_n)=$$

$$=\frac{a_1^{\beta_1}a_2^{\beta_2}\ldots a_n^{\beta_n}}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_n!}\exp\left(i_1\gamma_1\theta_1+i_2\gamma_2\theta_2+\ldots+i_n\gamma_n\theta_n\right)\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}},$$

unde $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n=k$ iar $\gamma_h=m_{1h}\beta_1+m_{2h}\beta_2+\ldots+m_{nh}\beta_n$, $h=1,2,\ldots,n$.

Prin urmare dacă luăm matricea $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}=\begin{Vmatrix} m_{11} & m_{12}\ldots m_{1n}\\ m_{21} & m_{22}\ldots m_{2n}\\ \ldots & \ldots\ldots\\ m_{n1} & m_{n2}\ldots m_{nn}\end{Vmatrix},$$

de rang $n-1$, atunci condiția $\gamma_h=0$, $h=1,2,\ldots,n$, conduce la sistemul

$$\begin{aligned} m_{11}\beta_1+m_{12}\beta_2+\ldots+m_{1n}\beta_n&=0\\ m_{21}\beta_1+m_{22}\beta_2+\ldots+m_{2n}\beta_n&=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ m_{n1}\beta_1+m_{n2}\beta_2\quad\ldots+m_{nn}\beta_n&=0\end{aligned}$$

care are soluțiile

$$\beta_1=\lambda A_1,\quad \beta_2=\lambda A_2,\ldots,\quad \beta_n=\lambda A_n,$$

unde A_k este minorul complementar al elementului m_{nk}, iar λ un parametru.

În consecință pentru

$$\beta_1=A_1,\ \beta_2=A_2,\ldots,\ \beta_n=A_n,$$

numerele A_k, $k=1,2,\ldots,n$, fiind *întregi* și *pozitive*, și luînd pe m_{ij} astfel ca $A_k=\beta_k$, iar β_k prime între ele, avem următoarea formulă integrală

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}d\theta_1\int_0^{2\pi}d\theta_2\ldots\int_0^{2\pi}f(x_1+a_1e^{\alpha_1\theta},\ldots,x_n+a_ne^{\alpha_n\theta})d\theta_n=\\ &=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_1^{m\beta_1}a_2^{m\beta_2}\ldots a_n^{m\beta_n}}{(m\beta_1)!\,(m\beta_2)!\ldots(m\beta_n)!}\cdot\frac{\partial^{mp}f}{\partial x_1^{m\beta_1}\partial x_2^{m\beta_2}\ldots\partial x_n^{m\beta_n}}\end{aligned}\qquad(21)$$

$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n=p$, care ne permite să enunțăm

TEOREMA 1.10. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}=0,\qquad(22)$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, *prime între ele, verifică următoarea formulă de medie*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_1 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_2 \ldots \int_0^{2\pi} f(x_1 + a_1 e^{\alpha_1\theta}, \ldots, x_n + a_n e^{\alpha_n\theta})\mathrm{d}\theta_n, \tag{23}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sînt parametrii oarecare, iar*

$$\alpha_k\theta = i_1 m_{1k}\theta_1 + i_2 m_{2k}\theta_2 + \ldots + i_n m_{nk}\theta_n,\ i_k^2 + 1 = 0$$

numerele întregi m_{ij} fiind alese astfel încît

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{nn} \end{vmatrix} = 0,\ (-1)^{n+k} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1,k-1} & m_{1,k+1} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2,k-1} & m_{2,k+1} & \ldots & m_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \ldots & m_{n-1,k-1} & m_{n-1,k+1} & & m_{n-1,n} \end{vmatrix} = \beta_k$$

În particular, dacă determinantul $| m_{ij} |$ este dat de

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

atunci $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 1$ şi formula de medie de mai sus este valabilă pentru ecuaţia

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = 0.$$

TEOREMA 1.11. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\frac{\partial^p u}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} + \lambda u = 0 \tag{24}$$

verifică următoarea formulă de medie

$$\Phi(a_1, \ldots, a_n, \lambda) f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_1 \ldots \int_0^{2\pi} f(x_1 + a_1 e^{\alpha_1\theta}, \ldots, x_n + a_n e^{\alpha_n\theta})\mathrm{d}\theta_n, \tag{25}$$

unde a_k, $\alpha_k\theta$, β_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *sînt aceiaşi ca la teorema 1.10 iar*

$$\Phi(a_1, \ldots, a_n, \lambda) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{a_1^{m\beta_1} a_2^{m\beta_2} \ldots a_n^{m\beta_n} \lambda^m}{(m\beta_1)!\,(m\beta_2)! \ldots (m\beta_n)!}. \tag{26}$$

Dacă introducem operatorul

$$Y=\int_0^{\infty}e^{-a_1}da_1\int_0^{\infty}e^{-a_2}da_2\ldots\int_0^{\infty}e^{-a_{n-1}}da_{n-1},\ a_1>0,\ldots,a_{n-1}>0$$

obținem

TEOREMA 1.12. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^p u}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}+\lambda^{\beta_n}u=0 \tag{27}$$

verifică următoarea formulă de medie

$$\Phi(a_n\lambda)f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^n}Y\left[\int_0^{2\pi}d\theta_1\ldots\int_0^{2\pi}f(x_1+a_1e^{\alpha_1\theta},\ldots,x_n+a_ne^{\alpha_n\theta})d\theta_n\right], \tag{28}$$

unde α_k, a_k, . β_k *sînt aceiași ca în teorema 1.10, iar* Y *este operatorul integral*

$$Y=\prod_{s=1}^{n-1}\int_0^{\infty}e^{-a_s}da_s,\ a_s>0, \tag{29}$$

$\Phi(a_n\lambda)$ *este cosinusul lui P. Appell definit de*

$$\Phi(a_n\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(a_n\lambda)^{m\beta_n}}{(m\beta_n)!} \tag{30}$$

și care este soluție a ecuației diferențiale $\Phi^{(\beta_n)}+\Phi=0$.

5. Să presupunem că $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ este o soluție a ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^{p'}u}{\partial x_1^{\beta'_1},\partial x_2^{\beta'_2}\ldots\partial x_n^{\beta'_n}}=0,$$

unde β'_1, β'_2, ..., β'_n nu sînt prime între ele. Putem scrie

$$\beta'_1=s\beta_1,\ \beta'_2=s\beta_2,\ldots,\ \beta'_n=s\beta_n,\ p'=sp,$$

cu $\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n$ prime între ele și $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n=p$. Dacă presupunem pe f și analitică, avem următoarea formulă integrală dedusă din (21)

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}d\theta_1\int_0^{2\pi}d\theta_2\ldots\int_0^{2\pi}f(x_1+a_1e^{\alpha_1\beta},\ldots,x_n+a_ne^{\alpha_n\theta})d\theta_n=$$

$$=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{m=1}^{s-1}\frac{a_1^{m\beta_1}a_2^{m\beta_2}\ldots a_n^{m\beta_n}}{(m\beta_1)!(m\beta_2)!\ldots(m\beta_n)!}\frac{\partial^{mp}u}{\partial x_1^{m\beta_1}\partial x_2^{m\beta_2}\ldots\partial x_n^{m\beta_n}}$$

iar dacă dăm lui a_1 valorile $b_1, b_2,\ldots, b_s$, distincte, obținem

TEOREMA 1.13. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\frac{\partial^{sv}u}{\partial x_1^{s\beta_1}\partial x_2^{s\beta_2}\dots\partial x_n^{s\beta_n}}=0$$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, *prime între ele, verifică următoarea formulă de medie*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)=\frac{\begin{vmatrix} Y_1 & b_1^{\beta_1} & \dots & b_1^{(s-1)\beta_1} \\ Y_2 & b_2^{\beta_1} & \dots & b_2^{(s-1)\beta_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_s & b_s^{\beta_1} & \dots & b_s^{(s-1)\beta_1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b_1^{\beta_1} & b_1^{2\beta_1} & \dots & b_1^{(s-1)\beta_1} \\ 1 & b_2^{\beta_1} & b_2^{2\beta_1} & \dots & b_2^{(s-1)\beta_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b_s^{\beta_1} & b_s^{2\beta_1} & \dots & b_s^{(s-1)\beta_1} \end{vmatrix}},$$

unde

$$Y_k=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_1\dots\int_0^{2\pi}f(x_1+b_k e^{\alpha_1\theta}, x_2+a_2 e^{\alpha_2\theta},\dots,x_n+a_n e^{\alpha_n\theta})\,\mathrm{d}\,\theta_n, k=1,2,\dots,s$$

Dacă lui a_h, $h = 2, 3, \dots, n$, îi dăm valorile $b_1, b_2, \dots, b_s$ obţinem încă $n - 1$ formule de medie.

Procedînd la fel ca la punctul 3 putem obţine formule de medie pentru soluţiile analitice ale ecuaţiei

$$\frac{\partial^{sv}u}{\partial x_1^{s\beta_1}\partial x_2^{s\beta_2}\dots\partial x_n^{s\beta_n}}+\lambda u=0.$$

Domeniul de analiticitate. În teorema 1.13, funcţia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este urma unei funcţii analitice $f(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de n argumente complexe $v_k \in R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n = R^*$, $k = 1, 2, \dots, n$, unde R_1 este planul complex $x_1 + i\eta_1, \dots, R_n$ este planul complex $x_n + i\eta_n$. În raport cu v_1, funcţia f trebuie să fie analitică într-un domeniu $D_1 \subset R^*$ care conţine varietatea $|v_1 - x_1| = r$, unde $r = \max |b_k|$. În raport cu v_2, funcţia f trebuie să fie analitică într-un domeniu $D_2 \subset R^*$ care conţine varietatea $|v_2 - x_2| = |a_2|$ ş.a.m.d., în raport cu v_n funcţia f trebuie să fie analitică într-un domeniu $D_n \subset R^*$ care conţine varietatea $|v_n - x_n| = |a_n|$.

CAPITOLUL II

ECUAŢII DE TIP PARABOLIC

1. Să considerăm integrala

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + a\mathrm{e}^{im\theta}, y + bh\mathrm{e}^{-in\theta}, z + ch^m)\,\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

în care presupunem pe f analitică, iar m, n numere naturale prime între ele. Din

$$\begin{gathered} f(x + a\mathrm{e}^{im\theta}, y + bh\mathrm{e}^{-in\theta}, z + ch^m) = f(x, y, z) + \\ + \sum_{\alpha+\beta+\gamma=1}^{\infty} \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma h^{m\gamma+\beta}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \exp\left(i(m\alpha - n\beta)\theta\right) \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \end{gathered} \tag{2}$$

deoarece pentru $m\alpha - n\beta \neq 0$ în (1), termenul corespunzător al lui (2) este nul, iar pentru $m\alpha - n\beta = 0$, deci $\alpha = kn$, $\beta = km$, diferiți de zero, obținem următoarea formulă integrală

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + a\mathrm{e}^{im\theta}, y + bh\mathrm{e}^{-in\theta}, z + ch^m)\mathrm{d}\theta = f(x, y, z) + \\ + \sum_{k+\gamma=1}^{\infty} \frac{a^{kn} b^{km} c^\gamma h^{m(k+\gamma)}}{(kn)!\,(km)!\,\gamma!} \cdot \frac{\partial^{k(m+n)+\gamma} f}{\partial x^{kn} \partial y^{km} \partial z^\gamma}. \end{gathered} \tag{3}$$

Fie operatorul

$$Y = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-a}\mathrm{d}a \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u_0^m}\mathrm{d}u_0 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u_1^m} u_1\,\mathrm{d}u_1 \ldots \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u_{m-2}^m} u_{m-2}^{m-2}\,\mathrm{d}u_{m-2} \tag{4}$$

care aplicat funcției $f \equiv 1$ are valoarea

$$\frac{1}{m^{m-1}}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right).$$

Să aplicăm acum operatorul Y formulei integrale (3) după ce în prealabil am înlocuit pe b cu $\lambda\ u_0 u_1 \ldots u_{m-2}$; obținem

$$\begin{gathered} \frac{1}{B} Y\left[\int_0^{2\pi} f(x + a\mathrm{e}^{im\theta}, y + bh\mathrm{e}^{-in\theta}, z + ch^m)\mathrm{d}\theta\right] = f(x, y, z) + \\ + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h^{ms}}{m^{ms}} \cdot \frac{1}{s!} \left(\lambda^m \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^n \partial y^m} + c\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(s)} f(x, y, z), \end{gathered} \tag{5}$$

unde

$$B = 2\pi \frac{1}{m^{m-1}} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right). \tag{6}$$

Relaţia integrală (5) ne permite să enunţăm

TEOREMA 2.1. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\lambda^m \frac{\partial^{m+n} w}{\partial x^n \partial y^m} + c \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{7}$$

cu m şi n prime între ele, verifică următoarea formulă de medie

$$\frac{1}{B} Y \left[\int_0^\infty f(x + a\mathrm{e}^{im\theta}, y + bh\mathrm{e}^{-in\theta}, z + ch^m) \mathrm{d}\theta \right] = f(x, y, z), \tag{8}$$

unde $b = \lambda u_0 u_1 \ldots u_{m-2}$, $B = 2\pi m^{1-m} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{2}{m}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)$

iar Y este operatorul integral

$$Y = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-a} \mathrm{d}a \prod_{k=0}^{m-2} \int_0^\infty u_k^k \exp(-u_k^m) \mathrm{d}u_k, \tag{9}$$

h, λ, c *fiind arbitrari*

TEOREMA 2.2. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\frac{\partial^{m+n} w}{\partial x^n \partial y^m} + c \frac{\partial w}{\partial z} + \mu w = 0, \tag{10}$$

m, n prime între ele verifică următoarea formulă de medie

$$\Phi(\mu) f(x, y, z) = \frac{1}{B} Y \left[\int_0^{2\pi} f(x + a\mathrm{e}^{im\theta}, y + b\mathrm{e}^{-in\theta}, z + c) \mathrm{d}\theta \right], \tag{11}$$

unde B, Y sînt aceiaşi ca la teorema precedentă, $b = u_0 u_1 \ldots u_{m-2}$ *iar*

$$\Phi(\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\mu}{m^m}\right)^s \frac{1}{s!} = \exp\left(-\frac{\mu}{m^m}\right). \tag{12}$$

Dacă în operatorul Y dat de (4) înlocuim pe a cu b, şi pe m cu n, obţinem următoarea teoremă

TEOREMA 2.3. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\frac{\partial^{m+n} w}{\partial x^n \partial y^m} + c \frac{\partial w}{\partial z} + \mu w = 0$$

verifică următoarea formulă de medie

$$\Phi^\star(\mu) f(x, y, z) = \frac{1}{B^\star} Y^\star \left[\int_0^{2\pi} f(x + a\mathrm{e}^{im\theta}, y + b\mathrm{e}^{-in\theta}, z + c) \mathrm{d}\theta \right], \tag{13}$$

unde

$$a = u_0 u_1, \ldots, u_{n-2}, \; B^\star = 2\pi n^{1-n}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\,\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$Y^\star = \int_0^\infty e^{-b}\mathrm{d}b \prod_{k=0}^{n-2}\int_0^\infty u_k^k \exp\,(-u_k^n)\,\mathrm{d}u_k \tag{14}$$

iar

$$\Phi^\star(\mu) = \exp\left(-\frac{\mu}{n^n}\right), \tag{15}$$

2. Fie integrala

$$\mathcal{J} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_2\ldots\int_0^{2\pi} f(x_1 + a_1 e^{\alpha_1\theta}, \ldots, x_n + a_n e^{\alpha_n\theta}, y + b)\,\mathrm{d}\theta_n, \tag{16}$$

unde $\alpha_k\theta = m_{1k}\theta_1 i_1 + m_{2k}\theta_2 i_2 + \ldots + m_{nk}\theta_n i_n$, $i_k^2 + 1 = 0$, m_{ij} fiind numere întregi.

Presupunînd pe f analitică, avem

$$\begin{aligned} f(x_1+a_1e^{\alpha_1\theta}, \ldots, x_n+a_ne^{\alpha_n\theta}, y+b) &= f(x_1, \ldots, x_n, y) + \\ + \sum_{\alpha,\gamma}\frac{a_1^{\beta_1}a_2^{\beta_2}\ldots a_n^{\beta_n}b^\gamma}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_n!\,\gamma!}\exp\,(\lambda_1\theta_1 i_1 + \lambda_2\theta_2 i_2 + \ldots + \lambda_n\theta_n i_n)&\frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n})\partial y^\gamma} \end{aligned} \tag{17}$$

cu $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n + \gamma = p$ și $\lambda_h = m_{h1}\beta_1 + m_{h2}\beta_2 + \ldots + m_{kn}\beta_n$, $h = 1, 2, \ldots, n$. În (16) toți termenii din (17) pentru care nu toți λ_i sînt nuli, dispar și rămîn numai aceia pentru care toți λ_i sînt nuli, încît ținînd seama de acest fapt înlocuind pe (17) în (16) obținem următoarea formulă integrală

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_2\ldots\int_0^{2\pi} f(x_1 + a_1e^{\alpha_1\theta}, \ldots, x_n + a_ne^{\alpha_n\theta}, y + b)\,\mathrm{d}\theta_n = \\ = f(x_1, \ldots, x_n, y) + \sum_{\gamma+m=1}^{\infty}\frac{a_1^{m\beta_1}a_2^{m\beta_2}\ldots a_n^{m\beta_n}b^\gamma}{(m\beta_1)!\,(m\beta_2)!\ldots(m\beta_n)!\,\gamma!}\cdot\frac{\partial^{m(\beta_1+\ldots+\beta_n)+\gamma}f}{\partial x_1^{m\beta_1}\ldots\partial x_n^{m\beta_n}\partial y^\gamma}, \end{aligned} \tag{18}$$

unde numerele m_{ij} sînt astfel alese încît

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

și $\beta_1 = A_{n1}$, $\beta_2 = A_{n2}$ $\ldots$, $\beta_n = A_{nn}$, A_{nk} fiind minorul complementar al elementului m_{nk}. Numerele date β_k sînt întregi, pozitive și prime între ele.

Fie acum operatorul

$$Y = \prod_{s=1}^{n-1} \int_0^\infty e^{-a_s} da_s \prod_{k=0}^{\beta_n-2} \int_0^\infty u_k^k e^{-u_k} du_k, \quad a_s > 0 \tag{19}$$

care aplicat funcției $f \equiv 1$ are valoarea

$$\frac{1}{\beta_n^{\beta_n-1}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta_n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{\beta_n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{\beta_n-1}{\beta_n}\right)$$

și să aplicăm acest operator relației (18); obținem, dacă înlocuim pe a_n cu $u_0 u_1 \dots u_{\beta_n-2}$,

$$\begin{gathered} \frac{1}{B} Y\left[\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \dots \int_0^{2\pi} f(x_1 + a_1 e^{\alpha_1\theta}, \dots, x_n + a_n e^{\alpha_n\theta}, y + b) d\theta_n\right] = \\ = f(x_1, \dots, x_n, y) + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^{h\beta_n}} \cdot \frac{1}{h!} \left(\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}} + b \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(h)} f(x_1, \dots, x_n, y) \end{gathered} \tag{20}$$

cu

$$B = (2\pi)^n \beta_n^{1-\beta_n} \Gamma\left(\frac{1}{\beta_n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{\beta_n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{\beta_n-1}{\beta_n}\right) \tag{21}$$

încît putem enunța

TEOREMA 2.4. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^m w}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}} + b \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{22}$$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, *prime între ele, verifică următoarea formulă de medie*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = \frac{1}{B} Y\left[\int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} f(x_1 + a_1 e^{\alpha_1\theta}, \dots, x_n + a_n e^{\alpha_n\theta}, y + b) d\theta_n\right], \tag{23}$$

unde $a_1 > 0, \dots, a_{n-1} > 0, a_n = u_0 u_1 \dots u_{\beta_n-2}$,

$$B = (2\pi)^n \beta_n^{1-\beta_n} \Gamma\left(\frac{1}{\beta_n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{\beta_n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{\beta_n-1}{\beta_n}\right)$$

cu

$$\alpha_k \theta = m_{1k} \theta_1 i_1 + \dots + m_{nk} \theta_n i_n, \; i_k^2 = 1, \; k = 1, 2, \dots, n,$$

numerele întregi m_{ij} *fiind alese în așa fel încît* $|m_{ij}| = 0$ *și* $A_{n1} = \beta_1$, $A_{n2} = \beta_2, \dots, A_{nn} = \beta_n$, A_{nk} *fiind minorul complementar al lui* m_{nk}, *din determinantul* $|m_{ij}|$, *iar* Y *este operatorul integral*

$$Y = \prod_{s=1}^{n-1} \int_0^\infty e^{-a_s} da_s \prod_{k=0}^{\beta_n-2} \int_0^\infty u_k^k e^{-u_k} du_k.$$

TEOREMA 2.5. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^m w}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\dots\partial x_n^{\beta_n}} + b\frac{\partial w}{\partial y} + \mu w = 0 \tag{24}$$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ *fiind prime între ele, verifică următoarea formulă de medie*

$$\Phi(\mu)f(x_1,\dots,x_n,y) = \frac{1}{B}Y\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_1\dots\int_0^{2\pi}f(x_1+a_1\mathrm{e}^{\alpha_1\theta},\dots,x_n+a_n\mathrm{e}^{\alpha_n\theta},y+b)\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_n\right] \tag{25}$$

cu

$$\Phi(\mu) = \exp\left(-\frac{\mu}{\beta_n^{\beta_n}}\right).$$

Celelalte elemente ce intervin în formulă fiind aceleași ca la teorema precedentă.

CAPITOLUL III

FORMULE DE MEDIE PENTRU SOLUȚIILE ANALITICE ALE ECUAȚIEI

$$a_{i_1 i_2 \dots i_p}\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\dots\partial x_v^{i_p}} = 0, \quad i_1+i_2+\dots+i_p = k = 0,1,\dots,n$$

1. Ne propunem să găsim formule de medie pentru soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale

$$c_1\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^n\partial y^m} + c_2\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^q\partial y^p} = 0,\ c_1, c_2 \quad \text{constante reale.} \tag{1}$$

În acest scop să considerăm integrala

$$\mathcal{J} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\int_0^{2\pi}f(x+a\mathrm{e}^{im\theta}+b\mathrm{e}^{ip\varphi}, y+\alpha\mathrm{e}^{-in\theta}+\beta\mathrm{e}^{-iq\varphi})\mathrm{d}\varphi, \tag{2}$$

în care presupunem pe f analitică

$$\begin{aligned} &f(x+a\mathrm{e}^{im\theta}+b\mathrm{e}^{ip\varphi}, y+\alpha\mathrm{e}^{-in\theta}+\beta\mathrm{e}^{-iq\varphi}) = f(x,y)+\\ &+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\left[(a\mathrm{e}^{im\theta}+b\mathrm{e}^{ip\varphi})\frac{\partial}{\partial x}+(\alpha\mathrm{e}^{-in\theta}+\beta\mathrm{e}^{-iq\varphi})\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(s)}f(x,y). \end{aligned} \tag{3}$$

Dacă introducem pe (3) în (2), numerele întregi s care dau termeni nenuli satisfac ecuațiile și inecuațiile următoare

$$\begin{gathered} m(h-\lambda)-n(s-h-\mu) = 0,\\ \lambda p - q\mu = 0,\\ h \leqslant s, \quad \lambda \leqslant h, \quad \mu \leqslant s-h, \quad s \geqslant 1, \end{gathered} \tag{4}$$

toți parametrii fiind numere întregi, pozitive.

a) Dacă m și n sînt primi între ei, iar p și q sînt de asemenea primi între ei, atunci s are expresia

$$s = u(m+n) + v(p+q)$$

cu $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ și întregi

b) Dacă m și n nu sînt primi între ei, iar p și q nu sînt primi între ei :

$$m = km', \quad n = kn', \quad p = hp', \quad q = hq',$$

atunci s este de forma

$$s = u(m'+n') + v(p'+q')$$

cu $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ și întregi.

Există încă două cazuri intermediare care se deduc cu ușurință.

Să presupunem că sîntem în cazul a). Făcînd calculele, obținem următoarea formulă integrală

$$\mathcal{I} = f(x,y) + \sum_{h+k=1}^{\infty} \frac{a^{hn} b^{kq} \alpha^{hm} \beta^{kp}}{(hn)!\,(hm)!\,(kp)!\,(kq)!} \, \frac{\partial^{h(m+n)+k(p+q)} f(x,y)}{\partial x^{hn+kq} \partial y^{hm+kp}} \tag{5}$$

Să considerăm acum operatorii

$$Y_1 = \int_0^\infty e^{-\alpha} d\alpha \int_0^\infty e^{-\beta} d\beta, \quad \alpha > 0, \ \beta > 0,$$

$$Y_2 = \prod_{s=0}^{n-2} \int_0^\infty a_s^s e^{-a_s^n} da_s \prod_{\sigma=0}^{q-2} \int_0^\infty b_\sigma^\sigma e^{-b_\sigma^q} db_\sigma, \ a_s > 0, \ b_\sigma > 0$$

care au proprietățile :

a') aplicați funcției $f \equiv 1$ au respectiv valoarea

$$Y_1(1) = 1,$$

$$Y_2(1) = \frac{1}{n^{n-1}} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{q^{q-1}} \Gamma\left(\frac{1}{q}\right) \Gamma\left(\frac{2}{q}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{q-1}{q}\right);$$

b') aplicați funcțiilor

$$f_1 = \alpha^i \beta^j$$

$$f_2 = \prod_{s=0}^{n-2} a_s^{hn} \prod_{\sigma=0}^{k-2} b_\sigma^{kq}$$

au valorile

$$Y_1(f_1) = i!\,j!,$$

$$Y_2(f_2) = \frac{1}{n^{hn}} \frac{(nh)!}{h!} \frac{1}{q^{kq}} \frac{(qk)!}{k!}$$

încît dacă înlocuim în formula integrală (5) pe a și b astfel

$$a = nc_1^{\frac{1}{n}}\, a_0 a_1 \ldots a_{n-2}, \qquad b = qc_2^{\frac{1}{q}}\, b_0 b_1 \ldots b_{q-2},$$

și dacă notăm cu Y produsul operatorilor Y_1 și Y_2, obținem următoarea formulă integrală

$$\frac{1}{A} Y \left[\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_0^{2\pi} f(x + a\mathrm{e}^{im\theta} + b\mathrm{e}^{ip\varphi},\ y + \alpha \mathrm{e}^{-in\theta} + \beta \mathrm{e}^{-iq\varphi})\, \mathrm{d}\varphi \right] =$$

$$= f(x, y) + \sum_{h+k=1}^{\infty} \frac{c_1^h c_2^k}{h!\, k!}, \frac{\partial^{h(m+n)+k(p+q)} f(x,y)}{\partial x^{hn+kq}\, \partial y^{hm+kp}} = f(x, y) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left[c_1 \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^n \partial y^m} + c_2 \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^q \partial y^p} \right]^{(s)} f(x, y),$$

unde

$$A = Y(1) = Y_1(1) \cdot Y_2(1),$$

formulă care ne permite să enunțăm următoarea teoremă :

TEOREMA 3.1. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$c_1 \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^n\, \partial y^m} + c_2 \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^q \partial y^p} = 0$$

c_1, c_2 *constante,* m *și* n *prime între ele,* p *și* q *prime între ele), verifică următoarea formulă de medie*

$$f(x,y) = \frac{1}{B} Y \left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_0^{2\pi} f(x + a\mathrm{e}^{im\theta} + b\mathrm{e}^{ip\varphi},\ y + \alpha \mathrm{e}^{-in\theta} + \beta \mathrm{e}^{-iq\varphi}) \mathrm{d}\varphi \right],$$

unde

$$a = nc_1^{\frac{1}{n}}\, a_0 a_1 \ldots a_{n-2}, \qquad b = qc_2^{\frac{1}{q}}\, b_0 b_1 \ldots b_{q-2},$$

$$B = 4\pi^2 \cdot n^{1-n} \cdot q^{1-q} \prod_{s=0}^{n-2} \Gamma\left(\frac{s+1}{n}\right) \prod_{t=0}^{q-2} \Gamma\left(\frac{t+1}{q}\right)$$

iar Y *este operatorul*

$$Y = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha} \mathrm{d}\alpha \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta} \mathrm{d}\beta \prod_{s=0}^{n-2} \int_0^{\infty} a_s^s \mathrm{e}^{-a_s^n} \mathrm{d}a_s \prod_{\sigma=0}^{q-2} \int_0^{\infty} b_\sigma^\sigma \mathrm{e}^{-b_\sigma^q}\, \mathrm{d}b$$

$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a_s > 0$, $b_\sigma > 0$.

Din formula integrală (5) mai putem obține și

TEOREMA 3.2. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$c_1 \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^n \partial y^m} + c_2 \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^q \partial y^p} = 0$$

(c_1, c_2 constante, m, n prime între ele, p, q prime între ele) verifică următoarea formulă de medie

$$f(x, y) = \frac{1}{B} Y \left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} f(x + a\mathrm{e}^{im\theta} + b\mathrm{e}^{ip\varphi}, y + \alpha\mathrm{e}^{-in\theta} + \beta\mathrm{e}^{-iq\varphi}) \mathrm{d}\varphi\right]$$

unde se înlocuiește

$$a \text{ cu } c_1^{\frac{1}{n}},$$

$$b \text{ cu } qc_2^{\frac{1}{q}} b_0 b_1 \dots b_{q-2},$$

$$\alpha \text{ cu } \alpha n^{\frac{n}{m}} a_0^{\frac{n}{m}} a_1^{\frac{n}{m}} \dots a_{n-2}^{\frac{n}{m}},$$

B și Y fiind aceiași ca la teorema 3.1.

TEOREMA 3.3. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$c_1 \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^n \partial y^m} + c_2 \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^q \partial y^p} = 0$$

(c_1, c_2 constante, m, n prime între ele, p, q prime între ele) verifică următoarea formulă de medie

$$f(x,y) = \frac{1}{b} Y \left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} f(x + a\mathrm{e}^{im\theta} + b\mathrm{e}^{ip\varphi}, y + \alpha\mathrm{e}^{-in\theta} + \beta\mathrm{e}^{-iq\varphi}) \mathrm{d}\varphi\right]$$

unde se înlocuiește

$$a \text{ cu } c_1^{\frac{1}{n}},$$

$$b \text{ cu } c_2^{\frac{1}{q}},$$

$$\alpha \text{ cu } \alpha n^{\frac{n}{m}} a_0^{\frac{n}{m}} a_1^{\frac{n}{m}} \dots a_{n-2}^{\frac{n}{m}},$$

$$\beta \text{ cu } \beta q^{\frac{q}{p}} b_0^{\frac{q}{p}} b_1^{\frac{q}{p}} \dots b_{q-2}^{\frac{q}{p}},$$

Y și B fiind aceiași ca la teorema 3.1.

TEOREMA 3.4. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$c_1 \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^n \partial y^m} + c_2 \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^q \partial y^p} + \lambda u = 0,$$

(c_1, c_2, λ constante, m, n prime între ele, p, q prime între ele) verifică următoarea formulă de medie

$$\mathrm{e}^{-\lambda} f(x,y) = \frac{1}{B} Y \left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} f(x + a\mathrm{e}^{im\theta} + b\mathrm{e}^{ip\varphi}, y + \alpha\mathrm{e}^{-in\theta} + \beta\mathrm{e}^{-iq\varphi}) \,\mathrm{d}\varphi\right]$$

a, b, α, β fiind aceiași ca la teorema 3.3.

Observații. a) Teoremele 3.1, 3.2, 3.3 sînt fundamental diferite dacă ținem seama de domeniul în care sînt date valorile soluției. În toate cele trei teoreme, funcția f depinde de patru argumente complexe x_1, x_2, y_1, y_2, $f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. În teorema 3.1 funcția f este dată pentru orice x_1, y_1 situați în planul complex (ρ, θ) și pentru orice x_2, y_2 situați în planul complex (r, φ). În teorema 3.2 funcția f este dată pentru orice y_1 situat în planul complex (ρ, θ), pentru orice x_2, y_2 situați în planul complex (r, φ) însă în raport cu x_1 valorile lui f sînt date pe un cerc cu centrul în punctul x_1 și rază $a = c_1^{\frac{1}{n}}$. În teorema 3.3 funcția f este dată pentru orice x_2, y_2 situat în planul complex (r, φ), în raport cu x_1 este dată pe un cerc cu centrul în x_1 și rază $a = c_1^{\frac{1}{n}}$ iar în raport cu y_1 pe un cerc cu centrul în y_1 și rază $b = c_2^{\frac{1}{q}}$.

b) Se înțelege că se pot scrie și formule de medie în care funcția f să fie dată pe domenii realizate de alte combinații decît cele de mai sus.

c) Teorema 3.3 este aceea care prezintă mai mult interes deoarece varietatea care poartă valorile soluției este cea mai restrînsă.

d) Din discuția de la punctul a) rezultă și domeniul de analiticitate al funcției f. Dacă punem

$$x_1 = x + i\xi_1, \qquad x_2 = \xi_2 + i\xi_3,$$
$$y_1 = y + i\eta_1, \qquad y_2 = \eta_2 + i\eta_3,$$

funcția reală f de variabilele reale x, y apare ca urma funcției complexe $f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ care pentru $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$ ia valorile reale $f(x, y)$.

2. Ne propunem acum să găsim formule de medie pentru soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale

$$c_1 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} + c_2 \frac{\partial^\beta u}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} = 0 \tag{6}$$

cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \alpha$, $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = \beta$ și c_1, c_2 constante.

În acest scop să considerăm integrala

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_1 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_1 \ldots \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_n \int_0^{2\pi} f(x_1 + a_1 \mathrm{e}^{m_1\theta} + b_1 \mathrm{e}^{p_1\varphi}, \ldots \\ \ldots, x_n + a_n \mathrm{e}^{m_n\theta} + b_n \mathrm{e}^{p_n\varphi}) \mathrm{d}\varphi_n, \end{aligned} \tag{7}$$

unde am notat

$$\begin{aligned} m_k\theta &= i_1 m_{1k}\theta_1 + i_2 m_{2k}\theta_2 + \ldots + i_n m_{nk}\theta_n, \\ p_k\varphi &= i_1 p_{1k}\varphi_1 + i_2 p_{2k}\varphi_2 + \ldots + i_n p_{nk}\varphi_n, \end{aligned} \tag{8}$$

cu $i_k^2 + 1 = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, iar p_{ij}, m_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $2n^2$ numere reale deocamdată nedeterminate.

Dacă f este analitică în toate argumentele, într-un domeniu convenabil, putem scrie

$$f(x_1 + a_1 e^{m_1\theta} + b_1 e^{p_1\varphi}, \ldots, x_n + a_n e^{m_n\theta} + b_n e^{p_n\varphi}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!}\left[(a_1 e^{m_1\theta} + b_1 e^{p_1\varphi})\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (a_n e^{m_n\theta} + b_n e^{p_n\varphi})\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(s)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{9}$$

Dacă introducem pe (9) în (7), numerele întregi s care dau termeni nenuli satisfac ecuaţiile şi inecuaţiile următoare

$$m_{1k}\lambda_1 + m_{2k}\lambda_2 + \ldots + m_{nk}\lambda_n = 0$$
$$p_{1k}(\mu_1 - \lambda_1) + p_{2k}(\mu_2 - \lambda_2) + \ldots + p_{nk}(\mu_n - \lambda_n) = 0$$
$$\lambda_k \leqslant \mu_k, \quad \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = s \geqslant 1$$

λ_k, μ_k fiind numere întregi şi pozitive. Să luăm numerele întregi m_{ij}, p_{ij} astfel ca

$$|m_{ij}| = 0, \quad |p_{ij}| = 0$$

şi

$$\alpha_k = (-1)^{n+k} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots m_{1,k-1} & m_{1,k+1} & \ldots m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots m_{2,k-1} & m_{2,k+1} & \ldots m_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \ldots m_{n-1,k-1} & m_{n-1,k+1} & \ldots m_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$\beta_k = (-1)^{n+k} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots p_{1,k-1} & p_{1,k+1} & \ldots p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots p_{2,k-1} & p_{2,k+1} & \ldots p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \ldots p_{n-1,k-1} & p_{n-1,k+1} & \ldots p_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Rezultă de aici că

$$\lambda_k = \gamma\alpha_k, \quad \mu_k - \lambda_k = \delta\beta_k, \quad k = 1,2,\ldots,n$$

γ, δ fiind numere întregi şi pozitive oarecare. Avem imediat şi

$$s = \gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + \delta(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n)$$

dacă α_k sînt prime între ele iar β_k sînt de asemenea prime între ele. Vom considera numai această situaţie. Cu aceste elemente avem formula integrală

$$\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \ldots \int_0^{2\pi} d\theta_n \int_0^{2\pi} f(x_1 + a_1 e^{m_1\theta} + b_1 e^{p_1\varphi}, \ldots, x_n + a_n e^{m_n\theta} + b_n e^{p_n\varphi})\, d\varphi_n =$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_1^{\lambda_1} b_1^{\mu_1 - \lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n} b_n^{\mu_n - \lambda_n}}{\lambda_1!\,(\mu_1 - \lambda_1)! \ldots \lambda_n!\,(\mu_n - \lambda_n)!} \cdot \frac{\partial^s f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \ldots \partial x_n^{\mu_n}} =$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{h+k=1}^{\infty} \frac{a_1^{h\alpha_1} b_1^{k\beta_1} \ldots a_n^{h\alpha_n} b_n^{k\beta_n}}{(h\alpha_1)!\,(k\beta_1)! \ldots (h\alpha_n)!\,(k\beta_n)!} \cdot$$
$$\cdot \frac{\partial^s f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{h\alpha_1 + k\beta_1} \ldots \partial x_n^{h\alpha_n + k\beta_n}}. \tag{10}$$

Să considerăm acum operatorii

$$Y_1=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-a_2}\mathrm{d}a_2\int_0^{\infty}b^{-b_2}\,\mathrm{d}b_2\ldots\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-a_n}\mathrm{d}a_n\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-b_n}\,\mathrm{d}b_n,$$

$$Y_2=\prod_{s=0}^{\alpha_1-2}\int_0^{\infty}\lambda_s^s\mathrm{e}^{-\lambda_s^{\alpha_1}}\mathrm{d}\lambda_s\prod_{\sigma=0}^{\beta_1-2}\int_0^{\infty}\mu_\sigma^\sigma\mathrm{e}^{-\mu_\sigma^{\beta_1}}\mathrm{d}\mu_\sigma,$$

care au proprietățile

a') aplicați funcției $f\equiv 1$ au respectiv valorile

$$Y_1(1)=1,$$

$$Y_2(1)=\frac{1}{\alpha_1^{\alpha_1-1}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(\frac{2}{\alpha_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}\right)\frac{1}{\beta_1^{\beta_1-1}}\Gamma\left(\frac{1}{\beta_1}\right)\Gamma\left(\frac{2}{\beta_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1}\right),$$

b') aplicați funcțiilor

$$f_1=a_3^{h\alpha_2}a_2^{h\alpha_3}\ldots a_n^{h\alpha_n}b_2^{k\beta_2}b_3^{k\beta_3}\ldots b_n^{k\beta_n},$$

$$f_2=\prod_{s=0}^{\alpha_1-2}\lambda_s^{h\alpha_1}\prod_{\sigma=0}^{\beta_1-2}\mu_\sigma^{k\beta_1},$$

au valorile

$$Y_1(f_1)=(h\alpha_2)!\,(k\beta_2)!\ldots(h\alpha_n)!\,(k\beta_n)!$$

$$Y_2(f_2)=\frac{1}{\alpha_1^{h\alpha_1}}\cdot\frac{(\alpha_1 h)!}{h!}\cdot\frac{1}{\beta_1^{k\beta_1}}\cdot\frac{(\beta_1 k)!}{k!}$$

încît dacă înlocuim în formula integrală (10) pe a_1 și b_1 astfel

$$a_1=\alpha_1 c_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{\alpha_1-2},\qquad b_1=\beta_1 c_2^{\frac{1}{\beta_1}}\mu_0\mu_1\ldots\mu_{\beta_1-2}$$

și dacă notăm cu Y produsul operatorilor Y_1 și Y_2, obținem următoarea formulă integrală

$$\frac{1}{A}Y\left[\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_1\ldots\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_n\int_0^{2\pi}f(x_1+a_1\mathrm{e}^{m_1\theta}+b_1\mathrm{e}^{p_1\varphi},\ldots\right.$$
$$\left.\ldots,x_n+a_n\mathrm{e}^{m_n\theta}+b_n\mathrm{e}^{p_n\varphi})\mathrm{d}\varphi_n\right]=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+$$
$$+\sum_{h+k=1}^{\infty}\frac{c_1^h c_2^k}{h!k!}\cdot\frac{\partial^{h\alpha+k\beta}f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1^{h\alpha_1+k\beta_1}\ldots\partial x_n^{h\alpha_n+k\beta_n}}=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\left(c_1\frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}+c_2\frac{\partial^\beta}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}\right)^{(s)}f(x_1,x_2,\ldots,x_n),\quad(11)$$

unde

$$A = Y(1) = Y_1(1) \cdot Y_2(1),$$

formulă care ne permite să enunţăm următoarea teoremă

TEOREMA 3.5. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$c_1 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} + c_2 \frac{\partial^\beta u}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} = 0,$$

$$(c_1,\ c_2 = \text{const})$$

α_i *prime între ele,* β_i *prime între ele,* $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \alpha$, $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = \beta$, *verifică următoarea formulă de medie*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{B} Y \Bigg[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_1 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_1 \ldots$$

$$\ldots \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_n \int_0^{2\pi} f(x_1 + a_1 \mathrm{e}^{m_1\theta} + b_1 \mathrm{e}^{p_1\varphi}, \ldots, x_n + a_n \mathrm{e}^{m_n\theta} + b_n \mathrm{e}^{p_n\varphi}) \, \mathrm{d}\varphi_n \Bigg],$$

unde

$$a_1 = \alpha_1 c_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{\alpha_1 - 2}, \qquad b_1 = \beta_1 c_2^{\overline{\beta_1}} \mu_0 \mu_1 \ldots \mu_{\beta_1 - 2},$$

$$B = (2\pi)^{2n} \alpha_1^{1-\alpha_1} \beta_1^{1-\beta_1} \prod_{s=0}^{\alpha_1 - 2} \Gamma\left(\frac{s+1}{\alpha_1}\right) \prod_{\sigma=0}^{\beta_1 - 2} \Gamma\left(\frac{\sigma+1}{\beta_1}\right),$$

iar Y este operatorul

$$Y = \prod_{k=2}^{n} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-a_k} \mathrm{d}a_k \prod_{h=2}^{n} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-b_h} \mathrm{d}b_h \prod_{s=0}^{\alpha_1 - 2} \int_0^\infty \lambda_s^s \mathrm{e}^{-\lambda_s^{\alpha_1}} \mathrm{d}\lambda_s \prod_{\sigma=0}^{\beta_1 - 2} \int_0^\infty \mu_\sigma^\sigma \mathrm{e}^{-\mu_\sigma^{\beta_1}} \mathrm{d}\mu_\sigma$$

$a_k > 0$, $b_k > 0$, $\lambda_s > 0$, $\mu_\sigma > 0$.

Din formula integrală (11) mai putem obţine şi

TEOREMA 3.6. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$c_1 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} + c_2 \frac{\partial^\beta u}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} = 0,$$

$$(c_1, c_2 = \text{const}).$$

α_i *prime între ele,* β_i *prime între ele,* $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \alpha, \beta_1 + \beta_2 + \ldots \ldots + \beta_n = \beta$, *verifică următoarea formulă de medie*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{B} Y \Bigg[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_1 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_1 \ldots$$

$$\ldots \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_n \int_0^{2\pi} f(x_1 + a_1 \mathrm{e}^{m_1\theta} + b_1 \mathrm{e}^{p_1\varphi}, \ldots, x_n + a_n \mathrm{e}^{m_n\theta} + b_n \mathrm{e}^{p_n\theta}) \mathrm{d}\varphi_n \Bigg],$$

unde se înlocuiește

$$a_1 \text{ cu } c_1^{\frac{1}{\alpha_1}},\ b_1 \text{ cu } c_2^{\frac{1}{\beta_1}}$$

$$a_2 \text{ cu } a_2 \alpha_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \lambda_0^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \lambda_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \dots \lambda_{\alpha_1-2}^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$$

$$b_2 \text{ cu } b_2 \beta_1^{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \mu_0^{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \mu_1^{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \dots \mu_{\beta_1-2}^{\frac{\beta_1}{\beta_2}}$$

Y, B *fiind aceiași ca la teorema* 3.5.

Teorema 3.6 este adevărată și dacă înlocuim pe $a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2$ cu $a_k, b_k, \alpha_k, \beta_k$ respectiv.

Teorema 3.7. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$c_1 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} + c_2 \frac{\partial^\beta u}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}} + \nu u = 0$$

c_1, c_2, ν *constante,* α_i *prime între ele,* β_i *prime între ele,* $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \alpha$, $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = \beta$, *verifică următoarea formulă de medie*

$$e^{-\nu} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{B} Y \left[\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \dots \right.$$
$$\left. \dots \int_0^{2\pi} d\theta_n \int_0^{2\pi} f(x_1 + a_1 e^{m_1\theta} + b_1 e^{p_1\varphi}, \dots, x_n + a_n e^{m_n\theta} + b_n e^{p_n\varphi}) d\varphi_n \right]$$

a_i, b_i, Y, B *fiind aceiași ca la teorema* 3.6.

Domeniul de analiticitate se stabilește în mod asemănător ca la capitolul I, punctul 5.

Observațiile făcute la capitolul III, punctul 1, sînt valabile, cu modificările corespunzătoare, și aici.

Primită la redacție la 3 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Miron Nicolescu, *Ecuația iterată a căldurii.* Studii și cercetări matematice, **V**, *3–4* (1954).
2. Marcel N. Roșculeț, *Operatori integrali care generalizează ecuațiile cu derivate parțiale. Formule de medie.* Studii și cercetări matematice, **XII**, *2* (1961).
3. Marcel N. Roșculeț, *Operatori integrali care generalizează ecuațiile diferențiale.* II. *Formule de medie pentru soluțiile analitice ale unor sisteme de ecuații de tip parabolic sau hiperbolic.* Studii și cercetări matematice, **XIV**, *1* (1963).
4. Marcel N. Roșculeț, *Integraloperatoren die Differentialgleichungen verallgemeinern. III. Integraleigenschaften der Lösungen partiellen Differentialgleichungen im komplexen Gebiet.* Revue de mathématiques pures et appliquées, **VIII**, *2* (1963).
5. Marcel N. Roșculet, *Operatori integrali care generalizează ecuațiile diferențiale. IV. Formule de medie pentru soluțiile analitice ale unor ecuații cu derivate parțiale de ordin superior.* Studii și cercetări matematice, **XIV**, *2* (1963).

O METODĂ DE APROXIMAȚIE A SOLUȚIEI ECUAȚIEI LUI BOUSSINESQ

DE

ELENA UNGUREANU

1. Studiul ecuației neliniare a lui Boussinesq a făcut obiectul multor cercetări. Pentru mișcarea plană nestaționară într-un mediu poros omogen ce ocupă domeniul de deasupra axei Ox, pentru $x > 0$, axa Ox, luată după orizontală, fiind o frontieră impermeabilă, cu diferite condiții la limită și inițiale, au fost date o serie de soluții aproximative. Dintre acestea amintim soluțiile aproximative obținute prin diferite metode de liniarizare ([1], p. 561), prin metoda schimbării succesive a stărilor staționare [2], cele ale lui M.D. Sokolov [3], G. I. Barenblatt pentru mișcări automodelice [4], A. M. Pirverdian [5].

În lucrarea de față vom considera cazul mișcării plane într-un mediu poros omogen ce ocupă domeniul $x > 0$, $H > 0$, axa Ox fiind orizontală iar OH după verticala ascendentă, $H(x, t)$ reprezentînd nivelul de fluid din mediul poros.

A. M. Pirverdian a arătat că pentru $H(0, t)$ variind brusc sau după o lege de forma σt^p, volumul de fluid din mediul poros la momentul t, obținut prin metoda schimbării succesive a stărilor staționare, este mai mic decît cel exact [6].

Aici se caută să se obțină o soluție aproximativă care pentru $p > 1$ să dea un volum de fluid mai mare decît cel exact. În felul acesta se va cunoaște atît o limitare inferioară, cît și una superioară pentru volumul real de fluid intrat în mediul poros. Pentru $p < 1$, soluția aceasta dă o evaluare inferioară, mai bună decît cea obținută prin metoda schimbării succesive a stărilor staționare.

Ecuația lui Boussinesq

$$a^2 \frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad \left(a^2 = \frac{k}{2m}\right), \tag{1}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 7, P. 909–913, BUCUREȘTI, 1964

cu condițiile inițială și la limită

$$H(x,0) = 0, \quad H(0,t) = \sigma t^p, \quad (p \geqslant 0), \tag{2}$$

prin schimbarea de variabilă și de funcție

$$\xi = \frac{x}{a\sigma^{1/2} t^{\frac{1+p}{2}}}, \quad H = \sigma t^p f(\xi), \tag{3}$$

se transformă în ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}^2 f^2}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1+p}{2} \xi \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} - pf = 0. \tag{4}$$

Condițiile la limită pentru f sînt

$$f(0) = 1, \quad f(\xi_0) = 0, \tag{5}$$

unde ξ_0, constant în timp, corespunde lui $x_0(t)$, punctul pînă unde a înaintat fluidul în mediul poros la fiecare moment t.

2. Vom face o nouă schimbare de funcție. Prin integrare între ξ_0 și ξ, ecuația (4) devine

$$F'F'' + \frac{1+p}{4} \xi F' - \frac{1+3p}{4} F = 0, \tag{6}$$

unde

$$F = \int_{\xi_0}^{\xi} f \,\mathrm{d}\xi, \tag{7}$$

admițînd că

$$f \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\xi_0} = 0, \tag{8}$$

condiție care va fi justificată mai tîrziu.

Condițiile la limită pentru noua funcție F vor fi deci

$$F(\xi_0) = 0, \quad F'(\xi_0) = 0, \quad F'(0) = 1. \tag{9}$$

Să liniarizăm ecuația diferențială (6), înlocuind pe F'' cu o constantă A, care va fi determinată. Ecuația diferențială obținută va avea ordinul întîi, astfel că în total vom avea trei constante de determinat : — C, constanta de integrare, A și ξ_0. Primele două condiții (9) ne dau același lucru, așa că vom avea nevoie de o condiție în plus. Dacă însă integrăm ecuația (1) între $x_0(t)$ și 0, așa cum se procedează și în [6], ceea ce echivalează cu integrarea ecuației (4) între ξ_0 și 0, obținem condiția de care mai avem nevoie ; ea se poate obține și direct, impunînd condiția ca soluția aproximativă F_0 să verifice ecuația exactă (6) în punctul $\xi = 0$.

Soluţia obţinută va fi :

$$F_0 = -\frac{2\sqrt{2p}}{1+3p}\left[1-\frac{\xi}{\xi_0}\right]^{\frac{1+3p}{1+p}}, \quad \xi_0 = \frac{2\sqrt{2p}}{1+3p} \tag{10}$$

sau

$$f_0 = \left[1-\frac{\xi}{\xi_0}\right]^{\frac{2p}{1+p}}. \tag{11}$$

Dacă vom liniariza ecuaţia (6), înlocuind pe F'' printr-o funcţie liniară de ξ, $A + B\xi$, soluţia aproximativă se găseşte la fel, dar avem în plus de determinat o constantă B. Avem astfel posibilitatea să impunem o anumită comportare soluţiei aproximative. Vom impune ca ea să verifice ecuaţia (4) în punctul $\xi = 0$.

Soluţia găsită este

$$F_1 = -\frac{2\sqrt{1+5p}}{\sqrt{3}\,(1+3p)}\left[1-\frac{\xi}{\xi_1}\right]^{\frac{3(1+3p)}{2(1+2p)}}, \quad \text{unde} \quad \xi_1 = \frac{\sqrt{3\,(5p+1)}}{2p+1}, \tag{12}$$

sau

$$f_1 = \left[1-\frac{\xi}{\xi_1}\right]^{\frac{1+5p}{2(1+2p)}}, \tag{13}$$

ξ_1 fiind corespondentul lui ξ_0.

Atît f_0, cît şi f_1, verifică relaţia (8).

3. În cele ce urmează vom nota cu indice „s" toate mărimile găsite prin metoda schimbării succesive a stărilor staţionare.

Pentru $p = 1$ avem soluţia exactă $f = 1 - \frac{\xi}{\sqrt{2}}$ ([1], p. 576) şi atît f_0, cît şi f_1 coincid cu aceasta pentru $p = 1$. Soluţia

$$f_s = \left[1-\frac{\xi}{\xi_s}\right]^{1/2}, \quad \xi_s = \sqrt{\frac{3}{1+3p}} \tag{14}$$

dată în [6], nu coincide cu expresia indicată a lui f. De asemenea pentru $p = 1$ obţinem $F''_0 = \text{const}$. Şi atunci metoda de liniarizare este justificată. Într-adevăr, experimental, se constată că pentru $p = 1$, suprafaţa liberă este o dreaptă şi deci panta $f' = F'' = \text{const}$.

Pentru p oarecare, obţinem $\xi_s < \xi_1 < \xi_0$, iar pantele în ξ_0 pentru tangenta la suprafaţa liberă sînt în relaţia $f'_0 < f'_1 < f'_s$, ceea ce arată că suprafeţele libere, obţinute prin cele trei metode, se intersectează între ele.

Calculînd derivatele de primele două ordine ale lui f_s, f_0 şi f_1 se constată că $f'_s\,(\xi_0) \to \infty$ şi concavitatea suprafeţei libere este, în acest caz, în jos. Suprafețele libere obținute prin cele două metode de liniarizare de mai sus, pentru $p > 1$, au concavitatea în sus și panta în ξ_0 nulă. Să comparăm acum valorile date pentru volumul total $V(t)$ de fluid din mediul poros.

Calculînd valoarea funcției F în $\xi = 0$, obținem

$$F(0) = \int_{\xi_0}^{0} f \mathrm{d}\xi = \int_{x_0(t)}^{0} \frac{1}{\sigma t^p} \frac{1}{a \sigma^{1/2}} \frac{1}{t^{\frac{p+1}{2}}} H \mathrm{d}x =$$

$$= - \frac{1}{\sigma^{3/2} a t^{\frac{3p+1}{2}}} \int_{0}^{x_0(t)} H \mathrm{d}x = - \lambda(t) V(t).$$

Se vede că în expresia lui $F(0)$ intră tocmai volumul de fluid care a intrat în mediul poros, înmulțit cu un factor negativ, funcție de timp și care va fi același pentru toate cazurile considerate mai sus, inclusiv cazul soluției exacte.

Din compararea valorilor

$$F_0(0) = -\frac{2\sqrt{2p}}{3p+1}, \quad F_1(0) = -\frac{2\sqrt{1+5p}}{\sqrt{3}(1+3p)}, \qquad F_s = -\frac{2}{\sqrt{3(1+3p)}}$$

găsim

$$V_s < V_1 \leqslant V_0 \qquad \text{pentru } p \geqslant 1,$$

$$V_s \leqslant V_0 < V_1 \qquad \text{pentru } \frac{1}{3} \leqslant p < 1,$$

$$V_0 < V_s \leqslant V_1 \qquad \text{pentru } 0 \leqslant p < \frac{1}{3}\cdot$$

Ne interesează în ce poziție se află volumul real V față de cele trei valori. A. M. Pirverdian a arătat că totdeauna $V_s < V$. Să comparăm V cu V_1.

Luăm funcția

$$g = F - F_1.$$

Din (9) obținem $g(\bar{\xi}) = 0$, $g'(0) = 0$, unde $\bar{\xi} = \max(\xi_1, \xi')$, ξ' fiind punctul în care soluția exactă f devine nulă.

În $\xi = 0$, funcția g are un extrem. Să presupunem că $g(0) < 0$ și să calculăm $g''(0)$, cu ajutorul lui (6), și ținînd seama că $F'(0) = F_1'(0) = 1$:

$$g''(0) = F''(0) - F_1''(0) = \frac{1+3p}{4} \frac{F(0)}{F'(0)} - F_1''(0) <$$

$$< \frac{1+3p}{4} F_1(0) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+5p}{3}} = 0,$$

așa că punctul $\xi = 0$ este un maxim. Cum $g(\bar{\xi}) = 0$, trebuie să existe cel puțin un punct $\xi^{\star}$ $(0 < \xi^{\star} < \bar{\xi})$, de minim și în care funcția să fie negativă. Deci în acest punct, $g'(\xi^{\star}) = 0$, $g(\xi^{\star}) < 0$. Ca să fie minim, trebuie $g''(\xi^{\star}) > 0$.

Dar

$$g''(\xi^{\star}) = \frac{1+3p}{4}\,\frac{F(\xi^{\star})}{F'(\xi^{\star})} - \frac{1+p}{4}\xi^{\star} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+5p}{3}}\left[1-\frac{\xi^{\star}}{\xi_1}\right]^{\frac{p-1}{2(1+2p)}},$$

și cum

$$F'(\xi^{\star}) = F_1'(\xi^{\star}) > 0, \ (F' = f > 0),$$

putem scrie

$$g''(\xi^{\star}) < \frac{1+3p}{4}\,\frac{F_1(\xi^{\star})}{F_1'(\xi^{\star})} - \frac{1+p}{4}\xi^{\star} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+5p}{3}}\left[1-\frac{\xi^{\star}}{\xi_1}\right]^{\frac{p-1}{2(1+2p)}} < 0$$

pentru $p > 1$, ceea ce contrazice ipotezele noastre, deci $g > 0$ peste tot, inclusiv în $\xi = 0$.

Pentru volumele de fluid avem deci relația

$$\begin{aligned} V &< V_1, & p &> 1, \\ V &= V_1, & p &= 1, \\ V &> V_1, & 0 &< p < 1. \end{aligned}$$

Astfel am obținut o evaluare superioară pentru volumul real de fluid din mediul poros, cînd $p > 1$. Cînd $p < 1$, V_1 dă o limitare inferioară, ca și V_s, dar cu o aproximație mai bună.

Primită la redacție la 6 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА, *Теория движения грунтовых вод*, Гостехиздат, Москва, 1952 .
2. В. И. АРАВИН, С. Н. НУМЕРОВ, *Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде*. Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1953, p. 409.
3. Ю. Д. СОКОЛОВ, *К теории плоской неустановившейся фильтрации грунтовых вод*. Украинский математический журнал, **VI**, *2* (1954).
4. Г. И. БАРЕНБЛАТТ, *О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде*. Прикладная математика и механика, **XVI**, 1, 67 (1952).
5. А. М. ПИРВЕРДИАН, *Об автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде*. Прикладная математика и механика, **XXIV**, *3*, 558 (1960).
6. А. М. ПИРВЕРДИАН, *Об оценках некоторых приближенных методов решения задачи нестационарной фильтрации*. Механика и машиностроение, *5* (1962).

ASUPRA APLICAȚIILOR MONOTONE ÎNTRE SPAȚII TOPOLOGICE

DE
TOMA ALBU

1. INTRODUCERE

Pentru funcțiile reale de o variabilă reală, continue și definite pe un interval, definiția monotoniei poate fi formulată într-un anumit mod care are în vedere doar structura topologică a dreptei reale. Prin analogie, G. T. Whyburn introduce în [10] noțiunea de monotonie pentru aplicații între spații topologice oarecari, monotonie pe care o vom denumi W-monotonie.

În [8], A. D. Wallace definește și studiază aplicațiile cvasimonotone, care în anumite cazuri particulare extind pe cele monotone.

În articolul de față se dă o nouă caracterizare a funcțiilor reale de o variabilă reală, definite pe un interval, continue și monotone ; prin extensie, se introduce noțiunea de C-monotonie. Se studiază apoi o serie de proprietăți ale aplicațiilor C-monotone, evidențiindu-se legătura lor cu aplicațiile W-monotone, continue, deschise, închise sau conexe. Noul tip de monotonie prezintă avantajul de a conserva unele proprietăți ale monotoniei funcțiilor reale de variabilă reală.

2. NOTAȚII

Vom folosi terminologia adoptată în [1]. Vom desemna prin E, E' spații topologice oarecari, prin R dreapta reală și prin I, J intervale (mărginite sau nemărginite) din R.

Pentru aplicații f ale spațiului topologic E în spațiul topologic E' vom folosi notația $f : E \to E'$

În fine, vom nota prin $\mathcal{C}$ (respectiv $\mathcal{C}'$) familia mulțimilor conexe din E (respectiv E').

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 7, P. 915–925, BUCUREȘTI, 1964

3. APLICAȚIILE *W*-MONOTONE PE DREAPTA REALĂ

PROPOZIȚIA 1. *O funcție* $f: I \to R$ *care are proprietatea lui Darboux este monotonă dacă și numai dacă oricare ar fi* $y \in R$, $\overset{-1}{f}(y)$ *este un interval.*

Demonstrație. Presupunem că f este monotonă și că are proprietatea lui Darboux.

Dacă $y \notin f(I)$, atunci $\overset{-1}{f}(y) = 0$ care este în mod banal un interval ; fie de aceea $y \in f(I)$.

Să notăm cu $m_y = \inf \overset{-1}{f}(y)$ și $M_y = \sup \overset{-1}{f}(J)$. Dacă $m_y = M_y$, atunci $\overset{-1}{f}(y) = \{m_y\}$ care este un interval. Dacă $m_y \neq M_y$, atunci

$$(m_y, M_y) \subset \overset{-1}{f}(y).$$

Într-adevăr, oricare ar fi $x \in (m_y, M_y)$, există $x' \in \overset{-1}{f}(y)$ și $x'' \in \overset{-1}{f}(y)$ astfel încît $m_y \leqslant x' < x < x'' \leqslant M_y$. Cum f este monotonă, avem fie $f(x') \leqslant f(x) \leqslant f(x'')$ fie $f(x') \geqslant f(x) \geqslant f(x'')$. Deci $f(x) = f(x') = f(x'') = y$ adică $x \in \overset{-1}{f}(y)$. Reciproc, dacă $x \in \overset{-1}{f}(y)$, atunci $x \in [m_y, M_y]$. Așadar $\overset{-1}{f}(y)$ este un interval.

Pentru suficiență presupunem că f are proprietatea lui Darboux, că pentru orice $y \in R$, $\overset{-1}{f}(y)$ este un interval, dar f nu este monotonă.

Înseamnă că există un interval $[a, b] \subset I$ pe care funcția f nu este monotonă. Dacă $f(a) = f(b)$, există neapărat un punct $c \in (a, b)$ astfel încît $f(c) > f(a)$ sau $f(c) < f(a)$. Dacă $f(a) \neq f(b)$, de exemplu $f(a) < f(b)$, există două situații : fie $f((a, b)) \not\subset [f(a), f(b)]$ fie $f((a, b)) \subset [f(a), f(b)]$. În primul caz, există un punct $c \in (a, b)$, astfel încît $f(c) \notin [f(a), f(b)]$ iar în al doilea, există $c < c'$ din (a, b) cu $f(c) > f(c')$, căci astfel f ar fi crescătoare pe $[a, b]$.

În concluzie, există $a < b < c$ astfel încît $f(b) > f(a)$ și $f(b) > f(c)$ sau $f(b) < f(a)$ și $f(b) < f(c)$.

Presupunem, fără a afecta generalitatea demonstrației, că $f(a) \leqslant f(c)$, $f(b) > f(a)$ și $f(b) > f(c)$.

Fie $y \in (f(c), f(b)) \subset (f(a), f(b))$. Cum f are proprietatea lui Darboux, rezultă că există x', x'' cu $a < x' < b < x'' < c$ și $f(x') = f(x'') = y$. Deci $\{x', x''\} \subset \overset{-1}{f}(y)$, și deoarece $\overset{-1}{f}(y)$ este in interval, $[x', x''] \subset \overset{-1}{f}(y)$, absurd căci $b \in (x', x'')$ dar $b \notin \overset{-1}{f}(y)$. Rezultă deci că f este monotonă.

Observații. 1°. În demonstrația necesității proprietății ce face obiectul propoziției 1 nu intervine faptul că f are proprietatea lui Darboux.

2°. Dacă $f: I \to R$ are proprietatea lui Darboux și este monotonă, rezultă că $f(I)$ este un interval și deci f este continuă. Așadar proprietatea din propoziția 1 se referă numai la funcții continue.

3°. Există funcții $f: I \to R$ care au proprietatea că pentru orice $y \ni R$, $\overset{-1}{f}(y)$ este un interval, fără a fi însă monotone. În mod necesar, asemenea aplicaţii nu au proprietatea lui Darboux. Un exemplu simplu îl constituie o funcţie etajată, definită pe un interval, nemonotonă, ale cărei mulţimi de nivel sînt intervale.

4°. Dacă domeniul de definiţie al unei funcţii continue şi monotone nu este un interval, proprietatea din propoziţia 1 poate să nu aibă loc. Un astfel de exemplu îl constituie funcţia reală f definită pe $[0, 1] \cup [2, 3]$ în modul următor

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{pentru } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

5°. Există funcţii continue care au proprietatea că oricare ar fi $y \in R$, $\overset{-1}{f}(y)$ este un interval, fără a fi însă monotone. În mod necesar, domeniul de definiţie trebuie să nu fie un interval. Un exemplu foarte simplu îl constituie aplicaţia $f : \{0, 1, 2\} \to R$ definită astfel : $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$.

Din proprietatea evidenţiată în propoziţia 1, s-a putut degaja următoarea definiţie :

DEFINIŢIA 1. *O aplicaţie* $f : E \to E'$ *se zice că este W-monotonă dacă pentru orice* $y \in E'$, $\overset{-1}{f}(y) \in \mathcal{C}$.

Vom mai aminti cîteva definiţii pe care le vom folosi în acest articol :

DEFINIŢIA 2. *O aplicaţie* $f : E \to E'$ *se zice că este cvasimonotonă dacă pentru orice* $C' \in \mathcal{C}'$ *cu* $\overset{\circ}{C'} \neq \emptyset$, *fiecare componentă conexă a lui* $\overset{-1}{f}(C')$ *se aplică prin* f *pe tot* $C' \cap f(E)$ [8].

DEFINIŢIA 3. *O aplicaţie* $f : E \to E'$ *se zice că este conexă dacă* $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$ [5].

DEFINIŢIA 4. *O aplicaţie* $f : E \to E'$ *se zice că este biconexă dacă este o bijecţie* [1]) *şi* $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ [5].

DEFINIŢIA 5. *O aplicaţie* $f : E \to E'$ *se zice că este deschisă* (*respectiv închisă*) *dacă transformă orice mulţime deschisă* (*respectiv închisă*) *din* E *într-o mulţime deschisă* (*respectiv închisă*) *din* E'.

4. DEFINIŢIA APLICAŢIILOR *C*-MONOTONE

Vom stabili o nouă proprietate a funcţiilor reale, monotone, de variabilă reală, proprietate care ne va permite să definim un nou tip de monotonie.

PROPOZIŢIA 2. *O funcţie* $f : I \to R$ *care are proprietatea lui Darboux este monotonă, dacă şi numai dacă imaginea inversă prin* f *a oricărui interval din* R *este tot un interval.*

Demonstraţie. Presupunem că f este monotonă şi că are proprietatea lui Darboux.

---

[1]) Vom spune că $f : E \to E'$ este o injecţie, surjecţie sau bijecţie dacă este o aplicaţie biunivocă, pe sau biunivocă şi pe.

Dacă J este un interval din R, cum $\overset{-1}{f}(J) = \overset{-1}{f}(J \cap f(I))$ este suficient să considerăm doar intervale $J \subset f(I)$ căci dacă $J \cap f(I) = \emptyset$, atunci $\overset{-1}{f}(J) = \emptyset$, care este un interval.

Fie $J = [\alpha, \beta)$ cu $\alpha = f(a)$ şi $\beta = f(b)$ $(a, b \in I)$.

Vom presupune că f este crescătoare, deci $a < b$.

Fie $m_J = \sup \overset{-1}{f}(\alpha)$ şi $M_J = \inf \overset{-1}{f}(\beta)$. Din condiţiile ipotezei rezultă că f este continuă, deci $\overset{-1}{f}(\alpha)$ şi $\overset{-1}{f}(\beta)$ sînt închise în I (dar nu neapărat în R dacă I nu este închis). Deci ţinînd cont şi de propoziţia 1, rezultă că $\overset{-1}{f}(\alpha)$ este un interval închis la dreapta iar $\overset{-1}{f}(\beta)$ este un interval închis la stînga. Aşadar m_J şi M_J sînt margini efectiv atinse, adică $f(m_J) = \alpha$ şi $f(M_J) = \beta$.

Evident, $m_J < M_J$. Afirmăm că $[m_J, M_J) = \overset{-1}{f}((\alpha, \beta))$. Într-adevăr, dacă $m_J \leqslant x < M_J$, rezultă că $f(m_J) \leqslant f(x) \leqslant f(M_J)$. Dar $f(x) \neq f(M_J)$, conform definiţiei lui M_J. Deci $f(x) \in [\alpha, \beta)$. Dacă $f(m_J) \leqslant f(x) < f(M_J)$, est clar că $m_J \leqslant x < M_J$. Pentru intervalele deschise sau închise raţionamentul este absolut analog.

Dacă $f(I)$ este nemărginit sau dacă unul din capetele intervalului $J \subset f(I)$ nu aparţine lui $f(I)$, se raţionează într-un mod similar.

Pentru suficienţă vom observa că imaginea inversă prin f a oricărui punct din R este un interval, deci f este monotonă datorită propoziţiei 1.

În mod natural se degajă din această propoziţie următoarea definiţie

DEFINIŢIA 6. *Spunem că o aplicaţie* $f : E \ E'$ *este C-monotonă dacă* $\overset{-1}{f}(\mathcal{C}') \subset \mathcal{C}$.

Cu această definiţie putem formula

TEOREMA 1. *Dacă* $f : I \to R$ *este o aplicaţie conexă, următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

a) f *este monotonă* ;

b) f *este W-monotonă* ;

c) f *este C-monotonă.*

Demonstraţia rezultă imediat din propoziţiile 1 şi 2, ţinînd seama de faptul că o mulţime din R este conexă dacă şi numai dacă este un interval.

Remarcă. În condiţiile teoremei 1, cvasimonotonia nu este echivalentă cu monotonia, însă este implicată de monotonie. De exemplu funcţia $f(x) = x^2$ definită pe $[-1, 1]$ este cvasimonotonă dar nu este monotonă.

5. PROPRIETĂŢI ALE APLICAŢIILOR *C*-MONOTONE

Deoarece în orice spaţiu topologic o mulţime redusă la un punct este conexă, rezultă că orice aplicaţie C-monotonă este şi W-monotonă. De asemenea, este clar că orice aplicaţie C-monotonă este şi cvasimonotonă. Dacă E' este conex şi $f : E \to E'$ este C-monotonă, atunci în mod necesar E este conex. De aici rezultă că în enunţul teoremei 1, domeniul de definiție al funcției f trebuie să fie în mod necesar un interval I căci R este un spațiu conex.

Am văzut în remarca ce urmează teoremei 1 că nu orice funcție cvasimonotonă este W-monotonă și deci nici C-monotonă. Există apoi funcții W-monotone care nu sînt nici C-monotone nici cvasimonotone. De exemplu funcția $f\colon [0, 1] \cup [2, 3]\ R$ definită astfel

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x \in [0, 1] \\ 2 & \text{pentru } x \in [2, 3] \end{cases}$$

este W-monotonă dar nu este nici C-monotonă și nici cvasimonotonă.

PROPOZIȚIA 3. *Pentru orice spațiu topologic E există un spațiu topologic E' total discontinuu și o aplicație surjectivă $f\colon E \to E'$ continuă și C-monotonă.*

Demonstrație. Relația „$x \in E$ și $y \in E$ și y aparține componentei conexe a lui x" este o relație de echivalență S în E, ale cărei clase de echivalență sînt componentele conexe ale lui E. Spațiul cît E/S este total discontinuu [1].

Aplicația canonică surjectivă $f\colon E \to E/S$ este continuă și evident C-monotonă.

Observație. Dacă E este conex, E/S se reduce la un singur punct, iar dacă E este total discontinuu, E/S este tocmai E.

Cu această ocazie vom observa că C-monotonia este echivalentă cu W-monotonia pentru aplicații $f\colon E \to E'$ cu E' total discontinuu.

Fie $f\colon E \to E'$ și $g\colon E' \to E''$ două aplicații. Avem

PROPOZIȚIA 4. *Dacă f și g sînt C-monotone, atunci $g \circ f$ este C-monotonă.*

Demonstrație. Avem $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{C}'') = \overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(\mathcal{C}'')) \subset \overset{-1}{f}(\mathcal{C}') \subset \mathcal{C}$, ceea ce arată că $g \circ f$ este C-monotonă.

Remarcă. Propoziția 4 arată că mulțimea aplicațiilor C-monotone ale unui spațiu topologic E în el însuși formează un semigrup cu unitate față de operația de compunere a aplicațiilor. Această proprietate — după cum se vede ușor — nu o au și aplicațiile W-monotone. Funcțiile reale, monotone de o variabilă reală prezintă proprietatea de mai sus și de aici se poate observa că C-monotonia caracterizează mai bine aceste aplicații.

PROPOZIȚIA 5. *Dacă f este o aplicație conexă și surjectivă iar $g \circ f$ este C-monotonă, atunci g este C-monotonă.*

Demonstrație. Cum $\overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(\mathcal{C}'')) \subset \mathcal{C}$, rezultă că

$$f(\overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(\mathcal{C}''))) = \overset{-1}{g}(\mathcal{C}'') \subset f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'.$$

PROPOZIȚIA 6. *Dacă g este o aplicație C-monotonă și injectivă iar $g \circ f$ este conexă, atunci f este conexă.*

Demonstrație. Cum $g(f(\mathcal{C})) \subset \mathcal{C}''$, rezultă că

$$\overset{-1}{g}(g(f(\mathcal{C}))) = f(\mathcal{C}) \subset \overset{-1}{g}(\mathcal{C}'') \subset \mathcal{C}'.$$

PROPOZIŢIA 7. *O aplicaţie* $f : E \to E'$ *este biconexă dacă şi numai dacă* f *este o bijecţie conexă şi* C*-monotonă.*

Demonstraţie. Dacă f este biconexă, f este o bijecţie şi $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$, deci $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$ şi $\overset{-1}{f}(\mathcal{C}') \subset \mathcal{C}$.

Invers, dacă f este o bijecţie, din $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$ şi $\overset{-1}{f}(\mathcal{C}') \subset \mathcal{C}$ rezultă $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$ şi $\mathcal{C}' \subset f(\mathcal{C})$ adică $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

COROLAR. *O aplicaţie* $f : I \to J$ (*unde* $J = f(I)$) *este strict monotonă dacă şi numai dacă este biconexă.*

Într-adevăr, dacă f este strict monotonă, cum J este un interval, rezultă că f este continuă şi deci conexă. Cum şi $\overset{-1}{f}$ este continuă, rezultă că f este C-monotonă.

Invers, dacă f este biconexă, conform teoremei 1, f este monotonă. Cum f este o bijecţie, rezultă că f este strict monotonă.

PROPOZIŢIA 8. *Orice bijecţie deschisă* (*sau închisă*) *este o aplicaţie* C*-monotonă.*

Demonstraţie. Fie $f : E \to E'$ o bijecţie deschisă (sau închisă) şi $C' \in \mathcal{C}'$. Presupunem că $\overset{-1}{f}(C') \notin \mathcal{C}$. Există atunci două mulţimi A şi B deschise (sau închise) astfel încît

$$\overset{-1}{f}(C') \subset A \cup B,\ \overset{-1}{f}(C') \cap A \neq \emptyset,\ \overset{-1}{f}(C') \cap B \neq \emptyset,\ \overset{-1}{f}(C') \cap A \cap B = \emptyset.$$

Cum f este o bijecţie, avem

$$C' \subset f(A) \cup f(B),\ C' \cap f(A) \neq \emptyset,\ C' \cap f(B) \neq \emptyset,\ C' \cap f(A) \cap f(B) = \emptyset.$$

Dar $f(A)$ şi $f(B)$ sînt deschise (sau închise), căci f este deschisă (sau închisă). Deci $C' \notin \mathcal{C}'$, ceea ce probează că f este C-monotonă.

Remarcă. Orice funcţie continuă, care prin definiţie „întoarce" mulţimi deschise (sau închise) în mulţimi deschise (sau închise) este o aplicaţie conexă. Propoziţia 8 arată deci că noţiunile de „aplicaţie deschisă (sau închisă)" şi „aplicaţie C-monotonă" stau — pentru aplicaţiile bijective — în acelaşi raport în care stau noţiunile de „aplicaţie continuă" şi „aplicaţie conexă". Legătura dintre aplicaţiile deschise (sau închise) şi cele C-monotone va reieşi mai pregnant în cele ce vor urma.

Dacă $(E_\iota)_{\iota \in I}$ este o familie de spaţii topologice şi $f : E \to \prod_{\iota \in I} E_\iota$ este o aplicaţie C-monotonă, pentru orice A_ι conex în E_ι şi pentru orice $x_\iota \in E_\iota$, $\overset{-1}{f}(\prod_{\iota \neq \varkappa} A_\iota \times \{x_\varkappa\}) \in \mathcal{C}$, deoarece un produs de spaţii topologice este conex dacă şi numai dacă fiecare spaţiu factor este conex.

Reciproca acestei proprietăţi este inexactă. Vom da următoarea reciprocă parţială.

PROPOZIŢIA 9. *Fie* E *un spaţiu topologic,* $(E_\iota)_{\iota \in I}$ *o familie de spaţii topologice şi* $f : E \to \prod_{\iota \in I} E_\iota$ *o aplicaţie care îndeplineşte următoarea condiţie : pentru orice* $\iota \in I$ *şi* A *conex în* E_ι *astfel ca* $\prod_{\iota \in I} A_\iota \subset f(E)$ *şi pentru orice* $x_\iota \in A_\iota$, $\overset{-1}{f}(\prod_{\iota \neq \varkappa} A_\iota \times \{x_\varkappa\}) \in \mathcal{C}$. *Atunci* $\overset{-1}{f}(\prod_{\iota \in I} A_\iota) \in \mathcal{C}$.

Demonstrație. Fie $a, b \in \overset{-1}{f}(\prod_{\iota\in I} A_\iota)$. Atunci $f(a) = (a_\iota)_{\iota\in I}$ și $f(b) = (b_\iota)_{\iota\in I}$, unde a_ι; $b_\iota \in A_\iota$ pentru fiecare $\iota \in I$.

Deci

$$a \in \overset{-1}{f}(\prod_{\iota\neq\varkappa} A_\iota \times \{a_\varkappa\}),$$

$$b \in \overset{-1}{f}(\prod_{\iota\neq\lambda} A_\iota \times \{b_\lambda\}),$$

unde $\varkappa \neq \lambda$. Fie $(c_\iota)_{\iota\in I}$ un element din $\prod_{\iota\in I} A_\iota$ astfel încît $c_\varkappa = a_\varkappa$, $c_\lambda = b_\lambda$, celelalte componente fiind alese arbitrar.

Evident că a și b aparțin lui

$$\overset{-1}{f}(\prod_{\iota\neq\varkappa} A_\iota \times \{a_\varkappa\}) \cup \overset{-1}{f}(\prod_{\iota\neq\lambda} A_\iota \times \{b_\lambda\})$$

care este o mulțime conexă, deoarece

$$\overset{-1}{f}(\prod_{\iota\neq\varkappa} A_\iota \times \{a_\varkappa\}) \cap \overset{-1}{f}(\prod_{\iota\neq\lambda} A_\iota \times \{b_\lambda\}) \supset \overset{-1}{f}((c_\iota)_{\iota\in I}) \neq \emptyset.$$

Deci orice pereche de puncte a, b din $\overset{-1}{f}(\prod_{\iota\in I} A_\iota)$ aparțin unei părți conexe a lui $\overset{-1}{f}(\prod_{\iota\in I} A_\iota)$ de unde conchidem că $\overset{-1}{f}(\prod_{\iota\in I} A_\iota)$ este conex.

PROPOZIȚIA 10. *Fie E' un spațiu topologic separat și $f: E \to E'$ aplicație conexă și C-monotonă. Atunci pentru orice $C' \in \mathscr{C}'$; $\overline{\overset{-1}{f}(C')} \subset \overset{-1}{f}(\overline{C'})$.*

Demonstrație. Dacă $\overline{\overset{-1}{f}(C')} = \Phi$, atunci incluziunea este evidentă. Presupunem deci că există $x \in \overline{\overset{-1}{f}(C')}$ astfel încît $x \notin \overset{-1}{f}(\overline{C'})$. Să notăm $C = \overset{-1}{f}(C')$. Atunci $f(C) \subset C'$ și cum $x \notin \overset{-1}{f}(\overline{C'})$ rezultă că $x \notin C$. Cum C este conex, și $C \subset C \cup \{x\} \subset \overline{C}$, rezultă că $C \cup \{x\}$ este conex și deci $f(C \cup \{x\}) = f(C) \cup \{f(x)\}$ este conex. Cum $f(x) \notin \overline{C'}$, cu atît mai mult $f(x) \notin \overline{f(C)}$, deci $f(x)$ este un punct izolat al mulțimii conexe $f(C) \cup \{f(x)\}$, absurd căci E' este separat.

Cu un corolar imediat, deducem din această propoziție următoarea.

LEMĂ. *Dacă f este o aplicație conexă și C-monotonă a unui spațiu topologic E într-un spațiu topologic separat E', atunci imaginea inversă prin f a oricărui continuu din E' este un continuu din E.*

Demonstrație. Dacă C' este un continuu, atunci $\overline{C'} = C'$ și deci $\overline{\overset{-1}{f}(C')} \subset \overset{-1}{f}(\overline{C'}) = \overset{-1}{f}(C')$, adică $\overset{-1}{f}(C')$ este un continuu.

Remarcă. Se știe că $f: E \to E'$ este continuă dacă și numai dacă $\overline{\overset{-1}{f}(A')} \subset \overset{-1}{f}(\overline{A'})$ pentru orice $A' \subset E'$. Propoziția 10 arată că pentru aplicațiile conexe și C-monotone această proprietate este valabilă cel puțin pentru elementele familiei $\mathscr{C}'$.

6. O ECHIVALENȚĂ ÎNTRE C-MONOTONIE ȘI W-MONOTONIE

TEOREMA 2. *Pentru aplicațiile surjective, deschise (sau închise), C-monotonia este echivalentă cu W-monotonia.*

Demonstrație. Fie $f : E \rightarrow E'$ o aplicație surjectivă deschisă (sau închisă). Dacă f este C-monotonă, este clar că f este W-monotonă. Să presupunem deci că f este W-monotonă dar nu este C-monotonă.

Există atunci $C' \in \mathcal{C}'$ astfel încît $C = \overset{-1}{f}(C') \notin \mathcal{C}$. Cum $\emptyset \in \mathcal{C}$, evident că $C \neq \emptyset$. Există deci A, B deschise (sau închise) în E astfel încît

$$C \subset A \cup B, \quad C \cap A \neq \emptyset, \quad C \cap B \neq \emptyset, \quad C \cap A \cap B = \emptyset.$$

f fiind o surjecție, $f(C) = C'$. Deci

$$C' \subset f(A) \cup f(B), \quad \emptyset \neq f(C \cap A) \subset C' \cap f(A), \quad \emptyset \neq f(C \cap B) \subset C' \cap f(B).$$

Vom arăta că $C' \cap f(A) \cap f(B) = \emptyset$. Într-adevăr, în caz contrar, există $y \in C' \cap f(A) f(B)$, deci există $u \in A$ și $v \in B$ cu $f(u) = f(v) = y$.

Avem

$$\emptyset \neq \overset{-1}{f}(y) \subset \overset{-1}{f}(C') \subset A \cup B, \quad \overset{-1}{f}(y) \cap A \neq \emptyset, \quad \overset{-1}{f}(y) \cap B \neq \emptyset$$

$$\overset{-1}{f}(y) \cap A \cap B \subset C \cap A \cap B = \emptyset$$

deci $\overset{-1}{f}(y)$ este neconex, ceea ce este absurd.

Așadar $C' \cap f(A) \cap f(B) = \emptyset$ și cum f este deschisă (sau închisă), rezultă că $C' \notin \mathcal{C}'$. Contradicția aceasta demonstrează teorema.

Observații. 1°. Ne putem dispensa de condiția că f să fie surjecție, impunînd ca $f(E)$ să fie conex în E'. Această condiție este satisfăcută în particular dacă E este conex iar f este o aplicație conexă.

2°. Există aplicații C-monotone care nu sînt nici deschise și nici închise. Un exemplu îl constituie funcția reală

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{pentru } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{pentru } x < 0 \end{cases}$$

definită pe toată dreapta.

3°. Din această teoremă, rezultă ca un corolar imediat teorema 4 de la pagina 123 din *Topologia* lui C. Kuratowski (vol. II, 1961), unde se presupune că f este continuă, E este compact și E' separat.

Într-adevăr, în aceste condiții f este închisă, și se poate aplica teorema 2.

7. C-MONOTONIA ȘI CONTINUITATEA

În general, C-monotonia unei aplicații nu implică și continuitatea ei. De exemplu, funcția $f : [0, 2] \rightarrow R$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 & \text{pentru } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

este C-monotonă dar nu și continuă.

Impunînd o serie de condiţii suplimentare atît aplicaţiei cît şi unuia sau ambelor spaţii topologice ce formează domeniul şi codomeniul ei, vom obţine condiţii suficiente ca o aplicaţie C-monotonă să fie continuă. Vom stabili mai întîi un rezultat intermediar care ne va folosi ulterior.

TEOREMA 3. *Fie E un spaţiu topologic local conex. O aplicaţie $f : E \to E'$ este continuă dacă şi numai dacă sînt îndeplinite următoarele două condiţii :*

a) *f este conexă*

b) *pentru orice punct $y \in E'$ există un sistem fundamental de vecinătăţi deschise $\mathfrak{B}(y)$, astfel încît oricare ar fi $V' \in \mathfrak{B}(y)$, $\overset{-1}{f}(\mathrm{Fr}\,(V'))$ este o mulţime închisă.*

Demonstraţie. Condiţiile impuse sînt evident necesare.

Fie deci $x \in E$ şi $y = f(x)$. Fie $V' \in \mathfrak{B}(y)$ şi $A = \overset{-1}{f}(\mathrm{Fr}(V'))$. Cum $y \in V'$, rezultă că $y \notin \mathrm{Fr}\,(V')$ şi deci $x \notin A$. A fiind închisă, există o vecinătate conexă V a lui x cu $V \cap A = \emptyset$. Afirmăm că $f(V) \subset V'$. Într-adevăr, presupunînd contrariul, există $\xi \in V$ cu $f(\xi) \notin V'$. Cum f este o aplicaţie conexă, rezultă că $f(V)$ este o mulţime conexă. În plus

$$f(V) \cap V' \neq \emptyset \text{ şi } f(V) \cap \complement V' \neq \emptyset.$$

Conform unei proprietăţi cunoscute, rezultă că $f(V) \cap \mathrm{Fr}\,(V') \neq \emptyset$ adică există $x' \in V$ cu $f(x') \in \mathrm{Fr}\,(V')$, sau $x' \in A$, absurd căci $V \cap A = \emptyset$ Deci f este continuă.

COROLAR. *Fie E un spaţiu topologic local conex şi $f : E \to R$ o funcţie reală.*

f este continuă dacă şi numai dacă următoarele două condiţii sînt satisfăcute

a) *f este conexă*

b) *$\overset{-1}{f}(y)$ este o mulţime închisă în E pentru orice $y \in R$.*

Într-adevăr, condiţia b) din teorema 3) este verificată.

Observaţii. 1°. Teorema 3 generalizează teorema lui Rowe [6] precum şi o teoremă din 2 unde se presupune că E este un spaţiu metric.

2°. În [4], N. Levine, introduce noţiunea de W^*-continuitate prin definiţia :

„$f : X \to Y$ este W^*-continuă dacă pentru orice mulţime deschisă G din Y, $\overset{-1}{f}(\mathrm{Fr}\,(G))$ este închisă”.

Cu această definiţie rezultă în particular că $f : E \to E'$, cu E local conex, este continuă dacă şi numai dacă f este conexă şi W^*-continuă :

TEOREMA 4. *Fie E un spaţiu topologic local conex şi E' un spaţiu topologic separat satisfăcînd condiţia :*

(*) *Orice punct din E' posedă un sistem fundamental de vecinătăţi deschise cu frontieră conexă.*

Atunci orice aplicaţie $f : E \to E'$ conexă şi C-monotonă este continuă.

Demonstraţie. Fie $y \in E'$ şi V' o vecinătate a lui y aparţinînd sistemului fundamental de vecinătăţi a lui y a cărui existenţă este asigurată de condiția (*). Cum Fr (V') este un continuu, conform lemei, $\overset{-1}{f}(\mathrm{Fr}\,(V'))$ este un continuu. Aplicînd teorema 3, rezultă că f este continuă.

COROLAR. *Dacă $f: E \to R^n$ este o aplicație conexă și C-monotonă, E fiind local conex, atunci f este continuă.*

Într-adevăr, R^n satisface condiția (*).

TEOREMA 5. *Fie E' un spațiu topologic separat și semi-local conex. Dacă $f: E \to E'$ este o aplicație conexă și C-monotonă, atunci f este continuă.*

Demonstrație. Fie $x \in E$ și U' o vecinătate deschisă a lui $y = f(x)$. Cum E' este semilocal conex, există o vecinătate deschisă V' a lui y astfel ca $y' \in V' \subset U'$ și $E' - V'$ să fie constituită dintr-un număr finit de componente conexe. Fie $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ aceste componente conexe. Deci $E' - V' = \bigcup_{i=1}^{n} C_i'$ și deci $V' = E' - \bigcup_{i=1}^{n} C_i'$. Mulțimile C_i' sînt conexe în $E' - V'$ dar și în E' și în același timp închise în $E' - V'$ care fiind închisă rezultă că C_i' sînt închise în E'. Așadar C_i' sînt continuuri. Avem

$$\overset{-1}{f}(V') = \overset{-1}{f}(E' - \bigcup_{i=1}^{n} C_i') = E - \overset{-1}{f}(\bigcup_{i=1}^{n} C_i') = E - \bigcup_{i=1}^{n} \overset{-1}{f}(C_i').$$

Conform lemei, rezultă că $\overset{-1}{f}(C_i')$ sînt continuuri și deci $\overset{-1}{f}(V')$ este deschisă în E. Evident, $x \in \overset{-1}{f}(V')$. Deci f este continuă.

Observații. 1°. Teorema de mai sus constituie un rezultat mai general decît teorema 3.9 din [5], unde se presupune că f este o bijecție.

2°. Cum R^n este un spațiul local conex, corolarul de la teorema 4 rezultă și din teorema 5 fără a mai presupune conexiunea locală a lui E.

TEOREMA 6. *Dacă E' este un spațiu topologic local conex și compact, orice aplicație $f: E \to E'$ conexă și C-monotonă este continuă.*

Demonstrație. Fie $x \in E$, $y = f(x)$ și V' o vecinătate deschisă a lui y.

Dacă $z \in E' - V'$, $z \neq y$ și deci există o vecinătate compactă U_z' a lui z cu $y \notin U_z'$. Fie V_z' o vecinătate deschisă a lui z conținută în U_z'. Cum E' este local conex, descompunînd pe V_z' în componentele sale conexe, acestea vor fi deschise. Așadar există un domeniu C_z' cu $z \in C_z' \subset V_z'$. Evident, $y \notin \overline{C_z'}$. E' fiind compact, rezultă că există un număr finit de domenii C_z' care acoperă pe $E' - V'$. Așadar $E' - V' \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i' \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{C_i'}$, unde $(C_i')_{1 \leqslant i \leqslant n}$ este o subfamilie finită a acoperirii deschise $(C_z')_{z \in E'-V'}$ a lui $E' - V'$. Notînd $\overset{-1}{f}(V') = V$, avem

$$\overset{-1}{f}(E' - V') = E - V \subset \overset{-1}{f}(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} C_i'}) = C,$$

unde C este o mulțime închisă, conform lemei. Evident, $x \notin C$. Din $E - V \subset C$ rezultă $E - C \subset V$. Dar $x \in E - C$ și deci $E - C$ este o vecinătate deschisă a lui x. Așadar f este continuă.

Remarcă. Tot în [15] se demonstrează această teoremă în ipoteza că f este o bijecție.

Primită la redacție la 25 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. N. BOURBAKI, *Topologie générale*, chap. I, Paris, 1951.
2. V. L. KLEE and W. R. UTZ, *Some Remarks on Continuous transformations*. Proc. Amer. Math. Soc., **5**, 182–184 (1954).
3. C. KURATOWSKI, *Topologie*. Warszawa, vol. I, 1958, vol. II, 1961.
4. N. LEVINE, *A Decomposition of Continuity in Topological Spaces*, Amer. Math. Monthly., **68**, 44–46 (1961).
5. W. J. PERVIN and N. LEVINE, *Connected Mappings of Haus dorff Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **9**, 488–496 (1958).
6. C. H. ROWE, *Note on a Pair of Properties Which Characterize Continuous Functions*, Bull. Amer. Math. Soc., **32**, 285–287 (1926).
7. T. TANAKA, *On the Family of Connected Subsets and Topology of Spaces*. Journal of the Mathematical Society of Japan, **7** (1955).
8. A. D. WALLACE, *Quasi-monotone Transformations*, Duke. Math. Journ., **7**, 136–145 (1940).
9. G. T. WHYBURN, *Interior Transformations on Compact Sets*. Duke. Math. Journ., **3**, 370–381 (1937).
10. G. T. WHYBURN, *Non-alternating Transformations*. Amer. Journ. of Math., **56**, 294–302 (1934).

ASUPRA UNEI CLASE DE SPAŢII RIEMANNIENE CU GEODEZICE PLANE

DE

V. VODNEV

În anul 1955, D. V. Vedeneapin [1] a găsit o clasă de spaţii cu conexiune afină de $(n-2)$ ori proiective în sensul lui V. F. Kagan [2] diferite de spaţiile subproiective. Într-un sistem de coordonate convenabil ales, conexiunea lor se scrie sub forma

$$\Gamma^i_{ts} = c^i_{ts} f(x^1, \ldots, x^n), \tag{1}$$

unde $i = 1, \ldots, m$, $t, s = m+1, \ldots, n$, $2 \leqslant m \leqslant n-2$, $c_{ts} = c_{st}$ sînt constante şi f este o funcţie arbitrară ; restul coeficienţilor conexiunii fiind nuli. Dacă e_α $(\alpha = 1, \ldots, n)$ este vectorul tangent $\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}$ al liniilor coordonate, raportate fiecare la parametrul $t = x^\alpha$, atunci condiţiile necesare şi suficiente pentru ca spaţiile cu conexiune afină să aibă conexiunea (1) sînt :

1) cîmpurile vectoriale e_i sînt absolut paralele ;

2) diferenţiala absolută a oricărui cîmp vectorial e_t după orice geodezică se găseşte în planul vectorilor e_i ;

3) diferenţiala absolută secundă a oricăruia din vectorii e_t, după parametrul canonic în lungul geodezicei, este legată de prima diferenţială absolută prin relaţia

$$DDe^\alpha_t = kDe^\alpha_t.$$

Vedeneapin a găsit toate spaţiile riemanniene care au o astfel de conexiune. Însă, un număr mare de constante arbitrare care intră în expresia lui ds^2 nu permite să afirmăm cu ce grad de arbitrarietate sînt definite metricele acestor spaţii şi să le studiem în detaliu. Aşa cum s-a procedat cu metricile spaţiilor subproiective ale lui Kagan (vezi în legătură cu

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 7, P. 927-933, BUCUREŞTI, 1964

aceasta, de exemplu, [3]), se pune problema aducerii la forme canonice a metricelor spațiilor lui Vedeneapin.

*

Vom conveni, pentru a nu specifica de fiecare dată în mod special, că indicii întîlniți în lucrare variază între următoarele limite :

$$i,j = 1,\dots,m; \qquad p,q=m+1,\dots,n-1; \qquad \alpha,\beta,\gamma=1,\dots,n;$$
$$a,b=1,\dots,m-r-1; \qquad f,g=1,\dots,m-r; \qquad h,l=m-r+1,\dots,m;$$
$$\lambda,\mu=2m-r,\dots,n-1; \qquad t,s=m+1,\dots,n; \qquad \psi,\varphi=m-r+1,\dots,n-1,$$

unde numărul r va fi definit mai jos. Atunci metrica spațiilor lui Vedeneapin se poate scrie sub forma :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & b_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta + 2b_{ij}c^j_{nn}F\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^n + FA_{pq}\,\mathrm{d}x^p\,\mathrm{d}x^q + \\ & + 2b_{pi}\,c^i_{nn}F\mathrm{d}x^p - \mathrm{d}x^n + (b_{ij}c^i_{nn}F + 2b_{nj})\,c^j_{nn}F(\mathrm{d}x^n)^2, \end{aligned} \tag{2}$$

unde $F = F\,(x^n)$, iar constantele care intră în expresia (2) satisfac condițiile

$$R\left\| \begin{matrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{matrix} \right\| \leqslant m-2 \quad (3_1), \qquad R\left\| \begin{matrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n-11} & \dots & b_{n-1m} \end{matrix} \right\| = m-1 \quad (3_2),$$

$$R\left\| \begin{matrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{matrix} \right\| = m \quad (3_3), \qquad R\left\| \begin{matrix} b_{11} & \dots & b_{1m} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} & 0 \\ b_{m+11} & \dots & b_{m+1m} & A_{m+1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-11} & \dots & b_{n-1m} & A_{n-1p} \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} & 0 \end{matrix} \right\| = m, \quad (3_4)$$

$$R\,\|\, A_{pq} \,\| \geqslant 1 \qquad (3_5),$$
$$|\, b_{\alpha\beta} \,| \neq 0 \qquad (3_6).$$

În acest sistem de coordonate coeficienții conexiunii diferiți de zero au forma

$$\left|\begin{matrix} i \\ p\,q \end{matrix}\right| = -\frac{1}{2}\,b^{in}A_{pq}f, \quad \left|\begin{matrix} i \\ np \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\,b^{iq}A_{qp}f, \quad \left|\begin{matrix} i \\ nn \end{matrix}\right| = c^i_{nn}f, \tag{4}$$

unde $f = \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x^n}$, b^{it} sînt complemenții algebrici normalizați ai elementelor b_{it} ale matricei $b_{\alpha\beta}$.

Vom face schimbarea de coordonate

$$x^i \to x^i - c^i_{nn}\int F\mathrm{d}x^n. \tag{5}$$

Sub o astfel de scriere vom presupune totdeauna că în stînga sînt scrise variabilele vechi, în dreapta, cele noi. Ca rezultat vom obține metrica

$$ds^2 = b_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta + FA_{pq}\,dx^p\,dx^q\,. \tag{6}$$

Cînd se efectuează transformarea (5), coeficienții conexiunii $\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{vmatrix}$ nu se schimbă, cu excepția lui $\begin{vmatrix}i\\ nn\end{vmatrix}$ care devin nule, nu se schimbă nici condițiile (3_i), satisfacerea cărora este necesară pentru ca geodezicele spațiilor (2) să fie plane.

Vom numi transformări admisibile, transformările ce păstrează aspectul (4) al conexiunii $\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{vmatrix}$. În cele ce urmează vom utiliza numai transformări admisibile.

Fie rangul matricei b_{ij} egal cu r, unde $0 \leqslant r \leqslant m-2$. Este evident că pentru ca să aibă sens considerarea condițiilor (3_i) trebuie ca $n \geqslant 2m - r$. Cu ajutorul transformărilor liniare nedegenerate ale variabilelor x^i vom reduce forma $b_{ij}\,dx^i\,dx^j$ la forma canonică $\varepsilon_h\,(dx^h)^2$ $(\varepsilon_h = \pm 1)$. Metrica (6) va primi următoarea formă

$$ds^2 = \varepsilon_h\,(dx^h)^2 + 2b_{it}\,dx^i\,dx^t + FA_{pq}\,dx^p\,dx^q + b_{ts}\,dx^t\,dx^s. \tag{7}$$

Din condiția (3_2) în sistemul de coordonate (7)

$$R\left\|\begin{matrix}
0 & \ldots & 0 & \varepsilon_{m-r+1} & \ldots & 0\\
\hdotsfor{6}\\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_m\\
b_{m+1\,1} & \ldots & b_{m+1\,m-r} & b_{m+1\,m-r+1} & \ldots & b_{m+1\,m}\\
\hdotsfor{6}\\
b_{n-1\,1} & \ldots & b_{n-1\,m-r} & b_{n-1\,m-r+1} & \ldots & b_{n-1\,m}
\end{matrix}\right\| = m-1$$

se poate considera, fără a limita generalitatea, că

$$\begin{vmatrix}
b_{m+1\,1} & \ldots & b_{m+1\,m-r-1}\\
\hdotsfor{3}\\
b_{2m-r-1\,1} & \ldots & b_{2m-r-1\,m-r-1}
\end{vmatrix} \neq 0,$$

dar întrucît orice determinant de ordinul m trebuie să fie nul, urmează

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix}
b_{m+1\,1} & \ldots & b_{m+1\,m-r}\\
\hdotsfor{3}\\
b_{2m-r-1\,1} & \ldots & b_{2m-r-1\,m-r}\\
b_{\lambda\,1} & \ldots & b_{\lambda\,m-r}
\end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

pentru orice λ fixat. Atunci din condiția (3_3) obținem

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b_{m+1\,1} & \cdots & b_{m+1\,m-r} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ b_{2m-r-1\,1} & \cdots & b_{2m-r-1\,m-r} \\ b_{n1} & \cdots & b_{n\,m-r} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{9}$$

Ținînd seama de (9) putem efectua transformarea de coordonate

$$b_{m+af}\, x^f \to x^a,$$
$$b_{nf}\, x^f \to x^{m-r}.$$

Obținem

$$\mathrm{d}s^2 = \varepsilon_h (\mathrm{d}x^h)^2 + 2 \sum_a \mathrm{d}x^a\, \mathrm{d}x^{m+a} + 2\mathrm{d}x^{m-r}\, \mathrm{d}x^n + 2b_{f\lambda}\, \mathrm{d}x^f\, \mathrm{d}x^\lambda +$$
$$+ 2b_{hp}\, \mathrm{d}x^h\, \mathrm{d}x^p + FA_{pq}\, \mathrm{d}x^p\, \mathrm{d}x^q + b_{pq} \mathrm{d}x^p \mathrm{d}x^q + 2b_{\psi n} \mathrm{d}x^\psi\, \mathrm{d}x^n + b_{nn} (\mathrm{d}x^n)^2; \tag{10}$$

toți coeficienții coincid cu coeficienții metricii (7), în afară de $b_{f\lambda}$ care au forma

$$b_{g\lambda}\, b_f^{m+g} \to b_{f\lambda}, \qquad (11$$

unde b_f^{m+g} sînt complemenții algebrici normalizați ai elementelor b_{m+fg} în determinantul (9), iar b_f^{m+g} pentru $f = m - r$ corespunde lui b_{ng}. În virtutea acestei observații, coeficienții $b_{m-r\lambda}$ în sistemul de coordonate (10) vor fi nuli pentru că reprezintă rapoarte $\frac{\Delta_\lambda}{\Delta_n}$, ceea ce rezultă din (8), (9), (11). Din această cauză în (10) în loc de $b_{f\lambda}\ \mathrm{d}x^f\, \mathrm{d}x^\lambda$ trebuie scris $b_{a\lambda}\ \mathrm{d}x^a\, \mathrm{d}x^\lambda$.

Întrucît acum $\mathrm{d}x^{m-r}$ intră doar în termenul $2\mathrm{d}x^{m-r}\, \mathrm{d}x^n$, efectuînd transformarea

$$x^{m-r} \to x^{m-r} - b_{\psi n}\, x^\psi - \frac{1}{2}\, b_{nn}\, x^n$$

se pot înlătura termenii care conțin $\mathrm{d}x^n$, iar prin transformarea

$$x^h \to x^h - \varepsilon_h\, b_{hp}\, x^p$$

se înlătură termenii $b_{hp}\, \mathrm{d}x^h\, \mathrm{d}x^p$. În sfîrșit, vom ajunge la metrica de forma

$$\mathrm{d}s^2 = \varepsilon_h (\mathrm{d}x^h)^2 + 2 \sum_a \mathrm{d}x^a\, \mathrm{d}x^{m+a} + 2\mathrm{d}x^{m-r}\, \mathrm{d}x^n + 2b_{a\lambda}\, \mathrm{d}x^a\, \mathrm{d}x^\lambda +$$
$$+ FA_{pq}\, \mathrm{d}x^p\, \mathrm{d}x^q + b_{pq}\, \mathrm{d}x^p\, \mathrm{d}x^q. \tag{12}$$

Condiția (3_4) în acest sistem de coordonate are următoarea formă

$$R\left\|\begin{matrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \varepsilon_{m-r+1} & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_m & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{m+1\,p} \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{2m-r-1\,p} \\ b_{2m-r\,1} & \dots & b_{2m-r\,m-r-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{2m-r\,p} \\ \hdotsfor{8} \\ b_{n-1\,1} & \dots & b_{n-1\,m-r-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n-1\,p} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix}\right\| = m.$$

Din aceasta rezultă că

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & A_{m+1\,p} \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & \dots & 1 & A_{2m-r-1\,p} \\ b_{\lambda 1} & \dots & b_{\lambda m-r-1} & A_{\lambda\,p} \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$A_{\lambda p} = \sum_a A_{m+a\,p}\, b_{a\lambda}. \tag{13}$$

Vom considera transformarea

$$x^{m+a} \to x^{m+a} - b_{a\lambda}\, x^{\lambda}.$$

Să observăm cum se transformă atunci forma $A_{pq}\,\mathrm{d}x^p\,\mathrm{d}x^q$:

$$A_{pq}\mathrm{d}x^p\mathrm{d}x^q \to A_{m+a\,m+b}\mathrm{d}x^{m+a}\mathrm{d}x^{m+b} - 2\,[\sum_a (A_{m+a\,m+b}\, b_{a\lambda} - A_{\lambda\,m+a})]\mathrm{d}x^{m+b}\mathrm{d}x^{\lambda} +$$
$$+ [\sum_{a,b} (A_{m+a\,m+b}\, b_{b\lambda} - A_{\lambda\,m+a}) b_{a\mu} + (A_{\lambda\mu} - \sum_a A_{m+a\,\lambda}\, b_{a\mu})]\,\mathrm{d}x^{\lambda}\,\mathrm{d}x^{\mu}.$$

Din (13) rezultă că toți termenii din paranteze sînt nuli și metrica va primi forma :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = \varepsilon_h (\mathrm{d}x^h)^2 + 2\sum_a \mathrm{d}x^a\,\mathrm{d}x^{m+a} + 2\mathrm{d}x^{m-r}\,\mathrm{d}x^n + \\ + F A_{m+a\,m+b}\,\mathrm{d}x^{m+a}\,\mathrm{d}x^{m+b} + b_{pq}\,\mathrm{d}x^p\,\mathrm{d}x^q. \end{aligned} \tag{14}$$

Acum este evident că dacă se face transformarea

$$x^a \to x^a - b_{m+a\,m+b}\, x^{m+b},$$

în forma $b_{pq}\,\mathrm{d}x^p\,\mathrm{d}x^q$ vor dispărea termenii ce-l conțin pe $\mathrm{d}x^{m+a}$ și ea va trece în forma de tip $b_{\lambda\mu}\,\mathrm{d}x^{\lambda}\,\mathrm{d}x^{\mu}$. Pentru ca și condiția (3_6) să fie satisfăcută, trebuie să impunem ca $|\, b_{\lambda\mu} \,| \neq 0$.

Și, în sfîrșit, ultimul pas : reducerea formelor $A_{m+a\,m+b}\,\mathrm{d}x^{m+a}\mathrm{d}x^{m+b}$ și $b_{\lambda\mu}\,\mathrm{d}x^{\lambda}\,\mathrm{d}x^{\mu}$ la forme canonice prin transformarea variabilelor x^{m+a}

şi x^λ respectiv. Ca forma $\sum\limits_a \mathrm{d}x^a \mathrm{d}x^{m+a}$ să nu se schimbe, asupra lui x^a vom face o transformare liniară a cărei matrice este inversa matricei transformării variabilelor x^{m+a}. În acest caz obţinem

$$\mathrm{d}s^2 = \varepsilon_h (\mathrm{d}x^h)^2 + 2 \sum_a \mathrm{d}x^a \,\mathrm{d}x^{m+a} + 2\mathrm{d}x^{m-r}\mathrm{d}x^n + F\,\varepsilon_e (\mathrm{d}x^{m+e})^2 + \varepsilon_\lambda (\mathrm{d}x^\lambda)^2, \quad (15)$$

unde $e = 1, \ldots, k \leqslant m - r - 1$ conform condiţiei (3_5). Sau schimbînd pentru comoditate rolul variabilelor x^n şi x^{2m-r} şi x^g şi x^{m+g} vom transcrie (15) sub forma

$$\mathrm{d}s^2 = \varepsilon_h (\mathrm{d}x^h)^2 + 2 \sum_g \mathrm{d}x^g \,\mathrm{d}x^{m+g} + F(x^{m-r})\,\varepsilon_e (\mathrm{d}x^e)^2 + \varepsilon_\rho (\mathrm{d}x^\rho)^2, \qquad (16)$$

unde $\rho = 2m - r + 1, \ldots, n$.

Aşadar, am obţinut o formă canonică simplă. Din forma lui (16) rezultă imediat că spaţiile lui Vedeneapin sînt evident reductibile, dacă $r > 0$, sau dacă $n > 2m - r$, sau dacă $k < m - r - 1$. Din această cauză totul se reduce de fapt la studiul spaţiilor

$$\mathrm{d}s^2 = 2 \sum_i \mathrm{d}x^i \,\mathrm{d}x^{m+i} + F(x^m)\,\varepsilon_p (\mathrm{d}x^p)^2 \quad (p = 1, \ldots, m - 1) \qquad (17)$$

care sînt ireductibile. Vom demonstra această proprietate.

Vom folosi în acest scop teorema lui P. A. Sirokov [4] conform căreia pentru reductibilitatea spaţiului riemannian cu tensorul metric $g_{\alpha\beta}$ este necesar şi suficient ca să existe tensorul simetric $c_{\alpha\beta}$ care să satisfacă condiţiile :

a) $c_{\alpha\beta,\gamma} = 0$, unde virgula înseamnă derivata covariantă;

b) $c_{\alpha\gamma}\, c^\gamma_\beta = c_{\alpha\beta}$, unde ridicarea indicelui se realizează cu ajutorul lui $g^{\alpha\beta}$;

c) $c_{\alpha\beta} \neq m g_{\alpha\beta}$ (m-const).

Să arătăm că pentru (17) un astfel de tensor nu există.

Considerăm condiţiile de integrabilitate ale sistemului a) :

$$R^{\ \ \ \ \delta}_{\alpha\beta,\gamma}\, c_{\delta\rho} + R^{\ \ \ \ \delta}_{\alpha\beta,\rho}\, c_{\delta\gamma} = 0. \qquad (18)$$

În cazul considerat componentele tensorului de curbură diferite de zero sînt

$$R^{m+p}_{mp,m} = \frac{1}{2}\varepsilon_p \frac{\mathrm{d}^2F}{(\mathrm{d}x^m)^2}, \quad R^{2m}_{mp,p} = -\frac{1}{2}\varepsilon_p \frac{\mathrm{d}^2F}{(\mathrm{d}x^m)^2}.$$

Dacă $\dfrac{\mathrm{d}^2F}{(\mathrm{d}x^m)^2} = 0$, rezultă că spaţiul are curbura nulă, deci este euclidian. Ţinînd seama de aceasta, din condiţii (18) obţinem, presupunînd că avem $\dfrac{\mathrm{d}^2F}{(\mathrm{d}x^m)^2} \neq 0$,

$$c_{m+i\, m+j} = 0 \ (i, j \text{ — oarecare}), \ c_{m+i j} = c_{i m+j} = 0 \quad (i \neq j),$$

$$c_{m+i\, i} = c$$

şi aşadar matricea $c_{\alpha\beta}$ trebuie să aibă aspectul următor

$$\begin{Vmatrix} M & cE \\ cE & 0 \end{Vmatrix},$$

unde M este o matrice simetrică de ordinul m iar E-matricea unitate de ordinul m.

Vom considera acum condiţiile b) în originea axelor de coordonate. Vom nota $F(0) = K$. Atunci dacă $K = 0$, aceste condiţii vor fi

$$\begin{Vmatrix} M & cE \\ cE & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} M & cE \\ cE & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M & cE \\ cE & 0 \end{Vmatrix}$$

sau

$$\begin{Vmatrix} 2cM & c^2M \\ cE & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M & cE \\ cE & 0 \end{Vmatrix}.$$

De aici rezultă că $c = 0$ sau $c = 1$, $M = 0$. În primul caz obţinem $c_{\alpha\beta} = 0$, în al doilea $-c_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$. Întrucît ambii tensori satisfac aceloraşi ecuaţii diferenţiale şi coincid în originea sistemului de axe, aceasta va fi valabil în întreg spaţiu.

Dacă $K = 0$, atunci prin transformarea

$$x^{m+p} \to x^{m+p} - \frac{1}{2} K \varepsilon^p x^p$$

vom ajunge la metrica de acelaşi fel

$$ds = 2 \sum_i dx^i dx^{m+i} + \varphi(x^m)\, \varepsilon_p\, (dx^p)^2,$$

unde $\varphi(x^m) = F(x^m) - K$. Acum $\varphi(0) = 0$ şi ne găsim în condiţiile cazului precedent. Deci, ireductibilitatea este demonstrată.

În lucrarea [5] noi am arătat că spaţiile cu metrica (17) intră într-o clasă de spaţii parţial proiective a profesorului G. Vrănceanu [6] şi am găsit grupurile lor de mişcări.

Primită la redacţie la 3 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Д. Б. БЕДЕНЯПИН, *О некоторых (n–2)-кратно проективных пространствах*. Кандидатская диссертация, МГУ, 1955; vezi şi Научные доклады высшей школы, *6*, 119—126 (1958).
2. V. F. KAGAN, *Über eine Erweiterung des Begriffes vom projektiven Raume und dem zugehörigen Absolut*. Труды семинара по векторноми и тензорному анализу, М.-Л., 1933, vol. I, p. 12—101.
3. Г. И. КРУЧКОВИЧ, *О пространствах Б. Ф. Кагана*, articol în cartea В. Ф. Каган, *Субпроективные пространства*, Физматгиз, 1961.
4. П. А. ШИРОКОВ, *Симметрические конформно-евклидовы пространства*. Известия Казанского физико-математического общества, 3 серия, **II**, 9—27 (1938).
5. V. VODNEV, *Asupra unei clase de spaţii riemanniene parţial proiective*, Studii şi cercetări matematice, **XV**, *5* (1964).
6. Г. ВРЭНЧАНУ, *Метрика частично-проективных римановых пространств*. Revue de mathématiques pures et appliquées, **V**, *2*, 211–227 (1960).

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

[illegible]

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoremele de descompunere ale algebrei)**, 619 p., 25,50 lei.
D. BARBILIAN, **Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)**, 380 p., 7 lei.
JANKÓ BÉLA. **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare**, 223 p., 8,85 lei.
N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU şi A. CORNEA, **Seminar S. Stoilow (1959—1960). Teoria potenţialului pe suprafeţe riemanniene**, 160 p., 5 lei.
G. CIUCU şi R. THEODORESCU, **Procese cu legături complete**, 232 p., 9,85 lei.
C. CONSTANTINESCU, **Seminar M. Neculcea, Teoria mulţimilor**, 108 p., 3,25 lei.
C. CORDUNEANU, **Funcţii aproape-periodice**, 191 p., 8,30 lei.
ROMULUS CRISTESCU, **Spaţii liniare ordonate**, 332 p., 11,10 lei.
I. CUCULESCU, **Seminar O. Onicescu, Algebre Lie**, 148 p., 5,15 lei.
C. FOIAŞ, **Seminar M. Nicolescu (1959—1960). Teoria spectrală în algebre Banach (necomutative) axată pe noţiunea de rezolventă**, 82 p., 2,85 lei.
ALEXANDRU FRODA, **Algebra superioară (fundamente: mulţimi şi operaţii, divizibilitate, spaţii liniare, forme pătratice)**, 455 p., 24,50 lei.
GH. GALBURĂ, **Corpuri de funcţii algebrice şi varietăţi algebrice**, 180, p., 7,85 lei.
M. GHERMĂNESCU, **Ecuaţii funcţionale**, 523 p., 25,60 lei.
A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 484 p., 21,50 lei.
CAIUS IACOB, **Introduction mathématique à la mécanique des fluides**, 1288 p., 66,50 lei.
TRAIAN LALESCU, **Introducere în teoria ecuaţiilor integrale**, 135 p., 5,90 lei.
LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 52 p., 18,50 lei.
* * * **Lucrările celui de-al IV-lea Congres al matematicienilor romîni**, 228 p., 8,55 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie şi topologie, Iaşi 2—5 iunie 1958**, 264 p., 9,75 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie diferenţială din 9—12 iunie 1955, organizată de Secţia de ştiinţe matematice şi fizice a Academiei R.P.R.**, 368 p., 9,50 lei.
G. MARINESCU, **Spaţii vectoriale normate**, 295 p., 6 lei.
G. MARINESCU, **Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice**, 219 p., 8,80 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie neeuclidiană**, 144 p., 4,30 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 387 p., 13 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă**, 495 p., 25,90 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă. Teoria corespondenţei**, 232 p., 10,50 lei.
GH. MIHOC şi V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 732 p., 30,70 lei.
GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 142 p., 8,55 lei; vol. II, 155 p., 8,25 lei.
GR. C. MOISIL, **Funcţionarea în mai mulţi timpi a schemelor cu relee ideale**, 279 p., 12 lei.
GR. C. MOISIL, **Introducere în algebră, I. Inele şi ideale**, vol. I, 256 p., 9,10 lei.
GR. C. MOISIL, **Matricele asociate sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale. Introducere în studiul cercetărilor lui I. N. Lopatinschi**, 64 p., 1,20 lei.
GR. C. MOISIL, **Scheme cu comandă directă cu contacte şi relee**, 205 p., 9,65 lei.
ALEXANDRU MYLLER, **Scrieri matematice**, 595 p. + 1 pl., 30,40 lei.
VERA MYLLER-LEBEDEV, **Lecţii de algebră**, 396 p., 8,75 lei.
MIRON NICOLESCU, **An liza matematică**, vol. II, 420 p., 11,90 lei.
OCTAV ONICESCU, **Num e şi sisteme aleatoare**, 260 p., 11,20 lei.
OCTAV ONICESCU, **Strat ia jocurilor. Cu aplicaţii la programarea liniară**, 228 p., 8,45 lei.
OCTAV ONICESCU şi cola , **Calculul probabilităţilor şi aplicaţii**, 788 p., 15 lei.
O. ONICESCU, I. CUCUL CU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii su sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 123 p., 4.25 lei.
* * * **Opera matematică i Alexandru Pantazi**, 496 p., 24,20 lei.
DIMITRIE POMPEI, **Ope matematică**, 535 p. + 1 pl., 30,20 lei.
N. RANCU şi L. TÖVISS **tatistica matematică cu aplicaţii în producţie**, 898 p. + 20 pl., 45 lei.
SERGIU RUDEANU, **Axi le laticilor şi ale algebrelor booleene**, 159 p., 5,75 lei.
S. STOILOW, **Teoria funcţ de o variabilă complexă**, vol. I, 308 p., 10 lei; vol. II în colaborare cu Cabiria A. ian-Cazacu, 370 p., 25,70 lei.
P. P. TEODORESCU, **Pr plane în teoria elasticităţii**, vol. I, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.
GHEORGHE ŢIŢEICA, **G tria diferenţială proiectivă a reţelelor**, 287 p., 8 lei.
DRAGOŞ VAIDA, **Utilizăr calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 76 p., 3,15 lei.
SERGIU VASILACHE, **Ele de teoria mulţimilor şi structurilor algebrice**, 235 p., 5 lei.
GH. VRĂNCEANU, **Leçon ometrie différentielle**, vol. I, 407 p., 26,50 lei; vol. II, 428 p., 27,60 lei.
GH. VRĂNCEANU, **Lecţii metrie diferenţială**, vol. III, 454 p., 15 lei.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

26

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Citarea bibliografiei în text se va face în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihail Eminescu, nr. 47, Bucureşti.

B

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 7, P. 805—934, BUCUREŞTI, 1964

I. P. „Informația" —c. 2487

43831 Lei 12. —

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

8

TOMUL 16
1964

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. MIRON NICOLESCU – redactor responsabil;
Acad. GR. C. MOISIL – redactor responsabil adjunct;
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
GH. MARINESCU membru corespondent al Academiei R.P.R.;
CIPRIAN FOIAȘ – secretar de redacție

Pentru a se asigura colecția completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pe anul 1965.

În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134 — 135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție pe adresa: str. Mihail Eminescu, nr. 47,
București

Revista apare de 10 ori pe an.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

TOM. 16, Nr. 8
1964

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

ROMULUS CRISTESCU, Familii compozabile de distribuții și sisteme fizice liniare 937

CIPRIAN FOIAȘ, Asupra teoremelor de medie ale acad. M. Nicolescu privind funcțiile policalorice 947

ADRIAN CORBAN, Un model multidimensional de transport . 953

D. MANGERON și L. E. KRIVOŠEIN, Contribuții la studiul ecuațiilor polivibrante. II. Comportarea calitativă a soluțiilor unei noi clase de probleme de contur integro-diferențiale neliniare 967

L. J. NICOLESCU, Asupra unei teoreme de medie 987

ELEMÉR ROSINGER, O extindere a noțiunii de categorie în sens Eilenberg-Mac Lane 997

D. V. IONESCU, Generalizarea formulelor de cvadratură ale lui Simpson și Newton 1001

ION I. CRISTEA, O extindere a transformărilor conforme în spațiul tridimensional 1033

H. COHN, Despre eficiența funcțiilor de estimație a probabilităților de trecere ale unui lanț Markov 1059

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 8, P. 935–1064. BUCUREȘTI, 1964.

FAMILII COMPOZABILE DE DISTRIBUȚII ȘI SISTEME FIZICE LINIARE[1]

DE

ROMULUS CRISTESCU

În teoria distribuțiilor este cunoscută noțiunea de convoluție a două distribuții și aplicațiile sale la ecuațiile diferențiale cu coeficienți constanți. În cazul unui sistem fizic liniar și staționar, ale cărui semnale sînt distribuții, semnalul de ieșire y este dat de convoluția dintre o anumită distribuție w (funcția pondere a sistemului) și semnalul de intrare x (a se vedea și [1], [4]). Dacă sistemul este descris de o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți, funcția pondere w reprezintă o soluție elementară a ecuației.

Pentru un sistem nestaționar remarcăm că rolul funcției pondere va fi jucat de o familie de distribuții[2] $\mathbf{w} = \{w_s\}_{s \in R}$. O astfel de familie de distribuții joacă, după cum vom vedea, și rolul soluției elementare în cazul unei ecuații diferențiale liniare.

În § 1 vom introduce o operație de compunere între o familie de distribuție și o distribuție, și vom stabili proprietățile acestei operații.

În § 2 vom indica aplicații la sisteme fizice liniare.

§ 1. FAMILII COMPOZABILE DE DISTRIBUȚII[3]

Fie $\mathbf{w} = \{w_s\}_{s \in R}$ o familie de distribuții care depinde de un parametru real[4].

---

[1] Acest articol a apărut în limba franceză în Revue Roumaine de mathematiques pures et appliquées, **IX**, *8* (1964).

[2] Notăm prin R mulțimea numerelor reale.

[3] Vom nota prin $\mathcal{D}$ spațiul funcțiilor indefinit derivabile și cu suport compact; pentru simplificare vom considera funcții reale de o variabilă reală; vom nota prin $\mathcal{D}'$ spațiul distribuțiilor [5] (funcții generalizate pe $\mathcal{D}$ în [2]); prin (f, φ) și uneori prin $(f(t), \varphi(t))$ valoarea funcționalei $f \in \mathcal{D}'$ în punctul $\varphi \in \mathcal{D}$; prin $f \bigstar g$ convoluția între distribuțiile f și g; vom utiliza noțiunea de distribuție convolubilă dată în [2], vol. 2; vom nota prin f^s distribuția obținută prin translația lui f cu s; prin $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ convergența lui φ_n către zero în spațiul $\mathcal{D}$; prin D operația de derivare; prin δ distribuția lui Dirac.

În legătură cu aceste noțiuni a se vedea [2], [3], [5].

[4] Alte considerații asupra distribuțiilor care depind de un parametru se găsesc în [7].

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 8, P. 937–945, BUCUREȘTI, 1964

DEFINIŢIA 1. *Vom zice că familia* $\mathbf{w}$ *este compozabilă, dacă sînt verificate următoarele condiţii.*

(i) *pentru orice* $\varphi \in \mathcal{D}$, *punînd*

$$\psi(s) = (w_s, \varphi) \tag{1}$$

avem $\psi \in \mathcal{D}$;

(ii) *dacă* $\varphi_n \in \mathcal{D}$ *şi* $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, *punînd*

$$\psi_n(s) = (w_s, \varphi_n)$$

avem $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$.

Dacă $\mathbf{w}$ este compozabilă, atunci pentru orice $x \in \mathcal{D}'$ vom introduce o operaţie de compunere

$$y = \mathbf{w} \circ x$$

prin condiţia

$$(y, \varphi) = (x, \psi),$$

unde ψ este dată de (1) adică

$$(y, \varphi) = (x(s), (w_s(t), \varphi(t))).$$

Vom spune de asemenea că operatorul W definit prin egalitatea

$$W(x) = \mathbf{w} \circ x$$

are nucleul $\mathbf{w}$, sau că W este *generat* de $\mathbf{w}$.

PROPOZIŢIA 1. *Dacă* $w \in \mathcal{D}'$ *şi* $\mathbf{w} = \{w^s\}_{s \in R}$, *atunci familia* $\mathbf{w}$ *este compozabilă, dacă şi numai dacă distribuţia* w *este convolubilă. În acest caz*

$$\mathbf{w} \circ x = w \bigstar x. \tag{2}$$

Demonstraţie. Dacă $\mathbf{w} = \{w_s\}_{s \in R}$ şi dacă există w aşa ca $w_s = w^s$, atunci pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\psi(s) = (w_s, \varphi) = (w^s, \varphi) = (w(t), \varphi(t + s)) \tag{3}$$

de unde rezultă imediat prima parte a propoziţiei (a se vedea şi [2] p. 169).

Dacă w este convolubilă, atunci cu (3) rezultă că pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ (şi oricare ar fi $x \in \mathcal{D}'$) avem

$$(\mathbf{w} \circ x, \varphi) = (x(s), \psi(s)) = (x(s), (w(t), \varphi(t + s))) = (w \bigstar x, \varphi)$$

de unde se obţine (2).

COROLAR. *Dacă* $\Delta = \{\delta^s\}_{s \in R}$, *atunci* Δ *este compozabilă şi avem*

$$\Delta \circ x = x$$

oricare ar fi $x \in \mathcal{D}'$.

PROPOZIŢIA 2. *Dacă* $\mathbf{w}$ *este o familie compozabilă de distribuţii, atunci pentru orice* $s \in R$

$$\mathbf{w} \circ \delta^s = w_s.$$

Demonstraţie. Într-adevăr, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ avem

$$(\mathbf{w} \circ \delta^s, \varphi) = (\delta^s(\sigma), (w_\sigma(t), \varphi(t))) = (w_s(t), \varphi(t))$$

de unde rezultă (4).

PROPOZIŢIA 3. *Dacă* $\mathbf{u} = \{u_s\}_{s\in R}$ *şi* $\mathbf{v} = \{v_s\}_{s\in R}$ *sînt familii compozabile de distribuţii, atunci familia* $\mathbf{w} = \{\mathbf{u} \circ v_s\}_{s\in R}$ *este compozabilă şi pentru orice* $x \in \mathcal{D}'$ *are loc egalitatea*

$$\mathbf{u} \circ (\mathbf{v} \circ x) = \{\mathbf{u} \circ v_s\}_{s\in R} \circ x.$$

Demonstraţie. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ avem

$$\psi(s) = (w_s(t), \varphi(t)) = ((\mathbf{u} \circ v_s)(t), \varphi(t)) = (v_s(\sigma), (u_\sigma(t), \varphi(t))) = (v_s(\sigma), \chi(\sigma))$$

unde

$$\chi(\sigma) = (u_\sigma(t), \varphi(t)).$$

Cum $\mathbf{u}$ este compozabilă, avem $\chi \in \mathcal{D}$; dacă $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, atunci $\chi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, unde

$$\chi_n(\sigma) = (u_\sigma(t), \varphi_n(t)).$$

Cum şi $\mathbf{v}$ este compozabilă, iar

$$\psi(s) = (v_s(\sigma), \chi(\sigma))$$

din $\chi \in \mathcal{D}$ rezultă $\psi \in \mathcal{D}$ iar din $\chi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ rezultă $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, unde

$$\psi_n(s) = (v_s(\sigma), \chi_n(\sigma)).$$

În concluzie $\mathbf{w}$ este compozabilă.

Notînd $y = \mathbf{v} \circ x$, avem

$$(\mathbf{u} \circ y, \varphi) = (y(\sigma), (u_\sigma(t), (\varphi(t))) = (y(\sigma), \chi(\sigma)) = ((\mathbf{v} \circ x)(\sigma), \chi(\sigma)) =$$
$$= (x(s), (v_s(\sigma), \chi(\sigma))) = (x(s), \psi(s)) = (x(s), (w_s(t), \varphi(t))) = (\mathbf{w} \circ x, \varphi)$$

deci

$$\mathbf{u} \circ y = \mathbf{w} \circ x$$

egalitate echivalentă cu (5).

PROPOZIŢIA 4. *Operatorul generat de o familie compozabilă de distribuţii este liniar şi continuu.*

Demonstrație. Fie $\mathbf{w} = \{w_s\}_{s\in R}$ o familie compozabilă de distribuții. Dacă $x_1,\ x_2 \in \mathcal{D}'$, atunci

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}\circ(x_1+x_2),\ \varphi) &= (x_1+x_2,\ (w_s,\ \varphi)) = (x_1,\ (w_s,\ \varphi)) + (x_2,\ (w_s,\ \varphi)) = \\ &= (\mathbf{w}\circ x_1,\ \varphi) + (\mathbf{w}\circ x_2,\ \varphi) = ((\mathbf{w}\circ x_1) + (\mathbf{w}\circ x_2),\ \varphi)\end{aligned} \tag{4}$$

de unde rezultă

$$\mathbf{w}\circ(x_1+x_2) = (\mathbf{w}\circ x_1) + (\mathbf{w}\circ x_2).$$

Fie acum $x_n \to x$ în topologia lui $\mathcal{D}'$. Aceasta înseamnă

$$(x_n,\ \psi) \to (x,\ \psi)$$

oricare ar fi $\psi \in \mathcal{D}$. În particular, pentru

$$\psi(s) = (w_s(t),\ \varphi(t))$$

rezultă

$$(x_n,\ (w_s,\ \varphi)) \to (x,\ (w_s,\ \varphi))$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}$. Deci

$$\mathbf{w}\circ x_n \to \mathbf{w}\circ x$$

şi propoziția este demonstrată.

PROPOZIŢIA 5. *Dacă $\mathbf{w} = \{w_s\}_{s\in R}$ este compozabilă, atunci pentru orice operator diferențial liniar A de forma*

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) D^{n-k} \tag{5}$$

(*unde a_k (t) sînt funcții indefinit derivabile*), *funcția*

$$A(\mathbf{w}) = \{A(w_s)\}_{s\in R}$$

este compozabilă și pentru orice $x \in \mathcal{D}'$

$$A(\mathbf{w}\circ x) = A(\mathbf{w})\circ x.$$

Demonstrație. Să observăm mai întîi că dacă $\mathbf{w}$ este compozabilă, atunci şi

$$D\mathbf{w} = \{Dw_s\}_{s\in R}$$

este compozabilă deoarece

$$(Dw_s,\ \varphi) = (w_s,\ -\varphi').$$

Punînd $y = \mathbf{w}\circ x$ avem

$$(Dy,\ \varphi) = (y,\ -\varphi') = (x,\ (w_s,\ -\varphi')) = (x,\ (Dw_s,\ \varphi)) = ((D\mathbf{w})\circ x,\ \varphi)$$

de unde

$$D(\mathbf{w}\circ x) = (D\mathbf{w})\circ x.$$

Prin inducţie se arată că pentru orice k natural, $D^k\mathbf{w}$ este compozabilă şi că

$$D^k(\mathbf{w} \circ x) = (D^k\mathbf{w}) \circ x. \tag{6}$$

Să observăm acum că dacă $\mathbf{w}$ este compozabilă, atunci pentru orice funcţie indefinit derivabilă $a(t)$, familia

$$a(t)\mathbf{w} = \{a(t)w_s\}_{s\in R}$$

este compozabilă.

Deci dacă $\mathbf{w}$ este compozabilă, atunci $a_k(t)D^{n-k}\mathbf{w}$ este de asemenea compozabilă, pentru $k = 0,1, 2, \ldots n$. Dar atunci şi familia

$$A(\mathbf{w}) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)D^{n-k}\mathbf{w}$$

este compozabilă.

Pe de altă parte, dacă $\mathbf{w}$ este compozabilă, iar $a(t)$ este o funcţie indefinit derivabilă, atunci

$$a(t)(\mathbf{w} \circ x) = (a(t)\mathbf{w}) \circ x. \tag{7}$$

Într-adevăr,

$$(a(t)(\mathbf{w} \circ x)(t), \varphi(t)) = ((\mathbf{w} \circ x)(t), a(t)\varphi(t)) = (x(s), (w_s(t), a(t)\varphi(t))) =$$
$$(x(s), (a(t)w_s(t), \varphi(t))) = ((a(t)\mathbf{w}) \circ x, \varphi).$$

Deci pentru $k = 0, 1, 2, \ldots n$,

$$a_k(t)(D^{n-k}\mathbf{w} \circ x) = (a_k(t)D^{n-k}\mathbf{w}) \circ x. \tag{8}$$

Din (6) şi (7) rezultă

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)D^{n-k}(\mathbf{w} \circ x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k(t)D^{n-k}\mathbf{w}\right) \circ x$$

şi propoziţia este demonstrată.

DEFINIŢIA 2. *O familie* $\mathbf{w} = \{w_s\}_{s\in R}$ *de distribuţii se va numi o* familie normală, *dacă pentru orice* $s \in R$, *distribuţia* w_s *are suportul pe semidreapta* $[s, +\infty]$.

Dacă $\mathbf{w}$ este o familie normală, atunci pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, suportul funcţiei $\psi(s) = (w_s, \varphi)$ este mărginit la dreapta, după cum se poate verifica cu uşurinţă.

Observaţie. În definiţia 1, condiţiile (i) şi (ii) asigură existenţa distribuţiei $y = \mathbf{w} \circ x$ pentru orice $x \in \mathcal{D}'$. Aceste condiţii pot fi slăbite, dar în acest caz $\mathbf{w} \circ x$ va exista numai pentru anumite tipuri de distribuţii x.

Să presupunem că $\mathbf{w} = \{w_s\}_{s\in R}$ este o familie normală cu proprietăţile :

(i′) pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, funcţia $\psi(s) = (w_s, \varphi)$ este indefinit derivabilă ;

(i') dacă $\varphi_n \in \mathcal{D}$ şi $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, atunci funcţiile $\psi_n(s) = (w_s, \varphi_n)$ precum şi derivatele lor de orice ordin tind la zero, uniform pe orice segment.

Atunci pentru orice distribuţie x cu suport mărginit la stînga, sensul lui (x, ψ) va fi dat de egalitatea $(x, \psi) = (x, \psi_1)$, unde $\psi_1 \in \mathcal{D}$ şi $\psi_1(s) = \psi(s)$ pe intersecţia suporturilor lui x şi ψ; dacă această intersecţie este vidă, atunci $(x, \psi) = 0$.

Se poate deci vorbi de distribuţia $\mathbf{w} \circ x$.

Pentru distribuţiile de ordin finit, se pot da condiţii mai puţin restrictive.

Dacă $\mathbf{w}$ este normală şi dacă x este o distribuţie obţinută prin derivarea de ordin p a unei măsuri, atunci pentru a defini distribuţia $\mathbf{w} \circ x$ se va presupune că $\mathbf{w}$ are proprietăţile:

(i'') pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, funcţia $\psi(s) = (w_s, \varphi)$ are derivate continue pînă la ordinul p;

(ii'') dacă $\varphi_n \in \mathcal{D}$ şi $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, atunci funcţiile $\psi_n(s) = (w_s, \varphi_n)$ precum şi derivatele lui $\psi_n(s)$ pînă la ordinul p, tind la zero uniform pe orice segment.

§ 2. SISTEME FIZICE LINIARE

Fie $\mathcal{W}$ un sistem fizic liniar [5]) cu o intrare şi o ieşire. Vom presupune că semnalele de intrare sînt distribuţii cu suport mărginit la stînga. Vom nota prin x semnalul de intrare şi prin y semnalul de ieşire. Semnalele de ieşire vor fi de asemenea distribuţii.

Să presupunem că legătura dintre semnale este dată de ecuaţia diferenţială

$$\sum_{k=0}^{n} b_k(t) D^{n-k} y = x, \tag{9}$$

unde $b_k(t)$ sînt funcţii indefinit derivabile iar $b_0(t)$ nu se anulează.

Fie $x = \delta^s$ ca semnal de intrare şi să notăm prin w_s răspunsul normal al sistemului, adică soluţia ecuaţiei (9) (cu $x = \delta^s$) care se anulează pentru [6]) $t < s$. Pentru un semnal oarecare x, semnalul corespunzător de ieşire va fi atunci

$$y = \mathbf{w} \circ x, \tag{10}$$

unde $\mathbf{w} = \{w_s\}_{s \in R}$, după cum rezultă din propoziţia 5.

Operatorul W al sistemului are deci nucleul $\mathbf{w}$.

În cazul cînd coeficienţii ecuaţiei (9) sînt constanţi, vom avea $w_s = w^s$, unde w este soluţia elementară a ecuaţiei, care se anulează pentru $t < 0$. În acest caz w reprezintă răspunsul normal al sistemului cînd la intrare acţionează semnalul δ. Legătura dintre semnale se reduce în acest caz la

$$y = w \star x. \tag{11}$$

---

[5]) Sistem dinamic.

[6]) Se cunosc metode de găsire a unei astfel de soluţii.

În general, dacă $\mathcal{W}$ este un sistem fizic ale cărui semnale sînt distribuţii, şi dacă legătura dintre semnale este de forma (10), unde $\mathbf{w} = \{w_s\}_{s \in R}$ este o anumită familie de distribuţii, vom spune că $\mathbf{w}$ este *ponderea* sau *admintanţa* sistemului. Vom spune că ponderea este *normală*, dacă $\mathbf{w}$ este o familie normală [7]). Sistemul se zice *staţionar*, dacă există $w \in \mathcal{D}'$ aşa ca $w_s = w^s$, oricare ar fi $s \in R$. În acest caz se va numi ponderea sistemului, însăşi distribuţia w ; legătura dintre semnale devine de forma (11) ; condiţia ca ponderea să fie normală devine condiţia ca suportul lui w să se afle pe semiaxa pozitivă.

Să considerăm acum două sisteme $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ asociate în serie avînd respectiv ponderile u, v. Fie x semnalul de intrare pentru sistemul $\mathcal{U}$ iar z semnalul corespunzător de ieşire. Atunci z va fi semnal de intrare pentru sistemul $\mathcal{V}$ şi fie y semnalul corespunzător de ieşire. Avem $z = \mathbf{u} \circ x$, $y = \mathbf{v} \circ z$ cu $\mathbf{u} = \{u_s\}_{s \in R}$, $\mathbf{v} = \{v_s\}_{s \in R}$ şi deci

$$y = \mathbf{v} \circ (\mathbf{u} \circ x). \tag{12}$$

Dacă $\mathcal{W}$ este sistemul echivalent sistemelor cuplate $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{V}$, şi dacă $\mathcal{W}$ are ponderea $\mathbf{w}$, atunci

$$y = \mathbf{w} \circ x. \tag{13}$$

Din (13) rezultă $y = w_s$ pentru $x = \delta^s$. Dacă deci în (12) facem $x = \delta^s$, atunci

$$y = \mathbf{v} \circ (\mathbf{u} \circ \delta^s) = \mathbf{v} \circ u_s$$

adică

$$w_s = \mathbf{v} \circ u_s. \tag{14}$$

Reciproc, sistemul avînd ponderea dată de (14) este echivalent cu asociaţia sistemelor cuplate $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{V}$, deoarece, în baza propoziţiei 3,

$$\mathbf{w} \circ x = \{\mathbf{v} \circ u_s\}_{s \in R} \circ x = \mathbf{v} \circ (\mathbf{u} \circ x) = \mathbf{v} \circ z = y.$$

În particular, în cazul sistemelor staţionare avem

$$w = v \star u,$$

după cum se poate verifica.

Fie acum dat sistemul $\mathcal{U}$ de pondere $\mathbf{u}$ şi avînd x, y respectiv semnal de intrare şi semnal de ieşire. Să găsim sistemul $\mathcal{V}$ invers sistemului $\mathcal{U}$. Cele două sisteme cuplate în serie vor fi echivalente sistemului avînd ponderea $\Delta = \{\delta^s\}_{s \in R}$. Cu (14) rezultă

$$\mathbf{v} \circ u_s = \delta^s. \tag{15}$$

Trebuie deci căutată familia $\mathbf{v} = \{v_s\}_{s \in R}$ care verifică (15).

Să presupunem că sistemul $\mathcal{U}$ este descris de o ecuaţie diferenţială de forma (9). Notînd cu B operatorul din membrul stîng al lui (9) vom avea

$$\mathbf{v} = B\Delta.$$

---

[7]) Pentru ca sistemul să fie „realizabil” va trebui presupus că ponderea este normală.

Într-adevăr, folosind propoziția 5, avem

$$(B\Delta) \circ u_s = B(\Delta \circ u_s) = Bu_s = \delta^s.$$

Să considerăm acum un sistem $\mathcal{W}$ descris de o ecuație de forma

$$\sum_{k=0}^{n} b_k(t) D^{n-k} y = \sum_{j=0}^{m} a_j(t) D^{m-j} x, \tag{16}$$

unde $a_k(t)$ și $b_j(t)$ sînt funcții indefinit derivabile (iar pentru simplificare presupunem $b_0(t) \equiv 1$). Sistemul $\mathcal{W}$ poate fi considerat ca obținut prin cuplajul în serie a două sisteme : sistemul $\mathcal{U}$ avînd x ca semnal de intrare iar semnalul de ieșire fiind

$$z = \sum_{j=0}^{m} a_j(t) D^{m-j} x ;$$

sistemul $\mathcal{V}$ avînd z ca semnal de intrare, iar semnalul y de ieșire fiind legat de z prin ecuația

$$\sum_{k=0}^{n} b_k(t) D^{n-k} y = z. \tag{17}$$

Sistemul $\mathcal{U}$ are ponderea $\mathbf{u}$ dată de familia distribuțiilor

$$u_s = \sum_{j=0}^{m} a_j(t) D^{m-j} \delta^s.$$

Dacă $\mathbf{v}$ este ponderea lui $\mathcal{V}$, corespunzătoare ecuației diferențiale (17), atunci $\mathcal{W}$ are ponderea dată de distribuția $w_s = \mathbf{v} \circ u_s$.

Remarcăm că chiar în cazul coeficienților constanți, presupunînd v normală, w nu este o distribuție regulată în cazul $m \geqslant n$.

Putem considera de asemenea cazul unui sistem cu legătură inversă, utilizat în teoria sistemelor automate [8]). Dacă presupunem că legătura dintre semnalul de ieșire y și semnalul eroare $e = x - y$, este dată de o ecuație diferențială de tipul (16) (în care înlocuim pe x cu e), atunci ponderea sistemului se găsește ca și mai înainte. N-avem decît să observăm că legătura dintre semnale se poate pune sub forma

$$(A + B)y = Ax$$

dacă notăm cu A și B cei doi operatori diferențiali care intervin în ecuația (16).

Primită la redacție la 19 aprilie 1964

---

[8]) În legătură cu acestea a se vedea și [6].

BIBLIOGRAFIE

1. Romulus Cristescu, *Procese stochastice generalizate în sistemele dinamice*, Probleme de automatizare, V, 63–71 (1962).
2. И. М. Гелфанд Г. Е. Щилов, *Пространства основных и обобщенных функций*. Москва, 1958.
3. G. Marinescu, *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.
4. Laurent Schwartz, *Causalité et analyticité*, Anais Acad. Brasil, C. 34, 13–21 (1962).
5. Laurent Schwartz, *Théorie des distributions*, Herman, Paris, 1950.
6. A. V. Solodov, *Structural transformations of linear varying-parameter*, Avtomatika i telemehanica, 22, 577–588 (1961).
7. Serge Vasilach, *Calcul opérationnel des distributions à support dans* R_n^+, $n \geqslant 1$, *IV*; *V*, Revue de mathém. pures et appl., Acad. R.P.R., VIII, 19–66 (1963).

ASUPRA TEOREMELOR DE MEDIE ALE ACAD. M. NICOLESCU PRIVIND FUNCŢIILE POLICALORICE[1]

DE

CIPRIAN FOIAŞ

1. În studiul [1] asupra funcţiilor policalorice (adică soluţiile ecuaţiei iterate a căldurii), acad. M. Nicolescu a găsit următoarea caracterizare integrală:

Fie $u(x,t)$ o funcţie continuă reală definită pe $(-\infty, \infty) \times (0,\delta)$ astfel ca

$$|u(x,t)| \leqslant M\mathrm{e}^{Kx^2} \qquad \left(\text{unde } K < \frac{1}{4\delta}\right) \tag{1}$$

şi fie

$$\begin{gathered}\mu_0(u\,;h)(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4h}}\, u(\xi, t-h)\mathrm{d}\xi \\ \mu_s(u\,;h)\,(x,t) = \frac{2}{h^2}\int_0^h k\mu_{s-1}(u\,;k)(x,t)\mathrm{d}k, \quad (s=1,2,\ldots).\end{gathered} \tag{2}$$

Atunci, dacă pentru orice $0 < h < t < \delta$ şi $-\infty < x < \infty$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \ldots & \frac{2}{p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} & \ldots & \left(\frac{2}{p+1}\right)^{p-1} \end{vmatrix} u(x,t) = \begin{vmatrix} \mu_0(u\,;h) & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_1(u\,;h) & \frac{2}{3} & \ldots & \frac{2}{p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_{p-1}(u\,;h) & \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} & \ldots & \left(\frac{2}{p+1}\right)^{p-1} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

---

[1] Acest articol a apărut în Rev. Roum. de math. pure et appl., **X**, *1*, 35–38 (1964).

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 8, P. 947–952, BUCUREŞTI, 1964

funcţia $u(x, t)$ este policalorică de ordin $\leqslant p$ (adică

$$\underline{\cap}^p u = 0, \qquad \text{unde } \underline{\cap} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big) \tag{4}$$

şi

$$|\underline{\cap}^k u(x, t)| \leqslant M_k \, \mathrm{e}^{Kx^2}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p-1). \tag{5}$$

Invers, orice soluţie a ecuaţiei (4) verificînd (1) şi (5), verifică de asemenea (4).

Caracterizarea integrală a funcţiilor policalorice doar prin intermediul „mediilor'' $\mu_0(u, h)$ a fost obţinută de acad. M. Nicolescu de curînd [2]:

Să presupunem că $u(x, t)$ verifică (1) şi (5); atunci $u(x, t)$ este policalorică de ordin $\leqslant p$ dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} \mu_0(u\,;h_1)\,(x,t) & 1 & h_1 & \ldots h_1^{p-1} \\ \mu_0(u\,;h_2)\,(x,t) & 1 & h_2 & \ldots h_2^{p-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mu_0(u\,;h_{p+1})(x,t) & 1 & h_{p+1} & \ldots h_{p+1}^{p-1} \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

pentru orice $-\infty < x < \infty$ şi

$$0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_{p+1} < t < \delta.$$

2. Această ultimă caracterizare poate fi obţinută de asemenea într-o formă abstractă destul de generală (dar insuficientă pentru a conţine rezultatele menţionate mai înainte). Într-adevăr, în [3] s-a arătat că dacă A este un generator infinitezimal al unui semigrup tare continuu de operatori $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ ai unui spaţiu Banach X şi dacă pentru o funcţie continuă $u(t)$ definită pe $(0, \delta)$ cu valori în X se pune

$$\mu_0(u\,;h)(t) = T_h u(t-h), \qquad (\text{unde } 0 < h < t < \delta), \tag{7}$$

atunci condiţia

$$\begin{vmatrix} \mu_0(u\,;\,h_1)\,(t) & 1 & h_1 & \ldots h_1^{p-1} \\ \mu_0(u\,;\,h_2)\,(t) & 1 & h_2 & \ldots h_2^{p-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mu_0(u\,;h_{p+1})(t) & 1 & h_{p+1} & \ldots h_{p+1}^{p-1} \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

(unde

$$0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_{p+1} < t < \delta$$

sînt arbitrari) este suficientă şi necesară ca $D^p u(t) = 0$ (în $(0, \delta)$) unde $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - A$. Analogia între (8) şi (6) este evidentă. Apare naturală problema dacă nu cumva se poate extinde această analogie şi la condiţia (3), unde $\mu_s(u\,;h)(x,\, t)$ vor fi înlocuiţi prin

$$\mu_s(u\,;h)(t)=\frac{2}{h^2}\int_0^h k\mu_{s-1}(u\,;k)(t)\mathrm{d}k, \qquad (s=1,2,\ldots). \tag{9}$$

Scopul notei de faţă este de a arăta că aceasta este posibil, deci că : *O condiţie necesară şi suficientă ca* $D^p u(t)=0$ (*în* $(0,\ \delta)$) *este* ca

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \ldots & \frac{2}{p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} & \ldots & \left(\frac{2}{p+1}\right)^{p-1} \end{vmatrix} u\,(t)=\begin{vmatrix} \mu_0(u\,;h)(t) & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_1(u\,;h)(t) & \frac{2}{3} & \ldots & \frac{2}{p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_{p-1}(u\,;h)(t) & \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} & \ldots & \left(\frac{2}{p+1}\right)^{p-1} \end{vmatrix} \tag{10}$$

oricare ar fi $0<h<t<\delta$.

3. Demonstraţia propoziţiei anterioare nu este decît o transpunere a demonstraţiei iniţiale a acad. M. Nicolescu, cu o mică inversiune şi anume : În demonstrarea caracterizării (6), acad. M. Nicolescu a întrebuinţat caracterizarea (3) pe care a obţinut-o direct [1]. În cazul de faţă, pentru demonstrarea caracterizării (10) se va folosi caracterizarea (8) care a fost obţinută direct [3].

Să trecem la demonstrarea caracterizării (10). Fie deci $u(t)$ o soluţie în $(0,\ \delta)$ a ecuaţiei $D^p u(t)=0$. Pe baza caracterizării (8) (unde nu avem decît să luăm $h=h_{p+1}$ arbitrar $h_p<h<t$) deducem că pentru $0<h<t$, $\mu_0(u\,;\,h)(t)$ este un polinom de grad $\leqslant p-1$ adică

$$\mu_0(u\,;h)(t)=a_0+a_1h+\ldots+a_{p-1}h^{p-1}. \tag{11}$$

Prin integrări succesive deducem din (11) şi (9)

$$\left\{\begin{aligned} &\mu_1(u\,;h)(t)=a_0+\frac{2}{3}a_1h+\ldots+\frac{2}{p+1}a_{p-1}h^{p-1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\mu_s(u\,;h)(t)=a_0+\left(\frac{2}{3}\right)^s a_1h+\ldots+\left(\frac{2}{p+1}\right)^s a_{p-1}h^{p-1} \end{aligned}\right. \tag{12}$$

pentru orice $s=1,2,\ldots,\ 0<h<t$. Considerînd în (12) toţi indicii $s\leqslant p-1$ şi eliminînd din aceste ecuaţii şi din (11) pe

$$a_1h,\ a_2h^2,\ldots,a_{p-1}h^{p-1},$$

obţinem

$$\begin{vmatrix} \mu_0(u\,;h)(t) & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_1(u\,;h)(t) & \dfrac{2}{3} & \ldots & \dfrac{2}{p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_{p-1}(u\,;h)(t) & \left(\dfrac{2}{3}\right)^{p-1} & \ldots & \left(\dfrac{2}{p+1}\right)^{p-1} \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \dfrac{2}{3} & \ldots & \dfrac{2}{p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \left(\dfrac{2}{3}\right)^{p-1} & \ldots & \left(\dfrac{2}{p+1}\right)^{p-1} \end{vmatrix} \tag{13}$$

cu $0 < h < t < \delta$. Or, în (13), $a_0 = \lim\limits_{h \to +0} \mu_0(u\,;h)(t) = u(t)$, aşa că (13) coincide cu (10) ceea ce arată necesitatea acestei ultime relaţii.

Să trecem acum la demonstrarea suficienţei relaţiei (10). Fie deci $u(t)$ o funcţie continuă definită pe $(0,\delta)$ cu valori în X verificînd (10) pentru orice $0 < h < t < \delta$. Să punem $h = \mathrm{e}^x$ şi $\mu_0(u\,;\mathrm{e}^x)(t) = f_s(x)$ $(s=0,1,\ldots)$. Atunci pentru $s \geqslant 1$, $f_s(x)$ este derivabilă în $(-\infty, \lg t)$ şi

$$f_s'(x) = 2f_{s-1}(x) - 2f_s(x), \qquad (s = 1,2,\ldots). \tag{14}$$

Cum relaţiei (10) îi putem da forma

$$C_0 f_0 + C_1 f_1 + \ldots + C_{p-1} f_{p-1} = C$$

(unde C este determinantul Vandermonde care apare în membrul stîng în (10) iar $C_0, \ldots, C_{p-1}$ sînt minorii primei coloane), rezultă că f_0 este derivabilă şi avem (folosind (14)):

$$C_0 f_0' + 2C_1(f_0 - f_1) + 2C_2(f_1 - f_2) + \ldots + 2C_{p-1}(f_{p-2} - f_{p-1}) = 0,$$

aşa că $f_0, f_1, \ldots, f_{p-1}$ satisfac sistemul diferenţial

$$\begin{cases} f_0' = -\dfrac{2C_1}{C_0} f_0 + 2\dfrac{C_1 - C_2}{C_0} f_1 + 2\dfrac{C_2 - C_3}{C_0} f_2 + \ldots + 2\dfrac{C_{p-2} - C_{p-1}}{C_0} f_{p-2} + 2\dfrac{C_{p-1}}{C_0} f_{p-1} \\ f_1' = 2f_0 - 2f_1 \\ f_2' = 2f_1 - 2f_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{p-1}' = 2f_{p-2} - 2f_{p-1}. \end{cases}$$

De aici se deduce direct că f_0 satisface în $(-\infty, \lg t)$ ecuaţia diferenţială ordinară

$$P(D) f_0 = 0, \qquad D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \tag{15}$$

unde

$$P(D)=\begin{vmatrix} -2\dfrac{C_1}{C_0}-D & 2\dfrac{C_1-C_2}{C_0} & 2\dfrac{C_2-C_3}{C_0} & \dots & 2\dfrac{C_{1-2}-C_{p-1}}{C_0} & 2\dfrac{C_{p-1}}{C_0} \\ 2 & -2-D & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2-D & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2-D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -2-D \end{vmatrix}.$$

Or, un calcul direct (în care se ține seama de forma explicită a minorilor $C_0, C_1, \dots, C_{p-1}$) ne arată că

$$P(D) = (-1)^p D(D-1) \dots (D-p+1). \tag{16}$$

Avem de rezolvat într-un spațiu Banach X ecuația diferențială liniară (15), unde $P(D)$ este dat de (16). Cum funcția

$$g_0 = b_0 + b_1 e^x + b_2 e^{2x} + \dots + b_{p-1} e^{(p-1)x}, \tag{17}$$

unde $b_0, \dots, b_{p-1} \in X$ este o soluție a ecuației (15) și cum teorema de existență și unicitate a soluției pentru (15) este valabilă și în acest caz lărgit, rezultă că orice soluție a ecuației (15) este de forma (17). În particular,

$$f_0(x) = a_0 + a_1 e^x + \dots + a_{p-1} e^{(p-1)x},$$

adică

$$\mu_0(u\,;h)(t) = a_0 + a_1 h + \dots + a_{p-1} h^{p-1}, \tag{18}$$

unde h este arbitrar în $0 < h < t$ și $a_0, a_1, \dots, a_{p-1} \in X$ sînt fixați.

Luînd în (18) $p+1$ valori diferite

$$0 < h_1 < h_2 < \dots < h_{p+1} < t$$

pentru h și eliminînd pe $a_0, a_1, \dots a_{p-1}$, se obține relația (8). Pe baza caracterizării obținute în [3], $u(t)$ verifică $D^p u(t) = 0$ în $(0, \delta)$, ceea ce încheie demonstrația noastră.

4. *Observație.* Analiza caracterizării (10) sau (8) arată că în fapt acestea sînt forme elaborate ale următorului fapt :

Fie $u(t) \in X$ *continuă definită pe* $(0,\delta)$. *Atunci* $D^p u(t) = 0$ *pe* $(0,\delta)$ *dacă şi numai dacă funcţia*

$$(u\,;h)(t) = T_h u(t-h)$$

definită pentru $0 < h < t < \delta$ este un polinom, de grad $\leqslant p-1$ în h.

Primită la redacţie la 10 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. M. Nicolescu, *Ecuaţia iterată a căldurii.* Studii şi cercetări matematice, **V**, 243–332 (1954).
2. M. Nicolescu, *Sur un théorème de moyenne de M. Picone.* Rend. Acad. Naz. Lincei, **34**, 40–44 (1963).
3. C. Foiaş, *Sur les théorèmes de moyenne de Miron Nicolescu, concernant les fonctions polycaloriques.* Revue Roum. de math. pures et. appl., **9**, 35–38 (1964).

UN MODEL MULTIDIMENSIONAL DE TRANSPORT[1]

DE

ADRIAN CORBAN

§ 1. INTRODUCERE

În articolul de față se studiază problema de programare liniară

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} c_{ijk} x_{ijk} \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} x_{ijk} \leqslant a_i, \qquad (i = 1,\ldots, m) \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} x_{ijk} = b_j, \qquad (j = 1,\ldots, n) \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \leqslant c_k, \qquad (k = 1,\ldots, p) \tag{1.4}$$

$$x_{ijk} \geqslant 0, \ i = 1,\ldots, m; \ j = 1,\ldots, n; \ k = 1,\ldots, p \tag{1.5}$$

$$a_i \geqslant 0, \ b_j \geqslant 0, \ c_k \geqslant 0, \ c_{ijk} \geqslant 0 \tag{1.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} a_i, \ \sum_{j=1}^{n} b_j \leqslant \sum_{k=1}^{p} c_k. \tag{1.7}$$

Datele problemei pot fi interpretate astfel: a_i este cantitatea dintr-un anumit produs omogen livrată de centrul de producție i $(i = 1,\ldots, m)$; b_j este necesarul din acest produs în centrul de consum $j (j = 1, \ldots, n)$;

---

[1] Acest articol a apărut în Rev. Roum. de Math. pures et appl., **IX**, *8* (1964).

c_k este cantitatea ce poate fi transportată cu mijlocul de transport $k(k=1,\ldots,p)$; c_{ijk} este costul transportului unei unităţi din acelaşi produs de la centrul de producţie i la centrul de consum j cu mijlocul de transport k, iar x_{ijk} reprezintă cantitatea din produsul omogen considerat ce urmează a fi transportată de la centrul de producţie i la centrul de consum j cu mijlocul de transport k. Cantităţile x_{ijk} trebuie determinate astfel ca costul total al transportului să fie minim.

Problema enunţată, pe care o vom numi problema T_1 se poate particulariza în diferite moduri obţinînd în afară de problema obişnuită de transporturi, probleme ce se încadrează în acelaşi model matematic şi care pot fi rezolvate la fel. Interpretarea economică a acestor probleme care apar în practica planificării rezultă din interpretarea problemei T_1.

Se ştie că modelul matematic al problemei transporturilor este adaptabil unor probleme de distribuţie, afectare de personal, probleme de alegere etc.

Articolul tratează bazele matematice şi algoritmul de rezolvare fără a se ocupa de posibilitatea eventualelor adaptări.

§ 2. DEFINIŢII. NOTAŢII

Vom nota în cele ce urmează

$$(1,\ldots,m)=M\,;\ (1,\ldots,n)=N\,;\ (1,\ldots,p)=P,\ M\times N\times P=I.$$

Vom arăta în § 3 că problema T_1 poate fi adusă la forma canonică T:

$$\min \sum_{(i,j,k)\in I} c_{ijk}x_{ijk} \tag{2.1}$$

$$\sum_{j\in N}\sum_{k\in P} x_{ijk}=a_i,\quad i\in M, \tag{2.2}$$

$$\sum_{i\in M}\sum_{k\in P} x_{ijk}=b_j,\quad j\in N, \tag{2.3}$$

$$\sum_{i\in M}\sum_{j\in N} x_{ijk}=c_k,\quad k\in P, \tag{2.4}$$

$$x_{ijk}\geqslant 0,\quad (i,j,k)\in I, \tag{2.5}$$

$$a_i>0,\ b_j>0,\ c_k>0,\ c_{ijk}\geqslant 0, \tag{2.6}$$

$$\sum_{i\in M} a_i=\sum_{j\in N} b_j=\sum_{k\in P} c_k. \tag{2.7}$$

Mulţimea $\{(c_{ijk})\,|\,(i,j,k)\in I\}$ o vom numi matrice tridimensională a costurilor.

$X=\{(x_{ijk})\,|\,(i,j,k)\in I\}$ care satisface condiţiile (2.2) — (2.5) se numeşte plan de transport. x_{ijk} sînt componentele planului.

Planul X se numește plan optim sau soluție a problemei T dacă realizează minimumul expresiei:

$$L(X) = \sum_{(i,j,k)\in I} c_{ijk} x_{ijk}.$$

Introducem vectorii cu $m + n + p$ componente

$$a_{ijk} = e_i + e_{m+j} + e_{m+n+k}, \quad (i,j,k) \in I,$$

unde e_h sînt vectorii unitari cu $m + n + p$ componente. Formăm cu acești vectori matricea A cu $m + n + p$ linii și mnp coloane

$$A = (a_{111}, \ldots, a_{11p}, a_{121}, \ldots, a_{12p}, \ldots, a_{1n1}, \ldots, a_{1np}, a_{211}, \ldots, a_{21p}, a_{221}, \ldots,$$
$$a_{22p}, \ldots, a_{2n1}, \ldots, a_{2np}, \ldots, a_{m11}, \ldots, a_{m1p}, a_{m21}, \ldots, a_{m2p}, \ldots, a_{mn1}, \ldots, a_{mnp}).$$

Notăm $I_X = \{(i,j,k) \in I \mid x_{ijk} > 0,\ x_{ijk} \in X\}$. Elementele c_{ijk} pentru $(i,j,k) \in I_X$ se numesc elemente marcate ale planului X sau X-marcate.

Un plan de transport X se numește plan de bază dacă vectorii a_{ijk} pentru $(i,j,k) \in I_X$ sînt liniar independenți.

Problema de transport T se numește nedegenerată dacă orice plan de bază conține $m + n + p - 2$ componente pozitive.

Vom spune că componentele pozitive x_{ijk} ale unui plan de transport formează un ciclu dacă vectorii corespunzători a_{ijk} sînt liniar dependenți.

§ 3. REDUCEREA LA FORMA CANONICĂ

Dacă în problema T_1 $\sum_{k=1}^{p} c_k > \sum_{i=1}^{m} a_i$, ea se poate reduce la forma canonică, adică putem transforma problema T_1 într-o problemă care are $m+1$ centre de producție, $n + 1$ centre de consum și p mijloace de producție dar în care condițiile (1.2) — (1.4) să fie egalități. Parametrii noii probleme T_1': a_i', b_j', c_k', c_{ijk}', sînt dați de relațiile:

$$a_i' = \begin{cases} a_i, & i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{k=1}^{p} c_k - \sum_{i=1}^{m} a_i, & i = m + 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$b_j' = \begin{cases} b_j & j \in N, \\ \sum_{k=1}^{p} c_k - \sum_{j=1}^{n} b_j, & j = n + 1, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$c_k' = c_k, \quad k \in P, \tag{3.3}$$

$$c_{ijk}' = \begin{cases} c_{ijk} & (i,j,k) \in I, \\ 0 & j = n + 1 \\ M & i = m + 1, \quad j \neq n + 1, \end{cases} \tag{3.4}$$

unde M este o cantitate suficient de mare pentru ca în planul optim al problemei T_1', $x_{m+1,j,k} = 0$ pentru $j \neq n+1$. Costuri artificiale mari mai apar în matricea tridimensională a costurilor pe poziția (i, j, k) dacă pe ruta (i, j) transportul nu se poate face cu mijlocul de transport k.

Pentru problema obținută

$$\sum_{i=1}^{m+1} a_i' = \sum_{j=1}^{n+1} b_j' = \sum_{k=1}^{p} c_k'$$

Dacă $\sum\limits_{k=1}^{p} c_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} a_i$ se procedează analog.

TEOREMA 1. *Dacă* $X' = (x_{ijk})_{m+1,n+1,p}$ *este un plan optim al problemei* T_1', *atunci* $X = (x_{ijk})_{m,n,p}$, *unde* $x_{ijk} = x_{ijk}'$, $(i, j, k) \in I$ *este plan optim al problemei* T_1.

Demonstrație. Avem

$$\sum_{=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} x_{ijk} = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{p} x_{ijk}' - \sum_{k=1}^{p} x_{i,n+1,k}' = a_i - \sum_{k=1}^{p} x_{i,n+1,k}' \leqslant a_i, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} x_{ijk} = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{p} x_{ijk}' = b_j' = b_j, \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ijk}' - \sum_{i=1}^{m+1} x_{i,n+1,k}' = c_k - \sum_{i=1}^{m+1} x_{i,n+1,k}' \leqslant c_k, \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Am folosit faptul că $x_{m+1,j,k}' = 0$ pentru $j = n+1$.

Dacă ar exista un plan $\overline{X}$ al problemei T_1 pentru care $L(\overline{X}) < L(X)$, atunci cu ajutorul acestui plan putem construi un plan $\overline{X}'$ al problemei T_1 în felul următor:

$$\overline{x}_{ijk}' = \overline{x}_{iik}, \quad (i, j, k) \in I$$
$$\overline{x}_{m+1,j,k}' = 0, \quad j \neq n+1.$$

$\overline{x}_{i,n+1,k}'$ se iau drept componentele unui plan de transport arbitrar al problemei obișnuite de transport

$$\sum_{k=1}^{p} \overline{x}_{i,n+1,k}' = a_i' - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \overline{x}_{ijk}, \quad i \in M$$

$$\sum_{k=1}^{p} \overline{x}_{m+1,n+1,k}' = a_{m+1}'$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} \overline{x}_{i,n+1,k}' = c_k' - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_{ijk}, \qquad k \in P$$

$$\overline{x}_{i,n+1,k}' \geqslant 0$$

$\overline{X}'=(\overline{x}'_{ijk})_{m+1,n+1,p}$ este un plan al problemei T_1'

$$\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n+1}\overline{x}'_{ijk}=c_k'+\sum_{j=1}^{n}\overline{x}'_{i,n+1,k}=c_k',\quad k\in P$$

$$\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{k=1}^{p}\overline{x}'_{ijk}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\overline{x}'_{ijk}+\sum_{k=1}^{p}\overline{x}'_{m+1,j,k}=\begin{cases}b_j=b_j',\ j\neq n+1\\ \sum\limits_{i\in M}\sum\limits_{k\in P}\overline{x}'_{i,n+1,k}+a'_{m+1}=b'_{n+1},\ j=n+1\end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{p}\overline{x}'_{ijk}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\overline{x}'_{ijk}+\sum_{k=1}^{p}\overline{x}'_{i,n+1,k}=a_i',\quad (i=1,\ldots,m+1)$$

Pe de altă parte din (3.2) rezultă

$$L(\overline{X}')=L(\overline{X})<L(X)=L(X')$$

ceea ce contrazice faptul că X' este planul optim al problemei T_1'.

Deci orice problemă de forma T_1 se poate aduce la forma canonică T_1 iar planul optim al problemei T_1 se deduce imediat din planul optim al problemei T_1. Ne vom ocupa deci de problema T — (2.1) — (2.7).

§ 4. TEOREMA DE EXISTENȚĂ A SOLUȚIEI

Vom arăta că condiția (2.7) care este evident o condiție necesară a existenței soluției pentru problema T este și o condiție suficientă.

TEOREMA 2. *Problema* T *are soluție.*

Demonstrație. Conform [1] este suficient să demonstrăm că:

a) Problema T admite un plan de transport;

b) Forma liniară $L(X)$ e mărginită inferior pe mulțimea tuturor planurilor.

a) Punem $r=m+n+p$ și demonstrăm prin inducție.

Dacă $r=3$ și condiția (2.7) e îndeplinită, afirmația a) este evidentă.

Presupunem că a) este adevărată pentru orice problemă cu $r\leqslant k-1$. Fie $r=m+n+p=k$. Punem $x_{111}=\min(a_1,b_1,c_1)$. Dacă $x_{111}=a_1$ punem $x_{1jk}=0$ pentru $(j,k)\neq(1,1)$

$$\begin{aligned}&a_i'=a_i, && i=2,\ldots,m &&\\ &b_j'=b_j, && j=2,\ldots,n, && b_1'=b_1-a_1\\ &c_k'=c_k, && k=2,\ldots,p, && c_1'=c_1-a_1\end{aligned}$$

și am redus problema T la o problemă pentru care $\sum\limits_{i=2}^{m}a_i'=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j'=\sum\limits_{k=1}^{p}c_k'$ și pentru care $r=m-1+n+p=k-1$ deci pentru care e adevărată afirmația a).

b) $\sum\limits_{(ijk)\in I}c_{ijk}x_{ijk}\geqslant 0$ oricare ar fi planul X al problemei T. Teorema e demonstrată.

TEOREMA 3. *Rangul matricii A este $m+n+p-2$.*

Demonstrație. Orice sistem format cu $m+n+p-1$ ecuații de condiție (2. 2) — (2. 4) este liniar dependent dacă condiția (2.7) e îndeplinită.

Presupunem că un astfel de sistem conține $m-1$ ecuații (2. 2) și ecuațiile (2. 3), (2. 4) Vom arăta că ecuațiile (2. 3), (2. 4) sînt liniar dependente. Vom arăta, de exemplu, că prima ecuație din acest sistem e o consecință a celorlalte $n+p-1$ și a condiției (2.7) :

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} x_{i1k}=\sum_{(ijk)\in I} x_{ijk}-\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk}=\sum_{k=1}^{p} c_k-\sum_{j=2}^{n} b_j=b_1.$$

Pe de altă parte, în matricea A există un minor de ordinul $m+n+$ $+p-2$ diferit de 0. Determinantul matricei A'' pătratică de ordinul $m+n+p-2$ obținută din matricea

$A=(a_{111},\ a_{211},\ldots,\ a_{m11},\ a_{121},\ a_{131},\ldots,\ a_{1n1},\ a_{112},\ldots,\ a_{113},\ a_{11p})$ prin eliminarea liniilor $m+1$ și $m+n+1$ este egal cu 1.

§ 5. CRITERIU DE DEGENERARE

LEMĂ. *Planul construit la demonstrarea teoremei 2 este un plan de bază.*

Demonstrație. Prin inducție relativă la $r=m+n+p$. Pentru $r=3$ proprietatea e adevărată. Presupunem afirmația adevărată pentru orice $r\leqslant k-1$.

Fie $r=m+n+p=k$ și planul X construit conform procedeului. Considerăm combinația liniară :

$$\alpha_{111}a_{111}+\sum_{(ijk)\in I'_X}\alpha_{ijk}a_{ijk}=0,\qquad I'_X=I_X-\{(1,1,1)\}$$

Cum $x_{ijk}=0$ pt. orice $(j,k)\neq(1,1)$, $\alpha_{111}=0$.

Dar a_{ijk}, $(i,j,k)\in I'_X$ sînt liniar independenți. Deci $\alpha_{ijk}=0$ pentru $(i,j,k)\in I'_X$ deci planul X e plan de bază.

TEOREMA 4. *Dacă problema* T *este nedegenerată, atunci mulțimile*

$$\left\{\sum_{i\in M'} a_i\,\middle|\, M'\subset M,\ M'\neq M\right\},\left\{\sum_{j\in N'} b_j\,\middle|\, N'\subset N,\ N'\neq N\right\};\left\{\sum_{k\in P'} c_k\,\middle|\, P'\subset P,\ P'\neq P\right\}$$

sînt două cîte două disjuncte, M', N', P' fiind nevide.

Demonstrație. Presupunem că problema T e nedegenerată dar că există $M'\subset M$ și $N'\subset N$ submulțimi proprii astfel ca : $\sum\limits_{i\in M'} a_i=\sum\limits_{j\in N'} b_j$.

Schimbînd eventual ordinea putem presupune că $M'=(1,\ldots,m_1)$ $N'=(1,\ldots,n_1)$. Fie

$$p_1=\min\left\{\ \middle|\ \sum_{s=1}^{k} c_s\geqslant\sum_{i=1}^{m_1} a_i\right\}.$$

Considerăm problema de transporturi cu parametrii

$$a'_i = a_i, \quad (i = 1, \ldots, m_1)$$
$$b'_j = b_j, \quad (j = 1, \ldots, n_1)$$
$$c'_k = c_k, \quad (k = 1, \ldots, p_1 - 1)$$
$$c'_{p_1} = \sum_{i=1}^{m_1} a_i - \sum_{k=1}^{p_1-1} c_k \geqslant 0$$

pentru care avem evident

$$\sum_{i=1}^{m_1} a'_i = \sum_{j=1}^{n_1} b'_j = \sum_{k=1}^{p_1} c'_k.$$

Construim un plan pentru această problemă după procedeul de la demonstrarea teoremei 2. Fiind un plan de bază, el nu poate avea mai mult de $m_1 + n_1 + p_1 - 2$ componente pozitive.

Procedăm în continuare la fel cu problema de transporturi cu parametrii :

$$a''_i = a_i, \quad (i = m_1 + 1, \ldots, m)$$
$$b''_j = b_j, \quad (j = n_1 + 1, \ldots, n)$$
$$c''_k = c_k, \quad (k = p_1 + 1, \ldots, k)$$
$$c''_{p_1} = \sum_{k=1}^{p_1} c_k - \sum_{i=1}^{m_1} a_i = c_{p_1} - c'_{p_1}$$

pentru care evident

$$\sum_{i=m_1+1}^{m} a''_i = \sum_{j=n_1+1}^{n} b''_j = \sum_{k=p_1}^{p} c''_k .$$

Întreg procesul ne conduce la un plan de bază al problemei T care are cel mult $m_1 + n_1 + p_1 - 2 + (m - m_1) + (n - n_1) + (p - p_1 + 1) - 2 = m + n + p - 3$ componente pozitive ceea ce contrazice ipoteza de nedegenerare a problemei T.

§ 6. CRITERIU DE OPTIMALITATE

Duala problemei T este următoarea :

$$\max \left(\sum_{i \in M} a_i u_i + \sum_{j \in N} b_i v_j + \sum_{k \in P} c_k w_k \right) \tag{6.1}$$

$$u_i + v_j + w_k \leqslant c_{ijk}, \quad (i, j, k) \in I. \tag{6.2}$$

Conform teoriei generale a programării liniare, sistemul de valori x_{ijk}, u_i, v_j, w_k $(i, j, k) \in I$ constituie un program optim pentru problema T şi pentru duala sa dacă şi numai dacă sînt îndeplinite condiţiile (2.2) — (2.5) şi

$$c_{ijk} - u_i - v_j - w_k \geqslant 0, \quad (i, j, k) \in I \tag{6.3}$$

$$x_{ijk}(c_{ijk} - u_i - v_j - w_k) = 0, \quad (i, j, k) \in I. \tag{6.4}$$

Vom construi un plan iniţial de bază X^0 pentru care determinăm u_i^0, v_j^0, w_k^0 astfel ca

$$u_i^0 + v_j^0 + w_k^0 = c_{ijk}, \quad (i, j, k) \in I_{X^0}. \tag{6.5}$$

Ecuaţiile (6.5) sînt liniar independente deoarece vectorii a_{ijk} $(i, j, k) \in I_{X^0}$ sînt liniar independenţi.

Condiţiile (2.2) — (2.5) şi (6.4) sînt îndeplinite. Dacă sînt îndeplinite şi condiţiile (6.3), planul este optim. În caz contrar, cu ajutorul unei metode de îmbunătăţire succesivă a planului, se obţine un nou plan de bază X^1 pentru care $L(X^1) < L(X^0)$.

§ 7. DEDUCEREA SOLUŢIEI INIŢIALE

În acest paragraf şi în următoarele vom presupune că problema T e nedegenerată.

Notăm

$$c_{ij_1k_1} = \min_{(j,k)\in N\times P} c_{ijk}, \quad c_{ij_2k_2} = \min_{(j,k)\in N_1\times P_1} c_{ijk}, \quad i \in M, \quad N_1 \times P_1 = N \times P - \{(j_1, k_1)\}$$

$$c_{i_1'jk_1'} = \min_{(i,k)\in M\times P} c_{ijk}, \quad c_{i_2'jk_2'} = \min_{(i,k)\in M'\times P'} c_{ijk}, \quad j \in N, \quad M' \times P' = M \times P - \{(i_1', k_1')\}$$

$$c_{i_1''j_1''k} = \min_{(i,j)\in M\times N} c_{ijk}, \quad c_{i_2''j_2''k} = \min_{(i,j)\in M''\times N''} c_{ijk}, \quad k \in P, \quad M'' \times N'' = M \times N - \{(i_1'', k_1'')\},$$

$$d_i = c_{ij_2k_2} - c_{ij_1k_1}, \quad i \in M,$$

$$d_j' = c_{i_2'jk_2'} - c_{i_1'jk_1'}, \quad j \in N,$$

$$d_k'' = c_{i_2''j_2''k} - c_{i_1''j_1''k}, \quad k \in P.$$

Luăm max (d_i, d_j', d_k'').

În cazul în care minimumul sau maximumul este atins pentru mai multe valori, se ia una din ele. Presupunem că maximumul este atins pentru d_{j_0}'. Atunci $c_{i_1'j_0k_1'}$ este primul element marcat.

Punem $x_{i_1'j_0k_1'} = \min\,(a_{i_1'}, b_{j_0}, c_{k_1'})$. În ipoteza nedegenerării problemei T, minimumul este atins pentru o singură valoare. Fie aceasta $a_{i_1'}$.

Vom pune atunci:

$$x_{i'_1 j_0 k'_1} = a_{i'_1}$$

$$\begin{array}{lll} a'_i = a_i, & i \neq i_1 & \\ b'_j = b_j, & j \neq j_0, & b'_{j_0} = b_{j_0} - x_{i'_1 j_0 k'_1} \\ c'_k = c_k, & k \neq k'_1, & c'_{k'_1} = c_{k'_1} - x_{i'_1 i_0 k'_1} \end{array}$$

şi aplicăm procedeul pentru noua problemă obţinută ce are o dimensiune mai puţin. Prin acest procedeu, ca şi prin procedeul de la demonstrarea teoremei 2, se obţine un plan de bază. Demonstraţia e analoagă.

§ 8. ÎMBUNĂTĂŢIREA PLANULUI

Presupunem că pentru un anumit plan X^r de bază condiţiile (6.3) nu sînt îndeplinite; înseamnă că există $(i, j, k) \in I - I_{X^r}$ pentru care

$$c_{ijk} - u_i^r - v_j^r - w_k^r < 0.$$

Vom arăta cum se deduce planul X^{r+1} din planul X^r în aşa fel că $L(X^{r+1}) < L(X^r)$.

Notăm:

$$c^r_{i_0 j_0 k_0} = \min_{(ijk) \in I} (c_{ijk} - u_i^r - v_j^r - w_k^r)$$

$(i_0, j_0, k_0) \notin I_{X^r}$ şi sistemul format din $m + n + p - 1$ vectori a_{ijk}, pentru $(i, j, k) \in I_{X^r}$ şi $a_{i_0 j_0 k_0}$ este liniar dependent conform teoremei 3. Deoarece $m+n+p-2$ este numărul maxim de vectori liniar independenţi din sistemul a_{ijk} $(i, j, k) \in I$, înseamnă că vectorii $a_{ijk}(i, j, k) \in I_{X^r}$ formează un sistem de generatori pentru sistemul tuturor vectorilor $a_{ijk}\,(i, j, k) \in I$. Acelaşi lucru se întîmplă cu orice sistem de vectori ai oricărui plan de bază. Deci

$$a_{i_0 j_0 k_0} = \sum_{(ijk) \in I_{X^r}} z^r_{ijk} a_{ijk}.$$

Coeficienţii z^r_{ijk} nu mai sînt, ca în cazul problemei obişnuite a transporturilor, egali cu 0, ± 1, dar satisfac relaţiile simple:

$$\sum_{j,k} z^r_{ijk} = \delta_i^{i_0},$$

$$\sum_{i,k} z^r_{ijk} = \delta_j^{j_0},$$

$$\sum_{i,j} z^r_{ijk} = \delta_k^{k_0}.$$

Cu ajutorul vectorului cu $m + n + p$ componente

$$a = \begin{pmatrix} a_i \\ b_j \\ c_k \end{pmatrix}$$

faptul că $X^r = (x^r_{ijk})$ e un plan al problemei T se poate scrie sub forma

$$\sum_{(i,j,k)\in I_{X^r}} a_{ijk}x^r_{ijk} = a.$$

Vom nota

$$\theta^r = \min_{z_{ijk}>0} \frac{x_{ijk}}{z^r_{ijk}},$$

$$x^{r+1}_{ijk} = x^r_{ijk} - \theta^r z^r_{ijk}, \qquad (i, j, k) \in I_X r,$$

$$x^{r+1}_{i_0j_0k_0} = \theta^r.$$

Ciclul apărut prin introducerea lui $x_{i_0j_0k_0}$ se rezolvă respectînd condițiile (2.2) –(2.5). Într-adevăr :

$$\sum_{j\in N}\sum_{k\in P} x^{r+1}_{ijk} = \sum_{j\in N}\sum_{k\in P} (x^r_{ijk} - \theta^r z^r_{ijk}) = a_i \quad \text{ş.a.m.d.}$$

Arătăm că $L(X^{r+1}) < L(X^r)$:

$$L(X^{r+1}) = \sum_{(i,j,k)\in I_{X^r}} c_{ijk}x^{r+1}_{ijk} = \sum_{(i,j,k)\in I_{X^r}} c_{ijk}x^r_{ijk} - \theta^r \sum_{(i,j,k)\in I_{X^r}} c_{ijk}z^r_{ijk} + \theta^r c_{i_0j_0k_0} =$$

$$= L(X^r) + \theta^r \Big[c_{i_0j_0k_0} - \sum_{(i,j,k,)\in I_{X^r}} (u^r_i + v^r_j + w^r_k) z^r_{ijk}\Big] = L(X^r) +$$

$$+ \theta^r \Big[c_{i_0j_0k_0} - \sum_{i\in M} u^r_i \sum_{j\in N}\sum_{k\in P} z^r_{ijk} - \sum_{j\in N} v^r_j \sum_{i\in M}\sum_{k\in P} z^r_{ijk} - \sum_{k\in P} w^r_k \sum_{i\in M}\sum_{j\in N} z_{ijk}\Big] =$$

$$= L(X^r) + \theta^r \Big[c_{i_0j_0k_0} - \sum_{i\in M} u^r_i \delta^{i_0}_i - \sum_{j\in N} v^r_j \delta^{j_0}_j - \sum_{k\in P} w^r_k \delta^{k_0}_k\Big] =$$

$$= L(X^r) + \theta^r [c_{i_0j_0k_0} - u^r_{i_0} - v^r_{j_0} - w^r_{k_0}] < L(X^r).$$

Faptul că planul X^{r+1} este un plan de bază și faptul că soluția se obține într-un număr finit de pași rezultă din teoria generală a programării liniare.

În cazul în care problema este degenerată, anumite planuri vor avea $s < m + n + p - 2$ elemente pozitive. Completăm un astfel de plan punînd $m+n+p-2-s$ componente egale cu ε, în așa fel ca cele $m + n + p - 2$ componente pozitive să constituie un plan de bază, ε fiind un element cu efect nul la adunare dar semnificînd o componentă pozitivă a respectivului plan, adică dacă pe poziția $(i_\alpha, j_\alpha, k_\alpha)$ apare un ε, aceasta înseamnă că $c_{i_\alpha, j_\alpha, k_\alpha,}$ este X-marcat și $(i_\alpha, j_\alpha, k_\alpha) \in I_X$.

În cazul în care pentru un anumit plan X^r

$$x^r_{i_1,j_1,k_1} = \varepsilon, \quad z^r_{i_1,j_1,k_1} > 0$$

vom pune

$$x^{r+1}_{ijk} = x^r_{ijk}, \quad (i, j, k) \in I_X r, \quad x^{\ +1}_{i_0j_0k_0} = \varepsilon.$$

În acest caz și numai în acest caz $L(X^{r+1}) = L(X^r)$ dacă $c^r_{i_0j_0k_0} < 0$, $c_{i_1j_1k_1}$ nu va mai fi X^{r+1} -marcat.

Soluția X nu este unică în cazul în care există $(i, j, k) \in I - I_X$ pentru care $c_{ijk} - u_i - v_j - w_k = 0$.

Pe pozițiile respective se pot introduce componente pozitive, rezolvînd sau nu ciclurile corespunzătoare fără a se altera optimalitatea planului. În practică acest lucru se poate folosi la „rotunjiri" în cazul în care componentele planului optim nu sînt numere întregi.

§ 9. EXEMPLU

Considerăm problema de transporturi cu $a_1 = 24$, $a_2 = 8$, $a_3 = 18$, $a_4 = 10$, $b_1 = 11$, $b_2 = 19$, $b_3 = 21$, $b_4 = 9$, $c_1 = 17$, $c_2 = 31$,$c_3 = 12$ și cu matricea tridimensională a costurilor din figura 1.

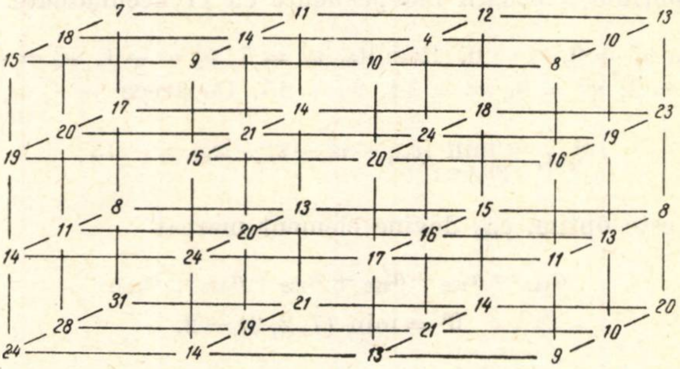

7
11
12
13
18
14
4
10
15
9
10
8
17
14
18
23
20
21
24
19
19
15
20
16
8
13
15
8
11
20
16
13
14
24
17
11
31
21
14
20
28
19
21
10
24
14
13
9

Fig. 1

Se observă că $a_1 + a_2 = b_1 + b_3$, deci conform criteriului stabilit problema e degenerată.

Construim planul inițial X ca la demonstrarea teoremei 2. Conform lemei, planul va fi de bază (fig. 2).

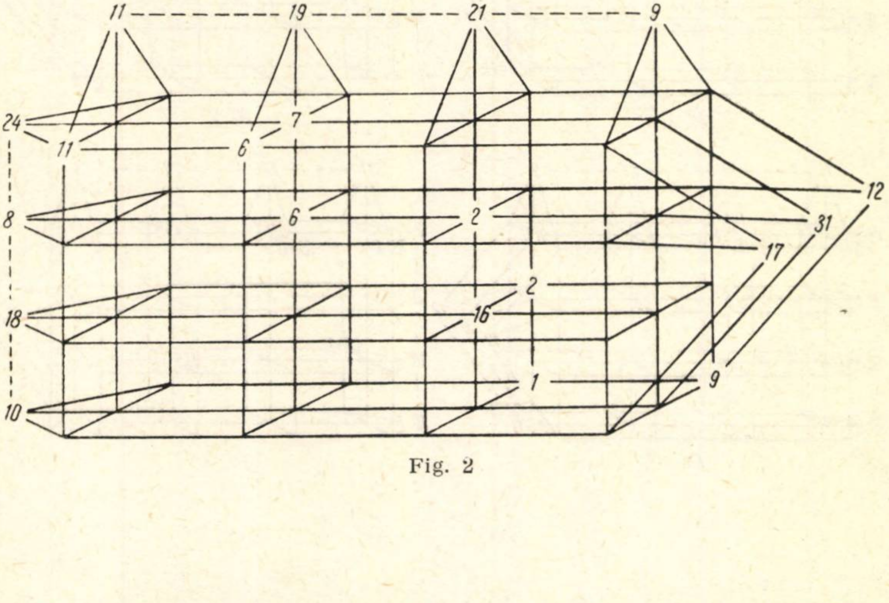

11
19
21
9
24
7
11
6
12
8
6
2
31
17
2
18
16
1
9
10

Fig. 2

Determinăm cantitățile $u_1^1, u_2^1, u_3^1, u_4^1, v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1, w_1^1, w_2^1, w_3^1$ astfel încît

$$\begin{aligned} &u_1^1+v_1^1+w_1^1=15, && u_3^1+v_3^1+w_2^1=16,\\ &u_1^1+v_2^1+w_1^1=9\ , && u_3^1+v_3^1+w_3^1=15,\\ &u_1^1+v_2^1+w_2^1=14, && u_4^1+v_3^1+w_3^1=14,\\ &u_2^1+v_2^1+w_2^1=21, && u_4^1+v_4^1+w_3^1=20.\\ &u_2^1+v_3^1+w_2^1=24, && \end{aligned}$$

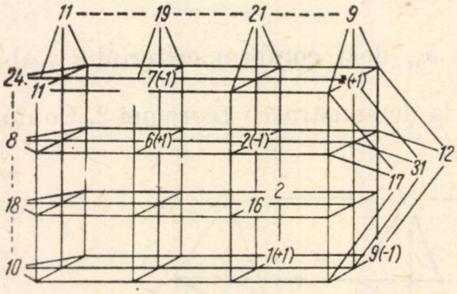
Am obținut 9 ecuații independente cu 11 necunoscute.

Luăm $u_1^1=0$, $v_2^1=0$. Rezultă $u_2^1=7$, $u_3^1=-1$, $u_4^1=-2$, $v_1^1=6$, $v_3^1=3$, $v_4^1=9$, $w_1^1=9$, $w_2^1=14$, $w_3^1=13$. Deoarece

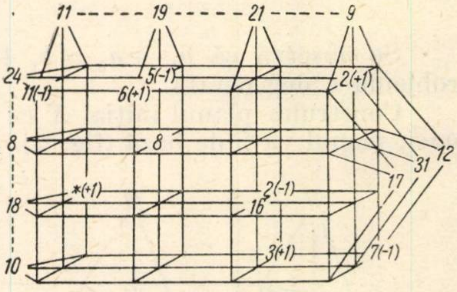
$$c^1_{i_0j_0k_0}=\min_{(i,j,k)\in 1}(c_{ijk}-u_i^1-v_j^1-w_k^1)=-13$$

planul nu este optim. c_{142} devine element marcat

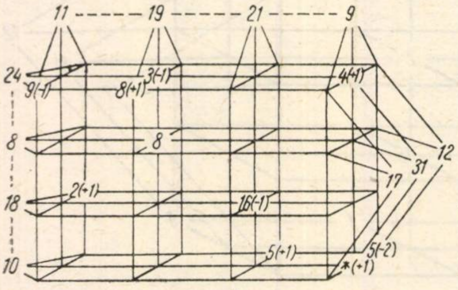
$$a_{142}=a_{122}-a_{222}+a_{232}-a_{433}+a_{443},$$
$$\theta^1=\min\ (7,2,9)=2.$$


11
19
21
9
24
7(-1)
*(+1)
11
8
6(+1)
2(-1)
12
31
17
2
18
16
1(+1)
9(-1)
10

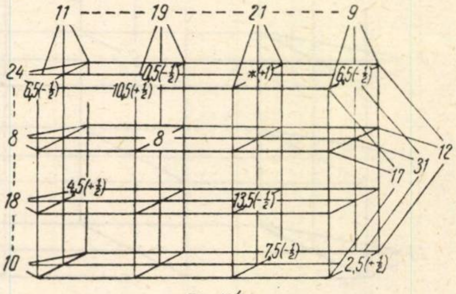
Pl. X^1


11
19
21
9
24
5(-1)
2(+1)
11(-1)
6(+1)
8
8
12
31
17
*(+1)
2(-1)
18
16
3(+1)
7(-1)
10

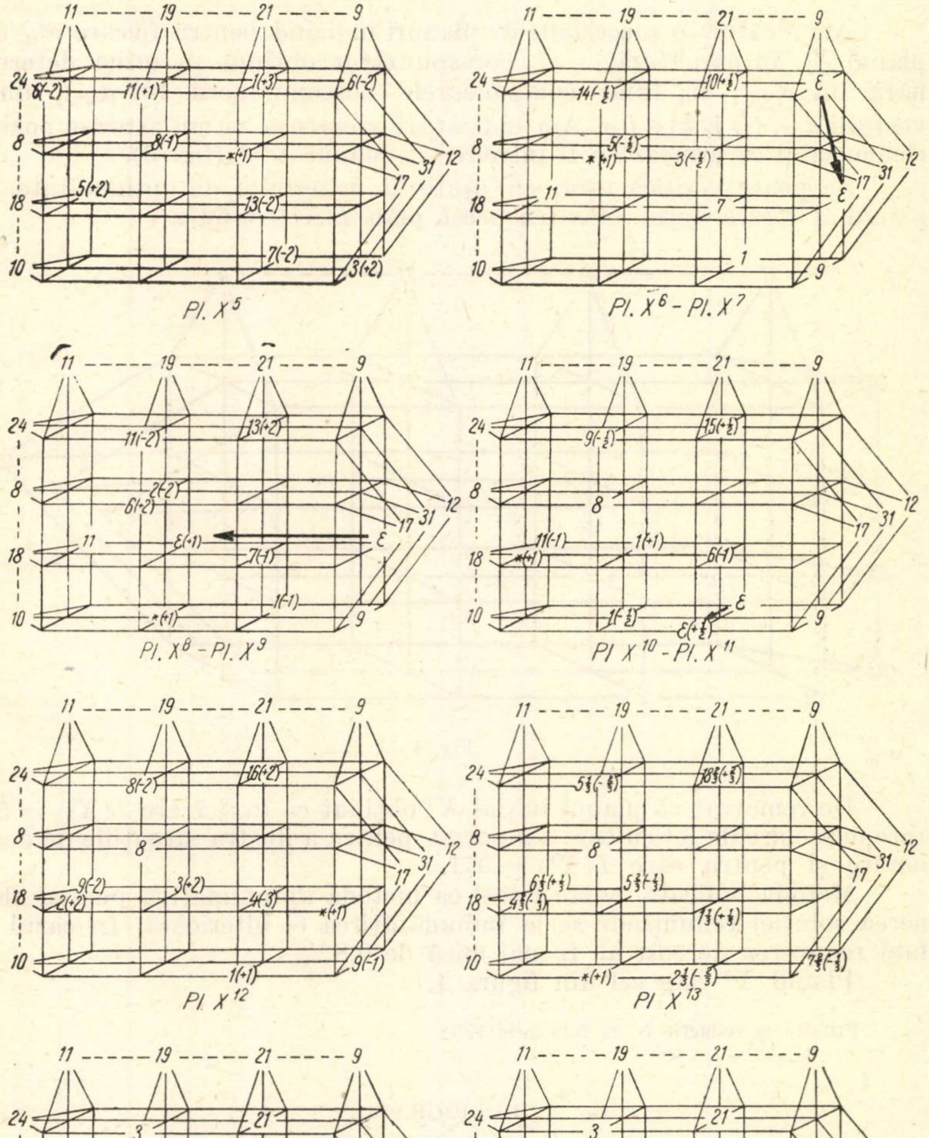
Pl. X^2


11
19
21
9
24
3(-1)
4(+1)
9(-1)
8(+1)
8
8
12
31
17
2(+1)
18
16(-1)
5(+1)
5(-2)
10
*(+1)

Pl. X^3


11
19
21
9
24
0,5(-½)
*(+1)
6,5(-½)
6,5(-½)
10,5(+½)
8
8
12
31
17
4,5(+½)
18
13,5(-½)
7,5(-½)
10
2,5(+½)

Pl. X^4


11
19
21
9
24
8
18
10
12
31
17
8(-2)
11(+1)
1(+3)
6(-2)
8(-1)
*(+1)
5(+2)
13(-2)
7(-2)
3(+2)
14(-½)
10(+½)
ε
5(-½)
*(+1)
3(-½)
11
7
1
11(-2)
13(+2)
2(-2)
6(+2)
ε(+1)
7(-1)
1(-1)
*(+1)
9(-½)
15(+½)
11(-1)
*(+1)
1(+1)
6(-1)
1(-½)
ε(+½)
8(-2)
16(+2)
9(-2)
2(+2)
3(+2)
4(-3)
*(+1)
1(+1)
9(-1)
5⅓(-⅔)
18⅔(+⅔)
6⅓(+⅓)
4⅓(-⅓)
5⅔(-⅓)
1⅔(+⅓)
*(+1)
2⅓(-⅔)
7⅔(-⅓)
3
21
7,5(-½)
3,5(+½)
4,5(-½)
2,5(-½)
3,5(+½)
6,5(-½)
5
2
6
4

Pl. X^5 Pl. X^6 – Pl. X^7

Pl. X^8 – Pl. X^9 Pl X^{10} – Pl. X^{11}

Pl X^{12} Pl X^{13}

Pl. X^{14} Pl. X^{15}

Fig. 3

Am alcătuit o succesiune de planuri indicînd pentru fiecare x^r_{ijk} din planul X^r, în paranteză, $-z^r_{ijk}$ corespunzător obținut în urma determinării lui $c^r_{i_0j_0k_0}$, z^r_{ijk} fiind componentele descompunerii lui $a_{i_0j_0k_0}$ după vectorii a_{ijk}, $(i, j, k) \in I_{X^r}$. Am indicat de asemenea cu un asterisc poziția elementului ce urmează a fi introdus în planul X^{r+1} (fig. 3).

Se poate verifica ușor, cu ajutorul criteriului de optimalitate, că planul X^{15} este optim. Pentru acest plan $L(X^{15}) = 527$.

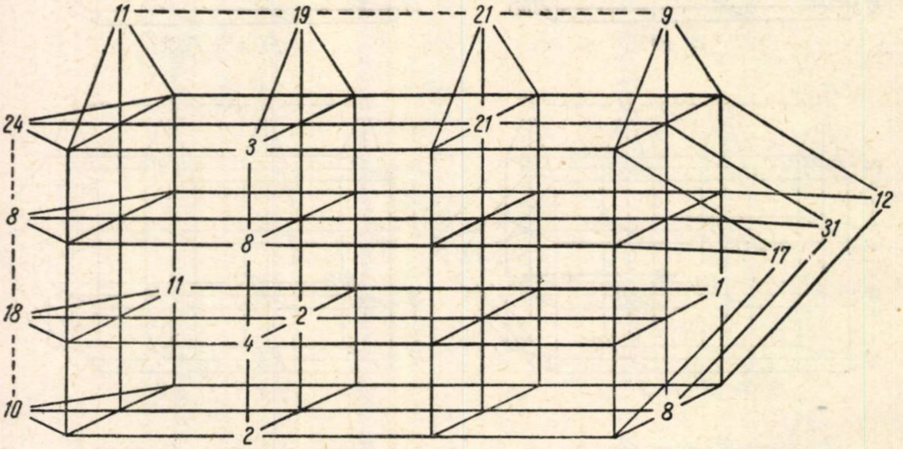


Fig. 4

De remarcat că planul inițial X^0 obținut ca în § 7 are $L(X^0) = 531$ spre deosebire de X^1 cu care s-a pornit pentru a ilustra situațiile de degenerare și pentru care $L(X^1) = 971$.

Metoda indicată poate folosi ca metodă aproximativă pentru obținerea soluției renunțîndu-se la îmbunătățirea ei ulterioară. În cazul de față reducerea de cost ar fi mai mică de 0,8%.

Planul X^0 este cel din figura 4.

Primită la redacție la 21 februarie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Д. Б. ЮДИН, Е. Г. ГОЛЬШТЕЙН, *Задачи и методы линейного программирования*. Москва, 1961.

2. Г. ЗОЙТЕНДЕЙК, *Методы возможных направлений*. Москва, 1963.

3. M. SIMONARD, *Programmation linéaire*. Dunod, Paris, 1962.

CONTRIBUŢII LA STUDIUL ECUAŢIILOR POLIVIBRANTE.

II. COMPORTAREA CALITATIVĂ A SOLUŢIILOR UNEI NOI CLASE DE PROBLEME DE CONTUR INTEGRO-DIFERENŢIALE NELINIARE

DE

D. MANGERON
Institutul politehnic Iaşi

şi L. E. KRIVOŠEIN
Academia de ştiinţe a R.S.S. Kirghizia

1. Literatura matematică universală datorează academicianului Miron Nicolescu o vastă gamă de rezultate profunde, devenite repede clasice, consacrate ecuaţiilor poliarmonice [1], [2] şi policalorice.

Într-o lucrare recentă, prezentată la cea de a XII-a Conferinţă de comunicări ştiinţifice a Universităţii din R.S.S. Kirghizia, autorii [3] au studiat, luînd ca punct de plecare o serie de lucrări elaborate de D. Mangeron şi consacrate ecuaţiilor polivibrante, caracterizate prin prezenţa operatorilor cu derivate parţiale de ordin superior de forma

$$M_m^k \equiv \left(\frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \ldots \partial x_m^2} - \frac{\partial^{2m}}{\partial y_1^2 \partial y_2^2 \ldots \partial y_m^2}\right)^{(k)} \tag{1}$$

(care se reduc pentru $m = 1$, $k = 1$, la clasicul operator al undelor) [4], [5], un număr de noi clase de probleme de contur interesînd fizica şi tehnica actuale [6], [7], avînd ca prototip

$$M_1^n[v] - \iint\limits_P \sum_{i,k=0}^{n} \left\{L_k(A, B) M_1^k[v] + K_{ik}(A, B)\, \frac{\partial^{i+k} u(B)}{\partial t^i \partial \tau^k}\right\} \mathrm{d}B = f(A),$$

$$\left.\frac{\partial^i v(A)}{\partial x^i}\right|_{x=a} = \psi_i(y), \left.\frac{\partial^i v(A)}{\partial y^i}\right|_{y=b} = \varphi_i(x),\ M_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{2}$$

$$A \equiv (x, y),\quad B \equiv (t, \tau),\quad \mathrm{d}B = \mathrm{d}t\mathrm{d}\tau,$$

pe cînd în [8] s-au expus metode noi de calcul numeric al soluţiilor unor clase de probleme de contur neliniare.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 8, P. 967–985, BUCUREŞTI, 1964

În cele ce urmează se studiază comportarea calitativă a soluțiilor problemei (3) relativă la ecuații integro-diferențiale (4) și (43), care derivă, în urma aplicării transformării de variabilă de forma (3), indicată în [8], din variate clase corespunzătoare de ecuații polivibrante, ca, de exemplu, ecuația (1) din [8]. Cu acest prilej se deduc unele inegalități care constitue extinderi polidimensionale a cunoscutei inegalități a lui T. H. Gronwall [10], ajungîndu-se totodată la perfecționări din cadrul metodei de stabilire a evaluărilor apriorice a soluțiilor problemelor de contur considerate [11], [12].

2. Să considerăm problema de stabilire a evaluării apriorice a soluțiilor problemei lui Goursat

$$D^i u\,|_{x=a} = \alpha_i(y),\ D^i u\,|_{y=b} = \beta_i(x), \qquad (i = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{3}$$

relativă la ecuația integro-diferențială neliniară cu operator exterior de ordin superior sub forma de derivată totală de ordin k în sensul lui M. Picone [9]:

$$\begin{gathered} D^k u(A) = f_1\,[A, u(A)] + \iint\limits_{ab}^{xy} K(A, B) f_2[B, u(B)]\,\mathrm{d}B,^{1}) \\ D \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},\ A \equiv (x, y),\ B \equiv (t, \tau),\ \mathrm{d}B = \mathrm{d}t\mathrm{d}\tau, \end{gathered} \tag{4}$$

în care domeniul variabil de integrare P_1 este definit prin $P_1 = \{a \leqslant \leqslant t \leqslant x;\ b \leqslant \tau \leqslant y\}$, $f_1[A, u(A)]$, $f_2[B, u(B)]$, K, α_i, β_i sînt funcții date continue în domeniul $g_1 = \{A, B \in P_1,\ r_1 \leqslant |\,u\,| \leqslant r_2\}$. Din (4), ținînd seama de condițiile de contur (3), se obține

$$\begin{aligned} u(A) = \Psi(A) &+ \iint\limits_{P_1} \frac{[(x-t)(y-\tau)]^{k-1}}{(k-1)\,!^2} f_1[B, u(B)]\,\mathrm{d}B + \\ &+ \iint\limits_{P_1} \frac{[(x-t)(y-\tau)]^{k-1}}{(k-1)\,!^2}\,\mathrm{d}C \cdot \iint\limits_{ab}^{t\tau} K(C, B) f_2[B, u(B)]\,\mathrm{d}B = \Psi(A) + \\ &+ \iint\limits_{P_1} F(A, B, u(B)]\,\mathrm{d}B,^{2}) \end{aligned} \tag{5}$$

în care $\Psi(A)$ este o funcție care satisface condițiile (3).

Are loc următoarea teoremă

TEOREMA 1. *Pentru ca problema (3), (4) să posede o soluție, este necesar și suficient ca ecuația integrală (5) să aibă soluție și, reciproc, soluția ecuației integrale (5) este totodată și soluția problemei inițiale (3), (4).*

---

[1]) În cele ce urmează se va presupune îndeplinită condiția de racordare continuă $\alpha_i(b) = \beta_i(a)$.

[2]) Se va presupune pentru simplificare că $\alpha_i(y)$ și $\beta_i(x)$ sînt respectiv, de k-l-i ori continuu derivabile în raport cu x și y.

Din (5) se obţine

$$\omega(A) \leqslant \theta(A) + \iint\limits_{P_1} |\, F\,[A, B, u(B)]|\mathrm{d}B \tag{6}$$

în care s-a pus

$$\omega(A) \equiv |u(A)|\,; \quad \theta(A) \equiv |\Psi(A)|, \quad A \in P_1, \quad a \leqslant x \leqslant c, b \leqslant y \leqslant d.$$

Presupunem că pentru toţi A, B, $u \in g_1$ au loc inegalităţile

$$(A)\, |F[A, B, u(B)]| \leqslant c_2(x)\, \omega\,(B)\,; \int_a^x \theta(x)\mathrm{d}x \leqslant c_3(x)\,;$$

$$\int_a^x \mathrm{d}t \int_a^t\!\!\int_b^y c_2(t)\,\omega\,(B)\mathrm{d}B \leqslant c_4 \iint\limits_{P_1} \omega(B)\mathrm{d}B,$$

$c_2(x)$ fiind o funcţie cunoscută nenegativă şi astfel încît

$c_2(x_1) < c_2(x_2) \;\; (x_2 > x_1), \;\; c_3(x) > 0 \;\; (x > a), \;\; c_3(a)$[3] $= 0,$

iar c_4 — un număr.

De aici rezultă

$$\int_a^x \omega\,(A)\mathrm{d}x \leqslant c_3(x) + c_4 \iint\limits_{P_1} \omega(B)\mathrm{d}B, \tag{7}$$

şi prin urmare

$$c_3(x) + c_4 \iint\limits_{P_1} \omega(B)\mathrm{d}B \leqslant c_3(x) \;\; \exp \;\; [c_4(y - b)]. \tag{8}$$

În consecinţă,

$$\int_a^x \omega(A)\mathrm{d}x \leqslant c_3(x) \;\; \exp \;\; [c_4(y - b)], \;\; A \in P_1, \tag{9}$$

de unde se deduce

$$\iint\limits_{P_1} \omega(B)\mathrm{d}B \leqslant c_3(x) \;\; \{\exp \;\; [c_4(y - b) - 1\} : c_4, \;\; A \in P_1.$$

Evaluările obţinute permit să se scrie următoarea inegalitate

$$\begin{gathered} |u(A)| \equiv \omega\,(A) \leqslant \theta(A) + c_2(x) \iint\limits_{P_1} \omega(B)\mathrm{d}B \leqslant \theta\,(A) + \\ + c_5(x) \;\; \{\exp \;\; [c_4(y - b) - 1]\}, \end{gathered} \tag{10}$$

în care s-a notat

$$c_5(x) \equiv c_2(x)c_3(x) : \; c_4\,; \;\; A \in P_1,$$

---

[3] Condiţia $c_3(a) = 0$ este folosită numai în evaluarea (15) şi ne putem dispensa de ea.

Dacă în domeniul g_1 au loc inegalităţile

$$|F[A, B, u(B)]| \leqslant c_6(y)\omega(B)\,;\int_b^y \theta(A)\mathrm{d}y \leqslant c_7(y)\,;\int_b^y \mathrm{d}\tilde{\tau}\iint\limits_{ab}^{x\tau} c_6(\tau)\,\omega\,(B)\mathrm{d}B \leqslant$$
$$\leqslant c_8 \iint\limits_{P_1} \omega(B)\mathrm{d}B, \tag{11}$$

se obţine următoarea evaluare apriorică

$$|u(A)| \leqslant \theta(A) + c_9(y)\ \{\exp\ [c_8(x-a)-1]\}, \tag{12}$$

în care s-a pus

$$c_9(y) \equiv c_6(y)c_7(y): c_8,\ c_8 = \text{const.},\ A \in P_1.$$

Folosind inegalităţile (10) şi (12), se poate ajunge la unele evaluări ale derivatelor funcţiei $u(A)$. Astfel din (5) avem

$$\frac{\partial^{i+j}u(A)}{\partial x^i \partial y^j} = \frac{\partial^{i+j}\Psi(A)}{\partial x^i \partial y^j} + \iint\limits_{ab}^{xy} \frac{(x-t)^{k-i-1}(y-\tau)^{k-j-1}}{(k-i-1)\,!\,(k-j-1)\,!} f_1[B,u(B)]\mathrm{d}B +$$
$$+ \iint\limits_{a\,b}^{xy} \frac{(x-t)^{k-i-1}(y-\tau)^{k-j-1}}{(k-i-1)\,!\,(k-j-1)\,!}\,\mathrm{d}C \iint\limits_{P_1} K(C, B) f_2[B, u(B)]\mathrm{d}B \equiv \tag{13}$$
$$\equiv \frac{\partial^{i+j}\Psi(A)}{\partial x^i \partial y^j} + \iint\limits_{P_1} F_{ij}[A, B, u(B)]\mathrm{d}B,\ (i, j = 0, 1, \ldots, k-1),$$

de unde se deduce

$$\left|\frac{\partial^{i+j}u(A)}{\partial x^i \partial y^j}\right| \leqslant \left|\frac{\partial^{i+j}\Psi(A)}{\partial x^i \partial y^j}\right| + \iint\limits_{P_1} S_{ij}(A, B)Q(B)\mathrm{d}B, \tag{14}$$

în care $S_{ij}(A,\ B)$ sînt funcţii cunoscute nenegative pentru toţi $A,\ B \in P_1$, iar $Q(A)$ este membrul al doilea din inegalitatea (12) sau inegalitatea (10). Rezultatele obţinute, care particularizate fiind conduc la o serie de inegalităţi stabilite de D. Mangeron cu prilejul studiului problemelor spectrale relative la ecuaţii polivibrante [13], permit să se enunţe următoarea teoremă.

TEOREMA 2. *Dacă în domeniul* g_1 *sînt îndeplinite inegalităţile* (*A*) *sau* (*11*) (*sau dacă ambele sisteme de inegalităţi au loc simultan*), *atunci soluţia problemei* (*3*), (*4*) *poate fi evaluată pe baza inegalităţii* (*10*) *sau* (*12*), *iar derivatele soluţiei problemei considerate se evaluează pe baza inegalităţii* (*14*).

Observaţie. Se poate obţine, ţinînd seama de inegalitatea (9), o evaluare locală apriorică a soluţiei problemei (3), (4) folosind aceeaşi cale ca şi aceea elaborată în lucrarea autorilor [12]:

$$|u(A)| \leqslant \frac{dc_3(x)}{\mathrm{d}x}\ \exp\ [c_4(y-b)],\ A \in P_1. \tag{15}$$

O evaluare similară se obţine dacă se ia ca punct de plecare inegalitatea:

$$\int_b^y \omega(x,\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant c_7(y)\ \exp\ [c_8(y-b)],\ A \in P_1. \tag{16}$$

3. Să considerăm acum cazul în care funcţiile $f_1[A, u(A)], f_2[A, u(A)]$ posedă următoarele proprietăţi:

$$\left|\int_b^y \frac{[(x-t)\,(y-\tau)]^{k-1}}{(k-1)\,!^2} f_1[B, u(B)]\mathrm{d}\tau\right| \leqslant N_1\alpha(t,y)\varphi[v(t,y)], \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\left|\int_b^y \frac{[(x-t)(y-\tau)^{k-1}}{(k-1)\,!^2}\iint\limits_{ab}^{x\tau} K(C,B)f_2[B,u(B)]\mathrm{d}B\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \\ &\leqslant N_2\iint\limits_{P_1} |K(A,B)|\,\beta(B)\varphi[v(B)]\,\mathrm{d}B,\end{aligned} \tag{18}$$

în care $C \equiv (x, \tau)$; N_1, N_2 sînt constante; α, β sînt funcţii cunoscute nenegative; $\varphi[s]$ este o funcţie monoton nedescrescătoare şi astfel că, pentru toţi $0 \leqslant s < +\infty$, p fiind un număr pozitiv,

$$0 < \varphi(s) < p.$$

Fie apoi

$$(E)\ |\Psi(A)| \leqslant \theta(y);\ A, u \in g_1 = \{P_1,\ |u| < +\infty\},$$

în care s-a pus

$$|\Psi(a,y)| = \theta(y).$$

În aceste ipoteze se obţine

$$\begin{aligned}v(A) &\leqslant \theta(y) + \int_a^x \{N_1\alpha(t,y)\varphi[v(t,y)] + \\ &+ N_2\iint\limits_{ab}^{ty} |K(t,y,B)|\ \beta(B)\varphi[v(B)]\,\mathrm{d}B\}\mathrm{d}t \equiv z(A)\end{aligned} \tag{19}$$

în care s-a pus

$$v(A) \equiv |u(A)|.$$

Din (19) avem

$$\frac{1}{\varphi(z)}\,\frac{\partial z}{\partial x} \leqslant N_1\alpha(A) + N_2\iint\limits_{P_1} |K(A,B)|\beta(B)\mathrm{d}B, \tag{20}$$

de unde rezultă

$$\int_a^x \frac{d_x z}{\varphi(z)} \leqslant \int_a^x \left[N_1\alpha(t,y) + N_2\iint\limits_{\alpha b}^{ty} |K(t,y,B)|\ \beta(B)\mathrm{d}B\right]\mathrm{d}t \equiv \Pi(A). \tag{21}$$

Ţinînd seama de proprietăţile funcţiei φ avem

$$\frac{1}{p}\,[z(A)-\theta(y)] \leqslant \Pi(A)$$

şi, în consecinţă,

$$|u(A)| \leqslant \theta(y) + p\Pi(A), \quad A \in p_1. \tag{22}$$

4. Într-un mod analog se poate evalua soluţia problemei (3), (4) în ipoteza că au loc inegalităţile

$$\left|\int_a^x \frac{[(x-t)(y-\tau)]^{k-1}}{(k-1)!^2} f_1[B, u(B)]\mathrm{d}t\right| \leqslant N_1\alpha(x,\tau)\varphi[v(x,\tau)], \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_a^x \frac{[(x-t)(y-\tau)]^{k-1}}{(k-1)!^2}\mathrm{d}t \iint\limits_{ab}^{ty} K(t, y, B) f_2[B, u(B)]\mathrm{d}B\right| &\leqslant \\ \leqslant N_2 \iint\limits_{P_1} |K(A, B)|\,\beta(B)\varphi[v(B)]\,\mathrm{d}B.\end{aligned} \tag{24}$$

În acest caz se parvine la următoarea evaluare

$$|u(A)| \leqslant \theta_1(x) + p\int_b^v \left[N_1\alpha(x,\tau) + N_2 \iint\limits_{ab}^{x\tau} |K(x,\tau, B)|\,\beta(B)\mathrm{d}B\right]\mathrm{d}\tau, \tag{25}$$

în care s-a notat

$$\theta_1(x) \equiv |\Psi(x, b)|, \quad A \in P_1.$$

Rezultatele de mai sus pot fi concretizate în următoarea teoremă

TEOREMA 3. *Dacă au loc inegalităţile (17), (18) şi (E), atunci, în domeniul P_1, soluţia problemei (3), (4) se evaluează pe baza inegalităţii (22).*

Observaţii. Într-un mod analog se poate parveni la evaluarea soluţiei problemei (3), (4) şi în cazul cînd, păstrîndu-se inegalitatea (17), inegalitatea (18) se înlocuieşte cu următoarea

$$\begin{aligned}\left|\int_b^v \frac{[(x-t)(y-\tau)]^{k-1}}{(k-1)!^2} \iint\limits_{ab}^{x\tau} K(C, B) f_2[B, u(B)]\mathrm{d}B\mathrm{d}\tau\right| &\leqslant \\ \leqslant N_2 \iint\limits_{P_1} |K(A, B)|\,\beta(B)\Psi[v(B)]\mathrm{d}B,\end{aligned} \tag{26}$$

în care, pentru toţi $0 \leqslant s < +\infty$, $0 < \varphi(s) \leqslant \psi(s)$; $\psi(s)$ este o funcţie nenegativă monoton nedescrescătoare şi astfel încît $\psi(0) > 0$. Într-adevăr, ajunge să înlocuim în acest caz în inegalitatea

$$v(A) \leqslant \theta(y) + \int_a^x \left[N_1\alpha(t,y)\varphi[v] + N_2 \iint\limits_{ab}^{ty} |K(t, y, B)|\,\beta(B)\psi[v(B)]\mathrm{d}B\right]\mathrm{d}t \tag{27}$$

funcţia φ prin funcţia ψ. Observaţia de mai sus rămîne valabilă şi atunci cînd inegalităţile $\varphi \geqslant \psi$, $\varphi \leqslant \psi$ nu sînt satisfăcute, însă există o funcţie nenegativă monoton nedescrescătoare $\gamma(s)$, astfel încît

$$p \geqslant \gamma(s) = \sup \{\varphi(s), \psi(s)\} \text{ pentru } 0 \leqslant s < +\infty, \gamma(0) > 0.$$

În acest caz se pot folosi evaluările (22) şi (23), ţinînd seama de faptul că $\gamma \leqslant p$.

Se pot obţine, în corespondenţă cu unele cazuri particulare relative la funcţia φ, şi o altă serie de evaluări utile în practică referitoare la soluţia $u(A)$ a problemei considerate. Aşa, de exemplu, dacă $\varphi(v) = \mathrm{e}^v$, rezultă, pentru toţi $A \in P_1$,

$$|u(A)| \leqslant -\ln h(A), h(A) \equiv \mathrm{e}^{\theta(v)} \int_a^x \left[N_1 \alpha(t, y) + N_2 \iint\limits_{ab}^{ty} |K(t, y, B)| \beta(B) \mathrm{d}B \right] \mathrm{d}t$$

funcţia h satisfăcînd şi la inegalităţile $0 < h(A)| < 1$. Dacă $\varphi(v) \equiv (v + r)^n$; $0 < n < 1$, $0 < r$ fiind un număr, are loc, pentru toţi $A \in P_1$, evaluarea

$$|u(A)| \leqslant \{v\theta^\nu(y) + \nu \int_a^x \left[N_1 \alpha(t, y) + N_2 \iint\limits_{ab}^{ty} |K(t, y, B)| \beta(B) \mathrm{d}B \right]^{\frac{1}{\nu}} r \equiv \zeta(A),$$

în care

$$\zeta(A) \geqslant 0, \ \nu = 1 - n.$$

5. Să studiem acum unele probleme legate de stabilitatea soluţiei problemei (3), (4) în raport cu mici perturbaţii ale funcţiilor $\alpha_i(y)$, $\beta_i(x)$ ce intervin în condiţiile iniţiale ale problemei de contur considerate, precum şi în raport cu mici perturbaţii ale funcţiei $F[A, B, u(B)]$.

Are loc următoarea teoremă

TEOREMA 4. *Dacă funcţia* $\psi(A)$ *este astfel încît este satisfăcută inegalitatea* $|\Psi(A) - \psi(A)| \leqslant \delta(A) \leqslant \varepsilon$ *pentru toţi* $A \in P_1$, *funcţia* $F[A, B, u(B)]$ *satisface în raport cu cel de-al treilea argument ce figurează într-însa condiţia lui Lipschitz*

$$|F[A, B, u(B)] - F[A, B, v(B)]| \leqslant r(A, B) |u(B) - v(B)| \leqslant l_0 |u(B) - v(B)|, \tag{28}$$

în care $0 < r(A, B)$ *este o funcţie cunoscută,* $l_0 > 0$ *este un număr, atunci este posibil a se determina un domeniu* $P_2 \subset P_1$ *astfel încît soluţia problemei* (3), (4) *să fie stabilită în* P_2 *în sensul că la perturbaţii mici ale funcţiei* $\Psi(A)$ *corespund perturbaţii mici ale soluţiei problemei considerate.*

În adevăr, fie $v(A)$ o soluţie a ecuaţiei integrale

$$v(A) = \psi(A) + \iint\limits_{P_1} F[A, B, v(B)] \mathrm{d}B. \tag{29}$$

Rezultă atunci

$$\int_a^x \omega(A) \mathrm{d}x \leqslant \int_a^x \delta(A) \mathrm{d}x + \iint\limits_{P_1} R(A, B) \omega(B) \mathrm{d}B \leqslant \int_a^x \delta(A) \mathrm{d}x + C_0 \iint\limits_{P_1} \omega(B) \mathrm{d}B, \tag{30}$$

în care

$\omega(A) \equiv | u(A) - v(A) |$; $R(A, B) \equiv \int_a^x r(t, y, B)\mathrm{d}t \leqslant C_0 =$ const. pentru toţi $A \in P_1$.

Avem, în consecinţă, în virtutea inegalităţii (9),

$$\int_a^x \omega(t, y)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x \delta(t, y)\mathrm{d}t \exp\,[C_0(y - b)]. \tag{31}$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} \omega(A) &\leqslant \delta(A) + l_0 \iint\limits_{P_1} \omega(B)\mathrm{d}B \leqslant \delta(A) + l_0 \iint\limits_{P_1} \delta(x, \tau) \exp\,[C_0(\tau - b)]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon \left\{ 1 + \frac{l_0(x-a)}{C_0} [\exp C_0(y - b) - 1] \right\} < \varepsilon_1, \end{aligned} \tag{32}$$

dacă s-a luat, de exemplu, $\varepsilon < \varepsilon_1 : s$ şi pentru toţi $A \in P_2$ are loc inegalitatea

$$s \geqslant 1 + [l_0(x - a) : C_0] \{\exp C_0\ (y - b) - 1\}. \tag{33}$$

În cadrul teoriei stabilităţii are loc şi următoarea teoremă

TEOREMA 5. *Dacă într-un domeniu* g_1 $(A,\ u \in g_1)$ *are loc inegalitatea*

$$\begin{aligned} |F[A, B, u(B)] - f[A, B, v(B)]| &\leqslant w_1(A, B) + w_2(A, B) | u(B) - v(B) | \equiv \\ &\equiv w_1(A, B) + w_2(A, B)\omega(B), \end{aligned}$$

în care $w_1 > 0$ *şi* $w_2 > 0$ *sînt funcţii cunoscute ce se bucură de proprietatea că*

$$\iint\limits_{P_1} w_1(A, B)\mathrm{d}B \equiv w_0(A) \leqslant \varepsilon\,;\ w_2(A, B) \leqslant \gamma_0\,; \int_a^x w_2(t, y, B)\mathrm{d}t \leqslant p_0 \tag{34}$$

şi

$$\sup_{P_1}\ \{1 + \gamma_0\ \exp\ [p_0(y - b)]\} = \Delta_0,\ \ \varepsilon < \varepsilon_1 : \Delta_0,$$

atunci

$$| u(A) - v(A) | < \varepsilon_1,\ A \in P_1. \tag{35}$$

În adevăr, notînd prin $v(A)$ soluţia ecuaţiei integrale

$$v(A) = \Psi(A) + \iint\limits_{P_1} f[A, B, v(B)]\mathrm{d}B, \tag{36}$$

avem

$$\omega(A) \leqslant w_0(A) + \iint\limits_{P_1} w_2(A, B)\omega(B)\mathrm{d}B. \tag{37}$$

Din (37) se găseşte, de exemplu,

$$\int_a^x \omega(A)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^x w_0(A)\mathrm{d}x + p_0 \iint\limits_{P_1} \omega(B)\mathrm{d}B,$$

$$\int_a^x \omega(A)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^x w_0(A)\,\mathrm{d}x \exp\,[p_0(y-b)] \equiv \sigma(A)$$

şi prin urmare

$$\omega(A) \leqslant w_0(A) + \gamma_0 \int_b^y \sigma(A)\mathrm{d}y,\ A \in P_1. \tag{38}$$

Din (36) rezultă, în virtutea ipotezelor enunţate în teorema de mai sus, inegalitatea (35).

6. Să considerăm acum cazul în care sînt supuse fenomenelor perturbatorii funcţiile f_1 şi f_2 ce figurează în (4).

Are loc următoarea teoremă

TEOREMA 6. *Dacă funcţiile f_{11} şi f_{22}, definite şi continue în domeniul g_1, sînt astfel încît au loc inegalităţile*

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{[(x-t)(y-\tau)]^{k-1}}{(k-1)\,!^2} \,|\, f_1[B, u(B)] - f_{11}[B, v(B)|]\,\mathrm{d}\tau \leqslant \\ \leqslant N_1\alpha(t, y, \varphi[|u(B)-v(B)],\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\int_b^y \mathrm{d}\tau \iint\limits_{ab}^{x\tau} \left| \frac{[(x-t)(y-\tau)]^{k-1}}{(k-1)\,!^2} K(x,\tau,B) \right| \Big| f_2[B, u(B)] - f_{22}[B, v(B)] \Big| \,\mathrm{d}B \leqslant \\ \leqslant N_2 \iint\limits_{P_1} |K(A,B)|\beta(B)\varphi[|u(B)-v(B)|]\mathrm{d}B.\end{aligned} \tag{40}$$

în care $0 < p \leqslant \varphi(s)$ este o funcţie nenegativă monoton nedescrescătoare, $\alpha(t, y)$, $\beta(x, y)$ sînt funcţii cunoscute nenegative, N_1, N_2 sînt constante pozitive date şi $v(A)$ este soluţia ecuaţiei integrale

$$\begin{aligned}v(A) = \Psi(A)] + \iint\limits_{P_1} \frac{[(x-t)(y-\tau)]^{k-1}}{(k-1)\,!^2} \Big\{ f_{11}[B, v(B)] + \\ + \iint\limits_{ab}^{t\tau} K(B,C) f_{22}[C, r(C)]\mathrm{d}C \Big\}\,\mathrm{d}B,\end{aligned} \tag{41}$$

atunci modulul funcţiei $u(A)$ poate fi evaluat în domeniul P_1 pe baza inegalităţii

$$|u(A)| \leqslant |v(A)| + P\int_a^x \left[N_1\alpha(t,y) + N_2 \iint\limits_{ab}^{ty} |K(t,y,B)|\beta(B)\mathrm{d}B \right] \mathrm{d}t. \tag{42}$$

În adevăr, ajunge să se reproducă paşii folosiţi în demonstraţia teoremei 3.

7. Să studiem acum problema de comportare a soluţiei $u(A)$ ce satisface sistemul integro-diferenţial (neliniar sau liniar) polivibrant constituit din condiţiile de contur (3) şi ecuaţia

$$D^k u(A) + \sum_{i-k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} A_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} - \iint\limits_{P_1} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial t^i \partial \tau^j} \mathrm{d}B = f(A) + \iint\limits_{P} K(A, B) S[B, u(B)] \mathrm{d}B, \tag{43}$$

în care A_{ij}, K_{ij}, K, f sînt funcţii continue cunoscute definite pentru toţi $A,\ B \in P$; $P = [a, c] \times [b, d]$, $P_1 = \{a \leqslant t \leqslant x;\ b \leqslant \tau \leqslant y\}$, $S\,[.]$ este un operator, asupra căruia ne vom opri mai jos.

Fie L operatorul invers al operatorului

$$D^k + \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} A_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} - \iint\limits_{P_1} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial \tau^j} \mathrm{d}B$$

(existenţa unui atare operator fiind demonstrată în lucrarea autorilor [15]), ţinîndu-se seama de valabilitatea condiţiilor.

Din (43) se deduce

$$u(A) = L[f(A) + \iint\limits_{P} K(A, B) S[B, u(B)] \mathrm{d}B \equiv \equiv \Phi(A) + \iint\limits_{P} T(A, B) S[B, u(B)] \mathrm{d}B, \tag{44}$$

în care prin Φ şi T s-au notat funcţii cunoscute. Din şirul de raţionamente de mai sus rezultă că soluţia ecuaţiei (44) este totodată şi soluţia ecuaţiei (43) relativă la problema de contur (3).

8. Presupunem că operatorul $S[\,.\,]$ din ecuaţia (43) este un operator liniar de forma

$$S[B, u(B)] \equiv \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} \tau_{ij}(B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial t^i \partial \tau^j} \cdot \tag{45}$$

Aplicînd ecuaţiei (44) operatorul $S[\cdot]$ şi introducînd notaţiile

$$\Delta(A) \equiv S[A, u(A)]\,;\ \Gamma(A) \equiv S[A, \Phi(A)]\,;\ M(A, B) = S_A[A, T(A, B)]$$

se ajunge la ecuaţia

$$\Delta(A) = \Gamma(A) + \int_P M(A, B)\, \Delta(B) \mathrm{d}B. \tag{46}$$

Aşadar, dacă 1 nu este o valoare proprie a nucleului $M(A, B)$ rezultă că

$$u(A) = \Phi(A) + \iint\limits_P T(A, B)[\Gamma(B) + \iint\limits_P R_1(B, C)\,\Gamma(C)\mathrm{d}C]\mathrm{d}B, \tag{47}$$

în care $R_1(A, B)$ este nucleul rezolvant al nucleului $M(A, B)$. Dacă 1 este o valoare proprie a nucleului $M(A, B)$ de rang ν, ecuaţia (46) şi prin urmare şi sistemul integrodiferenţial polivibrant considerat (3), (43) posedă soluţie atunci şi numai atunci cînd sînt satisfăcute egalităţile

$$\iint\limits_P \Gamma(A)\mu_i(A)\mathrm{d}A = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu), \tag{48}$$

în care $\mu_i(A)$ sînt funcţii proprii ale nucleului conjugat cu nucleul $M(A, B)$. În ipoteza că egalităţile (48) sînt îndeplinite, avem

$$u(A) = \Phi(A) + \iint\limits_P T(A, B)[\Delta_0(B) + \sum_{i=1}^{\nu} q_i\,\Delta_i(B)]\mathrm{d}B, \tag{49}$$

în care prin $\Delta_c(A)$ s-a notat o soluţie particulară a ecuaţiei (46), iar prin $\Delta_1(A), \Delta_2(A), \ldots, \Delta_\nu(A)$ funcţiile proprii ale nucleului $M(A, B)$, $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$ fiind constante arbitrare.

Rezultatele de mai sus pot fi cristalizate în următoarea teoremă.

TEOREMA 7. *Problema (3), (43) posedă întotdeauna o soluţie unică de 2 k ori continuu derivabilă dată sub forma (47) în ipoteza că 1 nu este o valoare proprie a nucleului $M(A, B)$. Dacă 1 este o valoare proprie a nucleului $M(A, B)$ de rang ν, problema (3), (43) posedă soluţie atunci şi numai atunci cînd sînt satisfăcute egalităţile (48). În această din urmă ipoteză, soluţia problemei considerate există şi conţine ν constante arbitrare, fiind reprezentată prin formula (49).*

Observaţie. Teorema de mai sus, încadrîndu-se în şirul de rezultate clasice, numite în literatura ştiinţifică universală *alternativa lui Fredholm*, conduc la rezolvări efective de noi probleme pe care ni le schematizează ştiinţa şi tehnica de astăzi sub forma de sisteme integro-diferenţiale [16], [17].

9. Să studiem acum problema stabilităţii soluţiilor corespunzătoare sistemului integro-diferenţial polivibrant (3), (43). În corespondenţă cu mici perturbaţii ale datelor iniţiale ce figurează în (3) şi ale funcţiilor presupuse cunoscute din ecuaţia (43) se poate formula următoarea teoremă

TEOREMA 8. *Dacă problema integro-diferenţială de contur (3), (43) posedă o soluţie unică de 2k ori continuu derivabilă şi funcţiile $\gamma(A)$, $m(A, B)$ sînt astfel încît au loc inegalităţile*

$$|\Gamma(A) - \gamma(A)| \equiv \delta(A) \leqslant \delta_1, \quad \iint\limits_P |M(A,B) - m(A,B)|\,\mathrm{d}B \equiv \iint\limits_P n(A, B)\,\mathrm{d}B \leqslant \delta_2,$$

în care δ_1 și δ_2 *sînt numere și dacă se știe că 1 nu este o valoare proprie a nucleului* $M(A, B)$, R_0 (A, B) *fiind nucleul rezolvant al nucleului* $m(A, B)$, *atunci are loc inegalitatea*

$$|u(A)-\overline{u}(A)| < \varepsilon, \quad A \in P,$$

de îndată ce numerele δ_1 *și* δ_2 *satisfac condiția* (*E*), *în care*

$$\overline{u}(A) = \Phi(A) + \iint\limits_P T(A,B)v(B)\mathrm{d}B, \tag{50}$$

$$v(A) = \gamma(A) + \iint\limits_P m(A,B)v(B)\mathrm{d}B. \tag{51}$$

În adevăr, ținînd seama de faptul că

$$|\Delta(A)-v(A)| \leqslant \delta(A)+\iint\limits_P |R_0A, B)|\,\delta(B)\mathrm{d}B + \Bigg|\iint\limits_P \Bigg\{M(A,B)m(A,B)+$$

$$+\iint\limits_P [M(C,B)-m(C,B)]R_0(A,C)\mathrm{d}C\Bigg\}\Delta B\,\mathrm{d}B\Bigg|,$$

rezultă

$$|\Delta(A)-v(A)| \leqslant \delta_1 + h\delta_2|[1+\max_P \iint\limits_P |R_0(A,B)|\,\mathrm{d}B]| \equiv (\delta_1+h\delta_2)\rho_0, \tag{52}$$

în care s-a pus $h = \max\limits_P |\Delta(A)|$. Prin urmare, dacă δ_1 și δ_2 sînt alese în așa fel ca să fie îndeplinită inegalitatea

(E) $$\delta_1 + h\delta_2 < \varepsilon : \sigma,$$

în care s-a pus

$$\sigma = \rho_0 \max_P \iint\limits_P |T(A,B)|\,\mathrm{d}B,$$

rezultă

$$|u(A)-\overline{u}(A)| \leqslant (\delta_1+h\delta_2)\rho_0 \iint\limits_P |T(A,B)|\mathrm{d}B < \varepsilon. \tag{53}$$

Observații. a) Dacă are loc inegalitatea

$$l_M = 1 - \max_P \iint\limits_P |M(A,B)|\mathrm{d}B > 0, \tag{54}$$

se poate pune

$$h = \max_P |\Gamma(A,B)| : l_M.$$

b) Dacă este îndeplinită condiţia (54), atunci

$$|\Delta(A)-v(A)|\leqslant\max_P|\Gamma(A)-\gamma(A)+\iint_P[M(A,B)-m(A,B)]v(B)\mathrm{d}B|:l_M=\rho_1$$

şi prin urmare

$$|u(A)-\bar{u}(A)|\leqslant\rho_1\iint_P|T(A,B)|\,\mathrm{d}B,\ A\in P. \tag{55}$$

c) Dacă funcţiile A_{ij}, K_{ij}, f sînt definite şi continue în domeniul A, $B\in P_2$ care conţine într-însul dreptunghiul P, funcţia $K(A, B)$ este definită şi continuă în raport cu argumentele din A în domeniul P_2, iar în raport cu argumentele din B în domeniul P, funcţiile r_{ij} sînt definite şi continue în P, atunci problema de prelungire a soluţiilor problemei (3), (43) poate avea sens pentru domeniul P_2 [4]). În particular, dacă 1 nu este o valoare proprie a nucleului ecuaţiei (46) pentru toţi A, $B\in P$ şi dacă $T(A, B)$ nu conţine puncte singulare în domeniul P_2, atunci soluţia problemei (3), (43) este prelungibilă în mod univoc din domeniul P în domeniul P_2. Dacă 1 este o valoare proprie a nucleului $M(A, B)$ de rang ν şi au loc egalităţile (48), atunci, conservîndu-se toate celelalte condiţii, soluţia problemei considerate este prelungibilă asupra domeniului P_2 în mod neunivoc.

10. Considerăm acum cazul în care operatorul $S[.]$ ce intervine în ecuaţia integro-diferenţială polivibrantă (43) este neliniar şi are forma $S[B, u(B)]\equiv f[B, u(B)]$, în care funcţia $f[B, u(B)]$ este continuă şi definită pentru toţi B, $u\in g$. În corespondenţă cu acest fapt, ecuaţia

$$u(A)=\Phi(A)+\iint_P T(A,B)f[B,u(B)]\mathrm{d}B \tag{56}$$

este o ecuaţie integrală neliniară, fiind un caz particular al ecuaţiei

$$u(A)=\Phi_3(A)+\iint_P f_6[A,B,u(B)]\mathrm{d}B,$$

studiată în [8]. Ecuaţia (56) constituie analogul în două dimensiuni a ecuaţiei integrale neliniare de tipul lui Hammerstein [20]. Are loc următoarea teoremă

TEOREMA 9. *Dacă funcţiile* $\Phi_0(A)$, $T_0(A, B)$ *sînt astfel încît :*

$$1)\quad|\Phi(A)-\Phi_0(A)|\leqslant\delta_1;\ \iint_P|T(A,B)-T_0(A,B)|\mathrm{d}B\leqslant\delta_2; \tag{57}$$

---

[4]) O problemă interesantă de prelungire a soluţiilor sistemelor polivibrante cu derivate parţiale a fost rezolvată folosind lucrarea [4] de regretatul academician D. Pompeiu [18], fiind extinsă la ecuaţii de ordin superior în [19].

2) *funcția f satisface — în domeniul g — condiția lui Lipschitz cu constanta q, 0 < ε este un număr dat dinainte și dacă*

3) $$l_4 = 1 - \max_P q \iint_P |T(A, B)| \mathrm{d}B > 0, \qquad (58)$$

atunci în domeniul P este valabilă egalitatea

$$|u(A) - \overline{u}(A)| < \varepsilon, \qquad (59)$$

de îndată ce este satisfăcută, de exemplu, relația

$$|\delta_1 + \delta_2 \max_g |f[A, \overline{u}(A)]| < \varepsilon l_4, \qquad (60)$$

în care $\overline{u}(A)$ se determină din

$$\overline{u}(A) = \Phi_0(A) + \iint_P T_0(A, B) f[B, \overline{u}(B)] \mathrm{d}B.$$

În adevăr, demonstrația teoremei enunțate decurge din inegalitatea

$$\begin{aligned} |u(A) - \overline{u}(A)| \leqslant \max_P \, [|\Phi(A) - \Phi_0(A)| + \iint_P |T(A, B) - \\ - T_0(A, B)| \, |f[B, \overline{u}(B)]| \mathrm{d}B] : l_4 = d_0 \end{aligned} \qquad (61)$$

Din (61) rezultă, în particular, următoarea evaluare pentru

$$|u(A)| \leqslant |\overline{u}(A)| + d_0.$$

Merită să fie subliniat faptul că îndeplinirea condiției lui Lipschitz și a inegalității (58) pentru funcțiile care intervin în ecuația (56) constituie condiție suficientă pentru existența și unicitatea soluției problemei (3), (43) corespunzătoare cazului considerat. Prelungirea soluției acestei probleme și la domeniul P_2 poate fi demonstrată în același mod în care acest lucru s-a făcut la p. 8.

11. Presupunem acum că nucleul $K(A, B)$ posedă proprietatea

$$K(A, B) \equiv \begin{cases} K_1(A, B) \not\equiv 0\,; & a \leqslant t \leqslant x,\ b \leqslant \tau \leqslant y, \\ 0, & x \leqslant t,\ y \leqslant \tau. \end{cases} \qquad (62)$$

Atunci, ecuația integro-diferențială (43) capătă forma

$$\begin{aligned} D^k u(A) + \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} A_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} - \iint_{P_1} \Big\{ K_1(A, B) f[B, u(B)] + \\ + \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial t^i \partial \tau^j} \Big\} \mathrm{d}B = 0 \end{aligned} \qquad (63)$$

şi ecuaţia (56) se înlocuieşte, în consecinţă, prin ecuaţia

$$u(A) = \Phi(A) + \iint\limits_{P_1} T_1(A, B) f[B, u(B)] \mathrm{d}B. \tag{64}$$

Pentru existenţa şi unicitatea soluţiei problemei (3), (63) în domeniul P_1 este suficient ca funcţia $f[B, u(B)]$ să satisfacă în domeniul g_1 condiţia lui Lipschitz cu constanta L_1 în raport cu cel de-al doilea argument, precum şi inegalitatea

$$l_5 = 1 - L_1 \max_{P_1} \iint\limits_{P_1} | T_1(A, B) | \mathrm{d}B > 0. \tag{65}$$

În aceste ipoteze soluţia problemei (3), (63) poate fi construită prin metoda aproximaţiilor succesive a lui Picard 5).

Merită să fie menţionat faptul că dacă funcţiile $\Phi(A)$, $T_1(A, B)$ satisfac în acest caz un număr de condiţii suplimentare, soluţia problemei considerate este stabilă în raport cu mici perturbaţii ale acestor funcţii. În adevăr, presupunem că funcţiile $\Phi_2(A)$, $T_2(A, B)$ sînt astfel încît au loc inegalităţile

$$| \Phi(A) - \Phi_2(A)| \leqslant \delta_1 ;\ | T_1(A, B) - T_2(A, B)| \equiv | T_3(A, B)| \leqslant \delta_2,\ A, B \in P_1,$$

şi că $v(A)$ este o soluţie cunoscută a ecuaţiei integrale

$$v(A) = \Phi_2(A) + \iint\limits_{P_1} T_2(A, B) f[B, u(B)] \mathrm{d}B. \tag{66}$$

Avem atunci

$$| u(A) - v(A) | \leqslant | \Phi(A) - \Phi_2(A) | + \iint\limits_{P_1} \{ | T_1(A, B) | \, | f[B, u(B)] -$$

$$- f[B, v(B)] | + | T_2(A, B) - T_1(A, B) | \, | f[B, v(B)] | \} \, \mathrm{d}B \leqslant$$

$$\leqslant \delta_1 + L_1 \iint\limits_{P_1} | T_1(A, B)(u - v) | \mathrm{d}B + \iint\limits_{P_1} | T_3(A, B) | \, | f[B, v(B)] | \mathrm{d}B.$$

Prin urmare,

$$\max_{P_1} | u(A) - v(A) | \leqslant [\delta_1 + \delta_2 \iint\limits_{P_1} | f[B, v(B)] | \mathrm{d}B] : l_5 \tag{67}$$

şi, în consecinţă, pentru toţi $A \in P_1$ este valabilă inegalitatea

$$| u(A) - v(A) | < \varepsilon, \tag{68}$$

---

5) Este interesant de a se extinde şi la probleme neliniare integro-diferenţiale polivibrante asupra funcţiilor ce figurează într-însele condiţii mai generale decît condiţia lui Lipschitz, considerate de A. Rosenblatt [21] cu ocazia studiului unor probleme ale lui D. Mangeron [22].

de îndată ce

$$\rho < \varepsilon \cdot l_5, \tag{69}$$

în care s-a pus

$$\rho = \delta_1 + \delta_2 \max_{P_1} \iint_{P_1} |f[B, v(B)]| \mathrm{d}B.$$

Observație. În mersul demonstrației inegalității (67) s-a presupus că funcția $v = v(A)$ este cunoscută. Putem să ne dispensăm de această supoziție dacă se presupune îndeplinită inegalitatea $\max\limits_{g_1} |f[A, v(A)]| \leqslant L_2$, în care L_2 este un număr cunoscut.

Presupunem că în domeniul g_1 funcțiile $\Phi_1(A)$, $\psi[A, v(A)]$ posedă proprietatea

$$\begin{aligned} 1)\ & |\Phi_1(A) - \Phi(A)| \equiv \sigma_1(A) \leqslant \delta_1 ;\ |\psi[A, v(A)] - f[A, u(A)]| \leqslant \\ & \leqslant h_0(A) + \varphi[(u - v)], \end{aligned} \tag{68'}$$

în care $h_0(A)$, $\varphi(s)$ sînt funcții monoton nedescrescătoare, $0 < \varphi(s) \leqslant P$ și δ_1, p sînt constante cunoscute;

$$2)\ \omega(A) \leqslant \sigma_2(y) + \iint_{P_1} R_1(y, B) \varphi[\omega(B)] \mathrm{d}B \equiv \Pi(A),\ \omega(A) \equiv |u(A) - v(A)|, \tag{69'}$$

$$3)\ v(A) = \Phi_1(A) + \iint_{P_1} T_1(A, B) \psi[B, v(B)] \mathrm{d}B,$$

4) $\sigma_2(y) > 0$ și $R_1(y, B) \geqslant 0$ sînt funcții cunoscute și

$$\sigma_2(y) \geqslant \sigma_1(A) + \iint_{P_1} |T_1(A, B)| h_0(B) \mathrm{d}B,\ A \in P_1.$$

Atunci

$$\frac{\Pi'_x(A)}{\varphi[\Pi(A)]} \leqslant \int_b^y R_1(y, x, \tau) \mathrm{d}\tau ; \int_a^x \frac{\mathrm{d}_x \Pi(A)}{\varphi[\Pi(A)]} \leqslant \iint_{P_1} R_1(y, B) \mathrm{d}B, \tag{70}$$

$$\omega(A) \leqslant p[\sigma_2(y) + \iint_{P_1} R_1[y, B] \mathrm{d}B] \text{ sau } \omega(A) \leqslant \sigma_2(y) + p \iint_{P_1} R_1(y, B) \mathrm{d}B,\ A \in P_1. \tag{71}$$

Menționăm că, în corespondență cu unele forme particulare ale funcției φ, se pot obține evaluări mai bune pentru $\omega(A)$.

12. Rezultatele obținute, combinate cu șirul de rezultate publicat în vastele memorii ale autorilor [23], [24], referitoare la evaluări de erori comise în determinarea cu aproximație, în cadrul variatelor metode de calcul numeric [25], a soluțiilor diverselor probleme de contur integro-diferenţiale, cu operatori exteriori, liniari sau neliniari, policalorici, polivibranţi sau poliarmonici [26], constituie o contribuţie la studiul diferitelor schematizări matematice ale numeroaselor probleme de fizică şi tehnică, ce se prezintă din ce în ce mai des sub forma de mai sus, aşa după cum rezultă din conţinutul multor comunicări prezentate la recentele congrese sau colocvii, ca, de exemplu, cel de-al doilea Congres unional de mecanică teoretică şi aplicată [27] sau Colocviul sovieto-american consacrat ecuaţiilor cu derivate parţiale de la Novosibirsk [28] sau din conţinutul actual teoretic al domeniilor de investigaţie ştiinţifică, ca, de exemplu, diferite domenii de studiu a comportării mecanice a mediilor eterogene (medii monofazice şi multifazice, suspensii diluate, medii elastice şi plastice policristaline) ş.a. [29].

Într-una din lucrările viitoare se va expune, ţinînd seama de importanţa mereu crescîndă în aplicaţii îndeosebi în reglare automată a problemelor schematizate prin ecuaţii diferenţiale cu argument întîrziat, pentru care probleme variaţionale generale s-au formulat şi s-au rezolvat cu totul recent într-o serie de studii de bază datorite lui M. Picone [30] şi care au căpătat o cristalizare bibliografică la zi datorită lucrărilor de sinteză consacrate expunerii direcţiilor fundamentale de dezvoltare a teoriei ecuaţiilor cu argument întîrziat, elaborate sub conducerea lui L. E. El'sgoltz [31]—[32], un număr de probleme de contur integro-diferenţial cu argument întîrziat iniţiate de L. E. Krivošein [33], iar în [34] se va expune un număr de probleme polilocale avînd ca prototip problema

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[\alpha_{ij}y^{i}(a)-\sum_{k=1}^{s}{}' c_{ijk}y^{(i-1)}(x_s)+\beta_{ij}y^{(i)}(b)\right]=0,\quad (j=1,2,\ldots,n) \tag{72}$$

$$y^{(n)}+\lambda\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(x)y^{(i)}(x)+\int_a^r\sum_{i=0}^{m}K_i(x,t)y^{(i)}(t)\mathrm{d}t\right]=f(x). \tag{73}$$

Primită la redacţie la 7 martie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Miron Nicolescu, *Les fonctions polyharmoniques.* Hermann, Paris, 1936.
2. Miron Nicolescu, *Ecuaţia iterată a căldurii.* Studii și cercetări matematice, **V**, *3—4*, 243—332 (1954).
3. D. Mangeron, L. E. Krivošein, *K rešeniu načal'noi zadači dlia integro-differentzial'nogo uravnenia v častnyh proizvodnyh.* Trudy XII-i naučnoi konferentziii prof. — prepod. sostava Kirg. Gos. Un-ta, dec. 1963 (sub tipar).
4. D. Mangeron, *Sur une classe de problèmes à la frontière concernant les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.* C. R. Acad. Sci., Paris, **204**, 94—96, 544—546, 1022—1024 (1937).
5. D. Mangeron, *Sopra un problema al contorno per le equazioni con caratteristiche reali multiple.* Giorn. di Mat., **71**, 1—51 (1953).
6. * * * *Les équations aux dérivées partielles.* Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique. CNRS, Paris, 1963.
7. * * * *Applications des équations non linéaires à la physique théorique. Réunions d'études et de mises au point tenues sous la présidence de Louis de Broglie.* Ed. de la Revue d'Optique, Paris, 1962.

8. D. MANGERON, *Contribuţii la studiul ecuaţiilor polivibrante. I. Metode de calcul numeric al unor noi clase de probleme de contur neliniare.* Studii şi cercetări matematice, XV, *7*, 811–825 (1964).

9. M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica.* Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy, I-e Section (Math., Phys., Chimie), **XXVI**, *1*, 183–232 (1940).

10. T. H. GRONWALL, *On an One-Dimensional Integral Equation.* Ann. Math., **20**, 292–296 (1919).

11. D. MANGERON, *Risolubilità e struttura delle soluzioni dei problemi al contorno non omogenei di Goursat e di Dirichlet per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate totali d'ordine superiore.* Accademia Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, **XXXIV**, *2*, 118–122 (1963).

12. D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Valutazione degli errori commessi in alcuni metodi di calcolo numerico delle soluzioni di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali d'ordine superiore.* Accademia Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, **XXXIV**, *2*, 123–129 (1963).

13. D. MANGERON, *Sur quelques procédés de calcul concernant la détermination des formules de majoration pour certains systèmes différentiels.* Bull. Inst. polytechn. Jassy, III, *2*, 814–818 (1948).

14. L. E. KRIVOŠEIN, *Čislennoe rešenie zadači Cauchy dlia odnogo klassa integro-differentzial' nyh uravnenii.* Materialy IX-i naučnoi konferentzii prof. -prepod. sostava King. Gos. -Un-ta, Frunze, 20–23 (1963).

15. D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone.* (*A Mauro Picone nel suo 75° compleanno*). Rend. Accad. Naz. dei Lincei, s. 8, **XXXI**, *1–2*, 27–32 (1961).

16. R. JANCEL, TH. KAHAN, *Électrodynamiques des Plasmas. I. Processus physiques et Méthodes mathématiques.* Dunod, Paris, 1963.

17. * * * *Proc. of the 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, Berkeley, Calif., 1962. Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris, 1962.

18. D. POMPEIU, *O problemă de prelungire a soluţiilor ecuaţiilor cu caracteristicile reale duble.* Bul. Soc. Şt. Mat., Buc., 1948.

19. D. MANGERON, A. OPREA, *Applicazione delle equazioni alle derivate totali alla risoluzione di un problema di prolungamento delle soluzioni di una classe di equazioni a derivate parziali.* Boll. Un. Mat. Ital., s. 3, **19** (1964).

20. A. HAMMERSTEIN, *Über eine Klasse der Integralgleichungen.* Acta Math., **54**, 117–176 (1930).

21. A. ROSENBLATT, *Sur l'application de la méthode des approximations de M. Picard à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles et multiples.* C. R. Acad. Sci., Paris, **197**, 1278–1280 (1933).

22. D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno non lineare.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei, s. 6, **XVI**, 5–10 (1932); *Sopra un problema al contorno lineare.* Rend. Accad. Sci. fis., mat., Napoli, s. 4, **II**, 1–11 (1932).

23. D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sulla risoluzione di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali non lineari a derivate parziali.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **XXXIV** (1964) (sub tipar).

24. D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra i problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate parziali con derivata d'ordine superiore di Picone.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **XXXIII**, 226–266 (1963).

25. D. MANGERON, *Noi metode de aproximare a soluţiilor unor probleme de contur neliniare relative la ecuaţii integro-diferenţiale cu derivate parţiale.* Colocviul de aproximarea funcţiilor cu aplicaţii la calculul numeric. Cluj, 15–19.XI.1963, p. 7–8.

26. D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Probleme de contur pentru ecuaţii integro-diferenţiale cu operatori exteriori de tip parabolic.* Studii şi cercetări matematice, **XV**, *9* 1964 (sub tipar).

27. * * * *Второй Всесоюзный Съезд по теоретической и прикладной механике.* Акад. наук СССР, Москва, 1964.

28. Л. В. ОВСЯННИКОВ, Т. И. ЗЕЛЕНЯК, *Советско-американский симпозиум математиков в Новосибирске.* Вестник Акад. наук СССР, *11*, 1963, 93—96.

29. ZVI HASHIN, *Theory of Mechanical Behaviour of Heterogeneous Media.* Applied Mech. Rev., **17**, *1*, 1–9 (1964).

30. M. PICONE, *Criteri sufficienti in generali problemi di Calcolo delle variazioni riguardanti integrali pluridimensionali d'ordine qualsivoglia nel vettore minimante a più componenti.* Atti della Academia Naz. dei Lincei, Anno **CCCLX**-1963, Memorie, Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. VIII, **VII**, Sez. I-a (Mat., mecc., astron., geod., geofisica), **3**, 33–57.

31. Л. Е. ЕЛ'СГОЛЦ, *Основные направления развития теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* . У. (27), р. 237.

32. А. М. ЗВЕРКИН, Г. А. КАМЕНСКИЙ, С. Б. НОРКИН, Л. Е. ЕЛСГОЛЦ, *Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом.* II. Труды Семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. II. 1963, 3—49. Университет дружбы народов им. П. Лумумба, Москва.

33. Л. Е. КРИВОШЕИН, *К решению одного интеро-дифференциальных уравнений.* Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. II. Акад. наук Кирг. ССР, Фрунзе, 1962, 211—219.

34. D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Contribuţii la studiul problemelor integro-diferenţiale polilocale.* I. Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **X(XIV)**, *3–4* (1964) (sub tipar).

ASUPRA UNEI TEOREME DE MEDIE

DE

L. J. NICOLESCU

Într-o lucrare recentă [1], A. K. Diaz și J. B. Diaz au dat o teoremă de medie pentru funcțiile de o variabilă reală, cu valori într-un spațiu liniar normat. Pentru a ajunge la această teoremă de medie, autorii stabilesc două propoziții pregătitoare, prezentînd un interes intrinsec. Procedeul folosit poate fi utilizat la funcțiile de mai multe variabile (ne vom ocupa de două variabile),rolul derivatei din cazul unei singure variabile fiind jucat aici de așa-numita derivată bidimensională. Reamintim că o aplicație $y : G \to B$ a unei mulțimi deschise plane într-un spațiu liniar normat este bidimensional continuă într-un punct $(a, c) \in G$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr pozitiv δ_ε, astfel încît $|h| < \delta_\varepsilon$ și $|k| < \delta_\varepsilon$ să implice

$$\| y(a + h, c + k) - y(a + h, c) - y(a, c + k) + y(a, c) \| < \varepsilon.$$

Dacă există elementul $D^2y(a, c) \in B$ astfel încît

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \left\| \frac{y(a+h, c+k) - y(a+h, c) - y(a, c+k) + y(a, c)}{h\,k} - D^2y(a, c) \right\| = 0$$

se spune că y este bidimensional derivabilă în punctul (a, c).

Dacă $D^2y(a, c)$ există oricare ar fi punctul $(a, c) \in G$, aplicația $D^2y : G \to B$ se numește derivată bidimensională a lui y.

Se poate arăta ușor că dacă y posedă derivata $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t!\, \partial t}$, atunci $D^2y = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t' \partial t}$.

Cu precizările de mai sus, demonstrarea teoremei de medie necesită stabilirea prealabilă a două leme pregătitoare.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 8, P. 987–995, BUCUREȘTI, 1964

LEMA 1. *Fie* $y(t, t')$ *o funcție definită în intervalul* $a \leqslant t \leqslant b$ *și* $c \leqslant t' \leqslant d$ *cu valori într-un spațiu liniar normat bidimensional continuă pentru* $a \leqslant t \leqslant b$ *și* $c \leqslant t' \leqslant d$. *Atunci există un subinterval* $a_1 \leqslant t \leqslant b_1$ *și* $c_1 \leqslant t \leqslant d_1$ *astfel încît* $b_1 - a_1 = \frac{1}{3}(b - a)$ *și* $d_1 - c_1 = \frac{1}{3}(d - c)$ *și*

$$\left\| \frac{y(a, c) - y(b, c) - y(a, d) + y(b, d)}{(b - a)(d - c)} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \frac{y(a_1, c_1) - y(b_1, c_1) - y(a_1, d_1) + y(b_1, d_1)}{(b_1 - a_1)(d_1 - c_1)} \right\|$$

Demonstrație. Pentru simplificare luăm $a = 0$, $c = 0$, $b = 1$, $d = 1$ și avem de arătat că există un număr a_1 și un număr c_1 astfel încît

$$\| y(0, 0) - y(1, 0) - y(0, 1) + y(1, 1) \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\| y(a_1, c_1) - y\left(a_1 + \frac{1}{3}, c_1\right) - y\left((a_1, c_1 + \frac{1}{3}\right) + y\left(a_1 + \frac{1}{3}, c_1 + \frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{9}}.$$

Avem

$$1)\ y(1, 1) - y(1, 0) - y(0, 1) + y(0, 0) = y(0, 0) - y\left(\frac{1}{3}, 0\right) - y\left(0, \frac{1}{3}\right) +$$

$$+ y\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + y\left(\frac{1}{3}, 0\right) - y\left(\frac{2}{3}, 0\right) - y\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + y\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) +$$

$$+ y\left(\frac{2}{3}, 0\right) - y(1, 0) - y\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) + y\left(1, \frac{1}{3}\right) + y\left(0, \frac{1}{3}\right) - y\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) -$$

$$- y\left(0, \frac{2}{3}\right) + y\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) + y\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - y\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) - y\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) +$$

$$+ y\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + y\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) - y\left(1, \frac{1}{3}\right) - y\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + y\left(1, \frac{2}{3}\right) +$$

$$+ y\left(0, \frac{2}{3}\right) - y\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) - y(0, 1) + y\left(\frac{1}{3}, 1\right) + y\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) -$$

$$- y\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - y\left(\frac{1}{3}, 1\right) + y\left(\frac{2}{3}, 1\right) + y\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - y\left(1, \frac{2}{3}\right) -$$

$$- y\left(\frac{2}{3}, 1\right) + y(1, 1),$$

de unde

$$\begin{aligned}
2)\ &\| y(1, 1) - y(1, 0) - y(0, 1) + y(0,0) \| \leqslant \left\| y(0, 0) - y\left(\frac{1}{3}, 0\right) - \right.\\
&\left. - y\left(0, \frac{1}{3}\right) + y\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\| + \left\| y\left(\frac{1}{3}, 0\right) - y\left(\frac{2}{3}, 0\right) - y\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \right.\\
&\left. + y\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\| + \left\| y\left(\frac{2}{3}, 0\right) - y\,(1, 0) - y\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) + y\left(1, \frac{1}{3}\right) \right\| + \\
&+ \left\| y\left(0, \frac{1}{3}\right) - y\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - y\left(0, \frac{2}{3}\right) + y\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\| + \left\| y\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - \right.\\
&\left. - y\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) - y\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) + y\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\| + \left\| y\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) - y\left(1, \frac{1}{3}\right) - \right.\\
&\left. - y\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + y\left(1, \frac{2}{3}\right) \right\| + \left\| y\left(0, \frac{2}{3}\right) - y\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) - y(0, 1) + \right.\\
&\left. + y\left(\frac{1}{3}, 1\right) \right\| + \left\| y\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) - y\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - y\left(\frac{1}{3}, 1\right) + y\left(\frac{2}{3}, 1\right) \right\| + \\
&+ \left\| y\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - y\left(1, \frac{2}{3}\right) - y\left(\frac{2}{3}, 1\right) + y(1, 1) \right\| \cdot
\end{aligned}$$

Prin urmare rezultă sau

$$\| y(1,1) - y(1, 0) - y(0, 1) + y(0, 0) \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left\| y(0, 0) - y\left(\frac{1}{3}, 0\right) - y\left(0, \frac{1}{3}\right) + y\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\|}{\frac{1}{9}}$$

sau una din alte opt inegalități obținute din precedenta înlocuind succesiv, în membrul doi punctele $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ prin

$$\left(\frac{1}{3}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}, 0\right), (1, 0), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(1, \frac{1}{3}\right)$$

$$\left(0, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(0, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

$$\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(1,\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ \left(1,\ \frac{2}{3}\right)$$

$$\left(0,\ \frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ (0,1),\ \left(\frac{1}{3},\ 1\right)$$

$$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ 1\right),\left(\frac{2}{3},\ 1\right)$$

$$\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ \left(1,\ \frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{2}{3},\ 1\right),\ (1,\ 1)$$

pentru că dacă cele nouă inegalități ar fi simultan adevărate cînd $\leqslant$ se înlocuieşte cu $>$, atunci prin adunare am obține o inegalitate care contrazice inegalitatea 2).

Aşadar sînt zece posibilități: sau

$$1)\ \|y(1,\ 1) - y(1,\ 0) - y(0,\ 1) + y(0,\ 0)\| <$$

$$< \frac{\left\| y(0,\ 0) - y\left(\frac{1}{3},\ 0\right) - y\left(0,\ \frac{1}{3}\right) + y\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)\right\|}{\frac{1}{9}}$$

sau una din alte opt inegalități obținute din precedenta prin înlocuirea succesivă a sistemului de puncte $(0,\ 0)$, $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$, $\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ din membrul doi, prin unul din sistemele de puncte de mai sus... sau

$$10)\ \|y(1,\ 1) - y(1,\ 0) - y(0,1) + y(0,\ 0)\| =$$

$$= \left\| y(0,\ 0) - y\left(\frac{1}{3},\ 0\right) - y\left(0,\ \frac{1}{3}\right) + y\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)\right\| =$$

$$= \left\| y\left(\frac{1}{3},\ 0\right) - y\left(\frac{2}{3},\ 0\right) - y\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right) + y\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)\right\| = \ldots$$

Să considerăm funcția reală ajutătoare

$$\frac{\left\| y\left(t + \frac{1}{3},\ s + \frac{1}{3}\right) - y\left(t,\ s + \frac{1}{3}\right) - y\left(t + \frac{1}{3},\ s\right) + y(t,\ s)\right\|}{\frac{1}{9}}$$

definită în intervalul $0 \leqslant t \leqslant \frac{2}{3}, 0 \leqslant s \leqslant \frac{2}{3}$. Cum $y(t, t')$ este bidimensional continuă pentru $a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant t' \leqslant d$, adică

$$\lim_{\substack{\tau \to t \\ \tau' \to t'}} \| y(\tau, \tau') \| - y(\tau, t') - y(t, \tau') + y(t, t') \| = 0,$$

atunci

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ s \to 0}} \frac{\| y\left(t + \frac{1}{3}, s + \frac{1}{3}\right) - y\left(t, s + \frac{1}{3}\right) - y\left(t + \frac{1}{3}, s\right) + y(t, s) \|}{\frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{\left\| y\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - y\left(0, \frac{1}{3}\right) - y\left(\frac{1}{3}, 0\right) + y(0, 0) \right\|}{\frac{1}{9}}$$

rezultă, în ipoteza că inegalitatea 1) are loc, că există numere a_1 și c_1 astfel încît

$$0 < a_1 < a_1 + \frac{1}{3} < 1, \quad 0 < c_1 < c_1 + \frac{1}{3} < 1$$

pentru care

$$\| y(1, 1) - y(0, 1) - y(1, 0) + y(0, 0) \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left\| y\left(a_1 + \frac{1}{3}, c_1 + \frac{1}{3}\right) - y\left(a_1, c_1 + \frac{1}{3}\right) - y\left(a_1 + \frac{1}{3}, c_1\right) + y(a_1, c_1) \right\|}{\frac{1}{9}}.$$

Dacă inegalitatea 2) are loc, atunci existența numerelor a_1, c_1 rezultă din:

$$\lim_{\substack{t \to \frac{1}{3} \\ s \to 0}} \frac{\left\| y\left(t + \frac{1}{3}, s + \frac{1}{3}\right) - y\left(t + \frac{1}{3}, s\right) - y\left(t, s + \frac{1}{3}\right) + y(t, s) \right\|}{\frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{\left\| y\left(\frac{1}{3}, 0\right) - y\left(0, \frac{1}{3}\right) - y\left(\frac{2}{3}, 0\right) + y\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\|}{\frac{1}{9}},$$

etc. Dacă 10) are loc, se poate lua $a_1 = \frac{1}{3}$, $c_1 = \frac{1}{3}$ și demonstrația este completă.

LEMA 2. *Fiind dată funcția* $y : [a, b] \times [c, d] \to B$, *unde* B *este un spațiu liniar normat, dacă în punctul* (ξ, ξ'), $a < \xi < b$, $c < \xi' < d$, *derivata a doua directă* $D^2 y(\xi, \xi')$ *există adică*

$$\lim_{\substack{t \to \xi \\ \tau \to \xi'}} \left\| \frac{y(t, \tau) - y(t, \xi') - y(\xi, \tau) + y(\xi, \xi')}{(t - \xi)\ (\tau - \xi')} - D^2 y(\xi, \xi') \right\| = 0$$

și dacă șirurile $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ *și* $\{c_k\}$ *și* $\{d_k\}$ *au proprietățile*

$$\begin{gathered} a \leqslant a_k < \xi < b_k \leqslant b, \\ c \leqslant c_k < \xi' < d_k \leqslant d, \\ \lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} b_k = \xi, \\ \lim_{k \to \infty} c_k = \lim_{k \to \infty} d_k = \xi', \end{gathered}$$

atunci derivata $D^2 y(\xi, \xi')$ *poate fi obținută din relația*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{y(a_k, c_k) - y(b_k, c_k) - y(a_k, d_k) + y(b_k, d_k)}{(b_k - a_k)\ (d_k - c_k)} = D^2 y(\xi, \xi').$$

Pentru $k = 1, 2, 3, ..$ are loc identitatea evidentă

$$3) \quad \frac{y(a_k, c_k) - y(b_k, c_k) - y(a_k, d_k) + y(b_k, d_k)}{(b_k - a_k)\ (d_k - c_k)} - D^2 y(\xi, \xi') =$$

$$= \left[\frac{y(\xi, \xi') - y(\xi, c_k) - y(a_k, \xi) + y(a_k, c_k)}{(\xi - a_k)\ (\xi' - c_k)} - D^2 y(\xi, \xi') \right] \frac{(\xi - a_k)\ (\xi' - c_k)}{(b_k - a_k)(d_k - c_k)} +$$

$$+ \left[\frac{y(\xi, c_k) - y(b_k, c_k) - y(\xi, \xi') + y(b_k, \xi')}{(b_k - \xi)(\xi' - c_k)} - D^2 y(\xi, \xi') \right] \frac{(b_k - \xi)\ (\xi' - c_k)}{(b_k - a_k)(d_k - c_k)} +$$

$$+ \left[\frac{y(a_k, \xi') - y(\xi, \xi') - y(a_k, d_k) + y(\xi, d_k)}{(\xi - a_k)(d_k - \xi')} \right] \frac{(\xi - a_k)(d_k - \xi')}{(b_k - a_k)(d_k - c_k)} +$$

$$+ \left[\frac{y(\xi, \xi') - y(b_k, \xi') - y(\xi, d_k) + y(b_k, d_k)}{(b_k - \xi)(d_k - \xi')} \right] \frac{(b_k - \xi)\ (d_k - \xi')}{(b_k - a_k)(d_k - c_k)} .$$

Din

$$0 < \frac{\xi - a_k}{b_k - a_k} < 1, \quad 0 < \frac{\xi' - c_k}{a_k - c_k} < 1$$

rezultă

$$0 < \frac{(\xi - a_k)\ (\xi'_k - c_k)}{(b_k - a_k)\ (d_k - c_k)} < 1 \text{ etc.}$$

Cum, prin definiție,

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{y(a_k, c_k) - y(\xi, c_k) - y(a_k, \xi) + y(\xi, \xi')}{(\xi - a_k)(\xi' - c_k)} - D^2y(\xi, \xi')\right\| = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{y(\xi, \xi') - y(a_k, \xi') - y(\xi, d_k) + y(a_k, d_k)}{(a_k - \xi)(d_k - \xi')} - D^2y(\xi, \xi')\right\| = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{y(\xi, \xi') - y(a_k, \xi') - y(\xi, d_k) + y(a_k, d_k)}{(a_k - \xi)(d_k - \xi')} - D^2y(\xi, \xi')\right\| = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{y(\xi, \xi') - y(b_k, \xi') - y(\xi, d_k) + y(b_k, d_k)}{(b_k - \xi)(d_k - \xi')} - D^2y(\xi, \xi')\right\| = 0,$$

lema se obține din egalitățile de mai sus și din identitatea 3) care implică

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{y(a_k, c_k) - y(b_k, c_k) - y(a_k, d_k) + y(b_k, d_k)}{(b_k - a_k)\,(d_k - c_k)} - D^2y(\xi, \xi')\right\| \leqslant \\
\leqslant &\left\|\frac{y(\xi, \xi') - y(\xi, c_k) - y(a_k, \xi) + y(a_k, c_k)}{(\xi - a_k)\,(\xi' - c_k)} - D^2y(\xi, \xi')\right\| + \\
+ &\left\|\frac{y(\xi, c_k) - y(b_k, c_k) - y(\xi, \xi') + y(b_k, \xi')}{(b_k - \xi)\,(\xi' - c_k)} - D^2y(\xi, \xi')\right\| + \\
+ &\left\|\frac{y(a_k, \xi') - y(\xi, \xi') - y(a_k, d_k) + y(\xi, d_k)}{(\xi - a_k)\,(d_k - \xi')} - D^2y(\xi, \xi')\right\| + \\
+ &\left\|\frac{y(\xi, \xi') - y(b_k, \xi') - y(\xi, d_k) + y(b_k, d_k)}{(b_k - \xi)\,(d_k - \xi')} - D^2y(\xi, \xi')\right\|
\end{aligned}$$

TEOREMA DE MEDIE. *Fie* $y(t, t')$ *o funcție definită pentru* $a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant t' \leqslant d$ *cu valori într-un spațiu liniar normat. Dacă: 1) în punctele* (a, c), (a, d), (b, d), (b, c) *este bidimensional continuă* și *2)* $D^2y(t, t')$ *există și este finită pentru* $a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant t' \leqslant d$, *atunci există un punct* (ξ, ξ'), $a < \xi < b$, $c < \xi' < d$, *astfel încît*

$$\left\|\frac{y(a, c) - y(b, c) - y(a, d) + y(b, d)}{(b - a)\,(d - c)}\right\| \leqslant \left\| D^2y(\xi, \xi')\right\|.$$

Din ipotezele 1) și 2) rezultă că $y(t, t')$ este dibimensională continuă pe intervalul închis $a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant t' \leqslant d$. Din lema 1 rezultă că există un subinterval $a_1 \leqslant t \leqslant b_1$, $c_1 \leqslant t' \leqslant d_1$ al intervalului $a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant t' \leqslant d$ astfel încît $a < a_1 < b_1 < b$ și $b_1 - a_1 = \frac{1}{3}\,(b - a)$ și $c < c_1 < d_1 < d$

$d_1 - c_1 = \frac{1}{3}\,(d - c)$ și

$$\left\|\frac{y(a,\ c)-y(b,\ c)-y(a,\ d)+y(b,\ d)}{(b-a)(d-c)}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\frac{y(a_1,\ c_1)-y(b_1,\ c_1)-y(a_1,\ d_1)+y(b_1,\ d_1)}{(b_1-a_1)(d_1-c_1)}\right\|.$$

Aplicînd lema 1 intervalului $a_1 \leqslant t \leqslant b_1$, $c_1 \leqslant t' \leqslant d_1$, rezultă că există un subinterval $a_2 \leqslant t \leqslant b_2$, $c_2 \leqslant t' \leqslant d_2$ cu $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$, $b_2 - a_2 = = \frac{1}{3}(b_1 - a_1) = \frac{b-a}{3^2}$ şi $c_1 < c_2 < d_2 < d_1$, $d_2 - c_2 = \frac{1}{3}(d_1 - c_1) = = \frac{d-c}{3^2}$ astfel încît

$$\left\|\frac{y(a,\ c)-y(b,\ c)-y(a,\ d)+y(b,\ d)}{(b-a)(d-c)}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\frac{y(a_1,\ c_1)-y(b_1,\ c_1)-y(a_1,\ d_1)+y(b_1,\ d_1)}{(b_1-a_1)(d_1-c_1)}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\frac{y(a_2,\ c_2)-y(b_2,\ c_2)-y(a_2,\ d_2)+y(b_2,\ d_2)}{(d_2-a_2)(d_2-c_2)}\right\|.$$

Continuînd astfel se ajunge la un şir de intervale închise $a_k \leqslant t \leqslant b_k$, $c_k \leqslant t' \leqslant d_k$, unde pentru fiecare $k = 1, 2, 3, \ldots$,

$$a < a_k < a_{k+1} < b_{k+1} < b_k < b$$

şi

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{3} = \frac{b-a}{3^{k+1}}$$

şi

$$\left\|\frac{y(a,\ c)-y(b,\ c)-y(a,\ d)+y(b,\ d)}{(b-a)(d-c)}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\frac{y\,(a_k,\ c_k)-y\,(b_k,\ c_k)-y\,(a_k,\ d_k)+y\,(b_k,\ d_k)}{(b_k-a_k)(d_k-c_k)}\right\|.$$

Cum şirurile $\{a_k\}$ şi $\{c_k\}$ sînt crescătoare şi mărginite superior de b, respectiv d, iar şirurile $\{b_k\}$, $\{d_k\}$ sînt descrescătoare şi mărginite inferior de a, respectiv c şi

$$\lim_{k\to\infty}(b_k - c_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{b-a}{3^k} = 0$$

$$\lim_{k\to\infty}(d_k - c_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{d-c}{3^k} = 0$$

rezultă că există un număr $a_k < \xi < b_k$ şi $c_k < \xi' < d_k$ pentru $k = 1, 2, \ldots$ astfel încît $\lim a_k = \xi = \lim b_k$ şi $\lim c_k = \xi' = \lim d_k$. Aplicînd lema 2 obţinem

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y(a_k, c_k) - y(b_k, c_k) - y(a_k, d_k) + y(b_k, d_k)}{(b_k - a_k)(d_k - c_k)} = D^2y(\xi, \xi')$$

Concluzia teoremei rezultă din ultima inegalitate şi din

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{y(a_k, c_k) - y(b_k, c_k) - y(a_k, d_k) + y(b_k, d_k)}{(b_k - a_k)(d_k - c_k)} \right\| = \| D^2y(\xi, \xi') \|.$$

Primită la redacţie la 16 mai 1964

BIBLIOGRAFIE

1. A. K. DIAZ and J. B. DIAZ, *Contributions to Differential Equations.* Vol. I Aserial issued under the auspices of Rias and the Univ. of Maryland — 1964.

rezultă că există un număr [illegible] pentru $k = 1$, [illegible] încât $\lim a_n = \xi = \lim b_n$ şi $\lim c_n = \xi' = \lim d_n$. [illegible]

$$\lim \frac{\varphi(a_n, c_n) - \varphi(b_n, c_n) - \varphi(a_n, d_n) + \varphi(b_n, d_n)}{(b_n - a_n)(d_n - c_n)} [illegible]$$

Demonstraţia teoremei rezultă din ultima inegalitate şi din

$$(10)\quad \frac{\varphi(a_n, c_n) - \varphi(b_n, c_n) - \varphi(a_n, d_n) + \varphi(b_n, d_n)}{(b_n - a_n)(d_n - c_n)} [illegible]$$

Primit în redacţie la 16 mai 1964

BIBLIOGRAFIE

[1] [illegible] Contributions to Differential Equations. Vol. I [illegible] issued under the auspices of [illegible] and the Univ. of Maryland, [illegible]

O EXTINDERE A NOȚIUNII DE CATEGORIE ÎN SENS EILENBERG-MAC LANE[1]

DE

ELEMÉR ROSINGER

În legătură cu structurile pseudotopologice introduse în lucrarea [3] s-a observat că totalitatea acestor structuri nu mai formează o categorie în sensul lui Eilenberg-Mac Lane, ci într-un sens mai larg care va fi expus în următoarea:

DEFINIȚIE. Fie Φ o clasă [2]) de obiecte $\mathfrak{F}$, unde $\mathfrak{F}$ este o mulțime de obiecte $\mathcal{F}$ iar $\mathcal{F}$ este o mulțime de obiecte f numite „aplicații", fie Π o clasă de perechi de obiecte din Φ iar „$\circ$" o operație de „compunere" a „aplicațiilor". Spunem că $(\Phi, \Pi, \circ)$ formează o categorie în sens larg dacă:

$$\text{(C1)} \qquad (\forall)\ (\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) \in \Pi :$$

$$(\exists)\ \mathfrak{F}_3 \in \Phi :$$

$$(\forall)\ \mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}_2 :$$

$$(\exists)\ \mathcal{F}_3 \in \mathfrak{F}_3 :$$

$$(\forall)\ f_1 \in \mathcal{F}_1, f_2 \in \mathcal{F}_2 :$$

$$f_1 \circ f_2 \in \mathcal{F}_3 ;$$

$$\text{(C2)} \qquad (\forall)\ (\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2), (\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3) \in \Pi :$$

$$(\exists)\ \mathfrak{F}_4 \in \Phi :$$

$$(\forall)\ \mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}_1,\ \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}_2,\ \mathcal{F}_3 \in \mathfrak{F}_3 :$$

$$(\exists)\ \mathcal{F}_4 \in \mathfrak{F}_4 :$$

$$(\forall)\ f_1 \in \mathcal{F}_1,\ f_2 \in \mathcal{F}_2,\ f_3 \in \mathcal{F}_3 :$$

$$f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3 \in \mathcal{F}_4$$

---

[1] Acest articol a apărut în Rev. Roum. de Math. pures et appl., **IX**, *8* (1964).

[2] Prin clasă înțelegem o noțiune mai generală decît cea de mulțime.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 8, P. 997–999, BUCUREȘTI, 1964

(C3) $(\forall)\ \mathfrak{F} \in \Phi$:

$(\exists)\ \underline{\mathfrak{F}},\ \overline{\mathfrak{F}} \in \Phi$:

(C3.1) $(\underline{\mathfrak{F}}, \mathfrak{F}),\ (\mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{F}}) \in \Pi$

(C3.2) $(\exists)\ \underline{\mathcal{F}} \in \underline{\mathfrak{F}},\ \underline{f} \in \underline{\mathcal{F}},\ \overline{\mathcal{F}} \in \overline{\mathfrak{F}},\ \overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}$:

$(\forall)\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F},\ f \in \mathcal{F}$:

$$\underline{f} \circ f = f \circ \overline{f} = f.$$

Observație. Se poate constata că o categorie în sens Eilenberg-Mac Lane este categorie și în sensul definiției de sus. Într-adevăr, fie $(\mathcal{F}, \circ)$ o categorie Eilenberg-Mac Lane unde $\mathcal{F}$ este clasa de „aplicații" iar „$\circ$" este compunerea aplicațiilor; fie atunci O obiectele categoriei (aplicațiile identice) și pentru $A, B \in O$ fie $\mathcal{H}(A, B)$ aplicațiile obiectului A în B.

Vom considera Φ format din toți $\{\mathcal{H}(A, B)\}$, unde $A, B \in O$ iar Π format din toate perechile $(\{\mathcal{H}(A, B)\}, \{\mathcal{H}(B, C)\})$ cu $A,B,C \in O$; atunci $(\Phi, \Pi, \circ)$ este o categorie în sensul definiției de sus. Într-adevăr:

fie $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) \in \Pi$, atunci

$(\exists)\ (A,B,C \in O : \mathfrak{F}_1 = \{\mathcal{H}(A, B)\},\ \mathfrak{F}_2 = \{\mathcal{H}(B, C)\}$;

fie $\mathfrak{F}_3 = \{\mathcal{H}(A, C)\}$, atunci $\mathfrak{F}_3 \in \Phi$ și se verifică evident (C1);

fie $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2), (\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3) \in \Pi$, atunci

$$(\exists)\ A,B,C, D \in O : \mathfrak{F}_1 = \{\mathcal{H}(A, B)\},\ \mathfrak{F}_2 = \{\mathcal{H}(B, C)\},$$
$$\mathfrak{F}_3 = \{\mathcal{H}(C, D)\};$$

fie $\mathfrak{F}_4 = \{\mathcal{H}(A, D)\}$, atunci $\mathfrak{F}_4 \in \Phi$ și se verifică evident (C2);

fie $\mathfrak{F} \in \Phi$, atunci

$$(\exists)\ A, B \in O : \mathfrak{F} = \{\mathcal{H}(A, B)\};$$

fie $\varepsilon_A \in \mathcal{H}(A, A)$, $\varepsilon_B \in \mathcal{H}(B, B)$ aplicații identice

fie $\underline{\mathfrak{F}} = \{\mathcal{H}(A, A)\}$, $\overline{\mathfrak{F}} = \{\mathcal{H}(B, B)\}$, atunci $\underline{\mathfrak{F}}, \overline{\mathfrak{F}} \in \Phi$, $(\underline{\mathfrak{F}}, \mathfrak{F})$, $(\mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{F}}) \in \Pi$;

fie $\underline{\mathcal{F}} = \mathcal{H}(A, A)$, $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{H}(B, B)$, $\underline{f} = \varepsilon_A$, $\overline{f} = \varepsilon_B$; atunci $\underline{f} \in \underline{\mathcal{F}} \in \underline{\mathfrak{F}}$, $\overline{f} \in \overline{\mathcal{F}} \in \overline{\mathfrak{F}}$ și se verifică evident (C3).

Categoria în sens larg a tuturor structurilor pseudotopologice se obține în felul următor:

Fie Σ respectiv Σ' spații pseudotopologice pe mulțimile nevide E respectiv E'.

Pentru $\boxed{\sim} = (\Sigma, \Sigma', \Phi, \Phi_u)$, structură pseudotopologică pe (E, E'), notăm

$$\mathcal{F}(\boxed{\sim}) = \Phi \times \Phi_u,$$

unde Φ este mulţimea funcţiilor continue iar Φ_u mulţimea funcţiilor uniform continue în pseudotopologia $\boxed{\sim}$.

Fie $\mathfrak{F}(\Sigma, \Sigma') = \{\mathcal{F}(\boxed{\sim}) \mid \boxed{\sim} = (\Sigma, \Sigma', \Phi, \Phi_u)\}$, fie Φ^{PT} format din toţi $\mathfrak{F}(\Sigma, \Sigma')$ iar Π^{PT} format din toate perechile de forma

$$(\mathfrak{F}(\Sigma, \Sigma_1'), \mathfrak{F}(\Sigma_2', \Sigma'')),$$

unde Σ_1', Σ_2' sînt spaţii pseudotopologice pe aceeaşi mulţime nevidă E' astfel încît Σ_1' este mai fină decît Σ_2'.

Fie „$\circ$" compunerea aplicaţiilor definită astfel ca

$$(f, f_u) \circ (f', f_u') = (f' \circ f, f_u' \circ f_u)$$

unde, în a treia paranteză, „$\circ$" reprezintă compunerea obişnuită a funcţiilor.

Atunci $(\Phi^{PT}, \pi^{PT}, \circ)$ este o categorie în sensul definiţiei de sus.

Primită la redacţie la 22 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. S. EILENBERG and S. MAC-LANE, *General Theory of Natural Equivalences.* Trans. Amer. Math. Soc., **58**, 231–294 (1945).
2. S. MAC-LANE, *Duality for Group.* Bull. Amer. Math. Soc., **56**, 485–516 (1950).
3. ELEMÉR ROSINGER, *Structuri pseudotopologice*, Studii şi cercetări matematice, **14**, *2*, 223–251 (1963).

GENERALIZAREA FORMULELOR DE CVADRATURĂ ALE LUI SIMPSON ȘI NEWTON

DE

D. V. IONESCU

În această lucrare se consideră formule de cvadratură de forma

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = A_0\,[f(x_0) + f(x_n)] + A_1\,[f(x_1) + f(x_{n-1})] + \cdots +$$
$$+ A_{p-1}\,[f(x_{p-1}) + f(x_{n-p+1})] +$$
$$A_p\,[f(x_p) + f(x_{p+1}) + \cdots + f(x_{n-p})] + R \tag{1}$$

unde nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sînt în progresie aritmetică cu rația h, iar coeficienții $A_0, A_1, \ldots, A_p$ se determină astfel ca formula să aibă gradul de exactitate $2p+1$. Formulele (1) generalizează formulele de cvadratură ale lui Cotes [1] care se obțin pentru $n = 2p$ și $n = 2p + 1$. În particular pentru $p=1$, formulele (1) generalizează formulele de cvadratură ale lui Simpson și Newton.

Vom trata complet formulele de forma (1) pentru $p = 0$ și $p = 1$, numărul nodurilor fiind oarecare. Pentru $p = 0$ se ia $n \geqslant 1$ iar pentru $p = 1$ se ia $n \geqslant 2$. În cazurile studiate s-a presupus că funcția $f(x)$ este de clasa C^{2p+2} pe intervalul $[x_0, x_n]$ și s-a arătat că restul R se poate pune sub forma unei integrale definite

$$R = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\, f^{(2p+2)}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

S-a determinat funcția $\varphi(x)$ și s-a arătat că ea este negativă pe intervalul (x_0, x_n), de unde a rezultat o evaluare simplă a restului.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 8, P. 1001–1032, BUCUREȘTI, 1964

În lucrare se mai studiază formule de cvadratură de forma

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = A_1'[f(x_1)+f(x_{n-1})] + A_2'[f(x_2)+f(x_{n-2})] + \\ + \cdots + A_p'[f(x_p)+f(x_{n-p})] + \\ + A_{p+1}'[f(x_{p+1})+\cdots+f(x_{n-p-1})] + R', \tag{3}$$

unde nodurile sînt aceleaşi ca şi în formula (1), iar coeficienţii $A_1', \ldots, \ldots, A_{p+1}'$ se determină astfel ca formula să aibă gradul de exactitate $2p+1$. Formulele (3) generalizează formulele lui Milne W. E. şi Steffensen J. F. (citat de [1]), care se obţin pentru $n = 2p + 2$ şi $n = 2p + 3$.

Vom trata complet formulele de forma (3) pentru $p = 0$ şi $p = 1$, presupunînd în primul caz $n \geqslant 2$ iar în al doilea $n \geqslant 3$. În aceste cazuri, presupunînd că funcţia $f(x)$ este de clasa C^{2p+2} pe intervalul $[x_0, x_n]$, vom pune restul R sub forma unei integrale definite (2). S-a demonstrat că funcţia $\varphi(x)$ este pozitivă pe intervalul (x_0, x_n) ceea ce permite să se evalueze restul R' al formulei (3).

Metoda de lucru în studiul formulelor (1) şi (3) este generală şi vom reveni în lucrări ulterioare pentru a da noi rezultate.

§ 1. FORMULE DE TIPUL (1) CU GRADUL DE EXACTITATE 1

1. Vom stabili o formulă de cvadratură de forma

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = A_0[f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_n)] + R_n, \quad (n \geqslant 1) \tag{4}$$

cu gradul de exactitate 1. Fără greutate se constată că

$$A_0 = \frac{nh}{n+1}. \tag{5}$$

Pentru a determina restul, presupunem că funcţia $f(x)$ este de clasa C^2 pe intervalul $[x_0, x_n]$ şi asociem la intervalele $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ polinoamele de gradul al doilea $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ care sînt soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale

$$\varphi_1''(x) = 1, \quad \varphi_2''(x) = 1, \ldots, \quad \varphi_n''(x) = 1 \tag{6}$$

care satisfac la condiţiile la limită

$$\begin{gathered}
\varphi_1(x_0) = 0, \quad \varphi_1'(x_0) = -\frac{nh}{n+1}, \\
\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1), \quad \varphi_1'(x_1) - \varphi_2'(x_1) = \frac{nh}{n+1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_{n-1}(x_{n-1}) = \varphi_n(x_{n-1}), \quad \varphi_{n-1}'(x_{n-1}) - \varphi_n'(x_{n-1}) = \frac{nh}{n+1}, \\
\varphi_n(x_n) = 0, \quad \varphi_n'(x_n) = \frac{nh}{n+1}.
\end{gathered} \tag{7}$$

Scriind că

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k''(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

şi aplicînd formula generalizată de integrare prin părţi se ajunge la formula de cvadratură

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{nh}{n+1}\,[f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_n)] + R \qquad (4')$$

în care restul are forma

$$R = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f''(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (8)$$

unde funcţia $\varphi(x)$ coincide cu polinoamele $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ pe intervalele $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.

Determinarea polinoamelor $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ este simplă. Fără greutate se constată că

$$\varphi_p(x) = \frac{(x - x_{p-1})^2}{2} - \frac{n-p+1}{n+1}\,h\,(x - x_{p-1}) - (p-1)\,\frac{n-p+1}{n+1}\,\frac{h^2}{2} \qquad (9)$$

pentru $p = 1, 2, \ldots, n$. Se constată că

$$\varphi_p(x_{p-1}) = -\,(p-1)\,\frac{n-p+1}{n+1}\,\frac{h^2}{2} < 0, \quad \varphi_p(x_p) = -\,p\,\frac{n-p}{n+1}\,\frac{h^2}{2} < 0,$$

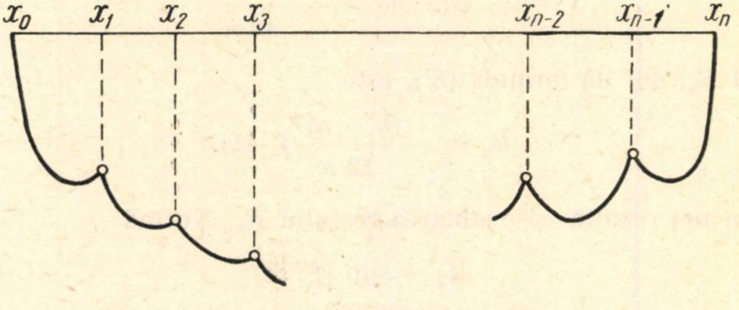


Fig. 1

de unde rezultă că $\varphi_p(x) < 0$ pe intervalul $[x_{p-1}, x_p]$, dacă $p = 2, 3, \ldots, \ldots, n-1$ şi de asemenea că $\varphi_1(x)$ pe intervalul $[x_0, x_1]$, iar $\varphi_n(x) < 0$ pe intervalul (x_{n-1}, x_n).

Deci *funcţia* $\varphi(x)$ *este negativă pe intervalul* (x_0, x_n) şi graficul ei este cel dat în figura 1.

Restul R_n dat de formula (8) se poate deci scrie sub forma

$$R_n = f''(\xi) \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{8'}$$

unde $\xi \in (x_0, x_n)$. Integrala din membrul al doilea se calculează în modul următor: Avem

$$\int_{x_{p-1}}^{x_p} \varphi_p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h^3}{6} - \left(1 - \frac{p}{n+1}\right)\frac{h^3}{2} -$$

$$-[(n+1)(p-1) - (p-1)p]\frac{h^3}{2(n+1)}$$

de unde rezultă că

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h^3}{6} n - \frac{h^3}{2}\left[n - \frac{1}{n+1}\,\frac{n(n+1)}{2}\right] -$$

$$-\frac{h^3}{2(n+1)}\left[\frac{(n-1)n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}\right]$$

adică avem

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{h^3}{12} n^2.$$

Înlocuind $x_0 = a$, $x_n = b$, $h = \frac{b-a}{n}$, formula precedentă se mai scrie

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{(b-a)^3}{12\,n}$$

şi restul R_n, dat de formula (8′), este

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12\,n} f''(\xi). \tag{8''}$$

De aici rezultă şi evaluarea restului R_n. Notînd

$$M_2 = \sup\limits_{(x_0,\, x_n)} |f''(x)| \tag{10}$$

avem

$$|R_n| \leqslant K_n M_2, \tag{8'''}$$

unde

$$K_n = \frac{(b-a)^3}{12\,n}. \tag{11}$$

Formula (4′) se mai scrie

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n+1}\,[f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(b)] + R_n. \tag{4''}$$

Ea apare *ca o generalizare a formulei de cvadratură a trapezului*, care se obţine pentru $n = 1$.

Formula (11) arată că numărul K_n din evaluarea (8‴) a lui $|R_n|$, este invers proporţional cu n.

§ 2. FORMULE DE TIPUL (3) CU GRADUL DE EXACTITATE 1

2. Păstrînd aceleaşi ipoteze ca în § 1 să stabilim o formulă de cvadratură de forma

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = A_1'\,[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})] + R_n' \tag{12}$$

cu gradul de exactitate 1. Vom avea

$$A_1' = \frac{nh}{n-1} = \frac{b-a}{n-1}\,. \tag{13}$$

Pentru a determina restul se procedează ca în § 1. Se consideră polinoamele $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ de gradul al doilea, soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale (6) şi care satisfac la condiţiile la limită

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_0) = 0, \quad \varphi_1'(x_0) = 0\\
&\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1), \; \varphi_1'(x_1) - \varphi_2'(x_1) = \frac{nh}{n-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{n-1}(x_{n-1}) = \varphi_n(x_{n-1}), \quad \varphi_{n-1}'(x_{n-1}) - \varphi_n'(x_{n-1}) = \frac{nh}{n-1}\\
&\varphi_n(x_n) = 0 \quad \varphi_n'(x_n) = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

şi restul va fi dat de formula

$$R_n' = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f''(x)\,\mathrm{d}x, \tag{15}$$

unde funcţia $\varphi(x)$ coincide cu polinoamele $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ pe intervalele $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.

Fără greutate se constată că

$$\varphi_p(x) = \frac{(x-x_{p-1})^2}{2} - \frac{(p-1)h}{n-1}(x-x_{p-1}) + (p-1)\frac{n-p+1}{2(n-1)}h^2 \tag{16}$$

pentru $p = 1,2,\ldots, n$.

Polinoamele $\varphi_p\,(x)$ au rădăcinile complexe, pentru $p = 2,3, \ldots n - 1$, deoarece discriminantul $\varphi_p\,(x)$ este

$$\frac{(p-1)^2\,h^2}{(n-1)^2} - \frac{p-1}{n-1}\,(n-p+1)\,h^2 = \frac{(p-1)\,(p-n)\,n}{(n-1)^2}\,h^2 < 0.$$

Rezultă că graficul funcţiei $\varphi\,(x)$ este cel din figura 2.

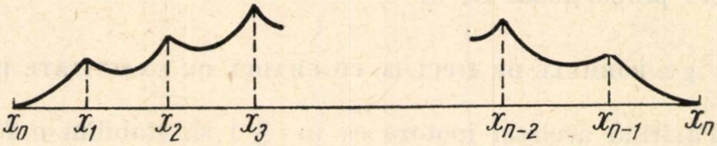


Fig. 2

Prin urmare funcţia $\varphi\,(x)$ este pozitivă pe intervalul $(x_0,\, x_n)$.

Restul R_n' se mai poate scrie sub forma

$$R_n' = f''\,(\xi) \int_{x_0}^{x_n} \varphi\,(x)\,\mathrm{d}x, \tag{15'}$$

unde $\xi \in (x_0,\, x_n)$. Pentru a calcula integrala din membrul al doilea observăm că

$$\int_{x_{p-1}}^{x_p} \varphi_p\,(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h^3}{6} - \frac{p-1}{n-1}\,\frac{h^3}{2} + \frac{n+1}{n-1}\,(p-1)\frac{h^3}{2} - \frac{1}{n-1}\,p\,(p-1)\,\frac{h^3}{2}$$

de unde rezultă că

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi\,(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h^3\,n^2}{12} = \frac{(b-a)^3}{12\,n}\,.$$

Formula (15′) se scrie deci

$$R_n' = \frac{(b-a)^3}{12n} f''\,(\xi) \tag{15''}$$

şi de aici rezultă evaluarea

$$|\,R_n'| \leqslant K_n'\,M_2, \tag{15'''}$$

unde

$$K_n' = \frac{(b-a)^2}{12\,n}\,. \tag{16'}$$

Formula (12) se scrie

$$\int_a^b f\,(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n-1}\,[f\,(x_1) + f\,(x_2) + \ldots + f\,(x_{n-1})]. \tag{12'}$$

Ea apare ca o generalizare a celei de-a doua formule de cvadratură a trapezului, care se obţine pentru $n = 2$.

Formula (16) arată că numărul K_n' din evaluarea (15''') a lui $|R_n'|$ este invers proporţional cu n.

§ 3. FORMULE DE TIPUL (1) CU GRADUL DE EXACTITATE 3

3. Vom stabili o formulă de cvadratură de forma

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = A_0\,[f(x_0) + f(x_n)] + \\ + A_1\,[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})] + R_n, \quad (n \geqslant 2) \tag{17}$$

cu gradul de exactitate 3.

Scriind că $R_n = 0$ cînd $f(x)$ este înlocuit cu 1 şi cu $(x - x_0)^2$ se obţine un sistem de ecuaţii în A_0 şi A_1 care are soluţia

$$A_0 = \frac{nh}{2(n+1)}, \quad A_1 = \frac{n^2 h}{n^2 - 1}$$

astfel că formula (17) este

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{nh}{2(n+1)}[f(x_0) + f(x_n)] + \\ + \frac{n^2 h}{n^2 - 1}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})] + R_n. \tag{18}$$

Pentru a determina restul acestei formule să presupunem că funcţia $f(x)$ este de clasa C^4 pe intervalul $[x_0, x_n]$. La intervalele $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, ataşăm polinoamele de gradul al patrulea $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale :

$$\varphi_1^{(4)}(x) = 1, \quad \varphi_2^{(4)}(x) = 1, \ldots, \varphi_n^{(4)}(x) = 1 \tag{19}$$

şi care satisfac la condiţiile

$$\varphi_1(x_0) = 0,\ \varphi_1'(x_0) = 0,\ \varphi_1''(x_0) = 0,\ \varphi_1'''(x_0) = \frac{-nh}{2(n+1)},$$

$$\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1),\ \varphi_1'(x_1) = \varphi_2'(x_1),\ \varphi_1''(x_1) = \varphi_2''(x_1),$$

$$\varphi_1'''(x_1) - \varphi_2'''(x_1) = \frac{n^2 h}{n^2 - 1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{20}$$

$$\varphi_{n-1}(x_{n-1}) = \varphi_n(x_{n-1}),\ \varphi_{n-1}'(x_{n-1}) = \varphi_n'(x_{n-1}),\ \varphi_{n-1}''(x_{n-1}) = \varphi_n''(x_{n-1}),$$

$$\varphi_{n-1}'''(x_{n-1}) - \varphi_n'''(x_{n-1}) = \frac{n^2 h}{n^2 - 1},$$

$$\varphi_n(x_n) = 0,\ \varphi_n'(x_n) = 0,\ \varphi_n''(x_n) = 0,\ \varphi_n'''(x_n) = \frac{nh}{2(n+1)}.$$

Scriind că

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{p=1}^{n} \int_{x_{p-1}}^{x_p} \varphi_p^{(4)}(x) f(x)$$

aplicînd la fiecare integrală din membrul al doilea formula generalizată de integrare prin părţi şi ţinînd seamă de condiţiile la limită (20), se obţine formula de cvadratură (18), în care restul R_n este dat de formula

$$R_n = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{21}$$

unde funcţia $\varphi(x)$ coincide cu polinoamele $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ pe intervalele $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.

4. Să determinăm polinoamele $\varphi_1(x), \ldots., \varphi_n(x)$. Ţinînd seama de prima ecuaţie (19) şi de condiţiile la limită din nodul x_0, avem

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_0)^4}{4!} - \frac{nh}{2(n+1)} \frac{(x-x_0)^3}{3!}. \tag{22_1}$$

Pentru a calcula pe $\varphi_2(x)$ să ţinem seama de condiţiile la limită (20) din nodul x_1. Din ecuaţia (22_1) se deduce că

$$\varphi_1(x_1) = -\frac{(n-1)^2}{n^2-1}\frac{h^4}{4!}, \quad \varphi_1'(x_1) = -\frac{(n-1)(n-2)}{2(n^2-1)}\frac{h^3}{3!}$$

$$\varphi_1''(x_1) = -\frac{n-1}{n^2-1}\frac{h^2}{2!}, \quad \varphi_1'''(x_1) = \frac{(n-1)(n+2)}{2(n^2-1)} h$$

şi vom avea

$$\varphi_2(x_1) = -\frac{(n-1)^2}{n^2-1}\frac{h^4}{4!}, \quad \varphi_2'(x_1) = -\frac{(n-1)(n-2)}{2(n^2-1)}\frac{h^3}{3!},$$

$$\varphi_2''(x_1) = -\frac{n-1}{n^2-1}\frac{h^2}{2!}, \quad \varphi_2'''(x_1) = -\frac{n^2-n+2}{2(n^2-1)} h.$$

Rezultă că polinomul $\varphi_2(x)$ este dat de

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_1)^4}{4!} - \frac{n^2-n+2}{2(n^2-1)} h \frac{(x-x_1)^3}{3!} + \frac{n-1}{n^2-1}\frac{h^2}{2!}\frac{(x-x_1)}{2!} -$$

$$- \frac{(n-1)(n-2)}{2(n^2-1)}\frac{h^3}{3!}(x-x_1) - \frac{(n-1)^2}{n^2-1}\frac{h^4}{4!}. \tag{22_2}$$

Să demonstrăm că în general vom avea

$$\varphi_p(x) = \frac{(x-x_{p-1})^4}{4!} - \frac{n^2-n+2(p-1)}{2(n^2-1)}\, h\, \frac{(x-x_{p-1})^3}{3!} +$$

$$+ (p-1)\frac{n-p+1}{n^2-1}\,\frac{h^2}{2!}\,\frac{(x-x_{p-1})^2}{2!} -$$

$$-(p-1)\frac{(n-p+1)(n-2p+2)}{2(n^2-1)}\,\frac{h^3}{3!}\,(x-x_{p-1}) -$$

$$-(p-1)^2\frac{(n-p+1)^2}{n^2-1}\,\frac{h^4}{4!}. \qquad (22_p)$$

Ecuaţia aceasta este adevărată pentru $p = 2$, căci ea coincide cu ecuaţia (22_2). Pentru a dovedi că ecuaţia (22_p) este valabilă în general, s-o admitem pentru indicele p şi să calculăm pe $\varphi_{p+1}(x)$.

Condiţiile la limită din nodul x_p sînt

$$\varphi_p(x_p) = \varphi_{p+1}(x_p),\ \varphi_p'(x_p) = \varphi_{p+1}'(x_p),\ \varphi_p''(x_p) = \varphi_{p+1}''(x_p),$$

$$\varphi_p'''(x_p) - \varphi_{p+1}'''(x_p) = \frac{n^2 h}{n^2-1}.$$

Din ecuaţia (22_p) se deduce că

$$\varphi_p(x_p) = -p^2\frac{(n-p)^2}{n^2-1}\,\frac{h^4}{4!}$$

$$\varphi_p'(x_p) = -p\,\frac{(n-p)(n-2p)}{2(n^2-1)}\,\frac{h^3}{3!}$$

$$\varphi_p''(x_p) = p\,\frac{n-p}{n^2-1}\,\frac{h^2}{2!}$$

$$\varphi_p'''(x_p) = \left[1 - \frac{n^2-n+2(p-1)}{2(n^2-1)}\right] h$$

şi ţinînd seamă de condiţiile la limită din nodul x_p vom avea

$$\varphi_{p+1}(x_p) = -p^2\frac{(n-p)^2}{n^2-1}\,\frac{h^4}{4!},$$

$$\varphi_{p+1}'(x_p) = -p\,\frac{(n-p)(n-2p)}{2(n^2-1)}\,\frac{h^3}{3!},$$

$$\varphi_{p+1}''(x_p) = p\,\frac{n-p}{n^2-1}\,\frac{h^2}{2!},$$

$$\varphi_{p+1}'''(x_p) = -\frac{n^2-n+2p}{2(n^2-1)}\,h.$$

Prin urmare

$$\varphi_{p+1}(x) = \frac{(x-x_p)^4}{4!} - \frac{n^2-n+2p}{2(n^2-1)} h \frac{(x-x_p)^3}{3!} +$$

$$+ p\frac{n-p}{n^2-1}\frac{h^2}{2!}\frac{(x-x_p)^2}{2!} - p\frac{(n-p)(n-2p)}{2(n^2-1)}\frac{h^3}{3!}(x-x_p) -$$

$$- p^2\frac{(n-p)^2}{n^2-1}\frac{h^4}{4!}$$

şi deoarece această ecuaţie se deduce din ecuaţia (22_p) schimbînd pe p în $p+1$, rezultă că ecuaţia (22_p) este generală.

Observăm că ecuaţia (22_p) convine şi pentru $p = 1$, deoarece în acest caz ea se reduce la ecuaţia (22_1).

5. Să demonstrăm acum că funcţia $\varphi(x)$ este negativă pe intervalul (x_0, x_n), oricare ar fi n. Pentru aceasta vom demonstra întîi că derivata $\varphi_p''(x)$ are rădăcini reale în intervalul (x_{p-1}, x_p). Într-adevăr, din ecuaţia (22_p) se deduce că

$$\varphi_p''(x) = \frac{(x-x_{p-1})^2}{2} - \frac{n^2-n+2(p-1)}{2(n^2-1)} h(x-x_{p-1}) +$$

$$+ (p-1)\frac{n-p+1}{n^2-1}\frac{h^2}{2}.$$

Ecuaţia

$$(n^2-1)(x-x_{p-1})^2 - [n^2-n+2(p-1)]h(x-x_{p-1}) +$$

$$+ (p-1)(n-p+1)h^2 = 0$$

are rădăcinile

$$x'_{p-1} - x_{p-1} = h\frac{n^2-n+2(p-1)-\sqrt{[n^2-n+2(p-1)]^2-(n^2-1)(p-1)(n-p+1)}}{2(n^2-1)},$$

$$x''_{p-1} - x_{p-1} = h\frac{n^2-n+2(p-1)+\sqrt{[n^2-n+2(p-1)]^2-(n^2-1)(p-1)(n-p+1)}}{2(n^2-1)}.$$

Deoarece

$$[n^2-n+2(p-1)]^2 - 4(n^2-1)(p-1)(n-p+1) =$$

$$= n^2[n-(2p-1)]^2$$

vom avea

$$x'_{p-1} - x_{p-1} = \frac{p-1}{n-1}h, \quad x''_{p-1} - x_{p-1} = \frac{n-(p-1)}{n+1}h. \tag{23}$$

Aceste formule sînt valabile pentru $p = 1,2,\ldots,n$. Se constată cu uşurinţă că numerele x'_{p-1} şi x''_{p-1} sînt cuprinse între x_{p-1} şi x_p.

Mai observăm că

$$\varphi_p'(x'_{p-1}) = -\frac{(p-1)n^2(n-p)(n-2p+1)}{2\cdot 3!\,(n+1)(n-1)^3}h^3. \tag{24}$$

Este uşor de văzut că $y = \varphi(x)$ reprezintă o curbă simetrică faţă de dreapta $x = \frac{x_0 + x_n}{2}$. De aceea pentru construirea acestei curbe este suficient să ne mărginim la prima jumătate a intervalului $[x_0, x_n]$.

1° Să presupunem $n = 2q$. În acest caz vom lua $1 \leqslant p \leqslant q$. Avem următorul tablou de variaţie (tabloul 1)

Tabloul 1

x	x_{p-1}		x'_{p-1}				x''_{p-1}			x'_p
φ''_p	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+
φ'_p	A_p	↗	M_p		↘		m_p	↗		B_p

Se constată că

$$A_p = -(p-1)\frac{(2q-p+1)\,[(q-p)+1]}{4q^2-1}\,\frac{h^3}{3!} < 0,$$

$$B_p = -p\,\frac{(2q-p)(q-p)}{4q^2-1}\,\frac{h^3}{3!} < 0,$$

$$M_p = -(p-1)\frac{2q^2}{(2q+1)(2q-1)^3}(2q-p)[2(q-p)+1]\frac{h^3}{3!} < 0.$$

Rezultă că $\varphi'_p(x) < 0$ pe intervalul $[x_{p-1}, x_p]$ ceea ce înseamnă că $\varphi_p(x)$ descreşte pe intervalul $[x_{p-1}, x_p]$ de la $-(p-1)^2\frac{(2q-p+1)^2}{4q^2-1}\frac{h^4}{4!}$ la $-p^2\frac{(2q-p)^2}{4q^2-1}\frac{h^4}{4!}$.

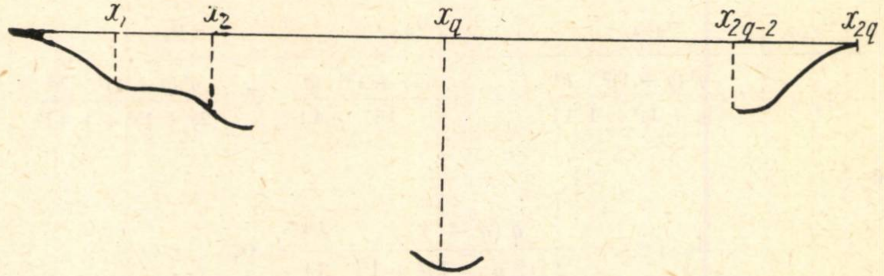


Fig. 3

Cînd $p = q$, avem $\varphi'_q(x_q) = 0$ de unde rezultă că $\varphi_q(x)$ are un minim pentru $x = x_q$. Graficul funcţiei $\varphi(x)$ este cel din figura 3 şi prin urmare funcţia $\varphi(x)$ este negativă pe intervalul (x_0, x_n).

2° Să presupunem $n = 2q + 1$. Ca şi mai sus ne vom mărgini la $1 \leqslant p \leqslant q + 1$. Pentru $p < q + 1$, avem acelaşi tablou de variaţie pentru $\varphi_p'(x)$ cu următoarele valori pentru A_p, B_p, M_p :

$$A_p = -(p-1)\frac{[2(q+1)-p][2q+3-2p]}{2[(2q+1)^2-1]}\frac{h^3}{3!} < 0,$$

$$B_p = -p\,\frac{(2q-p+1)[2(q-p)+1]}{2[(2q+1)^2-1]}\frac{h^3}{3!} < 0,$$

$$M_p = -(p-1)\,\frac{(2q+1)^2(2q-p+1)(q-p+1)}{2(q+1)(2q)^3}\frac{h^3}{3!} < 0,$$

ceea ce înseamnă că $\varphi_p'(x) < 0$ pe intervalul $[x_{p-1}, x_p]$.

Rezultă că $\varphi_p(x)$ descreşte pe intervalul $[\,x_{p-1},\ x_p\,]$ de la $-(p-1)^2\dfrac{[(2q+1)-p+1]^2}{(2q+1)^2-1}\dfrac{h^4}{4!}$ la $-p^2\dfrac{(2q+1-p)^2}{(2q+1)^2-1}\dfrac{h^4}{4!}$.

Cînd $p = q + 1$, x_{p-1}' şi x_{p-1}'' se confundă cu $x_q' = x_q + \dfrac{h}{2}$.

Avem următorul tablou de variaţie (tabloul 2).

Tabloul 2

x	x_q		x_q'		x_{q+1}
φ_{q+1}''	$+$	$+$	0	$+$	$+$
φ_{q+1}'	A_{q+1}	$\nearrow$	M_{q+1}	$\nearrow$	B_{q+1}
φ_{q+1}	$-\dfrac{q^2(q+1)^2}{(2q+1)^2-1}\dfrac{h^4}{4!}$	$\searrow$	$-\dfrac{(2q+1)^2}{16}\dfrac{h^4}{4!}$	$\nearrow$	$\dfrac{q^2(q+1)^2}{(2q+1)^2-1}\dfrac{h^4}{4!}$

unde

$$A_{q+1} = -\frac{q(q+1)}{2[(2q+1)^2-1]}\frac{h^3}{3!} < 0,$$

$$B_{q+1} = \frac{q(q+1)}{2[(2q+1)^2-1]}\frac{h^3}{3!} > 0,$$

$$M_{q+1} = 0.$$

Vom avea prin urmare graficul din figura 4.

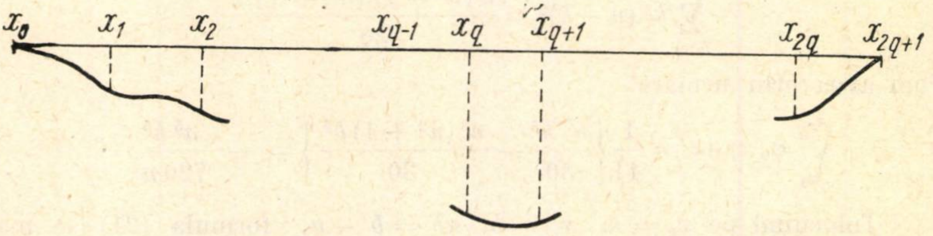


Fig. 4

Din grafic rezultă că funcţia $\varphi(x)$ este negativă pe intervalul (x_0, x_{2q+1}).

6. Ţinînd seamă că $\varphi(x) < 0$ pe intervalul (x_0, x_n), restul R_n dat de formula (21) se mai scrie

$$R_n = f^{(4)}(\xi) \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{21'}$$

unde $\xi \in (x_0, x_n)$. Integrala din membrul al doilea se calculează cu ajutorul formulei de cvadratură (18), înlocuind pe $f(x)$ cu

$$\frac{(x - x_0)^2 (x - x_n)^2}{4!}.$$

Se deduce că

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4!}\left\{\int_{x_0}^{x_n} (x - x_0)^2 (x - x_n)^2\,\mathrm{d}x - \right.$$

$$\left. - \frac{n^2 h^5}{n^2 - 1}\left[1^2 (n-1)^2 + 2^2 (n-2)^2 + \ldots + (n-1)^2 \cdot 1^2\right]\right\}.$$

Pe de o parte avem

$$\int_{x_0}^{x_n} (x - x_0)^2 (x - x_n)^2\,\mathrm{d}x = \frac{n^5 h^5}{30}$$

iar pe de altă parte

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 (n-k)^2 = n^2 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - 2n \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + \sum_{k=1}^{n-1} k^4.$$

Ţinînd seamă că

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^4 = \frac{1}{5}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)\cdot n +$$

$$+ \frac{3}{2}(n-3)(n-2)(n-1)\,n + \frac{7}{3}(n-2)(n-1)\,n + \frac{1}{2}(n-1)\,n$$

se deduce că

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 (n-k)^2 = \frac{n(n^2-1)(n^2+1)}{30}.$$

Vom avea prin urmare

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4!}\left\{\frac{n^5 h^5}{30} - \frac{n^3(n^2+1)h^5}{30}\right\} = -\frac{n^5 h^5}{720 n^2}.$$

Înlocuind pe $x_0 = a$, $x_n = b$, $nh = b - a$, formula (21) se mai scrie

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{720 n^2} f^{(4)}(\xi). \tag{21''}$$

De aici rezultă evaluarea restului R_n. Notînd

$$M_4 = \sup_{(x_0,\, x_n)} |f^{(4)}(x)| \tag{25}$$

vom avea

$$|R_n| \leqslant K_n \cdot M_4, \tag{21'''}$$

unde

$$K_n = \frac{(b-a)^5}{720 n^2}. \tag{26}$$

Prin urmare, restul R_n din formula de cvadratură (18) are evaluarea (21''') şi numărul K_n este invers proporţional cu n^2.

7. *Exemple practice de formule de cvadratură de forma (17).* Pentru $n = 2$ şi $n = 3$ avem formulele de cvadratură ale lui Simpson şi Newton pentru care

$$K_2 = \frac{(b-a)^5}{2880}, \quad K_3 = \frac{4}{9}\,\frac{(b-a)^5}{2880} < 0{,}445\,\frac{(b-a)^5}{2880}.$$

Pentru $n = 4,5,\ldots,10$ coeficienţii A_0, A_1 din formula (17) şi coeficientul K_n din evaluarea (21''') a restului R_n sînt daţi în tabloul 3.

§ 4. FORMULE DE TIPUL (3) CU GRADUL DE EXACTITATE 3

8. Vom stabili o formulă de cvadratură de forma

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = A_1'\,[f(x_1) + f(x_{n-1})] + $$
$$+ A_2'\,[f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-2})] + R_n' \tag{27}$$

cu gradul de exactitate 3 şi vom determina restul ei R_n' făcînd aceleaşi ipoteze ca la punctul 3.

Scriind că $R'_n = 0$, cînd $f(x)$ este înlocuit cu 1 şi cu $(x - x_0)^2$, se obţine un sistem de ecuaţii în A'_1 şi A'_2 care are soluţia

$$A'_1 = \frac{n\,(3\,n-4)}{2\,(n-1)\,(n-2)}\,h, \quad A'_2 = \frac{n\,(n^2-6\,n+6)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,h$$

astfel că formula (27) se scrie:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n\,(3\,n-4)}{2\,(n-1)(n-2)}\,h\,[f(x_1) + f(x_{n-1})] +$$

$$+ \frac{n\,(n^2-6\,n+6)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,h\,[f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-2})] + R'_n. \qquad (28)$$

Tabloul 3

n	$A_0 = \frac{b-a}{2\,(n+1)}$	$A_1 = \frac{n}{n^2-1}\,(b-a)$	$K_n = \frac{4}{n^2}\,\frac{(b-a)^5}{2880}$
4	$\frac{1}{10}\,(b-a)$	$\frac{4}{15}\,(b-a)$	$\frac{4}{16}\,\frac{(b-a)^5}{2880} = 0{,}250\,\frac{(b-a)^5}{2880}$
5	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{4}{25} = 0{,}160$
6	$\frac{1}{14}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{4}{36} < 0{,}112$
7	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{4}{49} < 0{,}082$
8	$\frac{1}{18}$	$\frac{8}{63}$	$\frac{4}{64} < 0{,}063$
9	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{80}$	$\frac{4}{81} < 0{,}050$
10	$\frac{1}{22}$	$\frac{10}{99}$	$\frac{4}{100} = 0{,}040$

Pentru a determina restul R'_n ataşăm la intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots$ $\ldots, [x_{n-1}, x_n]$ polinoamele $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ care sînt soluţiile ecuaţiilor diferenţiale (19) şi satisfac la condiţiile la limită:

$$\varphi_1(x_0) = 0, \quad \varphi'_1(x_0) = 0, \quad \varphi''_1(x_0) = 0, \quad \varphi'''_1(x_0) = 0,$$

$$\varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_1) = 0, \quad \varphi'_1(x_1) - \varphi'_2(x_1) = 0, \quad \varphi''_1(x_1) - \varphi''_2(x_1) = 0,$$

$$\varphi'''_1(x_1) - \varphi'''_2(x_1) = \frac{n\,(3\,n-4)}{2\,(n-1)\,(n-2)}\,h,$$

$$\varphi_2(x_2)-\varphi_3(x_2)=0,\quad \varphi_2'(x_2)-\varphi_3'(x_2)=0,\quad \varphi_2''(x_2)-\varphi_3''(x_2)=0,$$

$$\varphi_2'''(x_2)-\varphi_3'''(x_2)=\frac{n(n^2-6n+6)}{(n-1)(n-2)(n-3)}h,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (29)$$

$$\varphi_{n-2}(x_{n-2})-\varphi_{n-1}(x_{n-2})=0,\quad \varphi_{n-2}'(x_{n-2})-\varphi_{n-1}'(x_{n-2})=0,$$

$$\varphi_{n-2}''(x_{n-2})-\varphi_{n-1}''(x_{n-2})=0,\quad \varphi_{n-2}'''(x_{n-2})-\varphi_{n-1}'''(x_{n-2})=\frac{n(n^2-6n+6)}{(n-1)(n-2)(n-3)}h,$$

$$\varphi_{n-1}(x_{n-1})-\varphi_n(x_{n-1})=0,\quad \varphi_{n-1}'(x_{n-1})-\varphi_n'(x_{n-1})=0,$$

$$\varphi_{n-1}''(x_{n-1})-\varphi_n''(x_{n-1})=0,$$

$$\varphi_{n-1}'''(x_{n-1})-\varphi_n'''(x_{n-1})=\frac{n(3n-4)}{2(n-1)(n-2)}h,$$

$$\varphi_n(x_n)=0,\quad \varphi_n'(x_n)=0,\quad \varphi_n''(x_n)=0,\quad \varphi_n'''(x_n)=0.$$

Procedînd ca la punctul 3, se constată că restul din formula (28) este dat de formula

$$R_n'=\int_{x_0}^{x_n}\varphi(x)f^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (30)$$

unde funcția $\varphi(x)$ coincide cu polinoamele $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ pe intervalele $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.

9. Să determinăm polinoamele $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Prima ecuație (19) și condițiile la limită (29) din nodul x_0 arată că

$$\varphi_1(x)=\frac{(x-x_0)^4}{4!}. \qquad (31_1)$$

Pentru a determina pe $\varphi_2(x)$, ținem seamă de condițiile la limită (29) din nodul x_1. Avem

$$\varphi_1(x_1)=\frac{h^4}{4!},\quad \varphi_1'(x_1)=\frac{h^3}{3!},\quad \varphi_1''(x_1)=\frac{h^2}{2!},\quad \varphi_1''(x_1)=h$$

și deducem că

$$\varphi_2(x_1)=\frac{h^4}{4!},\quad \varphi_2'(x_1)=\frac{h^3}{3!},\quad \varphi_2''(x_1)=\frac{h^2}{2!},$$

$$\varphi_2'''(x_1)=-\frac{n^2+2n-4}{2(n-1)(n-2)}h.$$

de unde rezultă că

$$\varphi_2(x)=\frac{(x-x_1)^4}{4!}-\frac{n^2+2n-4}{2(n-1)(n-2)}h\frac{(x-x_1)^3}{3!}+$$

$$+\frac{h^2}{2!}\frac{(x-x_1)^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}(x-x_1)+\frac{h^4}{4!}. \qquad (31_2)$$

Pentru a calcula pe $\varphi_3(x)$, ţinem seamă de condiţiile la limită (29) din nodul x_2; avem

$$\varphi_2(x_2) = 2\,\frac{5n^2 - 20n + 16}{(n-1)(n-2)}\,\frac{h^4}{4!} = \frac{10n^3 - 70n^2 + 152n - 96}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,\frac{h^4}{4!},$$

$$\varphi_2'(x_2) = \frac{7n^2 - 36n + 32}{2(n-1)(n-2)}\,\frac{h^3}{3!} = \frac{7n^3 - 57n^2 + 140n - 96}{2(n-1)(n-2)(n-3)}\,\frac{h^3}{3!},$$

$$\varphi_2''(x_2) = \frac{n^2 - 8n + 8}{(n-1)(n-2)}\,\frac{h^2}{2!} = \frac{n^3 - 11n^2 + 32n - 24}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,\frac{h^2}{2!},$$

$$\varphi_2''(x_2) = \frac{n^2 - 8n + 8}{2(n-1)(n-2)}\,h = \frac{n^3 - 11n^2 + 32n - 24}{2(n-1)(n-2)(n-3)}\,h.$$

Deducem că

$$\varphi_3'''(x_2) = \frac{-n^3 + n^2 + 20n - 24}{2(n-1)(n-2)(n-3)}\,h$$

şi prin urmare vom avea

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-x_2)^4}{4!} + \frac{-n^3 + n^2 + 20n - 24}{2(n-1)(n-2)(n-3)}\,h\,\frac{(x-x_2)^3}{3!} +$$
$$+ \frac{n^3 - 11n^2 + 32n - 24}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,\frac{h^2}{2!}\,\frac{(x-x_2)^2}{2!} +$$
$$+ \frac{7n^3 - 57n^2 + 140n - 96}{2(n-1)(n-2)(n-3)}\,\frac{h^3}{3!}(x-x_2) + \frac{10n^3 - 70n^2 + 152n - 96}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,\frac{h^4}{4!}.$$

Să calculăm în general pe $\varphi_p(x)$, pe care-l vom scrie sub forma

$$\varphi_p(x) = \frac{(x-x_{p-1})}{4!} + \frac{A_p^{(1)}n^3 + A_p^{(2)}n^2 + A_p^{(3)}n + A_p^{(4)}}{2(n-1)(n-2)(n-3)}\,h\,\frac{(x-x_{p-1})^3}{3!} +$$
$$+ \frac{B_p^{(1)}n^3 + B_p^{(2)}n^2 + B_p^{(3)}n + B_p^{(4)}}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,\frac{h^2}{2!}\,\frac{(x-x_{p-1})^2}{2!} +$$
$$+ \frac{C_p^{(1)}n^3 + C_p^{(2)}n^2 + C_p^{(3)}n + C_p^{(4)}}{2(n-1)(n-2)(n-3)}\,\frac{h^3}{3!}(x-x_{p-1}) +$$
$$+ \frac{D_p^{(1)}n^3 + D_p^{(2)}n^2 + D_p^{(3)}n + D_p^{(4)}}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,\frac{h^4}{4!} \qquad (31_p)$$

adică sub aceeaşi formă ca şi $\varphi_3(x)$ şi unde $A_p^{(i)}$, $B_p^{(i)}$, $C_p^{(i)}$, $D_p^{(i)}$ sînt coeficienţi numerici. Vom determina aceşti coeficienţi ţinînd seama de condiţiile la limită (29) din nodul x_p şi de coeficienţii din formula (31_3) care corespund la $p = 3$.

Condițiile la limită din nodul x_p sînt

$$\varphi_p(x_p) = \varphi_{p+1}(x_p),\ \varphi_p'(x_p) = \varphi_{p+1}'(x_p),\ \varphi_p''(x_p) = \varphi_{p+1}''(x_p)$$

$$\varphi_p'''(x_p) - \varphi_{p+1}'''(x_p) = \frac{n(n^2 - 6n + 6)}{(n-1)(n-2)(n-3)}h.$$

Să determinăm coeficienții $A_p^{(i)}$.

Pentru aceasta observăm că

$$\varphi_p'''(x_p) = h + \frac{A_p^{(1)}n^3 + A_p^{(2)}n^2 + A_p^{(3)}n + A_p^{(4)}}{2(n-1)(n-2)(n-3)}h$$

adică

$$\varphi_p'''(x_p) = \frac{(2+A_p^{(1)})n^3 + (-12+A_p^{(2)})n^2 + (22+A_p^{(3)})n + (-12+A_p^{(4)})}{2(n-1)(n-2)(n-3)}h.$$

Scriind că

$$\varphi_{p+1}(x) = \frac{(x-x_p)^4}{4!} + \frac{A_{p+1}^{(1)}n^3 + A_{p+1}^{(2)}n^2 + A_{p+1}^{(3)}n + A_{p+1}^{(4)}}{2(n-1)(n-3)(n-3)}h\frac{(x-x_p)^3}{3!} + \ldots$$

avem

$$\varphi_{p+1}'''(x_p) = \frac{A_{p+1}^{(1)}n^3 + A_{p+1}^{(2)}n^2 + A_{p+1}^{(3)}n + A_{p+1}^{(4)}}{2(n-1)(n-2)(n-3)}h.$$

Scriind că condiția a 4-a la limită din nodul x_p este satisfăcută vom avea ecuațiile de recurență

$$\begin{aligned} A_{p+1}^{(1)} &= A_p^{(1)} \\ A_{p+1}^{(2)} &= A_p^{(2)} \\ A_{p+1}^{(3)} &= A_p^{(3)} + 10 \\ A_{p+1}^{(4)} &= A_p^{(4)} - 12 \end{aligned} \tag{32}$$

care împreună cu condițiile

$$A_3^{(1)} = -1,\quad A_3^{(2)} = 1,\quad A_3^{(3)} = 20,\quad A_3^{(4)} = -24 \tag{32'}$$

vor determina pe $A_p^{(1)}$, $A_p^{(2)}$, $A_p^{(3)}$, $A_p^{(4)}$. Vom avea

$$A_p^{(1)} = -1,\quad A_p^{(2)} = 1,\quad A_p^{(3)} = 10(p-1),\quad A_p^{(4)} = -12(p-1). \tag{32''}$$

Formula (31_p) se scrie deci

$$\varphi_p(x) = \frac{(x-x_{p-1})^4}{4!} + \frac{-n^3+n^2+10(p-1)n-12(p-1)}{2(n-1)(n-2)(n-3)}h\frac{(x-x_{p-1})^3}{3!} + $$
$$+ \frac{B_p^{(1)}n^3 + B_p^{(2)}n^2 + B_p^{(3)}n + B_p^{(4)}}{(n-1)(n-2)(n-3)}\frac{h^2}{2!}\frac{(x-x_{p-1})^2}{2!} + \ldots$$

Pentru a determina coeficienţii $B_p^{(i)}$ se procedează în acelaşi mod. Se scrie că

$$\varphi''_{p+1}(x_p) = \varphi''_p(x_p)$$

şi se obţin ecuaţii de recurenţă, care împreună cu coeficienţii $B_3^{(i)}$, determină coeficienţii $B_p^{(i)}$. Se găseşte

$$\begin{aligned} B_p^{(1)} &= 1 \\ B_p^{(2)} &= -[5(p-1)+1] \\ B_p^{(3)} &= 5(p-1)(p-2)+11(p-1) \\ B_p^{(4)} &= -6(p-1)(p-2)-6(p-1) \end{aligned} \tag{33}$$

şi prin urmare putem scrie

$$\varphi_p(x) = \frac{(x-x_{p-1})^4}{4!} + \frac{-n^3+n^2+10(p-1)n-12(p-1)}{2(n-1)(n-2)(n-3)} h \frac{(x-x_{p-1})^3}{3!} +$$
$$+ \frac{\begin{matrix} n^3-[5(p-1)+1]n^2+[5(p-1)(p-2)+11(p-1)]n- \\ -[6(p-1)(p-2)+6(p-1)] \end{matrix}}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \cdot$$
$$\cdot \frac{h^2}{2!} \frac{(x-x_{p-1})^2}{2!} + \frac{C_p^{(1)}n^3+C_p^{(2)}n^2+C_p^{(3)}n+C_p^{(4)}}{2(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^3}{3!}(x-x_{p-1}) + \cdots \tag{31'_p}$$

Se repetă aceeaşi metodă pentru a se calcula coeficienţii $C_p^{(i)}$, scriind că

$$\varphi'_{p+1}(x_p) = \varphi'_p(x_p).$$

Se obţin ecuaţii de recurenţă care împreună cu coeficienţii $C_3^{(i)}$ determină coeficienţii $C_p^{(i)}$. Se găseşte

$$\begin{aligned} C_p^{(1)} &= 5(p-1)-3, \\ C_p^{(2)} &= -[15(p-1)(p-2)+15(p-1)-3], \\ C_p^{(3)} &= 10(p-1)(p-2)(p-3)+48(p-1)(p-2)+22(p-1), \\ C_p^{(4)} &= -[12(p-1)(p-2)(p-3)+36(p-1)(p-2)+12(p-1)], \end{aligned}$$

de unde rezultă că

$$\varphi_p(x) = \frac{(x-x_{p-1})^4}{4!} + \frac{-n^3+n^2+10(p-1)n-12(p-1)}{2(n-1)(n-2)(n-3)} h \frac{(x-x_{p-1})^3}{3!} +$$
$$+ \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)} \{n^3-[5(p-1)+1]n^2+[5(p-1)(p-2)+$$
$$+11(p-1)]n-[6(p-1)(p-2)+6(p-1)]\} \frac{h^2}{2!} \frac{(x-x_{p-1})^2}{2!} +$$

$$+\frac{1}{2(n-1)(n-2)(n-3)}\{[5(p-1)-3]n^3-[15(p-1)(p-2)+$$
$$+15(p-1)-3]n^2+[10(p-1)(p-2)(p-3)+48(p-1)(p-2)+$$
$$+22(p-1)]n-[12(p-1)(p-2)(p-3)+36(p-1)(p-2)+$$
$$+12(p-1)]\}\frac{h^3}{3!}(x-x_{p-1})+\frac{D_p^{(1)}n^3+D_p^{(2)}n^2+D_p^{(3)}n+D_p^{(4)}}{(n-1)(n-2)(n-3)}\frac{h^4}{4!}.$$

Procedînd în acelaşi mod şi scriind că

$$\varphi_{p+1}(x_p)=\varphi_p(x),$$

se obţine

$$\begin{aligned}
D_p^{(1)} &= 5(p-1)(p-2)-(p-1)+2,\\
D_p^{(2)} &= -[10(p-1)(p-2)(p-3)+30(p-1)(p-2)+\\
&\qquad +4(p-1)+2]\\
D_p^{(3)} &= 5(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)+42(p-1)(p-\\
&\qquad -2)(p-3)+65(p-1)(p-2)+11(p-1)\\
D_p^{(40)} &= -[6(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)+36(p-1)(p-\\
&\qquad -2)(p-3)+42(p-1)(p-2)+6(p-1)].
\end{aligned}$$

Vom avea în definitiv

$$\varphi_p(x)=\frac{(x-x_{p-1})^4}{4!}+\frac{1}{2(n-1)(n-2)(n-3)}\{-n^3+n^2+$$
$$+10(p-1)n-12(p-1)\}h\frac{(x-x_{p-1})^3}{3!}+$$
$$+\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}\{n^3-[5(p-1)+1]n^2+[5(p-1)(p-2)+$$
$$+11(p-1)]n-[6(p-1)(p-2)+6(p-1)\}\frac{h^2}{2!}\frac{(x-x_{p-1})^2}{2!}+$$
$$+\frac{1}{2(n-1)(n-2)(n-3)}\{[5(p-1)-3]n^3-[15(p-1)(p-2)+$$
$$+15(p-1)-3]n^2+[10(p-1)(p-2)(p-3)+48(p-1)(p-2)+$$
$$+22(p-1)]n-[12(p-1)(p-2)(p-3)+36(p-1)(p-2)+$$
$$+12(p-1)]\frac{h^3}{3!}(x-x_{p-1})+\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}\{[5(p-1)(p-2)-$$
$$-(p-1)+2]n^3-[10(p-1)(p-2)(p-3)+30(p-1)(p-2)+$$
$$+4(p-1)+2]n^2+[5(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)+$$

$$+ 42 (p-1)(p-2)(p-3) + 65 (p-1)(p-2) + 11 (p-1)]\, n -$$
$$- [6 (p-1)(p-2)(p-3)(p-4) + 36 (p-1)(p-2)(p-3) +$$
$$+ 42 (p-1)(p-2) + 6 (p-1)]\} \frac{h^4}{4!} . \tag{34}$$

Ecuaţia aceasta este adevărată pentru $p = 3,4,\ldots,n-2$, însă este uşor să ne convingem că ea este valabilă şi pentru $p = 2$ şi $p = n-1$, deoarece în primul caz ea se reduce la formula (31_2).

10. Să demonstrăm că *funcţia* $\varphi(x)$ *din expresia* (30) *a restului* R'_n *este pozitivă pe intervalul* (x_0, x_n) *oricare ar fi* n.

Demonstraţia acestei teoreme este mai dificilă decît cea corespunzătoare din § 3 şi de aceea avem nevoie de o pregătire a ei.

În § 3 s-a văzut utilitatea rădăcinilor derivatei $\varphi''(x)$ în studiul funcţiei $\varphi(x)$ care intră în expresia restului. Sîntem deci conduşi ca şi în acest caz să ne ocupăm de derivata $\varphi''(x)$. Avem $\varphi''(x_1) = \frac{h^2}{2}$, oricare ar fi n.

De asemenea, din ecuaţia (31_3) se deduce că

$$\varphi''(x_2) = \frac{V_3(n)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^2}{2},$$

unde

$$V_3(n) = n^3 - 11 n^2 + 32 n - 24.$$

Se constată că $\varphi''(x_2) < 0$ pentru $n = 4, 5, 6$, pe cînd $\varphi''(x_2) > 0$ pentru $n \geqslant 7$. În general avem

$$\varphi''(x_{p-1}) = \varphi''_p(x_{p-1}) = \frac{V_p(n)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^2}{2}, \tag{35}$$

unde

$$V_p(n) = n^3 - [5(p-1) + 1] n^2 + [5(p-1)(p-2) +$$
$$+ 11 (p-1)]\, n - 6 (p-1)^2.$$

Polinomul $V_p(x)$ are toate rădăcinile reale, deoarece

$$V_p(-\infty) < 0, \quad V_p(1,2) = 0{,}288 > 0,$$
$$V_p(2p-1) = -(2p^3 - 5p^2 + p + 2) = -(p-1)(p-2)(2p+1) < 0,$$
$$V_p(+\infty) > 0.$$

Rezultă că pentru un p dat, notînd cu n'_p cea mai mare rădăcină a ecuaţiei $V_p(x) = 0$, vom avea $V_p(n) > 0$ pentru $n > n'_p$ şi $V_p(n) < 0$, pentru $n < n'_p$.

De exemplu, pentru $p = 4$, avem

$$V_4(n) = n^3 - 16 n^2 + 63 n - 54, \quad V_4(10) = -24, \quad V_4(11) = 34$$

de unde rezultă că pentru $n \geqslant 11$ avem $\varphi''(x_3) > 0$, pe cînd pentru $n = 7, 8, 9, 10$ vom avea $\varphi''(x_3) < 0$.

Pe de altă parte, pentru n dat, să considerăm mulțimea punctelor L_{p-1} de coordonate (x_{p-1}, y_{p-1}), unde

$$y_{p-1} = \varphi''(x_{p-1}) = \frac{V_p(n)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^3}{2}.$$

Să arătăm că toate punctele $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ sînt pe o parabolă avînd ca axă dreapta $x = x'$, unde x' este mijlocul intervalului (x_0, x_n).

Într-adevăr avem,

$$x_{p-1} = x_0 + (p-1)h$$

iar

$$\begin{aligned} y_{p-1} &= \frac{h^2}{2(n-1)(n-2)(n-3)}[(5n-6)p^2 - (5n^2+4n-12)p + \\ &\qquad + n^3 + 4n^2 - n - 6] = \\ &= \frac{h^2}{2(n-1)(n-2)(n-3)}[(5n-6)(p-1)^2 - \\ &\qquad - n(5n-6)(p-1) + n^3 - n^2]. \end{aligned}$$

Înlocuind pe $(p-1)h$ cu $x_{p-1} - x_p$ vom avea

$$\begin{aligned} y_{p-1} = \frac{1}{2(n-1)(n-2)(n-3)}&[(5n-6)(x_{p-1}-x_0)^2 - \\ &- n(5n-6)h(x_{p-1}-x_0) + (n^3-n^2)h^2] \end{aligned}$$

și aceasta dovedește că punctele $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ sînt situate pe parabola de ecuație

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2(n-1)(n-2)(n-3)}&[(5n-6)(x-x_0)^2 - \\ &- n(5n-6)h(x-x_0) + (n^3-n^2)h^2] \end{aligned}$$

sau

$$y = \frac{1}{2(n-1)(n-2)(n-3)}\left[(5n-6)(x-x')^2 - \frac{n^3-2n^2}{4}h^2\right].$$

De aici rezultă graficul din figura 5.

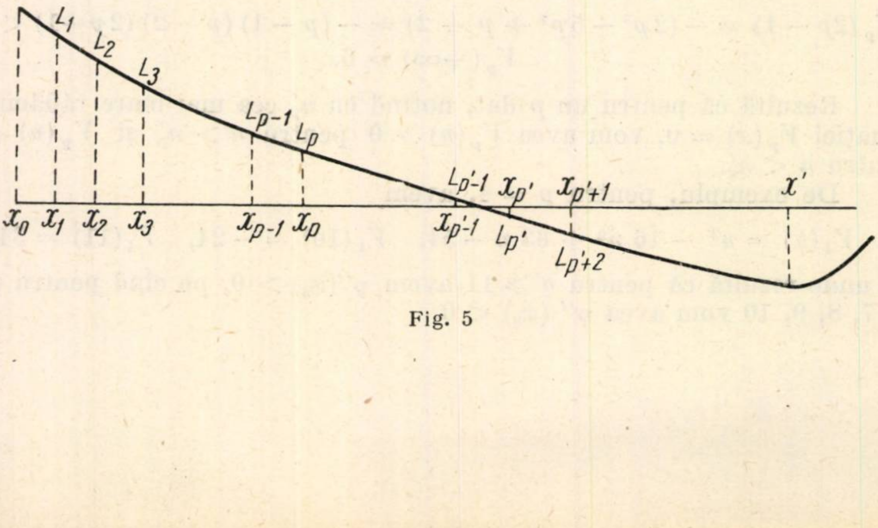


Fig. 5

Parabola avînd vîrful sub axa Ox, iar punctul L_1 fiind situat deasupra axei Ox, taie axa Ox în două puncte situate pe intervalul (x_1, x_{p-1}). De aici rezultă :

1° Dacă pentru $x_{p'-1}$ avem $\varphi''(x_{p'-1}) \geqslant 0$, atunci vom avea de asemenea $\varphi''(x_p) > 0$ pentru orice nod x_p din intervalul $[x_1, x_{p'-1}]$.

2°. Dacă pentru $x_{p'}$ avem $\varphi''(x_{p'}) \leqslant 0$, atunci vom avea de asemenea $\varphi''(x_p) < 0$ pentru orice nod x_p din intervalul $[x_{p'}, x']$.

11. Observațiile precedente sînt utile pentru trasarea graficului funcției $\varphi(x)$ pe intervalul $[x_0, x_n]$. Din cauza simetriei lui față de dreapta $x = x'$ ne putem mărgini la trasarea graficului numai pe intervalul $[x_0, x']$. Avem graficele din figura 6.

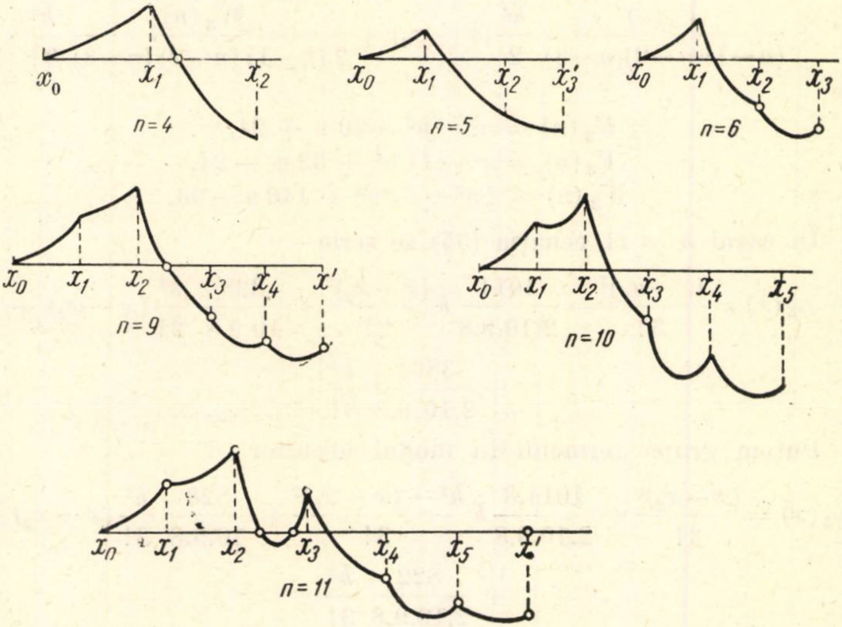


Fig. 6

Din aceste grafice se vede că pentru unele valori ale lui n, de exemplu pentru $n=4$, 5, 6, 7, 8, 9, 10... derivata $\varphi''(x)$ are numai două rădăcini pe intervalul (x_0, x_n), pe cînd pentru alte valori al lui n, de exemplu pentru $n = 11$, derivata $\varphi''(x)$ are mai mult de două rădăcini.

Pentru cazul cînd $\varphi''(x)$ are numai două rădăcini pe intervalul (x_0, x_n), se demonstrează în mod foarte simplu că funcția $\varphi(x)$ este pozitivă pe intervalul (x_0, x_n) ; nu insistăm asupra acestei demonstrații, ci ne vom ocupa de cazul general.

12. Derivata $\varphi_2''(x)$ este pozitivă pe intervalul $[x_1, x_0]$, pentru $n \geqslant 7$. Într-adevăr, avem $\varphi_2''(x_1) > 0$, $\varphi_2''(x_2) > 0$ şi

$$\varphi_2''(\xi) = \frac{n(3n-4)(n^2-8n+8)}{8(n-1)^2(n-2)^2} h^2, \tag{36}$$

unde ξ este rădăcina ecuaţiei $\varphi_2'''(x) = 0$.

De aici rezultă că şi derivata $\varphi_2'(x)$ este pozitivă pe intervalul $[x_1, x_3]$.

13. Derivata $\varphi_3'(x)$ este pozitivă pe intervalul $[x_2, x_3]$, pentru $n \geqslant 11$. În general din ecuaţia (31_3) avem

$$\varphi_3'(x) = \frac{(x-x_2)^3}{3!} - \frac{U_3(n)}{2(n-1)(n-2)(n-3)} h \frac{(x-x_2)^2}{2!} + \\ + \frac{V_3(n)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^2}{2}(x-x_2) + \frac{W_3(n)}{2(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^3}{3!}, \tag{37}$$

unde

$$\begin{aligned} U_3(n) &= n^3 - n^2 - 20n + 24, \\ V_3(n) &= n^3 - 11n^2 + 32n - 24, \\ W_3(n) &= 7n^3 - 57n^2 + 140n - 96. \end{aligned} \tag{38}$$

În cazul $n = 11$ ecuaţia (35) se scrie

$$\varphi_3'(x) = \frac{(x-x_2)^3}{3!} - \frac{1014}{2.10.9.8} h \frac{(x-x_2)^2}{2!} + \frac{328}{10.9.8} \frac{h^2}{2!}(x-x_2) + \\ + \frac{3864}{2.10.9.8} \frac{h^3}{3!}.$$

Putem grupa termenii în modul următor

$$\varphi_3'(x) = \frac{(x-x_2)^3}{3!} + \frac{1014.3}{2.10.9.8} h \frac{h^2-(x-x_2)^2}{3!} + \frac{328}{10.9.8} \frac{h^2}{2!}(x-x_2) + \\ + \frac{822}{2.10.9.8} \frac{h^3}{3!}$$

şi deoarece pe intervalul $[x_2, x_3]$ primii trei termeni sînt nenegativi, iar ultimul este pozitiv, rezultă că $\varphi_3'(x) > 0$ pe intervalul $[x_2, x_3]$.

Această simplă demonstraţie pentru cazul $n = 11$, va fi extinsă mai departe în general.

Să demonstrăm pentru început că $\varphi_3'(x) > 0$ pe intervalul $[x_2, x_3]$, pentru $n > 11$. Vom scrie ecuaţia (35) sub forma

$$\varphi_3'(x) = \frac{(x-x_2)^3}{3!} + \frac{3\,U_3(n)}{2(n-1)(n-2)(n-3)} h \frac{h^2-(x-x_2)^2}{3!} + \\ + \frac{V_3(n)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^2}{2!}(x-x_2) + \frac{T_3(n)}{2(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^3}{3!}, \tag{37'}$$

unde s-a notat

$$T_3(n) = W_3(n) - 3\,U_3(n) = 4\,n^3 - 54\,n^2 + 200\,n - 168. \tag{39}$$

Introducînd polinoamele

$$I_3(n) = T_3(n) - 4\,V_4(n), \quad J_3(n) = U_3(n) - V_4(n), \tag{40}$$

unde polinomul $V_4(n)$ intră în formula (35)

$$\varphi_3''(x_3) = \frac{V_4(n)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,\frac{h^2}{2!}$$

şi este dat de formula

$$V_4(n) = n^3 - 16\,n^2 + 63\,n - 54$$

avem

$$I_3(n) = 10\,n^2 - 52\,n + 48, \quad J_3(n) = 15\,n^2 - 83\,n + 78.$$

Trinomul $I_3(n)$ are rădăcinile 1, 2 şi 4, iar trinomul $J_3(n)$ rădăcinile 1, 2 şi $\frac{13}{3}\cdot$ Rezultă că aceste trinoame sînt pozitive pentru $n > 11$, întocmai ca şi $V_4(n)$. Deducem că în ecuaţia (37′), $U_3(n)$ şi $T_3(n)$ sînt polinoame pozitive pentru $n > 11$. Polinomul $V_3(n)$ este de asemenea pozitiv pentru $n > 11$, din cauza observaţiei 1° de la punctul 10 care decurge din figura 5. De altfel notînd

$$K_3(n) = V_3(n) - V_4(n) = 5\,n^2 - 31\,n + 30$$

se observă că trinomul $K_3(n)$ are rădăcinile 1, 2 şi 5 de unde rezultă că el este pozitiv pentru $n > 11$ şi prin urmare avem $V_3(n) > 0$ pentru $n > 11$.

În ecuaţia (37′) avînd $U_3(n) > 0$, $V_3(n) > 0$, $T_3(n) > 0$ deducem că $\varphi_3'(x) > 0$, pentru $n > 11$, pe intervalul $[x_2, x_3]$.

14. Să demonstrăm acum următoarea teoremă:

Dacă pentru un indice p avem $\varphi_p''(x_p) > 0$, *atunci vom avea* $\varphi_p'(x) > 0$ *pe intervalul* $[x_{p-1}, x_p]$.

Teorema aceasta a fost demonstrată pentru $p = 3$ la punctul 13.

O vom demonstra în general presupunînd $p \geqslant 4$. Avem

$$\varphi_p'(x) = \frac{(x-x_{p-1})^3}{3!} - \frac{U_p(n)}{2(n-1)(n-2)(n-3)}\,h\,\frac{(x-x_{p-1})^2}{2!} + \\ + \frac{V_p(n)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,\frac{h^2}{2!}(x - x_{p-1}) + \frac{W_p(n)}{2(n-1)(n-2)(n-3)}\,\frac{h^3}{3!}, \tag{41}$$

unde s-a notat

$$\begin{aligned} U_p(n) &= n^3 - n^2 - 10(p-1)n + 12(p-1) \\ V_p(n) &= n^3 - [5(p-1)+1]n^2 + [5(p-1)(p-2) + 11(p-1)]n - 6(p-1)^2 \\ W_p(n) &= [5(p-1)-3]n^3 - [15(p-1)(p-2) + 15(p-1) - 3]n^2 + \\ &\quad + [10(p-1)(p-2)(p-3) + 48(p-1)(p-2) + 22(p-1)]n - \\ &\quad - [12(p-1)(p-2)(p-3) + 36(p-1)(p-2) + 12(p-1)]. \end{aligned} \tag{42}$$

Putem scrie

$$\varphi_p'(x) = \frac{(x-x_{p-1})^3}{3!} + \frac{U_p(n)}{2(n-1)(n-2)(n-3)}\, h\, \frac{h^2-(x-x_{p-1})^2}{2!} +$$

$$+ \frac{V_p(n)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\, \frac{h^2}{2!}(x-x_{p-1}) + \frac{W_p(n)-3\,U_p(n)}{2(n-1)(n-2)(n-3)}\, \frac{h^3}{3!}. \quad (43)$$

În baza ipotezei făcute şi anume că $\varphi_p''(x_p) > 0$ sau $V_{p+1}(n) > 0$ vom demonstra că în ecuaţia (43) avem $U_p(x) > 0$, $V_p(n) > 0$, $W_p(n) - 3\,U_p(n) > 0$, de unde va rezulta că $\varphi_p'(x) > 0$ pe intervalul $[x_{p-1}, x_p]$.

Din figura 5 se vede mai întîi că dacă $V_{p+1}(n) > 0$, vom avea de asemenea $V_p(n) > 0$.

Să notăm

$$T_p(n) = W_p(n) - 3\,U_p(n), \quad (44)$$

$$I_p(n) = T_p(n) - (5p-11)\, V_{p+1}(n),$$

$$J_p(n) = U_p(n) - V_{p+1}(n). \quad (45)$$

Avem

$$T_p(n) = (5p-11)\, n^2 - (15p^2 - 30p + 9)\, n^2 + (10p^3 - 12p^2 + $$
$$+ 18p - 16)\, n - (12p^3 - 36p^2 + 72p - 48)$$

şi

$$I_p(n) = (5p-11)\, n^3 - (15p^2 - 30p + 9)\, n^2 + (10p^3 - 12p^2 +$$
$$+ 18p - 16)\, n - (12p^3 - 36p^2 + 72p - 48) - (5p-11)\,[n^3 -$$
$$- (5p+1)\, n^2 + (5p^2 + 6p)\, n - 6p^2]$$

adică

$$I_p(n) = 10\,(p^2 - 2p - 2)\, n^2 - (15p^3 - 13p^2 - 84p + 16)\, n +$$
$$+ (18p^3 - 30p^2 - 72p + 48).$$

Discriminantul polinomului de gradul al doilea $I_p(n)$ este

$$(15p^3 - 13p^2 - 84p + 16)^2 - 40\,(p^2 - 2p - 2)\,(18p^3 - 30p^2 -$$
$$- 72p + 48) = (15p^3 - 37p^2 - 36p + 64)^2$$

de unde rezultă că rădăcinile ecuaţiei $I_p(x) = 0$ sînt

$$\xi_p' = 1{,}2, \quad \xi_p'' = \frac{3p^3 - 5p^2 - 12p + 8}{3(p^2 - 2p - 2)}.$$

Numerele ξ_p' şi $\xi_p'' + 1$ separă rădăcinile polinomului $V_{p+1}(n)$. Observăm mai întîi că $V_{p+1}(-\infty) < 0$, $V_{p+1}(1, 2) = 0{,}288 > 0$, $V_{p+1}(+\infty) > 0$. Rămîne să calculăm pe $V_{p+1}(\xi_p'' + 1)$. Avem,

$$\xi_p'' + 1 = \frac{3p^3 - 3p^2 - 16p + 4}{2(p^2 - 2p - 2)}$$

şi

$$V_{p+1}(\xi_p''+1)=\frac{(3p^3-3p^2-16p+4)^3}{8(p^2-2p-2)^3}-$$
$$-(5p+1)\frac{(3p^3-3p^2-16p+4)^2}{4(p^2-2p-2)^2}+$$
$$+(5p^2+6p)\frac{3p^3-3p^2-16p+4}{2(p^2-2p-2)}-6p^2.$$

Făcînd calculele, se obţine

$$V_{p+1}(\xi_p''+1)=\frac{p-1}{8(p^2-2p-2)^3}(-3p^8-18p^7+241p^6-$$
$$-520p^5-304p^4+1440p^3-624p^2+384p-128)$$

şi ordonînd paranteza după puterile lui $p-3$, vom avea

$$V_{p+1}(\xi_p''+1)=\frac{-(p-1)}{8(p^2-2p-2)^3}3[(p-3)^8+90(p-3)^7+$$
$$+893(p-3)^6+4120(p-3)^5+9589(p-3)^4+10722(p-3)^3+$$
$$+4775(p-3)^2+876(p-3)+56],$$

de unde rezultă că $V_{p+1}(\xi_p''+1)<0$, pentru $p\geqslant 4$.

Să trecem acum la polinomul $J_p(n)$. Avem

$$J_p(n)=n^3-n^2-10(p-1)n+12(p-1)-[n^3-(5p+1)n^2+$$
$$+(5p^2+6p)n-6p^2]$$

adică

$$J_p(n)=5pn^2-(5p^2+16p-10)n+6(p^2+2p-2).$$

Discriminantul acestui polinom este

$$(5p^2+16p-10)^2-120p(p^2+2p-2)=(5p^2+4p-10)^2.$$

Rezultă că rădăcinile ecuaţiei $J_p(x)=0$ sînt

$$\xi_p'=1,2 \quad \text{şi} \quad \xi_p''=\frac{p^2+2p-2}{p}.$$

Observăm că

$$\xi_p''-\xi_p'''=\frac{3p^3-5p^2-12p+8}{2(p^2-2p-2)}-\frac{p^2+2p-2}{p}=$$
$$=\frac{p-1}{2p(p^2-2p-2)}(p^3-4p^2+8)$$

şi de aici se deduce că pentru $p\geqslant 4$, avem $\xi_p''>\xi_p'''$.

Putem rezuma toată discuţia asupra rădăcinilor polinoamelor $V_{p+1}(x)$, $I_p(x)$, $J_p(x)$ făcînd graficele acestor polinoame. În figura 7 s-a trasat cu linie continuă graficul lui $V_{p+1}(x)$, cu linie punctată graficul lui $I_p(x)$ şi cu linie întreruptă graficul lui $J_p(x)$.

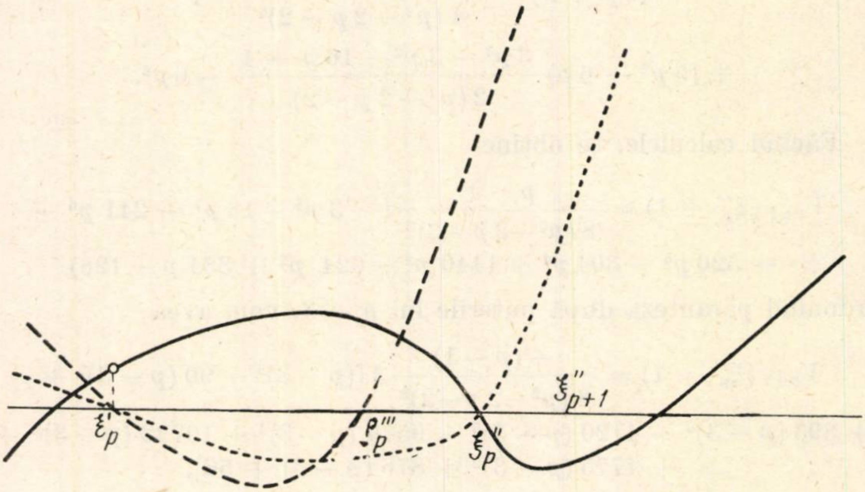


Fig. 7

Din examinarea figurii 7 se deduce că pentru valorile lui n pentru care $V_{p+1}(n) > 0$ şi sînt situate la dreapta celei mai mari rădăcini a ecuaţiei $V_{p+1}(x) = 0$, avem de asemenea $I_p(n) > 0$ şi $J_p(n) > 0$.

Ecuaţiile (45) arată că pentru aceleaşi valori ale lui n vom avea $T_p(n) > 0$ şi $U_p(n) > 0$.

Observaţie. Se poate demonstra uşor că pentru aceeaşi valoare a lui n avem $V_p(n) > 0$, observînd că dacă scrim

$$V_p(n) = V_{p+1}(n) + K_p(n)$$

avem

$$K_p(n) = 5n^2 - (10p + 1)n + 6(2p - 1).$$

Polinomul $K_p(x)$ are rădăcinile $\xi'_p = 1{,}2$ şi $\xi^{(4)}_p = 2p - 1$. Se constată că avem $V_{p+1}(\xi^{(4)}_p) = -(p - 1)(p - 2)(2p + 1) < 0$. Rezultă că pentru valorile lui n mai mari decît cea mai mare rădăcină a ecuaţiei $V_{p+1}(x) = 0$, avem $K_p(n) > 0$ şi prin urmare $V_p(n) > 0$.

Astfel s-a demonstrat că în ecuaţia (43) avem $U_p(n) > 0$, $V_p(n) > 0$, $W_p(n) - 3U_p(n) > 0$ şi de aici rezultă că $\varphi'_p(x) > 0$ pe intervalul $[x_{p-1}, x_p]$.

15. Să notăm cu $[x_{p'-1}, x_{p'}]$ intervalul pentru care $\varphi''_{p'}(x_{p'-1}) \geqslant 0$ însă $\varphi''_{p'}(x_{p'}) > 0$. După cum s-a arătat la punctul 10, avem

$\varphi_p''(x_p)>0$ pentru $p=4,5,\ldots,p'-1$ şi aplicînd teorema de la punctul 14 deducem că $\varphi'(x)>0$ pe intervalul $[x_0, x_{p'-1}]$. Pe intervalul $[x_{p'-1}, x']$, unde x' este mijlocul intervalului (x_0, x_n), graficul derivatei $\varphi''(x)$ este dat în figura 8.

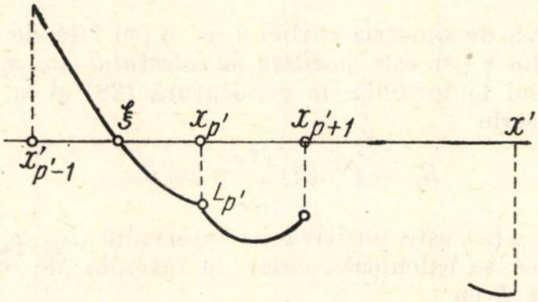


Fig. 8

Să notăm cu ξ intersecţia arcului de parabolă $y=\varphi_{p'}(x)$ cu axa Ox. Derivata $\varphi'(x)$ este pozitivă pe intervalul $(x_0, x_{p'-1})$, creşte pe intervalul $[x_{p'-1}, \xi]$, adică este tot pozitivă, atinge un maxim în punctul ξ, apoi descreşte pe intervalul $[\xi, x']$.

În punctul x' avem $\varphi'(x')=0$.

Într-adevăr, dacă $n=2p$, avem

$$\varphi'(x')=\varphi'_{p+1}(x_p)=\frac{W_{p+1}(2p)}{2(2p-1)(2p-2)(2p-3)}\,\frac{h^3}{3!}.$$

Însă

$$W_{p+1}(2p)=8p^3(5p-3)-4p^2(15p^2-3)+2p^2(10p^2+$$
$$+18p-6)-12p^3=0$$

astfel că $\varphi'(x')=0$.

Dacă $n=2p+1$, avem

$$\varphi'(x')=\varphi'_{p+1}\left(x_p+\frac{h}{2}\right)=\frac{h^3}{3!\,2^3\,2p(2p-1)(2p-2)}[2p(2p-1)(2p-2)-$$
$$-3\,U_{p+1}(2p+1)+12\,V_{p+1}(2p+1)+$$
$$+4\,W_{p+1}(2p+1)].$$

Făcînd calculele se constată că

$$U_{p+1}(2p+1)=4p(p-1)(2p-1)$$
$$V_{p+1}(2p+1)=-p(p-1)(2p+3)$$
$$W_{p+1}(2p+1)=p(p-1)(10p+7)$$

şi se deduce uşor că $\varphi'(x')=0$.

Deci $\varphi'(x')$ descreşte pe intervalul $[\xi, x']$ trecînd de la o valoare pozitivă la valoarea $\varphi'(x') = 0$. Aceasta înseamnă că avem $\varphi'(x) > 0$ pe intervalul (x_0, x').

Prin urmare funcţia $\varphi(x)$ este crescătoare pe intervalul $[x_0, x']$; ea are valori pozitive pe intervalul $(x_0, x_1]$, şi este deci pozitivă pe intervalul $(x_0, x']$.

Ţinînd seamă de simetria curbei $y = \varphi(x)$ faţă de dreapta $x = x'$, deducem că *funcţia* $\varphi(x)$ *este pozitivă pe intervalul* (x_0, x_n).

16. Revenind la formula de cvadratură (28) şi la expresia (30) a restului, putem scrie

$$R_n' = f^{(4)}(\xi) \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

deoarece funcţia $\varphi(x)$ este pozitivă pe intervalul (x_0, x_n). Integrala din membrul al doilea se calculează chiar cu formula de cvadratură (28), înlocuind funcţia f cu

$$\frac{(x-x_1)^2 (x-x_{n-1})^2}{4!}.$$

Vom avea

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4!}\left[\int_{x_0}^{x_n} (x-x_1)^2 (x-x_{n-1})^2\,\mathrm{d}x - {}\right.$$
$$\left. - A_2' \sum_{k=2}^{n-2} (x_k - x_1)^2 (x_k - x_{n-1})^2\right]. \tag{46}$$

Avem

$$x - x_1 = (x - x_0) - h, \quad x - x_{n-1} = (x - x_0) - (n-1)\,h$$

de unde rezultă că

$$\int_{x_0}^{x_n} (x-x_1)^2 (x-x_{n-1})^2\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_n} [(x-x_0)^4 - 2nh(x-x_0)^3 + {}$$
$$+ (n^2 + 2n - 2)\,h^2 (x-x_0)^2 - 2\,n\,(n-1)\,h^3 (x-x_0) + (n-1)^2 h^4]\,\mathrm{d}x$$

adică

$$\int_{x_0}^{x_n} (x-x_1)^2 (x-x_{n-1})^2\,\mathrm{d}x = \frac{h^5}{30}(n^5 - 10\,n^4 - 40\,n^3 - 60\,n^2 + 30\,n). \tag{47}$$

De asemenea avem

$$\sum_{k=2}^{n-2} (x_k - x_1)^2 (x_k - x_{n-1})^2 = h^4 \sum_{k=2}^{n-2} (k-1)^2 [(n-2) - (k-1)]^2$$

adică

$$\sum_{k=2}^{n-2} (x_k - x_1)^2 (x_k - x_{n-1})^2 = h^4 \left[\sum_{k=2}^{n-2} (k-1)^4 - 2\,(n-2) \sum_{k=2}^{n-2} (k-1)^3 + {}\right.$$
$$\left. + (n-2) \sum_{k=2}^{n-2} (k-1)^2\right].$$

Ținînd seamă că

$$\sum_{k=2}^{n-2} (k-1)^2 = \frac{(n-3)(n-2)(2n-5)}{6}, \quad \sum_{k=2}^{n-2} (k-1)^3 = \frac{(n-3)^2 (n-2)^2}{4}$$

$$\sum_{k=2}^{n-2} (k-1)^4 = \frac{(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)}{5} + $$
$$+ 3\,\frac{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)}{2} + 7\,\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{3} +$$
$$+ \frac{(n-3)(n-2)}{2}$$

se deduce că

$$\sum_{k=2}^{n-2} (x_k - x_1)^2 (x_k - x_{n-1})^2 = h^4 \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{30} (n^2 - 4n - 5). \tag{48}$$

Revenind la formula (46) şi ținînd seamă de formulele (47) şi (48) precum şi că

$$A_2' = \frac{n(n^2 - 6n + 6)}{(n-1)(n-2)(n-3)} h,$$

deducem că

$$\int_{x_0}^{x} \varphi \, \mathrm{d} x = \frac{h^5}{4!\,30} [n^5 - 10n^4 + 40n^3 - 60n^2 + 30n -$$
$$- n(n^2 - 6n + 6)(n^2 - 4n + 5)]$$

adică

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) \, \mathrm{d} x = \frac{n^2 (5n - 6)}{720} h^5.$$

Prin urmare restul R_n' se poate scrie sub forma

$$R_n' = \frac{n^2 (5n-6)}{720} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

şi înlocuind pe $x_0 = a$, $x_n = b$, $nh = b - a$, avem

$$R_n' = \frac{(b-a)^5}{2\,880} \; \frac{4(5n-6)}{n^3} f^{(4)}(\xi) \tag{49}$$

şi de aici se deduce evaluarea

$$|R_n'| \leqslant K_n' M_4 \tag{50}$$

$$K_n' = \frac{4(5n-6)}{n^3} \; \frac{(b-a)^5}{2\,880}. \tag{51}$$

17. Exemple practice de formule de cvadratură de forma (28). Pentru $n = 4$ avem formula lui Milne, analoagă formulei lui Simpson

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{3}\,[2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3) + R_4',$$

unde

$$|\,R_4'\,| \leqslant K_4' M_4,\ K_4' = \frac{7}{8}\,\frac{(b-a)^5}{2880} = 0{,}875\,\frac{(b-a)^5}{2880}\,.$$

Pentru $n = 5$ avem formula analoagă formulei lui Newton

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{24}\,[11f(x_1) - 5f(x_2) - 5f(x_3) + 11f(x_4)] + R_5',$$

unde

$$|\,R_5'\,| \leqslant K_5' M_5, K_5' = \frac{76}{125}\,\frac{(b-a)^5}{2880} = 0{,}608\,\frac{(b-a)^5}{2880}\,.$$

Pentru $n = 6, 7, 8, 9, 10$ dăm coeficienţii din formula de cvadratură şi coeficientul K_n' din evaluarea (50) a restului R_n' în tabloul 4.

Tabloul 4

n	$A_1' = \dfrac{3n-4}{2(n-1)(n-2)}\,(b-a)$	$A_2' = \dfrac{n^2-6n+6}{(n-1)(n-2)(n-3)}$	$K_n' = \dfrac{4(5n-6)}{n^3}\,\dfrac{(b-a)^5}{2880}$
6	$\frac{7}{20}\,(b-a)$	$\frac{2}{20}\,(b-a)$	$\frac{4}{9}\,\frac{(b-a)^5}{2880} < 0{,}445\,\frac{(b-a)^5}{2880}$
7	$\frac{34}{120}$	$\frac{13}{120}$	$\frac{116}{343} < 0{,}339$
8	$\frac{25}{105}$	$\frac{11}{105}$	$\frac{17}{64} < 0{,}266$
9	$\frac{23}{102}$	$\frac{11}{112}$	$\frac{52}{243} < 0{,}214$
10	$\frac{91}{504}$	$\frac{46}{504}$	$\frac{176}{1000} < 0{,}176$

Primită la redacţie la 6 aprilie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. Ш. Е. Микеладзе, *Численные методы математического анализа*. Москва, 1953. гл. XIII.

O EXTINDERE A TRANSFORMĂRILOR CONFORME ÎN SPAŢIUL TRIDIMENSIONAL

DE

ION I. CRISTEA

1. DEFINIREA TRANSFORMĂRILOR CONFORME ÎN SPAŢIUL TRIDIMENSIONAL

Fie (s) şi (S) două spaţii euclidiene tridimensionale, iar T o aplicaţie a spaţiului (s) pe spaţiul (S) caracterizată prin relaţiile

$$T:\begin{cases} X_1 = X_1(x_1, x_2, x_3), \\ X_2 = X_2(x_1, x_2, x_3), \\ X_3 = X_3(x_1, x_2, x_3), \end{cases} \tag{1}$$

unde funcţiile $X_i(x_1, x_2, x_3)$, $(i = 1, 2, 3)$, sînt deocamdată de clasă C^1 în raport cu x_1, x_2, x_3 în (s), iar iacobianul transformării T este diferit de zero

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial(X_1, X_2, X_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \neq 0. \tag{2}$$

S-au notat cu x_1, x_2, x_3 coordonatele unui punct p din spaţiul (s) iar cu X_1, X_2, X_3 coordonatele punctului P din spaţiul (S) ce corespunde prin transformarea T punctului p. Prin condiţia (2) transformarea T este nedegenerată şi bicontinuă. Deci unui domeniu (d) din spaţiul (s) îi va corespunde biunivoc un domeniu (D) din spaţiul (S).

Fie (σ) o suprafaţă în spaţiul (s) dată prin ecuaţiile parametrice

$$x_i = x_i(u, v), \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3}$$

şi să considerăm suprafaţa (Σ) ce corespunde în spaţiul (S) prin transformarea T suprafeţei (σ). Ecuaţiile parametrice ale suprafeţei (Σ) vor fi

$$X_i = X_i[x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)] = \overline{X}_i(u, v), \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 8, P. 1033–1057, BUCUREŞTI, 1964

Adoptînd punctul de vedere al geometriei diferențiale se spune că cele două suprafețe (σ) și (Σ) sînt aplicabile conform una pe cealaltă dacă coeficienții celor două forme fundamentale ale suprafețelor (σ) și (Σ) sînt respectiv proporționali.

DEFINIȚIA 1. *Vom spune că o transformare T este* conformă *dacă oricare ar fi suprafața (σ) din spațiul (s), această suprafață se aplică conform pe imaginea sa (Σ) ce-i corespunde prin transformarea T în spațiul (S).*

Această definiție are la bază definiția analogă a reprezentărilor conforme în spațiul bidimensional. În cazul plan, suprafețele (σ) și (Σ) sînt cilindri cu generatoarele paralele la axele ox_3 respectiv OX_3 ale sistemelor de referință $ox_1x_2x_3$ și $OX_1X_2X_3$ la care se raportează cele două spații (s) și (S).

Cum reprezentarea conformă în plan cere ca unui cilindru cu generatoarele paralele la ox_3 să-i corespundă tot un cilindru cu generatoarele paralele la OX_3, din acest punct de vedere definiția 1 este *mai largă* decît definiția corespunzătoare din plan; prin transformarea T nu se cere ca imaginea unui cilindru (σ) din spațiul (s) să fie în spațiul (S) neapărat tot un cilindru. Definiția 1 este mai largă și pentru faptul că transformarea T nu este supusă la condiția ca imaginea unei paralele la axa ox_3 să fie tot o paralelă la axa OX_3, iar imaginea unui plan paralel la planul x_1ox_2 să fie un plan paralel la planul X_1OX_2. Din punctul de vedere al realizării aplicabilității tuturor suprafețelor (σ) pe imaginile lor (Σ), clasa transformărilor conforme în spațiul tridimensional în sensul definiției 1 este *mai puțin bogată* decît clasa transformărilor conforme din plan.

Să notăm cu e, f, g și respectiv E, F, G coeficienții primelor forme fundamentale ale suprafețelor (σ) și (Σ). Pentru acești coeficienți avem expresiile

$$e = \frac{\partial x_k}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial u}, \quad f = \frac{\partial x_k}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial v}, \quad g = \frac{\partial x_k}{\partial v}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial v} \tag{5}$$

și

$$E = \frac{\partial X_k}{\partial u}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial X_k}{\partial u}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial X_k}{\partial v}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial v}. \tag{6}$$

La scrierea acestor expresii s-a făcut convenția că indicele k ce apare de două ori într-un monom este un indice de sumare (mut) pentru valorile 1, 2, 3. Ori de cîte ori nu vor apărea confuzii, această convenție va fi făcută și în continuare în această lucrare.

În baza definiției 1, transformarea T va fi conformă dacă oricare ar fi suprafața (σ) avem

$$\frac{E}{e} = \frac{F}{f} = \frac{G}{g}. \tag{7}$$

Conform cu (4) însă avem

$$E = \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right)\cdot\frac{\partial x_i}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial u},$$

$$F = \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right)\cdot\frac{\partial x_i}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right)\cdot\frac{\partial x_i}{\partial v}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial v}.$$

Notînd pentru prescurtare

$$A_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_j}, \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

expresiile lui E, F, G se mai scriu

$$E = A_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial u},\quad F = A_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial v},\quad G = A_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial v}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial v}. \qquad (6')$$

Să notăm cu λ^2 valoarea comună a rapoartelor (7). În baza expresiilor (5) şi (6') ale lui e, f, g şi E, F, G din (7) avem

$$(A_{ij} - \lambda^2\delta_{ij})\frac{\partial x_i}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial u} = 0,$$

$$(A_{ij} - \lambda^2\delta_{ij})\frac{\partial x_i}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial v} = 0,$$

$$(A_{ij} - \lambda^2\delta_{ij})\frac{\partial x_i}{\partial v}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial v} = 0.$$

Acest sistem trebuind să fie verificat de transformarea T oricare ar fi suprafaţa (σ), adică oricare ar fi funcţiile (3), atrage în mod necesar că

$$A_{ij} - \lambda^2\,\delta_{ij} = 0, \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

adică

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = \lambda^2 \quad \text{şi} \quad A_{12} = A_{23} = A_{31} = 0$$

sau, ceea ce este acelaşi lucru,

$$\frac{\partial X_k}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_1} = \frac{\partial X_k}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_2} = \frac{\partial X_k}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_3} = \lambda^2$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_2} = \frac{\partial X_k}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_3} = \frac{\partial X_k}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_1} = 0. \qquad (8)$$

Aceste relații afirmă că matricea funcțională a transformării T:

$$\mathcal{M}=\mathcal{M}_T=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{9}$$

în virtutea relațiilor (8) este triplu ortogonală pe coloane și în plus suma pătratelor elementelor de pe fiecare coloană este aceeași.

Să numim *normă* pe o coloană (sau linie) oarecare a unei matrici rădăcina pătrată aritmetică din suma pătratelor elementelor de pe coloana (sau linia) considerată. Cu această definiție, matricea funcțională $\mathcal{M}_T$ a transformării T este ortogonală și de aceeași normă λ pe coloane.

Cum însă relațiile (8) atrag că

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X_1}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_k}=\frac{\partial X_2}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_k}=\frac{\partial X_3}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_k}=\lambda^2, \\ &\frac{\partial X_1}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_k}=\frac{\partial X_2}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_k}=\frac{\partial X_3}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_k}=0, \end{aligned} \tag{8'}$$

înseamnă că matricea funcțională $\mathcal{M}_T$ a transformării T este ortogonală și de aceeași normă λ și pe linii.

Determinantul matricei $\mathcal{M}_T$, adică iacobianul $\mathfrak{J}$ al transformării T are valoarea

$$\mathfrak{J}=\frac{(X_1, X_2, X_3)}{(x_1, x_2, x_3)}=\pm\lambda^3. \tag{10}$$

Funcția $\lambda=\lambda(x_1, x_2, x_3)$ ce reprezintă norma pe linii și coloane a matricei $\mathcal{M}_T$ o vom numi pe scurt *norma* matricei $\mathcal{M}_T$ sau a transformării T.

Conform cu (10) transformarea conformă T este nedegenerată dacă norma sa λ este diferită de zero.

Un calcul ușor, efectuat în sens retrograd, arată că, reciproc, dacă matricea funcțională (9) este ortogonală și de aceeași normă pe linii și coloane, atunci oricare ar fi suprafața (σ) din spațiul (s) avem relațiile de proporționalitate (7) și deci suprafața (σ) se aplică conform pe suprafața (Σ) — imaginea în spațiul (S) prin transformarea T a suprafeței (σ). Cu alte cuvinte, transformarea T este conformă.

În rezumat, avem următorul criteriu de recunoaștere a unei transformări conforme:

TEOREMA 1. *O condiție necesară și suficientă pentru ca transformarea punctuală T a spațiului (s) pe spațiul (S) să fie conformă este ca matricea ei funcțională $\mathcal{M}_T$ să fie ortogonală și de aceeași normă pe linii și coloane.*

În cazul transformărilor bidimensionale, de la un plan xoy la un plan XOY, se știe că condiția necesară și suficientă pentru ca o transformare

$$\begin{cases} X = X(x, y) \\ Y = Y(x, y) \end{cases} \tag{11}$$

să fie conformă (adică orice curbă să se aplice conform pe imaginea ei, sau ceea ce este același lucru, unghiul dintre două curbe să fie egal cu unghiul curbelor-imagine) este ca matricea funcțională

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{12}$$

să fie de asemenea ortogonală și de aceeași normă pe linii și coloane.

Cu toată această analogie dintre transformările conforme în plan și cele conforme în spațiu, condiția ca o transformare plană să fie conformă nu se poate obține prin *metoda coborîrii* din condiția ca o transformare spațială să fie conformă. Și din acest punct de vedere definiția 1 a transformărilor conforme în spațiu nu este cea mai largă posibilă.

Într-adevăr, fie transformarea spațială

$$T^\circ : \begin{cases} X_1 = X_1(x_1, x_2), \\ X_2 = X_2(x_1, x_2), \\ X_3 = X_3(x_3). \end{cases}$$

Pentru ca restricția acestei transformări T° la planul x_1ox_2 să dea o transformare conformă a planului x_1ox_2 pe planul X_1OX_2, este necesar și suficient ca

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)^2 = \lambda^2$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = 0, \tag{13}$$

unde vizibil $\lambda = \lambda(x_1, x_2)$.

Pentru ca transformarea T° să fie conformă în spațiul tridimensional în baza definiției 1, este necesar și suficient ca matricea funcțională

$$\mathfrak{M}_{T^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dX_3}{dx_3} \end{pmatrix}$$

să fie ortogonală și de aceeași normă pe linii și coloane. Aceasta înseamnă că pe lîngă relațiile (13) să avem în plus și relația

$$\left(\frac{\mathrm{d}X_3}{\mathrm{d}x_3}\right)^2 = \lambda^2. \tag{14}$$

Cum însă X_3 nu depinde decît de x_3 iar λ depinde doar de x_1 și x_2, din relația (14) urmează că $\lambda = \text{const}$. Prin urmare aspectul matricei funcționale $\mathfrak{M}_{T^0}$ este următorul

$$\mathfrak{M}_{T^0} = \begin{pmatrix} \lambda\cos\alpha & \lambda\sin\alpha & 0 \\ -\lambda\sin\alpha & \lambda\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm\lambda \end{pmatrix},$$

unde $\alpha = \alpha(x_1, x_2)$ este o funcție arbitrară de x_1 și x_2. Deci

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \lambda\cos\alpha, \quad \frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \lambda\sin\alpha,$$
$$\frac{\partial X_2}{\partial x_1} = -\lambda\sin\alpha, \quad \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = \lambda\cos\alpha.$$

Eliminînd pe X_1 și X_2 între aceste relații pe baza regulii lui Schvartz pentru derivatele de ordinul doi mixte, obținem sistemul

$$\cos\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} + \sin\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x_2} = 0$$

$$-\sin\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} + \cos\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x_2} = 0$$

care fiind liniar și omogen în raport cu $\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}$ și $\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}$ cu determinantul coeficienților egal cu unitatea (deci, diferit de zero), urmează că

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial\alpha}{\partial x_2} = 0$$

adică și $\alpha = \text{const}$.

În concluzie,

TEOREMA 2. *Singurele transformări punctuale tridimensionale conforme atît din punctul de vedere al spațiului tridimensional cît și al celui bidimensional sînt transformările de forma*

$$T^\circ : \begin{cases} X_1 = \lambda(x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha) + \mu_1 \\ X_2 = \lambda(-x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha) + \mu_2, \\ X_3 = \pm\lambda x_3 + \mu_3 \end{cases} \quad (\mu_1, \mu_2, \mu_3 = \text{constante})$$

În baza acestei teoreme, aceste transformări sînt produse de translații, rotații în jurul lui ox_3 și omotetii, într-un cuvînt niște similitudini spațiale particulare.

2. FUNCŢII CONFORME ŞI CONJUGAT CONFORME

Să notăm pentru prescurtarea calculului

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_i} = a_i, \quad \frac{\partial X_2}{\partial x_i} = b_i, \quad \frac{\partial X_3}{\partial x_i} = c_i, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{15}$$

Matricea (9) se va transcrie

$$\mathfrak{M}_T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \tag{9'}$$

astfel că condiţiile (8) şi (8′) care dau ortogonalitatea şi egal normalitatea pe coloane şi linii a matricei $\mathfrak{M}_T$ se scriu

$$\begin{gathered} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = \lambda^2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 = 0 \end{gathered} \tag{16}$$

respectiv

$$\begin{gathered} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \lambda^2 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0. \end{gathered} \tag{16'}$$

Rezolvînd ecuaţiile (16′), de exemplu, în raport cu a_1, a_2, a_3, apoi în raport cu b_1, b_2, b_3 şi în sfîrşit şi în raport cu c_1, c_2, c_3 se obţin relaţiile

$$\begin{gathered} \frac{a_1}{\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{a_2}{\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}} = \frac{a_3}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} = \pm \frac{1}{\lambda}, \\ \frac{b_1}{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}} = \frac{b_2}{\begin{vmatrix} c_3 & c_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}} = \frac{b_3}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}} = \pm \frac{1}{\lambda}, \\ \frac{c_1}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}} = \frac{c_2}{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{c_3}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \pm \frac{1}{\lambda}; \end{gathered} \tag{17}$$

în aceste trei şiruri de relaţii semnele „+" şi „—" corespunzîndu-se. Revenind la funcţiile X_1, X_2, X_3, acest grup de relaţii se mai scrie şi astfel

$$\begin{gathered} \lambda \frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \pm \frac{\partial(X_2, X_3)}{\partial(x_2, x_3)}, \quad \lambda \frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \pm \frac{\partial(X_2, X_3)}{\partial(x_3, x_1)}, \quad \lambda \frac{\partial X_1}{\partial x_3} = \pm \frac{\partial(X_2, X_3)}{\partial(x_1, x_2)}, \\ \lambda \frac{\partial X_2}{\partial x_1} = \pm \frac{\partial(X_3, X_1)}{\partial(x_2, x_3)}, \quad \lambda \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = \pm \frac{\partial(X_3, X_1)}{\partial(x_3, x_1)}, \quad \lambda \frac{\partial X_2}{\partial x_3} = \pm \frac{\partial(X_3, X_1)}{\partial(x_1, x_2)}, \\ \lambda \frac{\partial X_3}{\partial x_1} = \pm \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(x_2, x_3)}, \quad \lambda \frac{\partial X_3}{\partial x_2} = \pm \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(x_3, x_1)}, \quad \lambda \frac{\partial X_3}{\partial x_3} = \pm \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(x_1, x_2)}. \end{gathered} \tag{17'}$$

Aceste relații cît și cele analoage obținute din rezolvarea ecuațiilor (16) pe rînd în raport cu a_1, b_1, c_1 apoi cu a_2, b_2, c_2 și în sfîrșit în raport cu a_3, b_3, c_3, generalizează pentru cazul tridimensional cunoscutele relații de monogeneitate ale lui Cauchy-Riemann din cazul bidimensional

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned} \tag{18}$$

relații care se obțin din ortogonalitatea și egal normalitatea pe linii și coloane a matricei (12).

Din condițiile de monogeneitate (18) rezultă că funcțiile X și Y sînt armonice în raport cu x și y, adică

$$\Delta X = 0 \quad \text{și} \quad \Delta Y = 0. \tag{19}$$

Presupunînd acum că funcțiile X_1, X_2, X_3 sînt de clasă C^2 în raport cu x_1, x_2, x_3 în (s), să vedem cu ce fel de ecuații se înlocuiesc ecuațiile (19) în cazul cînd se consideră o transformare T conformă în sensul adoptat de noi în spațiul tridimensional.

Vom folosi relațiile de ortogonalitate și egal normalitate sub forma (17). Luînd de exemplu primul grup din aceste relații și scriindu-le sub forma

$$\begin{aligned} \pm \lambda a_1 &= b_2c_3 - b_3c_2 \\ \pm \lambda a_2 &= b_3c_1 - b_1c_3 \\ \pm \lambda a_3 &= b_1c_2 - b_2c_1 \end{aligned}$$

derivînd aceste relații respectiv în raport cu x_1, x_2, x_3 și sumîndu-le se observă imediat că

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda a_i) = 0. \tag{20}$$

S-a ținut cont că conform cu (15) avem

$$\frac{\partial b_i}{\partial x_j} = \frac{\partial b_j}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial c_i}{\partial x_j} = \frac{\partial c_j}{\partial x_i}, \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{21}$$

și prin urmare este adevărată identitatea

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(b_2c_3 - b_3c_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(b_3c_1 - b_1c_3) + \frac{\partial}{\partial x_3}(b_1c_2 - b_2c_1) = 0.$$

Ecuația (20) se mai scrie

$$\lambda \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} a_i = 0$$

astfel că înmulțind cu $\lambda \neq 0$ și ținînd seamă că

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 X_1}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \frac{\partial^2 X_1}{\partial x_i \partial x_j}$$

(întrucît $\lambda^2 = a_j a_j$), rezultă că funcția X_1 satisface ecuației

$$\lambda^2 \cdot \Delta X_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 X_1}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \tag{22}$$

Pentru funcțiile X_2 și X_3 pornind de la al doilea și respectiv al treilea grup de relații (12) se obțin încă două ecuații analoage:

$$\begin{aligned} \lambda^2 \cdot \Delta X_2 + \frac{\partial X_2}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 X_2}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \\ \lambda^2 \cdot \Delta X_3 + \frac{\partial X_3}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_3}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 X_3}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \end{aligned} \tag{22'}$$

Să introducem operatorul $\Diamond$ definit conform relației

$$\Diamond f = \|f\|^2 \cdot \Delta f + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{23}$$

unde am notat pentru prescurtare

$$\lambda = \|f\| = + \sqrt{\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}} \tag{24}$$

funcția $\lambda = \lambda(x_1, x_2, x_3) = \|f\|$ fiind numită *norma* funcției f.

DEFINIȚIA 2. *Operatorul* $\Diamond$ *definit în* (*23*) *va fi numit* conformian, *iar orice funcție* $f = f(x_1, x_2, x_3)$ *de clasă* C^2 *în raport cu* x_1, x_2, x_3 *într-un domeniu* (*d*) *din* (*s*) *care satisface în* (*d*) *ecuației*

$$\Diamond f = 0 \tag{25}$$

va fi numită funcție conformă *în* (*d*).

Conform cu (23), funcțiile X_1, X_2, X_3 satisfac ecuațiile

$$\Diamond X_i = 0, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{26}$$

și deci în baza ultimei definiții ele sînt funcții conforme în (*s*).

DEFINIȚIA 3. *Trei funcții* X_1, X_2, X_3 *conforme într-un domeniu* (*d*) *al spațiului* (*s*) *care aplică domeniul* (*d*) *al spațiului* (*s*) *pe un domeniu* (*D*) *al spațilui* (*S*), *vom spune că sînt* conjugat conforme *în* (*d*) *dacă pot determina o transformare conformă T a domeniului* (*d*) *pe domeniul* (*D*).

În baza teoremei 1 această definiție este echivalentă cu:

DEFINIȚIA 3′. *Vom spune că trei funcții* X_1, X_2, X_3 *conforme într-un domeniu* (*d*) *al spațiului* (*s*) *sînt* conjugat conforme *în* (*d*) *dacă în orice punct al lui* (*d*) *matricea lor funcțională este ortogonală și de aceeași normă pe linii sau coloane.*

În cazul planului se știe că dacă este dată o funcție armonică $X=X(x, y)$ în baza condițiilor (18) ale lui Cauchi-Riemann se poate determina și funcția $Y = Y(x, y)$ armonic conjugată cu funcția X.

Problema analoagă în cazul funcțiilor conform conjugate în spațiu ar consta de exemplu în următoarele: se dă funcția $X_3 = X_3(x_1, x_2, x_3)$ conformă într-un domeniu (d) și se cere să se determine funcțiile $X_1=X_1(x_1, x_2, x_3)$ și $X_2=X_2(x_1, x_2, x_3)$ de asemenea conforme în (d) așa fel ca împreună funcțiile X_1, X_2, X_3 să fie conform conjugate în (d).

Despre posibilitatea rezolvării acestei probleme vom încerca să ne ocupăm într-o notă viitoare. Aici vom ataca doar gradul de arbitrar cu care sînt determinate funcțiile X_1 și X_2 conform conjugate cu X_3 cînd este dată funcția X_3. În acest sens avem

TEOREMA 3. *Fiind dată o funcție conformă X_3 într-un domeniu (d), iar (X_1, X_2) și (X_1^*, X_2^*) două perechi de funcții conjugate conform cu X_3 în (d), atunci*

$$X_1^* = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_0,$$

$$X_2^* = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_0, \tag{27}$$

unde matricea coeficienților lui X_1 și X_2 este ortogonală și de aceeași normă pe linii și coloane.

Într-adevăr, cum funcțiile X_1, X_2, X_3 sînt conform conjugate în (d), transformarea T definită în (1) este nedegenerată ($\lambda \neq 0$) și deci putem alege pe X_1, X_2, X_3 ca variabile independente. Să notăm atunci

$$X_1^* = X_1^*(x_1, x_2, x_3) = \widetilde{X}_1^*(X_1, X_2, X_3),$$

$$X_2^* = X_2^*(x_1, x_2, x_3) = \widetilde{X}_2^*(X_1, X_2, X_3).$$

Avem

$$\frac{\partial X_1^*}{\partial x_i} = \frac{\partial \widetilde{X}_1^*}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial X_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial X_2^*}{\partial x_i} = \frac{\partial \widetilde{X}_2^*}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial X_k}{\partial x_i}. \tag{28}$$

Or, cum funcțiile X_1^*, X_2^*, X_3^* sînt de asemenea conform conjugate în (d), adică matricea lor funcțională este ortogonală și de aceeași normă pe linii și coloane, avem

$$\frac{\partial X_1^*}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_1^*}{\partial x_i} = \frac{\partial X_2^*}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_2^*}{\partial x_i} = \frac{\partial X_3}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_3}{\partial x_i} = \lambda^2$$

$$\frac{\partial X_1^*}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_2^*}{\partial x_i} = \frac{\partial X_2^*}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_3}{\partial x_i} = \frac{\partial X_3}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_1^*}{\partial x_i} = 0$$

căci am notat cu λ norma funcției X_3. Or, aceste ultime condiții în baza lui (28) se mai scriu

$$\frac{\partial \widetilde{X}_1^*}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial \widetilde{X}_1^*}{\partial X_h} \cdot \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_h}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \widetilde{X}_2^*}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial \widetilde{X}_2^*}{\partial X_h} \cdot \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_h}{\partial x_i} \right) = \lambda^2,$$

$$\frac{\partial \widetilde{X}_1^*}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial \widetilde{X}_2^*}{\partial X_h} \cdot \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_h}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \widetilde{X}_1^*}{\partial X_k} \cdot \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_3}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \widetilde{X}_2^*}{\partial X_k} \cdot \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_3}{\partial x_i} \right) = 0. \tag{29}$$

Matricea funcțională a funcțiilor X_1, X_2, X_3 fiind de asemenea ortogonală și egal normată pe linii și coloane avem și

$$\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_h}{\partial x_i} = \lambda^2 \cdot \delta_{kh}, \qquad (k, h = 1, 2, 3) \tag{30}$$

δ_{kh} fiind simbolul lui Kronecker. Relațiile (29) vor da atunci

$$\begin{gathered} \frac{\partial \widetilde{X}_1^*}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial \widetilde{X}_1^*}{\partial X_k} = \frac{\partial \widetilde{X}_2^*}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial \widetilde{X}_2^*}{\partial X_k} = 1, \\ \frac{\partial \widetilde{X}_1^*}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial \widetilde{X}_2^*}{\partial X_k} = 0, \\ \frac{\partial \widetilde{X}_1^*}{\partial X_3} = \frac{\partial \widetilde{X}_2^*}{\partial X_3} = 0. \end{gathered} \tag{31}$$

Deci, funcțiile $\widetilde{X}_1^*$ și $\widetilde{X}_2^*$ nu depind de X_3. Apoi, din primele trei relații (31) rezultă că funcțiile $\widetilde{X}_1^* = \widetilde{X}_1^* (X_1, X_2)$ și $\widetilde{X}_2^* = \widetilde{X}_2^* (X_1, X_2)$ sînt în raport cu X_1 și X_2 funcții armonic conjugate și de normă egală cu unitatea. Ele vor fi deci neapărat de forma

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_1^* &= X_1 \cos \alpha + X_2 \sin \alpha + \mu_1 \\ X_2 &= -X_1 \sin \alpha + X_2 \cos \alpha + \mu_2 \end{aligned} \tag{27'}$$

astfel că teorema 3 este demonstrată.

Teorema 3 afirmă că dacă X_3 este o funcție conformă într-un domeniu (d), transformarea T conformă constituită cu ajutorul lui X_3 și a funcțiilor X_1 și X_2 conform conjugate cu X_3 este unic determinată abstracție de o rotație în jurul axei OX_3 și o translație paralelă la planul X_1OX_2.

De problema conjugării a trei funcții oarecari X_1, X_2, X_3 depinzînd de x_1, x_2, x_3 s-a ocupat N. Ciorănescu [18] încă din 1932 ajungînd de asemenea la relațiile (8) care exprimă ortogonalitatea și egal normalitatea pe linii și coloane a matricei (9).

3. FUNCȚII CONFORME ARMONICE

Să vedem în ce condiții o funcție conformă într-un domeniu oarecare este armonică în acel domeniu.

LEMA 1. *O condiție necesară și suficientă ca funcțiile* X_1, X_2, X_3 *conform conjugate într-un domeniu* (d) *să fie armonice în* (d) *este ca norma acestor funcții să fie constantă.*

Într-adevăr, cum funcțiile X_1, X_2, X_3 sînt conform conjugate în (d), notînd cu λ norma funcțiilor X_1, X_2, X_3 și lăsînd deoparte cazul neesențial $\lambda = 0$, să alegem pe X_1, X_2, X_3 ca variabile independente și să punem

$$\lambda = \lambda (x_1, x_2, x_3) = \widetilde{\lambda} (X_1, X_2, X_3).$$

Deci

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_j} = \frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial X_k}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\cdot \qquad (j = 1, 2, 3)$$

astfel că

$$\Diamond X_i = \lambda^2\Delta X_i + \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial X}{\partial x_j} = \lambda^2\Delta X_i + \lambda\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial X_k}\cdot\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right) = 0,$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

sau încă ţinînd cont şi de relaţiile (30),

$$\Diamond X_i = \lambda^2\Delta X_i + \lambda^3\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial X_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{32}$$

Aşadar

$$\Delta X_i + \lambda\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial X_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{32'}$$

Presupunînd deci că X_1, X_2, X_3 sînt şi funcţii armonice în (d), din ecuaţia (32) rezultă că

$$\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial X_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

şi deci funcţia $\lambda = \tilde{\lambda}$ se reduce la o constantă.

Reciproc, dacă admitem că λ este constantă, atunci din (32) urmează că

$$\Delta X_i = 0, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

adică funcţiile X_1, X_2, X_3 sînt şi armonice în (d). Lema este, deci, complet demonstrată.

LEMA 2. *Dacă funcţiile X_1, X_2, X_3 sînt conform conjugate în (d), o condiţie necesară şi suficientă ca norma acestor funcţii să fie constantă este ca transformarea conformă T generată de ele să fie de forma*

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_0, \\ X_2 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_0, \\ X_3 &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_0, \end{aligned} \tag{33}$$

unde coeficienţii α_i, β_i, γ_i, ($i = 0, 1, 2, 3$) sînt constanţi iar matricea coeficienţilor lui x_1, x_2, x_3 este ortogonală şi de aceeaşi normă pe linii şi coloane.

Să folosim pentru uşurinţa demonstraţiei notaţiile (15) şi să punem în plus

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij}, \quad \frac{\partial^2 X_2}{\partial x_i \partial x_j} = b_{ij}, \quad \frac{\partial^2 X_3}{\partial x_i \partial x_j} = c_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{34}$$

Relațiile de conform conjugare a funcțiilor X_1, X_2, X_3 vor fi relațiile (16) sau (16′) în care $\lambda = \text{const.}$

Derivînd primele trei relații (16′) în raport cu x_i avem

$$a_j a_{ji} = b_j b_{ji} = c_j c_{ji} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

relații care împreună cu celelalte relații (16′) atrag că derivatele parțiale secunde a_{ji}, b_{ji}, c_{ji} sînt de forma

$$\begin{aligned} a_{ji} &= p_i b_j + n'_i c_j, \\ b_{ji} &= m_i c_j + p'_i a_j, \\ c_{ji} &= n_i a_j + m'_i b_j. \end{aligned} \tag{35}$$

Derivînd și ultimele relații (16′) în raport cu x_i avem

$$a_i b_{ji} + b_j a_{ji} = b_j c_{ji} + c_j b_{ji} = c_j a_{ji} + a_j c_{ji} = 0$$

relații care conform cu (35) și cu relațiile (16′) conduc la

$$m'_i + m_i = n'_i + n_i = p'_i + p_i = 0$$

încît relațiile (35) se mai scriu

$$\begin{aligned} a_{ji} &= p_i b_j - n_i c_j, \\ b_{ji} &= m_i c_j - p_i a_j, \\ c_{ji} &= n_i a_j - m_i b_j. \end{aligned} \tag{35′}$$

Cum însă

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad b_{ij} = b_{ji}, \quad c_{ij} = c_{ji},$$

din (35′) avem

$$\begin{aligned} p_i b_j - p_j b_i &= n_i c_j - n_j c_i, \\ m_i c_j - m_j c_i &= p_i a_j - p_j a_i, \\ n_i a_j - n_j a_i &= m_i b_j - m_j b_i. \end{aligned}$$

Înmulțind fiecare din aceste relații respectiv cu $a_i b_j$, $a_i c_j$, $b_i c_j$ și considerînd apoi că indicii i și j sînt muți în expresiile obținute, în baza relațiilor (16′) avem

$$\begin{aligned} &p_i a_i = 0, \quad p_i b_i = 0, \quad m_i a_i + n_i b_i = 0 \\ &n_i a_i = 0, \quad n_i c_i = 0, \quad m_i a_i + p_i c_i = 0 \\ &m_i b_i = 0, \quad m_i c_i = 0, \quad n_i b_i + p_i c_i = 0 \end{aligned}$$

din ultima coloană de egalități rezultînd de asemenea

$$m_i a_i = 0, \quad n_i b_i = 0, \quad p_i c_i = 0.$$

Să considerăm sistemele

$$
\begin{aligned}
a_i m_i &= 0, \quad b_i m_i = 0, \quad c_i m_i = 0\\
a_i n_i &= 0, \quad b_i n_i = 0, \quad c_i n_i = 0\\
a_i p_i &= 0, \quad b_i p_i = 0, \quad c_i p_i = 0
\end{aligned}
\tag{36}
$$

sistemul de pe linia întîi avînd ca necunoscute pe m_1, m_2, m_3, cel de pe linia a doua pe n_1, n_2, n_3 iar cel de pe ultima linie pe p_1, p_2, p_3. Dat fiind că aceste sisteme sînt liniare şi omogene, avînd determinantul coeficienţilor diferit de zero

$$
\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \pm \lambda^3 \neq 0
$$

sistemele (36) nu pot admite decît soluţia banală:

$$
m_i = 0, \quad n_i = 0, \quad p_i = 0, \qquad (i = 1, 2, 3)
$$

Prin urmare, conform cu (35′), rezultă că

$$
a_{ji} = 0, \quad b_{ji} = 0, \quad c_{ji} = 0, \qquad (i, j = 1, 2, 3)
$$

şi deci fiecare din funcţiile a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ se reduc la o constantă. Aceste funcţii fiind tocmai derivatele parţiale ale funcţiilor X_1, X_2, X_3, relaţiile (33) sînt evidente.

Reciproca lemei este banală.

Reunind la un loc lemele 1 şi 2 şi ţinînd seamă că transformarea T caracterizată de ecuaţiile (33) este o *similitudine*, avem

TEOREMA 4. *O condiţie necesară şi suficientă ca transformarea conformă T să poată fi reprezentată prin trei funcţii armonice X_1, X_2, X_3 este ca această transformare T să fie o similitudine.*

Observaţie. Transformarea T^0 de la sfîrşitul paragrafului 1 este tot o similitudine.

4. PRINCIPIUL REPREZENTĂRII CONFORME

LEMA 3. *Dacă T este o transformare conformă nedegenerată de la spaţiul (s) la spaţiul (S), considerînd funcţiile*

$$
\Phi = \Phi(X_1, X_2, X_3)
$$

$$
\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3) = \Phi[X_1(x_1, x_2, x_3), X_2(x_1, x_2, x_3), X_3(x_1, x_2, x_3)]
$$

definite în (S) respectiv în (s), avem

$$
\Diamond \varphi = \lambda^4 \cdot \Diamond \Phi, \tag{37}
$$

unde λ este norma matricei funcţionale $\mathfrak{M}_T$ a transformării T.

Într-adevăr, cum

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\frac{\partial\Phi}{\partial X_h}\cdot\frac{\partial X_h}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial X_m\partial X_n}\cdot\frac{\partial X_m}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial X_n}{\partial x_j}+\frac{\partial\Phi}{\partial X_l}\cdot\frac{\partial^2 X_l}{\partial x_i\partial x_j},$$

ținînd cont că matricea funcțională $\mathfrak{M}_T$ a transformării T este ortogonală și de aceeași normă pe linii și coloane, avem

$$\|\varphi\|^2=\frac{\partial\Phi}{\partial X_h}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_k}\cdot\left(\frac{\partial X_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial\Phi}{\partial X_h}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_k}\lambda^2\delta_{hk}=\lambda^2\frac{\partial\Phi}{\partial X_h}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_h}=\lambda^2\|\Phi\|^2,$$

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial X_m\partial X_n}\cdot\frac{\partial X_m}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial X_n}{\partial x_i}+\frac{\partial\Phi}{\partial X_l}\Delta X_l=\frac{\partial^2\Phi}{\partial X_m\partial X_n}\lambda^2\delta_{mn}+\frac{\partial\Phi}{\partial X_l}\Delta X_l=$$

$$=\lambda^2\Delta\Phi+\frac{\partial\Phi}{\partial X_l}\Delta X_l$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial\Phi}{\partial X_h}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_k}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial X_m\partial X_n}\cdot\left(\frac{\partial X_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial X_m}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial X_n}{\partial x_j}\right)+$$

$$+\frac{\partial\Phi}{\partial X_h}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_k}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_l}\cdot\frac{\partial X_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 X_l}{\partial x_i\partial x_j}=$$

$$=\lambda^4\frac{\partial\Phi}{\partial X_h}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_k}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial X_h\partial X_k}+\|\Phi\|^2\frac{\partial\Phi}{\partial X_h}\frac{\partial X_h}{\partial x_i}\frac{\partial X_h}{\partial x_j}\frac{\partial^2 X_h}{\partial x_i\partial x_j}$$

întrucît

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X_h}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_k}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_l}\cdot\frac{\partial X_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 X_l}{\partial x_i\partial x_j}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial X_h}\cdot\frac{\partial X_h}{\partial x_i}\cdot\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X_k}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_l}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 X_l}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial\Phi}{\partial X_l}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_k}\cdot\frac{\partial X_l}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 X_k}{\partial x_i\partial x_j}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial X_h}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_k}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_l}\cdot\frac{\partial X_h}{\partial x_i}\cdot\left[\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 X_l}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial X_l}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 X_k}{\partial x_i\partial x_j}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial X_h}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_k}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_l}\cdot\frac{\partial X_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_j},\frac{\partial X_l}{\partial x_j}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial X_h}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_k}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial X_l}\cdot\frac{\partial X_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda^2\delta_{kl})=\frac{\partial\Phi}{\partial X_h}\cdot\|\Phi\|^2\cdot\frac{\partial X_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial X_h}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 X_h}{\partial x_i\partial x_j}\cdot.$$

Aşadar,

$$\diamondsuit \varphi = \|\varphi\|^2 \Delta\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} =$$

$$= \lambda^4 \left[\|\Phi\|^2 \Delta\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial X_h} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_h \partial X_k} \right] + \|\Phi\|^2 \frac{\partial \Phi}{\partial X_l} \left[\lambda^2 \Delta X_l + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial X_l}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_l}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 X_l}{\partial x_i \partial x_j} \right] = \lambda^4 \diamondsuit \Phi + \|\Phi\|^2 \frac{\partial \Phi}{\partial X_l} \diamondsuit X_l$$

Or, funcţiile X_1, X_2, X_3 fiind conforme, adică $\diamondsuit X_l = 0$, $(l = 1, 2, 3)$, rezultă tocmai

$$\diamondsuit \varphi = \lambda^4 \diamondsuit \Phi,$$

şi deci lema este demonstrată.

În baza acestei leme este imediată teorema următoare:

TEOREMA 5. *Dacă o funcţie* $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ *este conformă într-un domeniu* (d), *în urma efectuării unei transformări conforme* T *asupra variabilelor independente* x_1, x_2, x_3, *funcţia* $\Phi = \Phi(X_1, X_2, X_3)$ *obţinută este conformă în domeniul* (D), *imaginea lui* (d) *prin transformarea* T.

În cazul funcţiilor armonice de două variabile se ştie că dacă asupra coordonatelor x, y se efectuează o transformare conformă (11), atunci operatorul Δ al lui Laplace se transformă conform următoarei relaţii

$$\Delta_{(x,\, y)} = \lambda^2 \Delta_{(X,\, Y)},$$

unde λ este norma matricei funcţionale (12). În consecinţă, o funcţie armonică de două variabile în urma unei transformări conforme a variabilelor rămîne tot armonică. Metoda reprezentărilor conforme atît de des utilizată de Mecanica plană a fluidelor perfecte sau de Electrodinamica plană are la bază tocmai acest fapt.

Lema 3 şi apoi teorema 5 permit a spune că principiul reprezentărilor conforme rămîne în vigoare şi în cazul tridimensional, numai că operatorul Δ al lui Laplace se înlocuieşte cu operatorul $\diamondsuit$.

5. GRUPUL TRANSFORMĂRILOR CONFORME

LEMA 4. *Fiind date transformările conforme succesive*

$$T_1 : y_i = y_i(x_1, x_2, x_3), \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$T_2 : z_i = z_i(y_1, y_2, y_3), \qquad (i = 1, 2, 3)$$

produsul acestor transformări

$$T_2 T_1 : z_i = z_i[y_1(x_1, x_2, x_3), y_2(x_1, x_2, x_3), y_3(x_1, x_2, x_3)] =$$

$$= \widetilde{z}_i(x_1, x_2, x_3), \qquad (i = 1, 2, 3)$$

este de asemenea o transformare conformă, norma transformării T_2T_1 *fiind egală cu produsul normelor transformărilor* T_2 *și* T_1.

Într-adevăr, transformările T_1 și T_2 fiind conforme, în baza teoremei 1 matricile funcționale ale acestor transformări:

$$\mathcal{M}_{T_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\[2ex] \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \\[2ex] \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{T_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_3} \\[2ex] \dfrac{\partial z_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial y_2} & \dfrac{\partial z_2}{\partial y_3} \\[2ex] \dfrac{\partial z_3}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_3}{\partial y_2} & \dfrac{\partial z_3}{\partial y_3} \end{pmatrix}$$

sînt ortogonale și respectiv de norme λ_1 și λ_2 pe linii și coloane, adică

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_k} = \lambda_1^2 \delta_{ij}, \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial y_k} = \lambda_2^2 \delta_{ij}, \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Să considerăm apoi matricea funcțională a transformării T_2T_1:

$$\mathcal{M}_{T_2 T_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{z}_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \tilde{z}_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \tilde{z}_1}{\partial x_3} \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{z}_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \tilde{z}_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \tilde{z}_2}{\partial x_3} \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{z}_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \tilde{z}_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \tilde{z}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Cum avem

$$\frac{\partial \tilde{z}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \cdot \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

urmează evident că

$$\frac{\partial \tilde{z}_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial x_k} = \frac{\partial z_i}{\partial y_h} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial y_h}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_k} = \frac{\partial z_i}{\partial y_h} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial y_l} \lambda_1^2 \delta_{hl} = \lambda_1^2 \left(\frac{\partial z_i}{\partial y_h} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial y_h} \right) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \delta_{ij}$$

și deci și matricea funcțională $\mathcal{M}_{T_2T_1}$ este ortogonală și egal normată pe linii. În plus norma matricei $\mathcal{M}_{T_2T_1}$ și deci a transformării T_2T_1 este egală cu $\lambda_1\lambda_2$. Lema este complet demonstrată.

LEMA 5. *Transformarea identitate*

$$E : X_i = x_i, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

este o transformare conformă avînd norma egală cu unitatea.

Această lemă este banală.

LEMA 6. *Dacă transformarea nedegenerată*

$$T : X_i = X_i\,(x_1,\ x_2,\ x_3), \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

este conformă, atunci și transformarea inversă

$$T^{-1} : x_i = x_i\,(X_1,\ X_2,\ X_3), \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

este de asemenea conformă, norma transformării T^{-1} fiind inversa normei transformării T.

Într-adevăr, cum matricea funcțională $\mathcal{M}_T$ a transformării nedegenerate T este ortogonală și de aceeași normă pe linii și coloane, avem

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \lambda^2\delta_{ij}\,, \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3),$$

unde $\lambda \neq 0$. Or, cum avem și

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_k}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3),$$

în baza relațiilor (10) și (17′) rezultă că

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_m} = \frac{1}{\mathfrak{J}}\,\frac{\partial(X_n,\ X_p)}{\partial(x_j,\ x_k)} = \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{\partial X_m}{\partial x_i}\,,$$

unde $i,\ j,\ k$ și $m,\ n,\ p$ sînt permutări ciclice ale indicilor 1, 2, 3. Așadar

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_m}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial X_n} = \frac{1}{\lambda^4}\cdot\left(\frac{\partial X_m}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial X_n}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{\lambda^2}\,\delta_{mn}$$

și deci matricea funcțională

$$\mathcal{M}_{T^{-1}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_3} \\[2ex] \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_3} \\[2ex] \dfrac{\partial x_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

este de asemenea ortogonală și de aceeași normă pe linii și coloane, norma matricei $\mathcal{M}_{T^{-1}}$ fiind egală cu $\dfrac{1}{\lambda}\cdot$

În virtutea lemelor precedente putem enunța

TEOREMA 6. *Mulțimea transformărilor conforme nedegenerate formează un grup față de operația de compunere (produs) a două transformări.*

6. EXEMPLE DE FUNCŢII CONFORME ŞI CONFORM CONJUGATE

Ecuaţia lui Laplace $\Delta\varphi = 0$ din cazul plan admite o soluţie de tipul $\varphi = \varphi(r)$, unde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Această soluţie are expresia $\varphi = \lg r$. Pentru ecuaţia

$$\Diamond X = 0 \tag{25'}$$

să determinăm în mod analog o soluţie de forma

$$X = f(R),$$

unde $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Cum

$$\frac{\partial X}{\partial x_i} = f' \frac{x_i}{R}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} = \left(f'' - \frac{f'}{R}\right) \frac{x_i x_j}{R^2} + \frac{f'}{R} \delta_{ij}$$

avem

$$\|X\|^2 = f'^2$$

$$\Delta X = f'' + 2\frac{f'}{R}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_i} \frac{\partial X}{\partial x_j} \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} = f'^2 f''$$

astfel că din ecuaţia (25′) rezultă

$$f'^2\left(f'' + 2\frac{f'}{R}\right) + f'^2 f'' = 0.$$

Cum soluţia $f =$ const. este inesenţială, avem

$$f'' + \frac{f'}{R} = 0$$

de unde, abstracţie de o constantă multiplicativă,

$$f(R) = \lg R.$$

Deci soluţia fundamentală a ecuaţiei (25′) este de aceeaşi formă ca şi soluţia fundamentală a ecuaţiei armonice din cazul plan, anume

$$X = \lg R. \tag{38}$$

Cum în cazul plan funcţia armonic conjugată funcţiei $\varphi = \lg r$ era $\theta = \arccos \dfrac{x}{r}$, să vedem dacă şi ecuaţia (25′) admite în spaţiul tridimensional o soluţie de forma

$$\Theta = g\left(\frac{x_k}{R}\right),$$

unde k este unul din indicii 1, 2, 3 avînd o valoare fixată.

Pentru simplificarea calculului vom scrie ecuaţia (25′) sub forma echivalentă

$$\lambda^2 \Delta\Theta + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} = 0, \tag{25''}$$

unde $\lambda = \|\Theta\|$. Avem

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} = g'\left(\frac{\delta_{ki}}{R} - \frac{x_k x_i}{R^3}\right)$$

$$\lambda^2 = \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} = g'^2\left(\frac{1}{R^2} - \frac{x_k^2}{R^4}\right)$$

şi deci

$$\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = g'g''\left(\frac{\delta_{ki}}{R} - \frac{x_k x_i}{R^3}\right)\left(\frac{1}{R^2} - \frac{x_k^2}{R^4}\right) + g'^2\left(-\frac{x_i}{R^4} - \frac{x_k \delta_{ki}}{R^4} + \frac{2x_k^2 x_i}{R^6}\right)$$

$$\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} = g'^2 g''\left(\frac{1}{R^2} - \frac{x_k^2}{R^4}\right)^2 - g'^3 \frac{x_k}{R^3}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{x_k^2}{R^4}\right).$$

Apoi

$$\Delta\Theta = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_i} = g''\left(\frac{1}{R^2} - \frac{x_k^2}{R^4}\right) - g'\,\frac{2x_k}{R^3}.$$

Conform cu (25″) obţinem pentru $g\left(\dfrac{x_k}{R}\right)$ ecuaţia

$$g'^2\left(\frac{1}{R^2} - \frac{x_k^2}{R^4}\right)\left[g''\left(\frac{1}{R^2} - \frac{x_k^2}{R^4}\right) - g'\,\frac{2x_k}{R^3}\right] + g'^2 g''\left(\frac{1}{R^2} - \frac{x_k^2}{R^4}\right)^2 -$$

$$-g'^3 \frac{x_k}{R^3}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{x_k^2}{R^4}\right) = 0$$

care se mai scrie

$$g'^2 \frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{x_k^2}{R^4}\right)\left[2g''\left(1 - \frac{x_k^2}{R^2}\right) - 3g'\,\frac{x_k}{R}\right] = 0.$$

Exceptînd soluția $g' = 0$ și punctele pentru care $R^2 - x_k^2 = 0$, (adică pentru i și j diferiți de k avem $x_i^2 + x_j^2 = 0$ și deci $x_i = x_j = 0$), avem în fond ecuația

$$2g''\left(1 - \frac{x_k^2}{R^2}\right) - 3g'\frac{x_k}{R} = 0. \tag{39}$$

Să considerăm unghiurile directoare

$$\alpha_k = \arccos\frac{x_k}{R}, \qquad (k = 1,\ 2,\ 3) \tag{40}$$

ale vectorului $\overrightarrow{OM}$ față de axele ox_1, ox_2, ox_3, unde M este punctul de coordonate x_1, x_2, x_3.

Punînd

$$G(\alpha_k) = g\left(\frac{x_k}{R}\right)$$

ecuația (39) se transformă în

$$2G'' - \operatorname{cotg}\alpha_k \cdot G' = 0$$

încît funcția $G(\alpha_k)$, abstracție făcînd de constantele de integrare, este de forma

$$G(\alpha_k) = \int_0^{\alpha_k} \frac{d\alpha_k}{\sqrt{\sin\alpha_k}}. \tag{41}$$

În concluzie, unghiurile directoare α_1, α_2, α_3 nu sînt soluții ale ecuației (25'). De altfel faptul că funcțiile (40) nu sînt conforme se poate verifica și direct.

În integrala din (41) să punem $\sin\alpha_k = u^2$. Obținem

$$G(\alpha_k) = \int_0^{\sqrt{\sin\alpha_k}} \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}}. \tag{41'}$$

Să considerăm integrala eliptică de speța întîi și parametru $\varkappa$ în forma normală dată de Legeandre

$$K(\alpha,\varkappa) = \int_0^{\sin\alpha} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - \varkappa^2 u^2)}}.$$

În concluzie, expresia funcției Θ este

$$\Theta = 2K\left(\arcsin\sqrt[4]{1 - \frac{x_k^2}{R^2}}, i\right). \tag{42}$$

Observăm apoi că din (39) avem

$$g' = \frac{C}{\sqrt[4]{\left(1 - \frac{x_k^2}{R^2}\right)^3}},$$

încît norma funcției Θ va fi

$$\|\Theta\| = \frac{C}{\sqrt[4]{R^2\,(R^2 - x_k^2)}}\,.$$

Pe de altă parte, norma funcției (38) este

$$\|X\| = \frac{1}{R}$$

și deci normele funcțiilor (38) și (42) fiind diferite, aceste funcții nu pot face parte dintr-un sistem de trei funcții conform conjugate.

Se pot da însă și exemple de trei funcții conform conjugate. Astfel, în baza teoremei 4, funcțiile ce definesc o similitudine spațială sînt un prim exemplu de funcții conform conjugate. Deci, mulțimea transformărilor conforme nu este vidă. De asemenea avem și următoarea teoremă

TEOREMA 7. *Transformarea spațială*

$$I: X_i = \frac{x_i}{R^2}, \qquad (i = 1,\, 2,\, 3) \tag{43}$$

este o transformare conformă.

Într-adevăr, cum

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\delta_{ik}}{R^2} - \frac{2x_i x_k}{R^4}, \qquad (i, k = 1,\, 2,\, 3)$$

avem

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \frac{\delta_{ij}}{R^2}, \qquad (i, j = 1,\, 2,\, 3)$$

astfel că matricea funcțională $\mathfrak{M}_I$ a transformării I este ortogonală și de aceeași normă pe linii. Deci, transformarea I este conformă.

Transformarea I definită în (43) este o inversiune spațială de pol o și putere 1. Altfel spus, transformarea I este o simetrie geometrică față de sfera unitate cu centrul în origine.

COROLAR 1. *Orice inversiune spațială este o transformare conformă.*

Evident în baza teoremelor 4 și 6.

COROLAR 2. *Dacă $U = U(X_1, X_2, X_3)$ este o funcție conformă în raport cu X_1, X_2, X_3, atunci și funcția $u = u(x_1, x_2, x_3)$ definită prin egalitatea*

$$u = U\left(\frac{x_1}{R^2}, \frac{x_2}{R^2}, \frac{x_3}{R^2}\right)$$

este o funcție conformă în raport cu x_1, x_2, x_3.

Se aplică lema 3.

7. ÎNCHEIERE

Problema extinderii reprezentărilor conforme şi ca atare a funcţiilor analitice este foarte veche şi ea a fost abordată din diverse puncte de vedere. Fără a intra prea mult în istoricul acestei probleme vom remarca două mari direcţii în care a evoluat ea. Cu această ocazie vom constata cît de consistentă şi variată este în acest sens contribuţia şcolii matematice romîneşti.

O primă cale are la bază o observaţie a lui E. Picard [1] din 1891 şi constă în extinderea noţiunii de analiticitate pentru funcţiile de două variabile independente. Dezvoltarea pe atunci a ştiinţelor fizice nu a permis lansarea ideii lui Picard în centrul cercetărilor matematice, ea rămînînd mult timp neobservată. În 1911, cu prilejul studierii funcţiei de curent a lui Stokes din hidrodinamica mişcărilor axial simetrice, E. Beltrami [2] readuce această problemă în faţa matematicienilor. Însă de-abia teza de doctorat [3] din 1921 a lui D. Pompeiu poate fi considerată pe drept cuvînt originea viitoarelor generalizări, indiferent dacă sînt numite *funcţii* (*a*, *b*)-*analitice*, *funcţii pseudo-analitice* sau *funcţii analitice generalizate*. În jurul anului 1930, o serie de matematicieni romîni ca M. Nicolescu [4], [5], [6], G. Călugăreanu [7], M. Ghermănescu [8], Th. Angheluţă [9] etc. au abordat cu succes tratarea acestor funcţii. Teoria funcţiilor analitice generalizate se încheagă efectiv după 1943 prin impulsul dat cercetărilor de către L. Bers şi A. Gelbart [10], [11]. Lucrările lui M. A. Lavrentiev [12], [13], N. Vekua [14] şi alţii demonstrează constituirea acestei teorii.

A doua cale are în vedere extinderea noţiunii de analiticitate în cazul funcţiilor de mai multe variabile. Problema este în strînsă legătură cu găsirea în spaţiul tridimensional a unui algoritm de calcul analog celui din plan ce operează cu numere şi funcţii complexe. Evoluţia unor ştiinţe fizice ca mecanica sau electrodinamica, în care caracterul tridimensional al problemelor este preponderent, face ca această problemă să fie mereu actuală. Diversele încercări făcute, cu toată frumuseţea şi interesul lor matematic, rămîn fie artificiale, fie prea specifice şi, în general, prea greoaie şi inaplicabile la studiul diverselor fenomene concrete ale fizicii. Dacă prima cale a dus la închegarea deja a unei teorii pentru funcţiile cvasi-analitice de două variabile, pe această a doua cale sîntem încă într-un stadiu incipient.

La noi în ţară, M. Nicolescu [4], [15] avînd la bază noţiunea de *bipunct* a lui Casserot şi noţiunea de derivată areolară a lui Pompeiu [16] introduce în 1927 în spaţiul cvadridimensional aşa-numitele funcţii *areolar conjugate* urmate în mod natural de noţiunea de funcţie *areolar armonică* (sau *α-armonică*). În 1931, Gr. C. Moisil şi N. Teodorescu [17] găsesc un alt mod de extindere a relaţiilor de conjugare Cauchy-Riemann care conservă de asemenea armonicitatea. Deşi aparent specifice spaţiului tridimensional, relaţiile de conjugare ale lui Gr. C. Moisil şi N. Teodorescu sînt un caz particular al relaţiilor de conjugare areolară a lui M. Nicolescu din spaţiul cvadridimensional.

În spaţiul tridimensional, de problema *conjugării* a trei funcţii *armonice* s-a ocupat şi N. Ciorănescu [18] încă din 1932. După N. Ciorănescu, vom spune că trei funcţii armonice $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ sînt conjugate dacă funcţia

$$\Psi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(u + \lambda)^2 + (v + \mu)^2 + (w + \nu)^2}}$$

este armonică oricare ar fi constantele λ, μ, ν. N. Ciorănescu stabileşte că o condiţie necesară şi suficientă ca trei funcţii armonice u, v, w să fie conjugate este, în limbajul nostru, ca matricea lor funcţională să fie ortogonală şi de aceeaşi normă pe linii şi coloane. Este vizibil deci că ideea de bază a lucrării noastre se află ascunsă în această lucrare a lui N. Ciorănescu. Lipsa lucrării lui N. Ciorănescu, ca şi a celorlalţi autori amintiţi, constă în faptul că nu a renunţat la condiţia de *armonicitate* a funcţiilor în cauză.

După cum s-a văzut în lucrarea noastră, noi am renunţat la această condiţie de armonicitate şi am păstrat doar faptul esenţial din punct de vedere al transformărilor conforme, ca matricea funcţională (9) să fie ortogonală şi de aceeaşi normă pe linii şi coloane. Teorema 4 precizează clasa funcţiilor armonic conjugate în sensul lui N. Ciorănescu, iar teorema 7 arată că clasa funcţiilor conform conjugate este mai bogată decît clasa funcţiilor armonic conjugate. Analog ca în cazul funcţiilor armonic conjugate, în baza teoremei 5 este evident că dacă funcţiile X_1, X_2, X_3 sînt conform conjugate, atunci, oricare ar fi constantele λ_1, λ_2, λ_3, şi funcţia

$$L(x_1, x_2, x_3) = \lg \sqrt{(X_1 + \lambda_1)^2 + (X_2 + \lambda_2)^2 + (X_3 + \lambda_3)^2}$$

este tot o funcţie conformă.

Primită la redacţie la 25 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. E. PICARD, *Sur un sistème d'équations aux dérivées partielles*, Comptes Rendus Ac. Sci., Paris, **112** (1821).
2. E. BELTRAMI, *Sulle funzioni potenziali di sistemi simetrici*, Opere matematice, vol. 3, Milano, 1911, pag. 115–128 şi 349–377.
3. D. POMPEIU, *Thèses*, Paris, 1912.
4. M. NICOLESCU, *Fonctions complexes dans le plan et dans l'espace* (1re Thèse), Paris, Gauthier-Villars, 1928 (5 mai 1928).
5. M. NICOLESCU, *Sur les fonctions conjuguées*. Mathematica, Cluj, **III**, 134–143 (1930).
6. M. NICOLESCU, *Sur les fonctions conjuguées*. Mathematica, Cluj, **XIV**, 18–20 (1938).
7. G. CĂLUGĂREANU, *Thèse*, Paris, 1928.
8. M. GHERMĂNESCU, Buletinul Şc. polit. din Timişoara, **V**, fasc. 3–4, 3–6 (1929).
9. TH. ANGHELUŢĂ, *Une remarque sur une généralisation des fonctions analitiques*. Mathematica, Cluj, **XVI**, 53–56 (1940).
10. L. BERS, A. GELBART, *On a class of differential equations in mechanics of continua*. Quarterly of Applied Math., *1*, 168–189 (1943).
11. L. BERS, A. GELBART, *On a class of functions defined by partial differential equations*. Trans. Amer. Math. Soc., **56**, *1*, 67–93 (1944).

12. М. А. Лаврентьев, *Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей.* Матем. сборник, **21(63)**, *21*, 285—320 (1947).

13. М. А. Лаврентьев, *Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей*, Изв. АН СССР, серия матем. **12**, 513—554 (1948).

14. I. N. Vekua, *Les fonctions analitiques généralisées*, Moscova, 1959.

15. M. Nicolescu, *Sur les fonctions de bipoint et les fonctions aréolairement conjuguées.* Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Paris, **185**, 442—444 (8 aug. 1927).

16. D. Pompeiu, *Sur une classe de fonctions d'une variabile complexe.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **XXIII**, 108—113 (1912).

17. Gr. C. Moisil, N. Teodorescu, *Fonctions holomorphes dans l'espace*, Mathematica, Cluj, **V**, 142—159 (1931).

18. N. Ciorănescu, *Sur les fonctions harmoniques conjuguées.* Bulletin des Sciences Mathématiques, **LVI**, 55—64 (1932).

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 185, 412–414 (8 Aug. 1927).

[illegible] Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, XXXII, 108–[illegible] (19[illegible]).

[illegible]

[illegible] Bulletin des Sciences Mathématiques, LVI, 23–64 (1932).

DESPRE EFICIENȚA FUNCȚIILOR DE ESTIMAȚIE A PROBABILITĂȚILOR DE TRECERE ALE UNUI LANȚ MARKOV

DE

H. COHN

În lucrarea de față ne propunem să demonstrăm că în cazul modelului statistic considerat de T. Andersen și L. Goodman [1] au loc proprietățile stabilite de acad. Gh. Mihoc și conf. D. Firescu în cazul clasic [2], [3], [4] cu privire la eficiența estimațiilor probabilităților de trecere p_{ij}.

În [1] a fost considerat un model statistic constînd din selecții repetate efectuate asupra unui lanț Markov de lungime T. Adoptînd terminologia din [5] vom numi acest model, modelul mai multor traiectorii, o traiectorie fiind o succesiune de T stări luate de variabilele lanțului.

Vom presupune lanțul Markov pe care-l vom considera finit și omogen, cu mulțimea stărilor $I = \{1,\ldots, m\}$ cu probabilitățile inițiale p_i, $i \in I$ și cu probabilitățile de trecere p_{ij}, $i, j \in I$. Avem relațiile cunoscute

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1, \qquad i \in I.$$

Probabilitatea ca în una din traiectorii să obținem succesiunea de stări $a_1,\ldots, a_T$, $a_k \in I$, $1 \leqslant k \leqslant T$, $\alpha \in N^{\star}$, este:

$$\begin{aligned} P(a_1,\ldots, a_T) &= P\{x_{\alpha T+1} = a_1,\ldots, x_{(\alpha+1)T} = a_T\} \qquad (1)\\ &= p_{a_1} p_{a_1 a_2} \ldots p_{a_{T-1} a_T}. \end{aligned}$$

Probabilitatea ca în cele n traiectorii să obținem succesiunea $a_1,\ldots, a_{nT}$ este

$$P(a_1,\ldots, a_T)\, P(a_{T+1},\ldots, a_{2T}) \ldots P(a_{(n-1)T+1},\ldots, a_{nT}). \qquad (2)$$

ST. CERC. MAT. TOM. 16 NR. 8, P. 1059–1064, BUCUREȘTI, 1964

Vom nota cu $n_{ij}(k)$ numărul de apariţii al succesiunii ij în traiectorie de ordinul k.

Mai notăm

$$n_i(k) = \sum_{j=1}^{m} n_{ij}(k),$$

$$n_{ij} = n_{ij}(1) + \ldots + n_{ij}(n),$$

$$n_i = n_i(1) + \ldots + n_i(n).$$

Avem relaţiile:

$$M(n_{ij}) = nM(n_{ij}(1)),$$

$$M(n_i) = n\,M(n_i(1)).$$

Din [2] se ştie că:

$$M(n_{ij}(1)) = M(n_i(1))\,p_{ij}$$

$$M(n_i) = \sum_{k=1}^{T} P_i^{(k)},$$

unde $P_i^{(k)}$ sînt probabilităţile absolute ale lanţului Markov considerat

$$P_i^{(k)} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1} \in I} p_{i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{k-1} i_k}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant T.$$

Vom mai nota

$$\hat{p}_{ij}(n) = \frac{n_{ij}}{n_i}. \tag{3}$$

În [1] s-a arătat că $\hat{p}_{ij}(n)$ sînt asimptotic normale. Deoarece raportul $\frac{n_{ij}}{n_i}$ este mărginit, obţinem după o teoremă cunoscută:

$$M(\hat{p}_{ij}(n)) = \frac{M(n_{ij})}{M(n_i)} + 0(1/n) = p_{ij} + 0\ (1/n). \tag{4}$$

Să considerăm acum expresia:

$$\sqrt{n}\,(\hat{p}_{ij}(n) - p_{ij})$$

care dacă ţinem seama de (4) şi de teorema lui Sluţky (§ 20.3 din [6]) are aceeaşi distribuţie limită ca şi

$$\sqrt{n}(\hat{p}_{ij}(n) - M(\hat{p}_{ij}(n))). \tag{5}$$

Mai departe, putem scrie

$$\sqrt{n}\,(\hat{p}_{ij}(n) - p_{ij}) = \sqrt{n}\left(\frac{n_{ij}}{n_i} - p_{ij}\right) = \sqrt{n}\,\frac{n_{ij} - n_i\,p_{ij}}{n_i} = \frac{(n_{ij} - n_i\,p_{ij})/\sqrt{n}}{\frac{n_i}{n}}.$$

Dar n_i este sumă de variabile aleatoare independente şi identic repartizate cu mediile şi dispersiile finite. În acest caz are loc legea slabă a numerelor mari şi deci

$$\frac{n_i}{n} \xrightarrow{P} P_i$$

(simbolul $\xrightarrow{P}$ reprezintă convergenţa în probabilitate). Aplicînd din nou teorema lui Sluţky obţinem că (5) are aceeaşi distribuţie limită ca şi

$$\frac{(n_{ij} - n_i\, p_{ij})/\sqrt{n}}{P_i}.$$

Folosind formulele obţinute în [1] în cazul de mai sus obţinem relaţiile

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}\,(\sqrt{n}\,\hat{p}_{ij}\,(n)) = \frac{p_{ij}\,(1 - p_{ij})}{P_i}$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Cov}\,(\sqrt{n}\,\hat{p}_{ij}\,(n)\,\hat{p}_{ik}\,(n)) = -\frac{p_{ij}\,p_{ik}}{P_i}$$

de unde

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\,(\hat{p}_{ij}(n)) &= \frac{p_{i'}\,(1 - p_{ij})}{nP_i} + 0\,(1/n) \\ \operatorname{Cov}\,(\hat{p}_{ij}\,(n)\,\hat{p}_{ik}\,(n)) &= -\frac{p_{ij}\,p_{ik}}{nP_i} + 0(1/n). \end{aligned} \tag{6}$$

În mod asemănător obţinem

$$\operatorname{Cov}\,(\hat{p}_{ij}\,(n)\,\hat{p}_{kl}\,(n)) = 0\,(1/n),\ i \neq j. \tag{7}$$

1) Să considerăm mai întîi că parametrii necunoscuţi sînt elementele liniei i din matricea probabilităţilor de trecere

$$p_{i1},\ p_{i2}, \ldots, p_{im}$$

în număr de $(m - 1)$ din cauza relaţiei:

$$\sum_{h=1}^{m} p_{ih} = 1.$$

Vom nota

$$p_{ih} = \alpha_h\,,\quad (h = 1, \ldots, m - 1).$$

Din (6) obținem că elipsoidul de concentrație al funcțiilor de estimație este dat cu ajutorul următoarei matrice

$$A_n = \left\| \begin{matrix} \frac{p_{ij}(1-p_{ij})}{n P_i} + 0(1/n) & -\frac{p_{i1} p_{i2}}{n P_i} + 0\,(1/n) \ldots & -\frac{p_{i1} p_{im-1}}{n P_i} + 0(1/n) \\ -\frac{p_{i2} p_{i1}}{n P_i} + 0\,(1/n) & \frac{p_{i2}(1-p_{i2})}{n P_i} + 0(\,1/n) \ldots & -\frac{p_{i2} p_{im-1}}{n P_i} + 0\,(1/n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{p_{im-1} p_{i1}}{n P_i} + 0(1/n) & -\frac{p_{im-1} p_{i2}}{n P_i} + 0\,(1/n) \ldots & \frac{p_{im-1}(1-p_{im-1})}{n P_i} + 0(1/n) \end{matrix} \right\| \tag{8}$$

Pe de altă parte, notînd cu $P\,(x_1, \ldots, x_{nT}\,;\, p_{i1}, \ldots, p_{im-1})$ densitatea de probabilitate corespunzătoare modelului considerat, folosind (2) și ținînd seama de egalitatea

$$M\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \alpha}\right) = 0$$

obținem egalitățile:

$$M\left[\frac{\partial \ln P}{\partial \alpha_h} \frac{\partial \ln P}{\partial \alpha_k}\right] = n \sum_{i_1, \ldots, i_T \in I} p_{i1}\, p_{i1\,i2} \cdots p_{i_{T-1}\,i_T} \frac{\partial \ln p_{i1} \cdots p_{i_{T-1}\,i_T}}{\partial\, p_{ih}} \times$$

$$\times \frac{\partial \ln p_{i1} \cdots p_{i_{T-1}\,i_T}}{\partial p_{ik}},$$

$$M\left[\frac{\partial \ln P}{\partial \alpha_h}\right]^2 = n \sum_{i_1, \ldots, i_T \in I} p_{i_1}\, p_{i_1\,i_2} \cdots p_{i_{T-1}\,i_T} \left(\frac{\partial \ln p_{i_1} p_{i_1\,i_2} \cdots p_{i_{T-1}\,i_T}}{\partial p_{ih}}\right)^2.$$

Folosind rezultatele din [2] obținem:

$$\begin{aligned} M\left[\frac{\partial \ln P}{\partial \alpha_h} \frac{\partial \ln P}{\partial \alpha_k}\right] &= n\, P_i \frac{1}{p_{im}}, \\ M\left[\frac{\partial \ln P}{\partial \alpha_h}\right]^2 &= n\, P_i \frac{p_{ih} + p_{im}}{p_{ih}\, p_{im}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Am obținut prin urmare matricea:

$$B_n = \left\| \begin{matrix} \frac{n P_i (p_{i1} + p_{im})}{p_{i1}\, p_{im}} & \frac{n P_i}{p_{im}} \ldots & \frac{n\, P_i}{p_{im}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{n P_i}{p_{im}} & \frac{n P_i}{p_{im}} \ldots & \frac{n P_i\,(p_{i,\,m-1} + p_{im})}{p_{im-1}\, p_{im}} \end{matrix} \right\|$$

de unde, după un calcul elementar, obținem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A_n^{-1}|}{|B_n|} = 1$$

şi prin urmare că estimațiile considerate sînt asimptotic eficiente.

2) Să considerăm acum necunoscute elementele a k linii $1 \leqslant k \leqslant n$ din matricea probabilităților de trecere şi anume:

$$\begin{array}{c} p_{j_1 1} \dots p_{j_1 m} \\ \dots\dots \\ p_{j_k 1} \dots p_{j_k m} \end{array} \qquad j_1, \dots, j_k \in I$$

În acest caz estimațiile

$$\begin{array}{c} \hat{p}_{i_1 1}(n) \dots \hat{p}_{i_1 m}(n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \hat{p}_{i_k 1}(n) \dots \hat{p}_{i_k m}(n) \end{array}$$

sînt asimptotic eficiente.

Într-adevăr, dacă ținem seama de relațiile (6) şi (7) şi de relația

$$M\left[\frac{\partial \ln P}{\partial p_{j_\alpha i}} \frac{\partial \ln P}{\partial p_{j_\beta k}}\right] =$$

$$= n \sum_{i_1, \dots, i_T \in I} p_{i_1} \dots p_{i_{T-1} i_T} \frac{\partial \ln p_{i_1} \dots p_{i_{T-1} i_T}}{\partial p_{j_\alpha i}} \frac{\partial \ln p_{i_1} \dots p_{i_{T-1} i_T}}{\partial p_{j_\beta k}} = 0$$

şi observăm că partea principală a elementelor matricii elipsoidului de concentrație a funcțiilor de estimație coincide cu elementele matricii elipsoidului de concentrație minimă a dispersiilor, iar zerourile primei matrici sînt suficient de bune pentru a garanta coincidența asimptotică a celor doi elipsoizi, obținem proprietatea enunțată mai sus.

3) În cazul cînd sînt cunoscute numai probabilitățile

$$p_{ij_1}, p_{ij_2}, \dots, p_{ij_r} \qquad (r < m)$$

funcțiile de estimație $\hat{p}_{ij_s}(n)$ $(s = 1, 2, \dots, k)$ $(k < m)$ nu sînt asimptotic eficiente.

Această proprietate are loc deoarece în acest caz elipsoidul de concentrație minimă al dispersiilor coincide cu cel obținut în [4], iar elipsoidul de concentrație al funcțiilor de estimație diferă de cel din [4] doar prin ordinul zeroului care însă conduce la aceleași rezultate.

Prin urmare am obținut proprietățile:

În cazul cînd probabilitățile de trecere necunoscute sînt elementele mai multor linii complete ale matricii probabilităților de trecere, funcțiile *de estimaţie considerate mai sus sînt asimptotic eficiente. În particular, proprietatea se păstrează şi în cazul cînd probabilităţile de trecere necunoscute sînt toate elementele matricii probabilităţilor de trecere şi în cazul cînd probabilităţile de trecere necunoscute sînt elementele unei linii complete din matricea probabilităţilor de trecere.*

În cazul cînd probabilităţile de trecere necunoscute sînt în număr diferit de un multiplu de m, proprietatea de eficienţă asimptotică nu are loc.

Primită la redacţie la 9 mai 1964

BIBLIOGRAFIE

1. T. W. ANDERSON şi L. A. GOODMAN, *Statistical inference about Markov, chains*. Ann. Math. Stat. no. 1, 1957, pag. 89–109.
2. G. MIHOC, *Fonctions d'estimation éfficients pour les suites de variables dépendents*. Bulletin Mathématique de la Soc. Sciences Mathématiques et Physiques de la R.P.R., **1/49** *4* (1957).
3. D. FIRESCU,*Funcţii de estimaţii pentru probabilităţile de trecere ale unui lanţ Markov*. Analele Univ. C. I. Parhon, Bucureşti, Seria Şt. Naturii, *20*, 37–47 (1958).
4. D. FIRESCU, *Asupra funcţiilor de estimaţie ale probabilităţilor de trecere ale unui lanţ Markov*. Analele Univ. C. I. Parhon, Seria Şt. Naturii, *18*, 9–18 (1958).
5. BUI TRONG LIEU, *Estimations pour le processus de Markov*, Publ. de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, **XI**, fasc. 2 (1962).
6. H. CRAMER, *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University, Press, 1946.
7. O. ONICESCU, G. MIHOC, *Lecţii de statistică matematică*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.

ORSZÁGOS MŰSZAKI [illegible] DOKUMENTÁCIÓS [illegible] 1883

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferențială neeuclidiană**, 1964, 387 p., 13 lei.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoremele de descompunere ale algebrei)**, 1960, 619 p., 25,50 lei (epuizat).

D. BARBILIAN, **Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)**, 1956, 380 p., 7 lei.

IANKÓ BÉLA, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații liniare**, 1961, 223 p., 8,85 lei.

N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU și A. CORNEA, **Seminar S. Stoilow (1959—1960). Teoria potențialului pe suprafețe riemanniene**, 1962 160 p., 5 lei.

G. CIUCU și R. THEODORESCU, **Procese cu legături complete**, 1960, 232 p., 9,85 lei (epuizat).

C. CONSTANTINESCU, **Seminar M. Neculcea, Teoria mulțimilor**, 1962, 108 p., 3,25 lei (epuizat).

C. CORDUNEANU, **Funcții aproape-periodice**, 1961, 191 p., 8,30 lei (epuizat).

ROMULUS CRISTESCU, **Spații liniare ordonate**, 1959, 332 p., 11,10 lei.

I. CUCULESCU, **Seminar O. Onicescu, Algebre Lie**, 1962, 148 p., 5,15 lei.

C. FOIAȘ, **Seminar M. Nicolescu 1959—1960, Teoria spectrală în algebre Banach (necomutative) axată pe noțiunea de rezolventă**, 1962, 82 p., 2,85 lei.

ALEXANDRU FRODA, **Algebra superioară, fundamente : mulțimi și operații, divizibilitate, spații liniare, forme pătratice**, 1958, 455 p., 24,50 lei.

GH. GALBURĂ, **Corpuri de funcții algebrice și varietăți algebrice**, 1961, 180 p., 7,85 lei.

M. GHERMĂNESCU, **Ecuații funcționale**, 1960 523 p., 25,60 lei (epuizat).

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

CAIUS IACOB, **Introduction mathématique à la mécanique des fluides**, 1959, 1288 p., 66,50 lei (epuizat).

TRAIAN LALESCU, **Introducere în teoria ecuațiilor integrale**, 1956, 135 p., 5,90 lei.

LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice și hidraulice**, 1963, 52 p., 18,50 lei.

* * * **Lucrările celui de-al IV-lea Congres al matematicienilor romîni**, 1960, 228 p., 8,55 lei (epuizat).

* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie și topologie, Iași 2—5 iunie 1958**, 1962, 264 p., 9,75 lei.

* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie diferențială din 9—12 iunie 1955, organizată de Secția de științe matematice și fizice a Academiei R.P.R.**, 1956, 368 p., 9,50 lei.

G. MARINESCU, **Spații vectoriale normate**, 1956, 295 p., 6 lei.

G. MARINESCU, **Spații vectoriale topologice și pseudotopologice**, 1959, 219 p., 8,80 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometria neeuclidiană**, 1954, 144 p., 4,30 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă**, 1958, 496 p., 25,90 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă. Teoria corespondenței**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

GH. MIHOC și V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 1962, 732 p., 34,70 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 1961, 142 p., 8,55 lei (epuizat) ; vol. II, 1962, 155 p., 8,25 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Funcționarea în mai mulți timpi a schemelor cu relee ideale**, 1960, 279 p., 12 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Introducere în algebră, I. Inele și ideale**, vol. I, 1954, 256 p., 9,10 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Matricele asociate sistemelor de ecuații cu derivate parțiale. Introducere în studiul cercetărilor lui I. N. Lopatinschi**, 1950, 64 p., 1,20 lei.

GR. C. MOISIL, **Scheme cu comandă directă cu contacte şi relee**, 1959, 205 p., 9,65 lei (epuizat).

ALEXANDRU MYLLER, **Scrieri matematice**, 1959, 595 p. + 1 pl., 30,40 lei.

VERA MYLLER-LEBEDEV, **Lecţii de algebră**, 1953, 396 p., 8,75 lei (epuizat).

MIRON NICOLESCU, **Analiza matematică**, vol. II, 1953, 420 p., 11,90 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU, **Numere şi sisteme aleatoare**, 1962, 260 p., 11,20 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU, **Strategia jocurilor. Cu aplicaţii la programarea liniară**, 1961, 228 p., 8,45 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU şi colab., **Calculul probabilităţilor şi aplicaţii**, 1956, 788 p., 15 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

* * * **Opera matematică a lui Alexandru Pantazi**, 1956, 496 p., 24,20 lei.

DIMITRIE POMPEI, **Opera matematică**, 1959, 535 p. + 1 pl., 30,20 lei.

N. RANCU şi L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicaţii în producţie**, 1963, 898 p. + 20 pl., 45 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Teoria funcţiilor de o variabilă complexă**, vol. I, 1954, 308 p., 10 lei (epuizat); vol. II în colaborare cu Cabiria Andreian-Cazacu, 1958, 379 p., 25,70 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. I, 1961, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.

GHEORGHE ŢIŢEICA, **Geometria diferenţială proiectivă a reţelelor**, 1956, 287 p., 8 lei.

DRAGOŞ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 1961, 76 p., 3,15 lei.

SERGIU VASILACHE, **Elemente de teoria mulţimilor şi structurilor algebrice**, 1956, 235 p., 5 lei.

GH. VRĂNCEANU, **Leçons de géometrie différentielle**, vol. I, 1957, 407 p., 26,50 lei; vol. II, 1957, 428 p., 27,60 lei.

GH. VRĂNCEANU, **Lecţii de geometrie diferenţială**, vol. III, 1960, 454 p., 15 lei.

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Citarea bibliografiei în text se va face în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihail Eminescu, nr. 47, Bucureşti.

B

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 8, P. 935—1064, BUCUREŞTI, 1964

I. P. „Informaţia" — c. 2848

43831

Lei 12

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

9

TOMUL 16

1964

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
GH. MARINESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție

Pentru a vă asigura colecția completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pe anul 1965.

În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție pe adresa: str. M. Eminescu, nr. 47, București

Revista apare de 10 ori pe an.

TOM. 16, Nr. 9
1964

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

CIPRIAN FOIAŞ, Asupra unei teoreme din lucrarea mea: Descompuneri în operatori şi vectori proprii. I 1067

D. MANGERON şi L. E. KRIVOŞEIN, Probleme de contur pentru ecuaţii integro-diferenţiale cu operatori exteriori de tip parabolic 1071

ELEMÉR ROSINGER, Structuri pseudotopologice II. 1085

ALEXANDRU SOLIAN, Teoria tranzi-grupurilor. I. Relaţii de echivalenţă şi subgrupuri asociate 1111

T. RUS, Algoritmi de prelucrare a expresiilor formale cu ajutorul maşinilor cifrice de calcul 1129

ION D. ION, Radicalul limitei proiective de inele asociative . . 1141

CONSTANTIN V. CRĂCIUN, O generalizare a noţiunii de categorie gramaticală în sensul lui Dobrušin 1147

TOMA GAŞPAR, Numărul tipurilor de sinonimie a claselor de dipoli, funcţional echivalenţi, cu selectori 1153

N. PRAPORGESCU, O generalizare a funcţiei θ şi folosirea ei la studiul funcţiilor eliptice II. 1163

M. N. ROŞCULEŢ, Cercetări asupra seriilor trigonometrice. O clasă de serii trigonometrice divergente pe R cu şirul coeficienţilor convergent către zero 1175

T. RUS, Asupra reprezentării matriciale a arborilor 1179

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 9, P. 1065–1186, BUCUREŞTI, 1964

ASUPRA UNEI TEOREME DIN LUCRAREA MEA: DESCOMPUNERI ÎN OPERATORI ŞI VECTORI PROPRII. I[1]

DE

CIPRIAN FOIAŞ

1. În articolul publicat în Revue de math. pures et appl., **VII**, *2*, 241–282 (1962), teorema 1 este enunţată într-o formă incompletă, în care nu este corectă. Această remarcă mi-a fost comunicată de Imre Csiszár. Scopul acestei scurte Note este de a da forma corectă a teoremei 1, formă care a fost de altfel remarcată şi de către I. Csiszár.

Se remarcă însă că în întregul articol cît şi în continuările sale din Revue de math. pures et appl., **VII**, *4*, 571–602 (1962) şi C.R. Acad. Sci. Paris, **225**, 247–248 (1962), condiţia suplimentară care trebuie adăugată pentru ca teorema 1 să fie corectă, este totdeauna îndeplinită. Astfel corecţia necesară teoremei 1 nu cere nici o altă schimbare în lucrările menţionate mai înainte.

2. Pentru claritate, să amintesc cîteva definiţii şi rezultate.

Fie $\mathcal{E}$ un spaţiu local convex separabil, (e, f) un produs scalar continuu pe $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ spaţiul Hilbert obţinut din $\mathcal{E}$ înzestrat cu produsul scalar (e, f), $\mathcal{E}^*$ spaţiul formelor antiliniare continue pe $\mathcal{E}$. Avem $\mathcal{E} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{E}^*$, injecţiile fiind continue. Se presupune, în plus, că ele sînt nucleare, adică există o normă $|e|_\gamma$ continuă pe $\mathcal{E}$ astfel ca aplicaţia identică $\mathcal{E}_\gamma \rightarrow \mathcal{H}$ (unde $\mathcal{E}_\gamma$ este $\mathcal{E}$ înzestrat cu norma $|e|_\gamma$) să fie nucleară. Spaţiul $\mathcal{E}^*$ se consideră înzestrat cu o topologie local convexă astfel ca adjunctul A^* al oricărui operator liniar continuu A al lui $\mathcal{E}$ să fie continuu în $\mathcal{E}^*$. Se spune că A posedă un adjunct formal dacă există un operator liniar continuu $\bar{A}$ al lui $\mathcal{E}$, astfel ca $(Ae, f) = (e, \bar{A}f)$ pentru $e, f \in \mathcal{E}$. Evident, dacă $\bar{A}$ există, el este determinat în mod unic. În tot ceea ce urmează se va considera că A are un adjunct formal $\bar{A}$. În această ipoteză, A poate fi prelungit într-un operator continuu al lui $\mathcal{E}^*$ anume $(\bar{A})^*$. În plus, A

---

[1] Publicată în Revue de math. pures et appl., **VII**, *2*, 241–282 (1962).

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 9, P. 1067–1069, BUCUREŞTI, 1964

posedă în $\mathcal{H}$ o prelungire închisă minimală care va fi desemnat prin A_0. Un operator χ de la $\mathcal{E}$ în $\mathcal{E}^*$ — liniar şi continuu este un operator propriu în λ al lui A dacă

$$\overline{A}^* \chi_\lambda = \chi_\lambda A = \lambda \chi_\lambda, \tag{1}$$

unde $\lambda \in C$, C fiind cîmpul numerelor complexe.

Prin definiţie se spune că $\mathcal{E}$ admite o descompunere (integrală) după operatori proprii ai lui A, dacă există o măsură pozitivă boreliană μ pe C şi o funcţie $\chi(\lambda)$ definită pe C astfel ca:

(i) $\chi(\lambda)$ să fie un operator propriu al lui A (în λ);
(ii) $< \chi(\lambda) e, f >$ să fie μ-integrabilă, $e, f \in \mathcal{E}$;
(iii) $< \chi(\lambda) e, e > \geqslant 0$, $e \in \mathcal{E}$;
(iv) $(e, f) = \int_C < \chi(\lambda) e, f > d\mu(\lambda)$.

Să amintim că un operator liniar închis S cu domeniu $\mathfrak{D}_S$ dens într-un spaţiu Hilbert H este subnormal dacă există un spaţiu Hilbert K, conţinînd pe H ca subspaţiu, şi un operator normal N în K astfel ca $S \subseteq N$. Să amintim de asemenea că măsura semispectrală $\{E(\sigma)\}_{\sigma \subset C}$ este ataşată lui S dacă

$$\|Sf\|^2 = \int_C |\lambda|^2 d(E(\lambda) f, f), \quad (Sf, g) = \int_C \lambda d(E(\lambda) f, g) \tag{2}$$

oricare ar fi $f \in \mathfrak{D}_S$, $g \in H$; S este subnormal dacă şi numai dacă există o măsură semispectrală ataşată lui S. În plus, în acest caz dacă S^* este adjunctul lui S, atunci

$$\mathfrak{D}_S \subseteq \mathfrak{D}_{S^*} \text{ şi } \|Sh\| \geqslant \|S^* h\|, \; h \in \mathfrak{D}_S.$$

Aşadar forma corectă a teoremei 1 (p. 248) din articolul din Revue de math. pures et appl., **VII**, *2*, 241—282 (1962) este următoarea:

TEOREMA 1′. *Fie A un operator avînd un adjunct formal $\overline{A}$. $\mathcal{E}$ admite o decompoziţie după operatori proprii ai lui A dacă şi numai dacă*

a) A_0 *este subnormal,*

b) $\overline{A}A = A\overline{A}$.

În termeni de spaţii Hilbert condiţia b) este echivalentă cu

b′) $\|A_0 h\| = \|A_0^* h\|$ *pentru orice* $h \in \mathfrak{D}_{A_0}$.

Toate celelalte aserţiuni ale teoremei 1 (*loc. cit.*), adică proprietăţile auxiliare ale decompoziţiilor şi corespondenţa dintre decompoziţiile lui $\mathcal{E}$ şi măsurile semispectrale ataşate la A_0 rămîn adevărate fără nici o schimbare. În această teoremă, eroarea constă în aceea că condiţia b) (sau b′) a teoremei 1′ lipseşte.

Totuşi în lucrarea mea necesitatea condiţiei b) este demonstrată înainte de teorema 1, adică la p. 248 (propoziţia 4).

3. Acum rămîne numai să demonstrăm că b) este echivalent cu b') şi că a) plus b) atrage că fiecărei măsuri semispectrale $\{E(\sigma)\}_{\sigma\subset C}$ ataşate lui A_0 îi corespunde o descompunere a lui $\mathfrak{S}$

$$(e, f) = \int_C < \chi(\lambda)\, e, f > \mathrm{d}\mu(\lambda), \ e, f \in \mathfrak{S} \tag{3}$$

în operatori proprii ai lui A, legată de $\{E(\sigma)\}_{\sigma\subset C}$ prin

$$(E(\sigma)\, e, f) = \int_\sigma < \chi(\lambda)\, e, f > \mathrm{d}\mu(\lambda). \tag{4}$$

Echivalenţa condiţiilor b) şi b') se demonstrează prin metode standard; cea de-a doua afirmaţie se demonstrează pe baza rezultatelor din lucrarea mea din Acta Scient. Math., **20**, 117–155 (1959), §§ 2–3, şi folosind condiţia b) argumentaţia dată în prima lucrare citată se completează corect fără nici o dificultate.

4. Să remarcăm că fără o condiţie adiţională, condiţia a) nu este suficientă pentru existenţa unei descompuneri a lui $\mathfrak{S}$ după operatori proprii ai lui A. Un exemplu simplu care să ilustreze aceasta a fost dat de I. Csiszár.

5. În încheiere să remarcăm că ar fi foarte interesant de lămurit dacă nu cumva condiţia b) singură este suficientă pentru existenţa descompunerii lui $\mathfrak{S}$, cu alte cuvinte de arătat că condiţia b) atrage condiţia a). După toate aparenţele, această problemă nu este încă soluţionată.

PROBLEME DE CONTUR PENTRU ECUAȚII INTEGRO-DIFERENȚIALE CU OPERATORI EXTERIORI DE TIP PARABOLIC

DE

D. MANGERON [1] și L. E. KRIVOȘEIN [2]

Vastul șir de lucrări consacrat ecuațiilor cu derivate parțiale de diferite tipuri, expus la recentul simpozion sovieto-american de la Novosibirsk [1], precum și alte recente reuniuni de specialiști consacrate aplicării ecuațiilor neliniare în fizică [2], [3], au scos în evidență deosebita importanță a studiilor consacrate ecuațiilor integro-diferențiale, care traduc fenomene din ce în ce mai intime de fizică și tehnică și includ într-însele operatori diferențiali exteriori eliptici, hiperbolici și parabolici, liniari și cvasiliniari [4], [5] și încep să includă — pe măsura nevoilor fizicii și tehnicii înalte — operatori diferențiali *poliarmonici* [6], [7], *polivibranți* [8] și *policalorici* [9], studiați îndeosebi într-un șir de lucrări datorite lui M. Picone, M. Nicolescu și D. Mangeron, ce a constituit izvor de inspirație pentru numeroși cercetători (v. de ex., [10] —[15]).

Rezervînd pentru o altă lucrare studiul variatelor probleme de contur ce se referă la ecuații integro-diferențiale cu operator exterior policaloric, ne vom ocupa în cele ce urmează de studiul problemelor de existență și de unicitate, precum și de o serie de evaluări calitative — apriorice și aposteriorice — ale soluțiilor unor probleme de contur relative la ecuații liniare și neliniare integro-diferențiale de tip parabolic, care includ într-însele fenomene remanente sau ereditare din cadrul schematizărilor matematice actuale ale proceselor de difuzie [16], filtrare [17] și, mai general, transport de substanță [18].

Ideea generală a metodei elaborate are puncte comune cu metoda folosită de D. Mangeron, singur sau în colaborare cu L. E. Krivoșein, într-o serie de lucrări cu totul recente, publicate în Comunicările Acade-

---

[1] Institutul politehnic Iași.
[2] Universitatea de Stat Kirghiză, Frunze, R.S.S. Kirghizia, U.R.S.S.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 9, P. 1071–1084, BUCUREȘTI, 1964

miei R.P.R. [19], [20] şi în Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei [21], [22] şi consacrate unor noi clase de probleme de contur relative la ecuaţii integro-diferenţiale cu derivate parţiale, cu derivata de ordin superior a lui Picone [23], care îşi găsesc aplicaţii din ce în ce mai întinse în diferite domenii ale ştiinţelor naturii [24].

§ 1. TEOREME DE EXISTENŢĂ ŞI UNICITATE A SOLUŢIILOR

Se consideră problema de contur relativă la ecuaţia integro-diferenţială liniară cu derivate parţiale de tip parabolic

$$P[u(x,t)] - \sum_{i=0}^{1} A_i(x,t) \frac{\partial^i u(x,t)}{\partial x^i} = f(x,t) + \int_0^t \sum_{i=0}^{1} K_i(x,t,\tau) \frac{\partial^i u(x,\tau)}{\partial x^i} \mathrm{d}\tau, \quad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad (2)$$

$$u(0,t) = \varphi_2(t), \qquad u(a,t) = \varphi_3(t), \quad (3)$$

în care $\varphi_1(x)$, $A_i(x,t)$, $K_i(x,t,\tau)$ $(i = 1, 2)$, $f(x,t)$ sînt funcţii continue date, $\varphi_i(t)$ $(i = 2, 3)$ sînt funcţii date regulate pentru toţi (x, t), $(x, \tau) \in D = [0, a] \times [0, T]$, iar operatorul $P[u(x,t)] \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ este clasicul operator parabolic, particularizat pentru $n = 1$, $p = 1$ din operatorul policaloric

$$\underline{\smallfrown}^{(p)} \equiv \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(p)}, \; \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad (4)$$

introdus şi studiat în cadrul ecuaţiei iterată a căldurii de acad. M. Nicolescu [25].

Metoda reducţiei conduce nemijlocit la simplificarea condiţiilor de contur (3), utilizîndu-se în acest scop transformarea de funcţii

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{x}{a}\varphi_3(t) + \frac{a-x}{a}\varphi_2(t), \quad (5)$$

în care $v(x,t)$ este noua funcţie necunoscută. Înlocuind, pe baza substituţiei (5), funcţia $u(x,t)$ prin noua funcţie $v(x,t)$ în (1), (2) şi (3), se obţine

$$P[v(x,t)] - \sum_{i=0}^{1} A_i(x,t) \frac{\partial^i v(x,t)}{\partial x^i} = F(x,t) + \int_0^t \sum_{i=0}^{1} K_i(x,t,\tau) \frac{\partial^i v(x,\tau)}{\partial x^i} \mathrm{d}\tau, \quad (6)$$

$$v(x,0) = \varphi_0(x), \quad (7)$$

$$v(0,t) = 0, \qquad v(a,t) = 0, \quad (8)$$

în care $F(x,t)$ este o funcţie continuă cunoscută. O dată determinată din sistemul integro-diferenţial (6)—(8) funcţia $v(x,t)$, soluţia problemei iniţiale (1)—(3) se obţine graţie relaţiei (5). În consecinţă, ne vom ocupa în cele ce urmează de studiul problemei (6)—(8) echivalentă cu problema de contur (1)—(3).

În vederea determinării soluţiei problemei (6)—(8) se foloseşte cu succes transformarea

$$v(x,t)=\int_0^x w(x,t)\,\mathrm{d}x, \tag{9}$$

în care $w(x,t)\equiv\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}\cdot$ Din (6) se obţine

$$\begin{aligned}P[v(x,t)]-A_0(x,t)\int_0^x w(x,t)\,\mathrm{d}x-A_1(x,t)w(x,t)=F(x,t)+\\+\int_0^t\left[K_0(x,t,\tau)\int_0^x w(x,\tau)\,\mathrm{d}x+K_1(x,t,\tau)\,w(x,\tau)\right]\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{10}$$

Dacă se ţine seama de proprietăţile funcţiei ([26], p. 202)

$$G(x,\xi,t,\alpha)\equiv\frac{2}{a}\sum_{i=1}^{\infty}\exp\left[\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2(\alpha-t)\right]\sin\frac{\pi ix}{a}\sin\frac{\pi i\xi}{a}, \tag{11}$$

se obţine din (6)—(8)

$$\begin{aligned}v(x,t)=\psi(x,t)+\iint\limits_{00}^{ta}G(x,\xi,t,\alpha)\Bigg\{F(\xi,\alpha)+A_0(\xi,\alpha)\int_0^{\xi}w(x,\alpha)\,\mathrm{d}x-\\-A_1(\xi,\alpha)w(\xi,\alpha)+\int_0^{\alpha}\left[K_0(\xi,\alpha,\tau)\int_0^{\xi}w(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi+K_1(\xi,\alpha,\tau)\,w(\xi,\tau)\right]\mathrm{d}\tau\Bigg\}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha=\\=\Psi(x,t)+\iint\limits_{00}^{ta}M(x,\xi,t,\alpha)\,w(\xi,\alpha)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha,\end{aligned} \tag{12}$$

în care $\Psi(x,t)$, $\psi(x,t)$, $M(x,\xi,t,\alpha)$ sînt funcţii cunoscute, de două ori continuu derivabile în raport cu variabila x şi o dată continuu derivabile în raport cu variabila t [3] pentru toţi (x,t), $(\xi,\alpha)\in D$. Înlocuind în relaţia $w(x,t)\equiv\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ funcţia $v(x,t)$ dată prin (12), se obţine următoarea ecuaţie integrală

$$w(x,t)=\Phi(x,t)+\iint\limits_{00}^{ta}N(x,\xi,t,\alpha)\,w(\xi,\alpha)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha, \tag{13}$$

în care $\Phi(x,t)$ şi $N(x,\xi,t,\alpha)$ sînt funcţii cunoscute şi $w(x,t)$ este funcţia necunoscută.

Folosind faptul, demonstrat în [27], că nucleul $N(x,\xi,t,\alpha)$ nu posedă valori proprii pentru valori finite ale variabilei t, se conchide că ecuaţia integrală (13) admite, în ipotezele formulate mai sus, o soluţie unică continuă în domeniul D:

---

[3] Vom zice că în acest caz funcţiile considerate fac parte din clasa de funcţii C_{21}.

$$w(x,t) = \Phi(x,t) + \iint\limits_{00}^{ta} R(x, \xi, t, \alpha, 1)\ \Phi(\xi, \alpha)\, d\xi\, d\alpha \equiv \omega(x,t), \tag{14}$$

în care prin $R(x, \xi, t, \alpha, 1)$ s-a notat nucleul rezolvant al nucleului $N(x, \xi, t, \alpha)$. În virtutea relaţiei (14), soluţia problemei (6)—(8) se prezintă sub forma

$$v(x,t) = \Psi(x,t) + \iint\limits_{00}^{ta} M(x, \xi, t, \alpha)\, w(\xi, t)\, d\xi\, d\alpha. \tag{15}$$

Cele de mai sus permit enunţarea următoarei teoreme

TEOREMA 1. *Dacă funcţiile*

$$A_i(x,t), K_i(x, t, \tau)\ (i = 0, 1),\ \varphi_0(x), F(x,t) \tag{16}$$

sînt continue în domeniul (x,t), $(x, \tau) \in D$, *problema* (6)—(8) *posedă în clasa funcţiilor* C_{21}, *pentru toţi* $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *o soluţie unică.*

Considerăm acum problema de contur (7), (8) relativă la ecuaţia integro-diferenţială parabolică *neliniară*

$$P[v(x,t)] - A_1(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = F[x, t, v(x,t)] + \\ + \int_0^t \left\{ K_2(x, t, \tau)\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} + K_3[x, \tau, v(x, \tau)]\, b(t, \tau) \right\} d\tau. \tag{17}$$

Procedînd ca şi în cazul rezolvării problemei (6)—(8), se obţine

$$v(x,t) = \Psi(x,t) + \iint\limits_{00}^{ta} M_2(x, \xi, t, \alpha)\, w(\xi, \alpha)\, d\xi\, d\alpha + \\ + \iint\limits_{00}^{ta} G(x, \xi, t, \alpha) \left\{ F[\xi, \alpha, v(\xi, \alpha)] + \int_0^{\alpha} K_3[\xi, \tau, v(\xi, \tau)]\, b(\alpha, \tau)\, d\tau \right\} d\xi\, d\alpha \equiv \\ \equiv \sigma(x, t, v) + \Psi_2(x,t) + \iint\limits_{00}^{ta} M_2(x, \xi, t, \alpha)\, w(\xi, \alpha)\, d\xi\, d\alpha, \tag{18}$$

în care $\Psi_2(x,t)$ şi $M_2(x, \xi, t, \alpha)$ sînt funcţii cunoscute pentru toţi (x,t), $(\xi, \alpha) \in D$, $w(x,t) \equiv \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}$, iar $\sigma(x, t, v)$ este o anumită funcţională.

Avem, în consecinţă,

$$w(x,t) = \frac{\partial \Psi_2(x,t)}{\partial x} + \iint\limits_{00}^{ta} \frac{\partial}{\partial x} M_2(x, \xi, t, \alpha)\, w(\xi, \alpha)\, d\xi\, d\alpha + \\ + \frac{\partial \sigma(x, t, v)}{\partial x} \equiv \Phi_2(x,t) + \sigma_1(x, t, v) + \iint\limits_{00}^{ta} N_2(x, \xi, t, \alpha)\, w(\xi, \alpha)\, d\xi\, d\alpha. \tag{19}$$

Din (19) se găseşte

$$w(x, t) = \Phi_2(x, t) + \sigma_1(x, t, v) + \iint\limits_{00}^{ta} \Gamma(x, \xi, t, \alpha, 1)\, [\Phi_2(\xi, \alpha) +$$
$$+ \sigma_1(\xi, \alpha, v)]\, d\xi\, d\alpha \equiv \Phi_3(x, t) + \sigma_1(x, t, v) +$$
$$+ \iint\limits_{00}^{ta} \Gamma(x, \xi, t, \alpha, 1)\, \sigma_1(\xi, \alpha, v)\, d\xi\, d\alpha, \tag{20}$$

în care prin $\Gamma(x, \xi, t, \alpha, 1)$ s-a notat nucleul rezolvant al nucleului $N_2(x, \xi, t, \alpha)$.

Înlocuind în (18) funcţia $w(x, t)$ prin membrul al doilea din relaţia (20), se ajunge la ecuaţia integrală

$$v(x, t) = \Psi_4(x, t) + \iint\limits_{00}^{ta} K_4\, [x, \xi, t, \alpha, v(\xi, \alpha)]\, d\xi\, d\alpha. \tag{21}$$

Are loc

TEOREMA 2. *Dacă funcţia* $K_4\,[x, \xi, t, \alpha, v(\xi, \alpha)]$ *este continuă în domeniul* $D_1 = \{D, m_1 \leqslant |v| \leqslant m_2\}$ *în raport cu toate argumentele sale, satisface, în raport cu argumentul* v, *condiţia lui Lipschitz cu coeficientul* $\gamma(x, \xi, t, \alpha)$, *atunci, o dată ce sînt îndeplinite inegalităţile* (*23*), *problema* (*7*), (*8*), (*17*) *posedă o soluţie unică, aparţinînd clasei de funcţii* C_{21}.

În adevăr, ajunge să stabilim în acest scop valabilitatea relaţiilor care asigură conservarea principiului reprezentărilor concentrate. Avem

$$|v_2(x, t) - v_1(x, t)| \leqslant \iint\limits_{00}^{ta} \gamma(x, \xi, t, \alpha)\, |v_2(\xi, \alpha) - v_1(\xi_1\ \alpha)|\, d\xi\, d\alpha. \tag{22}$$

Prin urmare, dacă intervalul $[0, T]$ este ales în aşa fel ca să fie îndeplinită inegalitatea

$$l = 1 - \max_{D} \iint\limits_{00}^{ta} \gamma(x, \xi, t, \alpha)\, d\xi\, d\alpha > 0, \tag{23}$$

principiul de mai sus al lui S. Banach, astăzi clasic, este îndeplinit.

§ 2. PROBLEMA STABILITĂŢII SOLUŢIILOR

Să considerăm acum, în loc de problema (6)–(8), problema schematizată în sistemul integro-diferenţial liniar de tip parabolic

$$v_1(x, 0) = \varphi_{01}(x),\ v_1(0, t) = 0,\ v_1(a, t) = 0, \tag{24}$$

$$P[v_1(x,t)] - \sum_{i=0}^{1} B_i(x, t)\, \frac{\partial^i v_1(x, t)}{\partial x^i} = F_1(x,t) + \int_0^t \sum_{i=0}^{1} R_i(x,t,\tau)\, \frac{\partial^i v_1(x, \tau)}{\partial x^i}\, d\tau. \tag{25}$$

Folosind metoda expusă în § 1, problema (24), (25) se reduce la următorul sistem de ecuaţii integrale

$$v_1(x, t) = \Psi_1(x, t) + \iint_{00}^{ta} M_1(x, \xi, t, \alpha)\, w_1(\xi, \alpha)\, d\xi\, d\alpha, \tag{26}$$

$$w_1(x, t) = \Phi_1(x, t) + \iint_{00}^{ta} N_1(x, \xi, t, \alpha)\, w_1(\xi, t)\, d\xi\, d\alpha, \tag{27}$$

în care $\Psi_1(x, t)$, $\Phi_1(x, t)$, $M_1(x, \xi, t, \alpha)$, $N_1(x, \xi, t, \alpha)$ sînt funcţii cunoscute, iar $v_1(x, t)$ şi $w_1(x, t)$ sînt funcţii necunoscute.

DEFINIŢIE. Vom spune că soluţia problemei (6)—(8) este *stabilă* faţă de mici perturbări ale funcţiilor cunoscute ce figurează în sistemul integro-diferenţial parabolic considerat (6)—(8), dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate determina un $\delta > 0$ în aşa fel ca inegalitatea $|v(x, t) - v_1(x, t)| < \varepsilon$ să rezulte de îndată ce sînt îndeplinite inegalităţile

$$|\Psi(x, t) - \Psi_1(x, t)| < \delta, \quad |\Phi(x, t) - \Phi_1(x, t)| < \delta,$$

$$|M(x, \xi, t, \alpha) - M_1(x, \xi, t, \alpha)| < \delta, \quad |N(x, \xi, t, \alpha) - N_1(x, \xi, t, \alpha)| < \delta$$

pentru toţi (x, t), $(\xi, \alpha) \in D$.

Vom stabili în cele de mai jos o condiţie suficientă de stabilitate a soluţiei problemei (6)—(8), ce corespunde la definiţia de mai sus şi poate fi folosită în practică. Din (12) şi (26) avem

$$\begin{aligned} |v(x, t) - v_1(x, t)| &\leqslant |\Psi(x, t) - \Psi_1(x, t)| + \\ &+ \iint_{00}^{ta} |[M(x, \xi, t, \alpha) - M_1(x, \xi, t, \alpha)]\, w_1(\xi, \alpha)|\, d\xi\, d\alpha + \\ &+ \iint_{00}^{ta} |M(x, \xi, t, \alpha)\, [w(\xi, \alpha) - w_1(\xi, \alpha]|\, d\xi\, d\alpha. \end{aligned} \tag{28}$$

Presupunem că din

$$\begin{aligned} w(x, t) - w_1(x, t) &= \Phi(x, t) - \Phi_1(x, t) + \\ &+ \iint_{00}^{ta} \{N(x, \xi, t, \alpha)\, [w(\xi, \alpha) - w_1(\xi, \alpha)] + \\ &+ [N(x, \xi, t, \alpha) - N_1(x, \xi, t, \alpha)]\, w_1(\xi, t)\}\, d\xi\, d\alpha \end{aligned} \tag{29}$$

s-a găsit că

$$\max_D |w(x, t) - w_1(x, t)| \leqslant \rho. \tag{30}$$

Atunci, din (28) rezultă că dacă

$$\max_D |\Psi(x,t) - \Psi_1(x,t)| < \varepsilon : 3, \tag{31}$$

$$\max_D \int_0^t\!\!\int_0^a |M(x,\xi,t,\alpha)|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha \cdot \rho < \varepsilon : 3, \tag{32}$$

$$\max_D \int_0^t\!\!\int_0^a |M(x,\xi,t,\alpha) - M_1(x,\xi,t,\alpha)|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha < \varepsilon : [3 \max_D |w_1(x,t)|], \tag{33}$$

avem, pentru toți $(x,t) \in D$,

$$|v(x,t) - v_1(x,t)| < \varepsilon.$$

Prin aceasta s-a demonstrat următoarea teoremă:

TEOREMA 3. *Pentru ca soluția problemei (6)—(8) să fie stabilă în raport cu mici perturbații ale funcțiilor cunoscute ce figurează în sistemul integro-diferențial (6)—(8), este suficient ca în domeniul D să fie satisfăcute inegalitățile (31)—(33).*

Să considerăm acum problema stabilității soluției problemei (7), (8), (17) în raport cu mici perturbații ale funcțiilor cunoscute ce figurează în (7) și (17), păstrînd conținutul definiției de stabilitate introdusă mai sus. Să stabilim în acest scop condițiile de vecinătate între soluția problemei (7), (8), (17) și soluția problemei (24) relativă la ecuația integrodiferențială

$$P[v_1(x,t)] - B_1(x,t)\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} = F_1[x,t,v_1(x,t)] +$$

$$+ \int_0^t \left\{ R_2(x,t,\tau)\frac{\partial v_1(x,\tau)}{\partial x} + R_3[x,\tau,v_1(x,\tau)]\, b_1(t,\tau) \right\} \mathrm{d}\tau. \tag{34}$$

Folosind procedeul de construcție a ecuației (21), se obține

$$v_1(x,t) = \Psi_5(x,t) + \int_0^t\!\!\int_0^a R_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha, \tag{35}$$

în care $\Psi_5(x,t)$, $R_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)]$ sînt funcții continue cunoscute, definite în domeniul D_1. Presupunem că funcția $K_4[x,\xi,t,\alpha,v(\xi,\alpha)]$ satisface în domeniul D_1 condițiile teoremei 2. Atunci, dacă au loc inegalitățile

$$\max_D |\Psi_4(x,t) - \Psi_5(x,t)| < \varepsilon l : 2, \tag{36}$$

$$\max_D \int_0^t\!\!\int_0^a |K_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)] - R_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)]|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha < \varepsilon l : 2, \tag{37}$$

avem

$$\begin{aligned}|v(x,t)-v_1(x,t)| &\leqslant |\Psi_4(x,t)-\Psi_5(x,t)| + \iint\limits_{00}^{ta} |K_4[x,\xi,t,\alpha,v(\xi,\alpha)] - \\ &- R_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)]|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha \leqslant |\Psi_4(x,t)-\Psi_5(x,t)| + \\ &+ \iint\limits_{00}^{ta} |K_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)] - R_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)]|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha + \\ &+ \iint\limits_{00}^{ta} \gamma(x,\xi,t,\alpha)\,|v(\xi,\alpha)-v_1(\xi,\alpha)|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha; \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\max_D |v(x,t)-v_1(x,t)| &\leqslant \max_D \Big\{ |\Psi_4(x,t)-\Psi_5(x,t)| + \\ &+ \iint\limits_{00}^{ta} |K_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)] - R_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)]| \Big\}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha : l < \varepsilon \end{aligned} \tag{39}$$

şi, prin urmare, se poate enunţa

TEOREMA 4. *Dacă în domeniul D_1 sînt îndeplinite condiţiile teoremei 2 şi au loc inegalităţile (36), (37), soluţia problemei (7), (8) relativă la ecuaţia integro-diferenţială neliniară (17) este stabilă în raport cu mici perturbaţii ale funcţiilor $\varphi_0(x)$, $A_1(x,t)$, $F(x,t,v)$, $K_2(x,t,\tau)$, $K_3(x,\tau,v)$, $b(t,\tau)$ ce figurează în sistemul integro-diferenţial parabolic (7) şi (17).*

§ 3. EVALUĂRI APRIORICE ŞI APOSTERIORICE CALITATIVE

Să stabilim în cele de mai jos unele evaluări calitative ale soluţiilor problemelor considerate în paragrafele precedente. Să integrăm în acest scop ecuaţia (13) în raport cu x de la 0 la a şi să introducem notaţiile

$$\begin{gathered} w(t) = \int_0^a |w(x,t)|\,\mathrm{d}x; \quad \varphi(t) \geqslant \left|\int_0^a \Phi(x,t)\,\mathrm{d}x\right|; \quad \varphi(t) > 0, \ \varphi'(t) \geqslant 0, \\ p(x,\alpha) \geqslant |N(x,\xi,t,\alpha)|, \ (x,t),(\xi,\alpha) \in D, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{gathered} \tag{40}$$

subliniind totodată că funcţia $\varphi(t)$ se presupune a fi diferenţiabilă pentru toţi $t \in [0, T]$.

Avem, în consecinţă,

$$[\varphi'(t)+p(x,t)w(t)] : [\varphi(t)+\int_0^t p(x,\alpha)w(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha] \leqslant p(x,t)+\varphi'(t):\varphi(t); \tag{41}$$

$$\begin{gathered} \ln[\varphi(t)+\int_0^t p(x,\alpha)\,w(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha] \leqslant \int_0^t p(x,\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + \ln[\varphi^2(t):\varphi(0)]; \\ \varphi(t)+\int_0^t p(x,\alpha)\,w(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \leqslant [\varphi^2(t):\varphi(0)]\,\exp\zeta(x,t), \end{gathered} \tag{42}$$

în care s-a pus $\zeta(x, t) = \int_0^t p(x, \alpha)\, d\alpha$. Prin urmare,

$$w(t) \leqslant [\varphi^2(t) : \varphi(0)] \exp \zeta(x, t); \tag{43}$$

$$|w(x, t)| \leqslant |\Psi(x,t)| + \int_0^t \sigma(x, t, \alpha)\, [\varphi^2(\alpha) : \varphi(0)] \exp \pi(\alpha)\, d\alpha, \tag{44}$$

în care s-a introdus următoarele majorări

$$\sigma(x, t, \alpha) \geqslant |M(x, \xi, t, \alpha)|,$$
$$\pi(\alpha) \geqslant \zeta(\xi, \alpha),\ (x, t), (\xi, \alpha) \in D.$$

Are loc

TEOREMA 5. *Dacă funcţiile cunoscute, ce figurează în (6), (8), sînt definite şi continue pentru toţi* $x \in [0, a]$, t, $\tau \in [0, T]$, *iar funcţia regulată şi nonnegativă* $\varphi(t)$ *descreşte monoton pentru toţi* $t \in [0, T]$, *atunci în domeniul D are loc evaluarea (44).*

Observaţie. Se pot construi într-un mod analog şi evaluări pentru $|w(x, t)|$. Ajunge să se evalueze în prealabil mărimea integralei

$$\int_0^t |w(x, \tau)|\, d\tau.$$

În legătură cu problema evaluării modulului soluţiei problemei de contur ce se referă la sistemul integro-diferenţial parabolic (6)—(8) se mai pot face următoarele consideraţii.

a) Presupunem că are loc inegalitatea

$$l_1 = 1 - \max_D \int_0^t\int_0^a |N(x, \xi, t, \alpha)|\, d\xi\, d\alpha > 0. \tag{45}$$

Atunci

$$\max_D |w(x, t)| \leqslant \max_D |\Phi(x, t)| : l_1 = \mu. \tag{46}$$

Prin urmare,

$$|w(x, t)| \leqslant |\Phi(x, t)| + \mu \int_0^t\int_0^a |N(x, \xi, t, \alpha)|\, d\xi\, d\alpha \equiv g(x, t, \mu),$$

$$|v(x, t)| \leqslant |\Psi(x, t)| + \int_0^t\int_0^a |M(x, \xi, t, \alpha)|\, g(\xi, \alpha, \mu)\, d\xi\, d\alpha, \tag{47}$$

$$(x, t) \in D.$$

O evaluare mai simplă, însă mai puţin precisă, a modulului soluţiei problemei considerate se obţine dacă se foloseşte inegalitatea (45):

$$|v(x, t)| \leqslant |\Psi(x, t)| + \mu \int_0^t\int_0^a |M(x, \xi, t, \alpha)|\, d\xi\, d\alpha,\ (x, t) \in D. \tag{48}$$

Dacă inegalitatea (45) nu are loc, atunci în ecuaţia (13) trebuie să se facă k substituţii iterate în aşa fel ca

$$l_2 = 1 - \max_{D} \iint\limits_{00}^{ta} | N_k(x, \xi, t, \alpha) | \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\alpha > 0, \tag{49}$$

în care prin $N_k\,(x, \xi, t, \alpha)$ s-a notat nucleul iterat de ordin k provenit din nucleul $N\,(x, \xi, t, \alpha)$. Atunci, evaluarea mărimii $|\,w\,(x, t)|$ poate fi găsită din ecuaţia

$$\begin{aligned} w\,(x, t) = \Phi\,(x, t) &+ \iint\limits_{00}^{ta} \sum_{i=0}^{k-1} N_i\,(x, \xi, t, \alpha)\, \Phi\,(\xi, t)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\alpha + \\ &+ \iint\limits_{00}^{ta} N_k(x, \xi, t, \alpha)\, w\,(\xi, \alpha)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\alpha, \end{aligned} \tag{50}$$

în care prin $N_i\,(x, \xi, t, \alpha)$ s-a notat nucleul iterat de ordin k al nucleului $N\,(x, \xi, t, \alpha)$. În rest, toate deducţiile de mai sus rămîn valabile.

b) În lucrarea [27] este expusă evaluarea nucleului rezolvant $\Gamma\,(x, \xi, t, \alpha, 1)$ relativ la ecuaţia integrală de forma:

$$|\,\Gamma\,(x, \xi, t, \alpha, 1)\,| \leqslant N \exp\,(at\,N)\,;\; N \geqslant |\,N\,(x, \xi, t, \alpha)\,|, \tag{51}$$
$$(x, t), (\xi, \alpha) \in D.$$

Avem, prin urmare, dacă se ţine seama de (51),

$$|w(x, t)| \leqslant |\,\Phi(x, t)| + N \iint\limits_{00}^{ta} |N(x, \xi, t, \alpha) \exp\,(a\alpha N)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\alpha \equiv \omega_1(x, t, N), \tag{52}$$

$$|v(x, t)| \leqslant |\,\Psi(x, t)| + \iint\limits_{00}^{ta} |\,M(x, \xi, t, \alpha)|\; \omega_1\,(\xi, \alpha, N)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\alpha,\; (x, t) \in D. \tag{53}$$

Să evaluăm acum soluţia problemei (7), (8), (17) corespunzătoare cazului în care funcţia $K_4\,[x, \xi, t, \alpha, v\,(\xi, \alpha)]$ posedă în domeniul D_1 proprietatea că

$$|\,K_4\,[x, \xi, t, \alpha, v\,(\xi, \alpha)]\,| \leqslant K\,(\xi, \alpha)\, \theta\,(z), \tag{54}$$

în care $z\,(x, y) \equiv |\,v\,(x, y)\,|$, $K\,(\xi, \alpha)$ şi $\theta\,(z)$ sînt funcţii cunoscute monoton descrescătoare pentru toţi (x, t), (ξ, α), $v \in D_1$ şi $0 < \theta\,(z) < p$. Din (21) avem

$$z(x, t) \leqslant g(x) + \iint\limits_{00}^{ta} K\,(\xi, \alpha)\, \theta\,[z\,(\xi, \alpha)]\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\alpha, \tag{55}$$

în care $g\,(x) \geqslant |\,\Psi_4\,(x, t)\,|$, $(x, t) \in D$; $g\,(x)$ este o funcţie monoton nedescrescătoare. Să introducem funcţia

$$\lambda\,(x, t) \equiv g\,(x) + \iint\limits_{00}^{ta} K\,(\xi, \alpha)\, \theta\,[z\,(\xi, \alpha)]\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\alpha. \tag{56}$$

Atunci

$$z(x,t) \leqslant \lambda(a,t) + g(x) - g(a); \tag{57}$$

$$\begin{aligned}\lambda_t'(a,t) &= \int_0^a K(\xi,t)\,\theta\,[z(\xi,t)]\,\mathrm{d}\xi \leqslant \int_0^a K(\xi,t)\,\theta\,[\lambda(a,t)+ \\ &+ g(\xi) - g(a)]\,\mathrm{d}\xi \leqslant \int_0^a K(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi\cdot\theta\,[\lambda(a,t)] \equiv r(t)\cdot\theta[\lambda(a,t)].\end{aligned} \tag{58}$$

Din (58) se obţine

$$\int_{b(a)}^{c(t)} \frac{\mathrm{d}\tau}{\theta(\tau)} \leqslant \int_0^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{59}$$

în care s-a notat

$$b(a) = \lambda(a, 0), \quad c(t) = \lambda(a, t).$$

Folosind inegalitatea (57), precum şi faptul că din (58) a fost găsită o evaluare a funcţiei $\lambda(a, t)$, să căutăm acum o evaluare pentru funcţia $z(x,t)$, $(x,t) \in D$. Este evident că cea mai simplă şi totodată mai puţin perfectă evaluare pentru funcţia $|v(x,t)|$ se obţine nemijlocit din (55). Ea este dată prin

$$|v(x,t)| \leqslant |\Psi_4(x,t)| + p\iint_{00}^{ta} K(\xi,\alpha)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha\ (x,t) \in D. \tag{60}$$

Să indicăm în cele ce urmează cîteva din evaluări aposteriorice ale soluţiilor problemelor considerate, menţionînd că evaluările calitative stabilite mai sus au avut un caracter aprioric.

a) Fie $\alpha_0(x,t)$, $\beta_0(x,t)$ funcţii cunoscute continue pentru toţi $(x,t) \in D$ şi fie $\Phi(x,t) \geqslant 0$, $N(x, \xi, t, \alpha) \geqslant 0$ pentru toţi (x, t), $(\xi, \alpha) \in D$. Presupunem că au loc inegalităţile

$$\alpha_0(x,t) \leqslant w(x,t) \leqslant \beta_0(x,t),\ (x,t) \in D. \tag{61}$$

Atunci funcţiile $\alpha_n(x,t)$, $\beta_n(x,t)$, determinate prin formulele

$$\alpha_n(x,t) = \Phi(x,t) + \iint_{00}^{ta} N(x,\xi,t,\alpha)\,\alpha_{n-1}(\xi,\alpha)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha, \tag{62}$$

$$\beta_n(x,t) = \Phi(x,t) + \iint_{00}^{ta} N(x,\xi,t,\alpha)\,\beta_{n-1}(\xi,\alpha)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha, \tag{63}$$

$$(n = 1, 2, \ldots),$$

posedă următoarele proprietăţi

$$\alpha_n(x,t) \leqslant w(x,t) \leqslant \beta_n(x,t), \tag{64}$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n(x,t) = \lim_{n\to\infty} \beta_n(x,t) \equiv w(x,t),\ (x,t) \in D. \tag{65}$$

Se pot lua, în consecință, drept funcții apropiate de soluția problemei (6) — (8)

$$
\begin{aligned}
v_{n1}(x,t) &= \Psi(x,t) + \iint\limits_{00}^{ta} M(x,\ \xi,\ t,\ \alpha)\ \alpha_n(\xi,\ \alpha)\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\alpha,\\
v_{n2}(x,t) &= \Psi(x,t) + \iint\limits_{00}^{ta} M(x,\ \xi,\ t,\ \alpha)\ \beta_n(\xi,\ \alpha)\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\alpha,
\end{aligned}
\tag{66}
$$

$$(n = 0,\ 1,\ \ldots).$$

În corespondență cu cele de mai sus au loc evaluările

$$
|v(x,t)| \leqslant |v_{ni}(x,\ t)| + \iint\limits_{00}^{ta} |M(x,\xi,t,\alpha)[\beta_n(\xi,\alpha) - \alpha_n(\xi,\alpha)]|\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\alpha \tag{67}
$$

$$(i = 1,\ 2\ ;\ n = 0,\ 1,\ldots\ ;\ (x,\ t) \in D).$$

Presupunem, în corespondență cu cazul în care se consideră problema de contur neliniară (7), (8), (17), că funcțiile $\Psi_4(x,\ t)$, $K_4[x,\ \xi,\ t,\ \alpha,\ v(\xi,\ \alpha)]$ ce figurează în ecuația (21) posedă următoarele proprietăți

$$\Psi_4(x,\ t) \geqslant 0,\ K_4[x,\ \xi,\ t,\ \alpha,\ v(\xi,\ \alpha)] \geqslant 0,\ \frac{\partial K_4}{\partial v} \geqslant 0\ ;\ (x,\ t),\ (\xi,\ \alpha),\ v \in D_1.$$

Fie $m_0(x,\ t)$, $n_0(x,\ t)$ o pereche de funcții astfel încît să aibă loc șirul de inegalități

$$m_0(x,\ t) \leqslant v(x,\ t) \leqslant n_0(x,\ t).$$

Atunci succesiunea de funcții $\{m_i(x,\ t)\}$, $\{n_i(x,\ t)\}$, definită prin formulele

$$m_i(x,t) = \Psi_4(x,t) + \iint\limits_{00}^{ta} K_4[x,\ \xi,t,\alpha,m_{i-1}(x,\ \alpha)]\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\alpha, \tag{68}$$

$$n_i(x,t) = \Psi_4(x,t) + \iint\limits_{00}^{ta} K_4[x,\ \xi,t,\ \alpha,\ n_{i-1}(\xi,\ \alpha)]\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\alpha, \tag{69}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots),$$

satisface inegalitățile

$$m_i(x,\ t) \leqslant v(x,\ t) \leqslant n_i(x,\ t), \tag{70}$$

precum și relațiile la limită

$$\lim_{i\to\infty} m_i(x,\ t) = \lim_{i\to\infty} n_i(x,\ t) = v(x,t),\ (x,\ t) \in D. \tag{71}$$

Valabilitatea inegalităților (70) se demonstrează prin metoda inducției matematice, iar inegalitățile (71) rezultă din analiza relațiilor (70).

Observație. Și relațiile (28), (36) pot fi folosite pentru a se obține evaluări de soluții relative atît la problema (6)—(8), cît și la problema (7), (8), (17).

§ 4. CONCLUZII

Rezultatele obţinute ce pot fi extinse la spaţii cu mai multe dimensiuni, constituind un pas nou în studiul variatelor sisteme integro-diferenţiale care răspund nemijlocit la nevoile actuale ale fizicii şi tehnicii, prezintă un interes deosebit dacă se ţine seama de faptul că reflectă numeroase schematizări matematice ale problemelor de transport de particule, probleme referitoare la teoria matematică a undelor de şoc [28]—[30] ş.a.ş.a. Ele se leagă strîns, în particular, cu cercetări cu totul recente, referitoare la ecuaţii parabolice neliniare de forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (D(\theta)\, \theta) + A(x, y, z, t), \tag{72}$$

în care $D(\theta)$ este difuzivitatea şi $A(x, y, z, t)$ este un izvor sau un puţ, care se referă la variate procese ce includ într-însele interdifuziunea metalelor, conductibilitatea căldurii în metale şi scurgeri de apă în sol. În corespondenţă cu cazul unidimensional studiat mai sus, rezultatele obţinute se leagă îndeaproape de şirul de probleme de contur studiate de E. J. Scott [31], relative la ecuaţia

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha e^{\beta\theta} \frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{B}{x^2},\ x \neq 0 \tag{73}$$

în care, în corespondenţă cu inegalităţile $B > 0$ sau $B < 0$, avem de-a face cu un izvor sau un puţ.

BIBLIOGRAFIE

1. Л. В. ОВСЯННИКОВ, Т. И. ЗЕЛЕНЯК, *Советско-американский симпозиум математиков в Новосибирске*. Вестник Акад. Наук СССР, **II**, 93—96 (1963)
2. * * * *Les équations aux dérivées partielles*. Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique. *117*, Paris (1963).
3. WING G. MILTON, *An introduction to transport theory*. John Wiley and Sons, 1962.
4. M. PICONE, *Criteri sufficienti in generali problemi di Calcolo delle variazioni riguardanti integrali pluridimensionali d'ordine qualsivoglia nel vettore minimante a più componenti*. Atti della Accademia Naz. dei Lincei, Anno **CCCLX** (1963); Memorie. Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, **VII**, Sez. I (Mat., mecc., astron., geod., geofis.), *3*, 33—57 (1963).
5. R. JANCEL, TH. KAHAN, *Electrodynamique des Plasmas*. vol. I. *Processus physiques et méthodes mathématiques*. Dunod, Paris, 1963.
6. M. NICOLESCU, *Les fonctions polyharmoniques*. Hermann, Paris, 1936.
7. MAURO PICONE, Accademia Nazionale dei Lincei, XL, Pubblicazioni, 289—311, Roma, Annuario, 1961.
8. D. MANGERON, *Sur certains problèmes à la frontière pour les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*. C. R., Acad. Sci., Paris, **204**, 95—96; 544—546; 1022—1024; *Sopra un problema al contorno*... Rend. Accad. Sci. fis., mat. Napoli, **II**, *32*, 1—11 (1932).
9. M. NICOLESCU, *Asupra unor proprietăţi caracteristice de medie ale funcţiilor policalorice*. Comunic. Acad. R.P.R., **IV**, *11—12*, 551—554 (1954).

10. A. Rosenblatt, *Sur l'application de la méthode des approximations à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles et multiples.* C. R. Acad. Sci., Paris, **197**, 1278–1280 (1933).
11. M. Salvadori, *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. II, **V**, 51–72 (1936).
12. G. Stampacchia, *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali del tipo iperbolico.* Giorn. di Mat., **78**, *49*, s. IV, 81–96 (1948).
13. F. Manaresi, *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **XXIII**, 163–213 (1954).
14. Ю.М. Березанский, *О краевых задачах для общих дифференциальных операторов в частных производных.* Доклады Акад. наук СССР, **122**, *6*, 959—962, 1958.
15. Л.Е. Кривошеин, *Приближенные методы решения обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений.* Акад. наук Кирг. ССР, Фрунзе, 1962.
16. W. R. Gardner, M. S. Mayhugh, *Solutions and tests of the diffusion equation for the movement of water in the soil.* Soil science Soc. Amer. Proc., **22**, 197–201 (1958).
17. В. Н. Масленникова, *Об одном классе систем математической теории диффузии.* Материалы к совместному советско-американскому симпозиону по уравнениям с частными производными. Сиб. отд. АН СССР, Новосибирск, 1963, 7 стр. I.
18. Levin J. J., Nohel J. A., *On a system of integro-differential equations occuring in reactor dynamics.* J. Math. and Mech., **9**, *3*, 347–368 (1960).
19. D. Mangeron, *Asupra stabilității soluțiilor unor probleme de contur pentru o nouă clasă de ecuații integro-diferențiale cu derivata de ordin superior a lui Picone.* Com. Acad. R.P.R., **XIII**, 8, 665–670 (1963).
20. D. Mangeron, *O teoremă de existență și de unicitate a soluțiilor problemelor lui Dirichlet pentru o clasă de ecuații integro-diferențiale neliniare cu derivate parțiale.* Com. Acad. R.P.R., **XIII**, *12*, 1031–10 (1963).
21. D. Mangeron, *Risolubilità e struttura delle soluzioni dei problemi al contorno non omogenei di Goursat e di Dirichlet per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate totali d'ordine superiore.* Accademia Naz. dei Lincei, Rend. Cl. Sci., fis. mat. e nat., s. 8, **XXXIV**, *2*, 118–122 (1963).
22. D. Mangeron, L. E. Krivosein, *Valutazione degli errori commessi in alcuni metodi di calcolo numerico delle soluzioni di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali d'ordine superiore.* Accademia Naz. dei Lincei. Rend. Cl. Sci. fis. mat. e nat., s. 8, **XXXIV**, *2*, 123–129 (1963).
23. M. Picone, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica.* Annales Sci. Univ. de Jassy, I Section (Math., Phys., Chimie), **XXVI**, *1*, 183–232 (1940).
24. . * . *Второй Всесоюзный Съезд по теоретической и прикладной механике.* Аннотации докладов, Акад. Наук СССР, М. 1964.
25. M. Nicolescu, *Ecuația iterată a căldurii.* Studii și cercetări matematice, **V**, *3–4*, 243–332 (1954).
26. А. Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения математической физики*, ГИТТЛ, Москва, 1953.
27. Е. А. Барбашин, Л. П. Бисярина, *Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений.* Изв. высших учебных заведений. Математика, *3*, 3—14 (1963).
28. E. Carafoli, *Theoretical considerations on the lateral fluid jets.* Revue de méc. appl., **VII**, *6*, 1049–1062 (1962).
29. C. Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides.* Acad. R.P.R., București, Gauthier-Villars, Paris, 1960.
30. P. Germain, *L'équation de Bürgers et ses applications à la théorie des ondes de choc. Applications des équations non linéaires à la Physique théorique.* Réunions d'études et de mises au point tenues sous la présidence de Louis de Broglie. Ed. de la Revue d'Optique, Paris, 1962, 101–116.
31. E. J. Scott, *On the Non-linear One-Dimensional Diffusion Equation with a Source or Sink.* Bul. Inst. politehn. Iași, **X (XIV)**, s. n., *1–2* (1964).

STRUCTURI PSEUDOTOPOLOGICE. II

DE

ELEMÉR ROSINGER

III. PSEUDOTOPOLOGII ÎN SPAŢII VECTORIALE

§ 4. SPAŢII VECTORIALE PSEUDOTOPOLOGICE INDUSE ŞI IZOMORFE

1. PROPRIETĂŢI ALE SPAŢIILOR PSEUDOTOPOLOGICE INDUSE OARECARE

TEOREMA 1. *Fie* $E, E' \in \mathfrak{M}, f : E \to E', g : E' \to E \sum, \sum_1 \in PT(E)$ *ca* $\sum \leqslant \sum_1$; *atunci*

1) $\sum^f \leqslant (\sum_1)^f$;

2) $\sum_g \leqslant (\sum_1)_g$.

Demonstraţie. 1) Fie $\sum = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R, \mathfrak{D}, \mathfrak{I}, \mathfrak{K}_\tau)$.

Notăm

$$\sigma(\textstyle\sum) = \left\{ \begin{array}{r|l} \textstyle\sum' = (\mathfrak{F}', (\mathfrak{F}'_x \mid x' \in E'), R', \mathfrak{D}', \mathfrak{I}', \mathfrak{K}_\tau') & 1)\ f(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}' \\ & 2)\ (\forall)\, x \in E: \\ & \quad f(\mathfrak{F}_x) \subseteq \mathfrak{F}'_{f(x)} \\ & 3)\ (\forall)\, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}, R(\mathcal{F}, \mathcal{G}): \\ \in PT(E') & \quad R'(f(\mathcal{F}), f(\mathcal{G})) \\ & 4)\ f^{-1}(\mathfrak{D}') \subseteq \mathfrak{D} \\ & 5)\ f^{-1}(\mathfrak{I}') \subseteq \mathfrak{I} \\ & 6)\ f(\mathfrak{K}_\tau) \subseteq \mathfrak{K}'_\tau \end{array} \right\};$$

pentru $\sum_1$ notăm analog $\sigma(\sum_1)$.
Atunci $\sigma(\sum) \subseteq \sigma(\sum_1)$ deoarece $\sum \leqslant \sum_1$
deci $\sum^f = \sup \sigma(\sum) \leqslant \sup \sigma(\sum_1) = (\sum_1)^f$.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 9, P. 1085–1110, BUCUREŞTI, 1964

2) Pentru $\sum$ notăm

$$\tau(\sum) = \left\{ \begin{array}{r|l} \sum' = (\mathfrak{F}', (\mathfrak{F}'_{x'} \mid x' \in E'), R', \mathfrak{D}', \mathfrak{J}', \mathfrak{K}_z') & 1)\ g(\mathfrak{F}') \subseteq \mathfrak{F} \\ \in PT(E') & 2)\ (\forall)\, x' \in E' : \\ & \quad g(\mathfrak{F}'_{x'}) \subseteq \mathfrak{F}_{g(x')} \\ & 3)\ (\forall)\, \mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}', R'(\mathcal{F}', \mathcal{G}') : \\ & \quad R(g(\mathcal{F}'), g(\mathcal{G}')) \\ & 4)\ g^{-1}(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{D}' \\ & 5)\ g^{-1}(\mathfrak{J}) \subseteq \mathfrak{J}' \\ & 6)\ g\ (\mathfrak{K}_z') \subseteq \mathfrak{K}_z \end{array} \right\};$$

pentru $\sum_1$ notăm analog $\tau(\sum_1)$.
Atunci $\tau(\sum_1) \subseteq \tau(\sum)$ deoarece $\Sigma \leqslant \sum_1$,
deci $\sum_g = \inf \tau(\sum) \leqslant \inf \tau(\sum_1) = (\sum_1)_g$.

COROLARUL 1. *Fie* $E \in \mathfrak{M}, E' \subseteq E, E' \in \mathfrak{M}, \sum, \sum_1 \in PT(E)$ *ca* $\sum \leqslant \sum_1$; *atunci* $\sum|_{E'} \leqslant \sum_1|_{E'}$.

Demonstrație. Fie $g : E' \to E$ ca $g(x) = x$;
atunci $\sum|_{E'} = \sum_g \leqslant (\sum_1)_g = \sum_1|_{E'}$.

COROLARUL 2. *Fie* $E, E' \in \mathfrak{M}, f : E \to E', \sum \in PT(E), A \subseteq E, A \in \mathfrak{M}$; *atunci*

$$(\sum^f)|_{f(A)} \leqslant (\sum|_A)^{f\,A}|_{f(A)}$$

Demonstrație. Fie $\sum = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R, \mathfrak{D}, \mathfrak{J}, \mathfrak{K}_z)$

$$\sum^f = (\mathfrak{F}^f, (\mathfrak{F}^f_{x'} \mid x' \in E'), R^f, \mathfrak{D}^f, \mathfrak{J}^f, \mathfrak{K}_z^f)$$

$$\sum|_A = (\mathfrak{F}_A, (\mathfrak{F}_{Ax} \mid x \in A), R_A, \mathfrak{D}_A, \mathfrak{J}_A, \mathfrak{K}_{zA});$$

atunci $(\sum|_A)^{f/A} = (\mathfrak{F}', (\mathfrak{F}'_{x'} \mid x' \in E'), R', \mathfrak{D}', \mathfrak{J}', \mathfrak{K}_z')$, unde

1) $\mathfrak{F}' = f(\mathfrak{F}_A) \cup \{\mathfrak{U}_{x'} \mid x' \in E' - f(A)\} =$
$= \{f(\mathcal{F} \cap \mathfrak{P}(A)) \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{F} \cap \underset{A}{\mathrm{FIL}}(E)\} \cup \{\mathfrak{U}_{x'} \mid x' \in E' - f(A)\}$

2) $(\forall)\, x' \in E'$:

$$\mathfrak{F}'_{x'} = \left[\begin{array}{l} \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(x')} f(\mathfrak{F}_{Ax}) \Leftarrow x' \in f(A) \\ \{\mathfrak{U}_{x'}\} \Leftarrow x' \in E' - f(A) \end{array} \right. =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(x')} \{f(\mathcal{F} \cap \mathfrak{P}(A)) \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x \cap \underset{A}{\mathrm{FIL}}(E)\} \Leftarrow x' \in f(A) \\ \{\mathfrak{U}_{x'}\} \Leftarrow x' \in E' - f(A) \end{array} \right.$$

3) $(\forall)\, \mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}'$:

$$R'(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} 3.1)\ (\exists)\, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F} \cap \underset{A}{\mathrm{FIL}}(E) : \\ \qquad \mathcal{F}' = f(\mathcal{F} \cap \mathfrak{P}(A)), \mathcal{G}' = f(\mathcal{G} \cap \mathfrak{P}(A)) \\ \qquad R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ \text{sau} \\ 3.2)\ (\exists)\, x' \in E' : \mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}'_{x'} \end{array} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&4)\ \mathfrak{D}' = \{D' \subseteq E' \mid (\exists)\, D \in \mathfrak{D} : f^{-1}(D' \cap f(A)) = D \cap A\}\\
&5)\ \mathfrak{I}' = \{I' \subseteq E' \mid (\exists)\, I \in \mathfrak{I} : f^{-1}(I' \cap f(A)) = I \cap A\}\\
&6)\ \mathfrak{K}'_{\tau} = f(\mathfrak{K}_{\tau_A}) \cup \{K' \subseteq E' \mid K' \text{ finită}\} =\\
&\qquad = \{f(K \cap A) \mid K \in \mathfrak{K}_{\tau}\} \cup \{K' \subseteq E' \mid K' \text{ finită}\}
\end{aligned}
$$

deci

$$\Sigma^{f} \leqslant (\Sigma|_{A})^{f/A}$$

de unde, conform cu corolarul 1, rezultă că

$$(\Sigma^{f})|_{f(A)} \leqslant (\Sigma|_{A})^{f|A}|_{f(A)}\,.$$

TEOREMA 2. *Fie* $E, E', E'' \in \mathfrak{M}, f : E \to E', f' : E' \to E'', g : E' \to E$, $g' : E'' \to E'$, $\Sigma \in PT(E)$; *atunci*

I) $(\Sigma^{f})^{f'} = \Sigma^{(f' \circ f)}$,

II) $(\Sigma_{g})_{g'} = \Sigma_{(g' \circ g)}$.

Demonstrație. I) Fie $\Sigma = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_{x} \mid x \in E), R, \mathfrak{D}, \mathfrak{I}, \mathfrak{K}_{\tau})$

$$\Sigma^{f} = (\mathfrak{F}^{f}, (\mathfrak{F}^{f}_{x'} \mid x' \in E'), R^{f}, \mathfrak{D}^{f}, \mathfrak{I}^{f}, \mathfrak{K}_{\tau}{}^{f}).$$

Notăm

$$
\sigma'' = \left\{ \begin{array}{r|l}
 & 1)\ f'(\mathfrak{F}^{f}) \subseteq \mathfrak{F}'' \\
 & 2)\ (\forall) x' \in E' : f'(\mathfrak{F}^{f}_{x'}) \subseteq \mathfrak{F}''_{f'(x')} \\
 & 3)\ (\forall) \mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}^{f}, R^{f}(\mathcal{F}', \mathcal{G}') : \\
\Sigma'' = (\mathfrak{F}'', (\mathfrak{F}''_{x''} \mid x'' \in E''), R'', \mathfrak{D}'', \mathfrak{I}'', & \qquad R''(f'(\mathcal{F}'), f'(\mathcal{G}')) \\
\mathfrak{K}_{\tau}{}'') \in PT(E'') & 4)\ (f')^{-1}(\mathfrak{D}'') \subseteq \mathfrak{D}^{f} \\
 & 5)\ (f')^{-1}(\mathfrak{I}'') \subseteq \mathfrak{I}^{f} \\
 & 6)\ f'(\mathfrak{K}_{\tau}{}^{f}) \subseteq \mathfrak{K}_{\tau}{}''
\end{array} \right\}
$$

$$
\sigma_1'' = \left\{ \begin{array}{r|l}
 & 1)\ (f' \circ f)(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}'' \\
 & 2)\ (\forall) x \in E : (f' \circ f)(\mathfrak{F}_{x}) \subseteq \mathfrak{F}''_{(f' \circ f)(x)} \\
 & 3)\ (\forall) \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}, R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) : \\
\Sigma'' = (\mathfrak{F}'', (\mathfrak{F}''_{x''} \mid x'' \in E''), R'', \mathfrak{D}'', \mathfrak{I}'', & \qquad R''((f' \circ f)(\mathcal{F}), (f' \circ f)(\mathcal{G})) \\
\mathcal{K}_{\tau}{}'') \in PT(E'') & 4)\ (f' \circ f)^{-1}(\mathfrak{D}'') \subseteq \mathfrak{D} \\
 & 5)\ (f' \circ f)^{-1}(\mathfrak{I}'') \subseteq \mathfrak{I} \\
 & 6)\ (f' \circ f)(\mathfrak{K}_{\tau}) \subseteq \mathfrak{K}_{\tau}{}''
\end{array} \right\}
$$

atunci $\sigma'' \subseteq \sigma_1''$ deoarece :

Fie $\Sigma'' \in \sigma''$.

Atunci

1) conform definiției lui Σ^{f} avem

$$(f' \circ f)(\mathfrak{F}) \subseteq f'(\mathfrak{F}^{f})$$

dar $f'(\mathfrak{F}^{f}) \subseteq \mathfrak{F}''$ căci $\Sigma'' \in \sigma''$;

2) fie $x \in E$; atunci, conform definiției lui Σ^f, are loc relația

$$(f' \circ f)(\mathfrak{F}_x) \subseteq f'(\mathfrak{F}^f_{f(x)})$$

dar $f'(\mathfrak{F}^f_{f(x)}) \subseteq \mathfrak{F}''_{(f' \circ f)(x)}$ căci $\Sigma'' \in \sigma''$;

3) fie $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}$ ca $R(\mathcal{F}, \mathcal{G})$; atunci, conform definiției lui Σ^f, avem

$$f(\mathcal{F}),\ f(\mathcal{G}) \in \mathfrak{F}^f,\ R^f(f(\mathcal{F}),\ f(\mathcal{G}))$$

dar $R''((f' \circ f)(\mathcal{F}),\ (f' \circ f)(\mathcal{G}))$ căci $\Sigma'' \in \sigma''$;

4) $(f' \circ f)^{-1}(\mathfrak{D}'') \subseteq f^{-1}((f')^{-1}(\mathfrak{D}'')) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{D}^f)$ deoarece $\Sigma'' \in \sigma''$ iar $f^{-1}(\mathfrak{D}^f) \subseteq \mathfrak{D}$ conform definiției lui Σ^f;

5) $(f' \circ f)^{-1}(\mathfrak{J}'') \subseteq f^{-1}((f')^{-1}(\mathfrak{J}'')) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{J}^f)$ căci $\Sigma'' \in \sigma''$ iar $f^{-1}(\mathfrak{J}^f) \subseteq \mathfrak{J}$ conform definiției lui Σ^f;

6) $(f' \circ f)(\mathfrak{H}_z) \subseteq f'(f(\mathfrak{H}_z)) \subseteq f'(\mathfrak{H}_z{}^f)$

conform definiției lui Σ^f iar $f'(\mathfrak{H}_z{}^f) \subseteq \mathfrak{H}_z{}''$ căci $\Sigma'' \in \sigma''$ astfel că $\Sigma'' \in \sigma_1''$.

Dar are loc și incluziunea reciprocă $\sigma_1'' \subseteq \sigma''$, deoarece:

fie $\Sigma'' \in \sigma_1''$.

Atunci

1) $f'(\mathfrak{F}^f) \subseteq \mathfrak{F}''$ căci avem $f'(f(\mathfrak{F})) \subseteq \mathfrak{F}''$ deoarece $\Sigma'' \in \sigma_1''$ iar $\mathfrak{F}^f = f(\mathfrak{F}) \cup \{\mathfrak{U}_{x'} \mid x' \in E' - f(E)\}$;

2) fie $x' \in E'$; atunci $f'(\mathfrak{F}^f_{x'}) \subseteq \mathfrak{F}''_{f'(x')}$ deoarece:

fie $x' \in f(E)$;

atunci $\mathfrak{F}^f_{x'} = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(x')} f(\mathfrak{F}_x)$

iar $f'(f(\mathfrak{F}_x)) \subseteq \mathfrak{F}''_{f'(x')}$ căci $\Sigma'' \in \sigma_1''$;

fie acum $x' \in E' - f(E)$;

atunci $\mathfrak{F}^f_{x'} = \{\mathfrak{U}_{x'}\}$

deci $f'(\mathfrak{F}^f_{x'}) = \{\mathfrak{U}_{f'(x')}\} \subseteq \mathfrak{F}''_{f'(x')}$;

3) fie $\mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}^f$ ca $R^f(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$

dacă $(\exists)\ \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}$:

$\mathcal{F}' = f(\mathcal{F}), \mathcal{G}' = f(\mathcal{G})$

$R(\mathcal{F}, \mathcal{G})$;

atunci $R''(f'(\mathcal{F}'), f'(\mathcal{G}'))$ căci $\Sigma'' \in \sigma_1''$; dacă însă $(\exists)\ x' \in E'$: $\mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathcal{F}^f_{x'}$, atunci conform cu 2)

$$f'(\mathcal{F}'),\ f'(\mathcal{G}') \in \mathfrak{F}''_{f''(x')}$$

de unde $R'(f'(\mathcal{F}'), f'(\mathcal{G}'))$;

4) avem $f^{-1}((f')^{-1}(\mathfrak{D}'')) \subseteq \mathfrak{D}$ căci $\sum'' \in \sigma_1''$ deci conform definiției lui $\mathfrak{D}^f$ rezultă că

$$(f')^{-1}(\mathfrak{D}'') \subseteq \mathfrak{D}^f;$$

5) avem $f^{-1}((f')^{-1}(\mathcal{J}'')) \subseteq \mathcal{J}$ căci $\sum'' \in \sigma_1''$ deci conform definiției lui $\mathcal{J}^f$ rezultă că

$$(f')^{-1}(\mathcal{J}'') \subseteq \mathcal{J}^f;$$

6) avem $\mathcal{K}_\tau^f = f(\mathcal{K}_\tau) \cup \{K' \subseteq E' \mid K' \text{ finită}\}$ deci $f'(\mathcal{K}_\tau^f) \subseteq f'(f(\mathcal{K}_\tau)) \cup \{K'' \subseteq E'' \mid K'' \text{ finită}\}$ dar $f'(f(\mathcal{K}_\tau)) \subseteq \mathcal{K}_\tau''$ căci $\sum'' \in \sigma_1''$ deci $f'(\mathcal{K}_\tau^f) \subseteq \mathcal{K}_\tau''$, deci în definitiv $\sum'' \in \sigma''$; comparînd cele două inclusiuni rezultă $\sigma'' = \sigma_1''$ de unde $(\sum^f)^{f'} = \sup \sigma'' = \sup \sigma_1'' = \sum^{(f' \circ f)}$.

II) Se demonstrează analog.

2. SPAŢII VECTORIALE PSEUDOTOPOLOGICE INDUSE ŞI IZOMORFE

Se va expune mai întîi o definiție particulară pentru spațiile vectoriale pseudotopologice induse urmînd ca definiția generală să fie expusă la punctul 3.

DEFINIŢIA 1. *Fie E, E′ spații vectoriale peste corpul K, f : E→E′ o aplicație liniară, pe, iar g : E′ → E o aplicație liniară biunivocă, fie* $\sum \in \mathrm{PTV}(E)$.

Definim

$$\sum{}^f = \sup \left\{ \sum{}' \in \mathrm{PTV}(E') \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \pi(\sum{}') \leqslant (\pi(\sum))^f \\ 2)\ f(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}' \end{array} \right\}$$

$$\sum{}_g = \inf \left\{ \sum{}' \in \mathrm{PTV}(E') \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ (\pi(\sum))_g \leqslant \pi(\sum{}') \\ 2)\ g(\mathcal{M}') \subseteq \mathcal{M} \end{array} \right\}$$

unde $\mathcal{M}$ și $\mathcal{M}'$ reprezintă mulțimile mărginite în $\sum$ respectiv $\sum'$.

Numim pe $\sum^f$ *spațiu vectorial pseudotopologic indus pe E′ prin aplicația f de către* $\sum$; *numim* $\sum_g$ *spațiu vectorial pseudotopologic indus pe E′ prin g de către* $\sum$. *Dacă E′ este un subspațiu vectorial a lui E și g este aplicația identică a lui E′ în E, notăm* $\sum|_{E'} = \sum_g$ *și-l numim spațiu vectorial pseudotopologic indus de* $\sum$ *pe E′.*

PROPOZIŢIA 1. *În condiţiile de la definiţia 1 dacă*

$$\sum = (\mathfrak{F},\ (\mathfrak{F}_x \mid x \in E),\ R,\ \mathfrak{D}, \mathfrak{I}, \mathfrak{Kr},\ \mathcal{M}),$$

atunci

1) $\sum^f = (\mathfrak{F}^f, (\mathfrak{F}^f_x \mid x' \in E'), R^f, \mathfrak{D}^f, \mathfrak{I}^f, \mathfrak{Kr}^f, \mathcal{M}^f) \in \mathrm{PTV}\,(E')$,

unde

1.1) $\mathfrak{F}^f = f(\mathfrak{F})$;

1.2) $(\forall)\ x' \in E'$:

$$\mathfrak{F}^f_{x'} = \bigcup_{x \in f^{-1}(x')} f(\mathfrak{F}_x);$$

1.3) $(\forall)\ \mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}^f$:

$$R^f(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} 1.3.1)\ (\exists)\, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F} : \\ \qquad\qquad \mathcal{F}' = f(\mathcal{F}), \mathcal{G}' = f(\mathcal{G}) \\ \qquad\qquad R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ \text{sau} \\ 1.3.2)\ \mathcal{F}' - \mathcal{G}' \in f(\mathfrak{F}_0) \end{array} \right);$$

1.4) $\mathfrak{D}^f = \{D' \subseteq E' \mid f^{-1}(D') \in \mathfrak{D}\}$;

1.5) $\mathfrak{I}^f = \{I' \subseteq E' \mid f^{-1}(I') \in \mathfrak{I}\}$;

1.6) $\mathfrak{Kr}^f = f(\mathfrak{Kr})$;

1.7) $\mathcal{M}^f = f(\mathcal{M})$;

2) $\sum_g = (\mathfrak{F}_g, (\mathfrak{F}_{gx'} \mid x' \in E'), R_g, \mathfrak{D}_g, \mathfrak{I}_g, \mathfrak{Kr}_g, \mathcal{M}_g) \in \mathrm{PTV}\,(E')$

unde

2.1) $\mathfrak{F}_g = \{\mathcal{F}' \in \mathrm{FIL}\,(E') \mid g(\mathcal{F}') \in \mathfrak{F}\}$;

2.2) $(\forall)\ x' \in E'$:

$$\mathfrak{F}_{gx'} = \{\mathcal{F}' \in \mathrm{FIL}\,(E') \mid g(\mathcal{F}') \in \mathfrak{F}_{g(x')}\};$$

2.3) $(\forall)\ \mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}_g$:

$$R_g(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \Leftrightarrow R(g(\mathcal{F}'), g(\mathcal{G}'));$$

2.4) $\mathfrak{D}_g = g^{-1}(\mathfrak{D})$;

2.5) $\mathfrak{I}_g = g^{-1}(\mathfrak{I})$;

2.6) $\mathfrak{Kr}_g = \{K' \subseteq E' \mid g(K') \in \mathfrak{Kr}\}$;

2.7) $\mathcal{M}_g = \{M' \in E' \mid g(M') \in \mathcal{M}\}$;

3) *dacă E' este un subspaţiu vectorial a lui E atunci*

$$\sum|_{E'} = (\mathfrak{F}|_{E'}, (\mathfrak{F}|_{E'x} \mid x \in E'), R|_{E'}, \mathfrak{D}|_{E'}, \mathfrak{I}|_{E'}, \mathfrak{Kr}|_{E'}, \mathcal{M}|_{E'}) \in \mathrm{PTV}\,(E'),$$

unde

3.1) $\mathfrak{F}|_{E'} = \{\mathcal{F} \cap \mathfrak{P}(E') \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{F} \cap \underset{E'}{\mathrm{FIL}}\,(E)\}$;

3.2) $(\forall)\ x \in E'$:

$$\mathfrak{F}|_{E'x} = \{\mathcal{F} \cap \mathfrak{P}(E') \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x \cap \underset{E'}{\mathrm{FIL}}(E)\};$$

3.3) $(\forall)\ \mathcal{F}'\ \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}|_{E'}$:

$$R|_{E'}(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \Leftrightarrow R(\underset{E}{\mathrm{fil}}\ \mathcal{F}', \underset{E}{\mathrm{fil}}\ \mathcal{G}');$$

3.4) $\mathfrak{D}|_{E'} = \{D \cap E' \mid D \in \mathfrak{D}\}$;

3.5) $\mathfrak{I}|_{E'} = \{I \cap E' \mid I \in \mathfrak{I}\}$;

3.6) $\mathfrak{K}_\tau|_{E'} = \mathfrak{K}_\tau \cap \mathfrak{P}(E') = \{K \cap E' \mid K \in \mathfrak{K}_\tau\}$;

3.7) $\mathcal{M}|_{E'} = \mathcal{M} \cap \mathfrak{P}(E') = \{M \cap E' \mid M \in \mathcal{M}\}$.

Demonstrație. 1) Fie $\sum_0'$ structura formată cu expresiile din partea dreaptă a relațiilor 1.1) ... 1.7).

Atunci

a) $\pi(\sum_0') \in PT\ (E')$ deoarece :

(PT1) și (PT2) se verifică evident,

(PT3)

Fie $x' \in E'$, $\mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(x')} f(\mathfrak{F}_x)$;

atunci $(\exists)\ y, z \in E$, $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_y$, $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_z$:

$$\mathcal{F}' = f(\mathcal{F}),\ \mathcal{G}' = f(\mathcal{G})$$
$$x' = f(y) = f(z).$$

Fie $\mathcal{H} = \mathcal{G} + \mathcal{U}_{y-z}$;

atunci $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}_y$

și $f(\mathcal{H}) = f(\mathcal{G}) + \mathcal{U}_{f(y-z)} = f(\mathcal{G}) + \mathcal{U}_0 = f(\mathcal{G}) = \mathcal{G}'$

deci $\mathcal{F}' = f(\mathcal{F})$, $\mathcal{G}' = f(\mathcal{H})$

iar $R(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ deoarece $\mathcal{F}, \mathcal{H} \in \mathfrak{F}_y$

deci se verifică 1.3.1);

(PT4)

Fie $x' \in E'$, $D' \subseteq E'$, $D = f^{-1}(D') \in \mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}' \in \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(x')} f(\mathfrak{F}) \cap \underset{E'-D'}{\mathrm{FIL}}(E')$;

fie $x \in E$, $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x$ ca $\mathcal{F}' = f(\mathcal{F})$, $x' = f(x)$ dar atunci $\mathcal{F} \in \underset{E-D}{\mathrm{FIL}}(E)$ căci

fie $F' \in \mathcal{F}'$ ca $F' \cap D' = \emptyset$

fie $F \in \mathcal{F}$ ca $f(F) \subseteq F'$

atunci $F \cap D = F \cap f^{-1}(D') = \emptyset$

deci $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x \cap \underset{E-D}{\mathrm{FIL}}(\mathrm{E})$

deci $x \notin D$ căci $D \in \mathfrak{D}$

de unde $x' = f(x) \notin D'$;

(PT5) se verifică analog;

(PT6)

Fie $K \in \mathcal{K}_c$, $\mathcal{U}' \in U\,\mathrm{FIL}\,(f(K))$;
fie $\mathcal{F} \in \mathrm{FIL}\,(K)$ ca $\mathcal{U}' = f|_K(\mathcal{F})$;
fie $\mathcal{U} \in U\,\mathrm{FIL}\,(K)$ ca $\mathcal{F} \leqslant \mathcal{U}$;
atunci $\underset{E}{\mathrm{fil}}\ \mathcal{U} \in \mathfrak{F}$ căci $K \in \mathcal{K}_c$;
dar $f|_K(\mathcal{U}) = \mathcal{U}'$ căci $\mathcal{U}' \in U\,\mathrm{FIL}\,(f(K))$
deci $\underset{E'}{\mathrm{fil}}\ \mathcal{U}' = \underset{E'}{\mathrm{fil}}\ (f|_K(\mathcal{U})) = f(\mathcal{U}) \in f(\mathfrak{F})$.

b) $\sum_0' \in \mathrm{PTV}\ (E')$ deoarece
(PTV 1.1) şi (PTV 1.2) se verifică evident;
(PTV 1.3)

Fie $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}' \in f(\mathfrak{F})$ ca $\mathcal{F}' - \mathcal{G}' \in \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(0)} f(\mathfrak{F}_x)$;
atunci $(\exists)\, x \in E$, $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}_x$:

$$\mathcal{F}' - \mathcal{G}' \in f(\mathcal{H})$$

$$f(x) = 0$$

Fie $\mathcal{L} = \mathcal{H} - \mathcal{U}_x$;
atunci $\mathcal{L} \in \mathfrak{F}_0$
şi $f(\mathcal{L}) = f(\mathcal{H}) - \mathcal{U}_{f(x)} = f(\mathcal{H}) - \mathcal{U}_0 = f(\mathcal{H})$
deci $\mathcal{F}' - \mathcal{G}' = f(\mathcal{L}) \in f(\mathfrak{F}_0)$
deci se verifică 1.3.2);
(PTV 1.4) şi (PTV 2.1) se verifică evident;
(PTV 2.2)

Fie $M \in \mathcal{M}$, $\mathcal{F}' \in \underset{f(M)}{\mathrm{FIL}}\ (E')$, $\varphi' : E' \to K$ ca $\lim\limits_{\mathcal{F}'} \varphi' = 0$;
atunci $(\exists)\, \mathcal{F} \in \underset{M}{\mathrm{FIL}}\ (E) : \mathcal{F}' = f(\mathcal{F})$
Fie $\varphi : E \to K$ ca $\varphi(x) = \varphi'(f(x))$;
atunci $\lim\limits_{\mathcal{F}} \varphi = 0$
deci $\varphi . \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0$ căci $M \in \mathcal{M}$

$$
\begin{aligned}
\text{dar } \varphi' . \mathcal{F}' &= \underset{E'}{\mathrm{fil}}\ \{\{\varphi'(x') \cdot x' \mid x' \in F'\} \mid F' \in \mathcal{F}'\} = \\
&= \underset{E'}{\mathrm{fil}}\ \{\{\varphi'(f(x)) \cdot f(x) \mid x \in F\} \mid F \in \mathcal{F}\} = \\
&= \underset{E'}{\mathrm{fil}}\ \{\{\varphi(x) \cdot f(x) \mid x \in F\} \mid F \in \mathcal{F}\} = \\
&= \underset{E'}{\mathrm{fil}}\ \{\{f(\varphi(x) \cdot x) \mid x \in F\} \mid F \in \mathcal{F}\} = \\
&= f(\underset{E}{\mathrm{fil}}\ \{\{\varphi(x) \cdot x \mid x \in F\} \mid F \in \mathcal{F}\}) = \\
&= f(\varphi \cdot \mathcal{F}) \in f(\mathfrak{F}_0).
\end{aligned}
$$

c) $\pi(\sum_0') \leqslant (\pi(\sum))^f$ conform propoziției 1 din Cap. I, § 4, pct. 1, deci $\sum_0'$ verifică condițiile 1) și 2) din definiția lui $\sum^f$ deci $\sum_0' \leqslant \sum^f$

d) Fie $\sum' \in$ PTV (E') care verifică condițiile 1) și 2) din definiția lui $\sum^f$; atunci conform propoziției 1 din Cap. I, § 4, pct. 1, rezultă că $\sum' \leqslant \sum_0'$
deci în definitiv, din c) și d) rezultă că $\sum^f = \sum_0'$;

2) Fie $\sum_1'$ structura formată cu expresiile din partea dreaptă a relațiilor 2.1) ... 2.7)

Atunci

a) $\pi(\sum_1') \in \mathrm{PT}\ (E')$ deoarece conform propoziției 1 din Cap. I, § 4, pct. 1, rezultă că

$$\pi(\textstyle\sum_1') = (\pi(\sum))_g;$$

b) $\sum_1' \in \mathrm{PTV}\,(E')$ deoarece
(PTV 1.1) și (PTV 1.2) se verifică evident;
(PTV 1.3)
Fie $\mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathrm{FIL}\ (E')$
ca $g(\mathcal{F}'), g(\mathcal{G}') \in \mathfrak{F}$, $g(\mathcal{F}' - \mathcal{G}') \in \mathfrak{F}_0$
dar $g(\mathcal{F}' - \mathcal{G}') = g(\mathcal{F}') - g(\mathcal{G}')$
deci $g(\mathcal{F}') - g(\mathcal{G}') \in \mathfrak{F}_0$
de unde $R(g(\mathcal{F}'), g(\mathcal{G}'))$;
(PTV 1.4) și (PTV 3.1) se verifică evident;
(PTV 2.2)
Fie $M' \subseteq E'$ ca $g(M') \in \mathcal{M}$
fie $\mathcal{F}' \in \underset{M'}{\mathrm{FIL}}\ (E')$, $\varphi' : E' \to K$ ca $\lim\limits_{\mathcal{F}'} \varphi' = 0$;
atunci $\mathcal{F} = g(\mathcal{F}') \in \underset{g(M')}{\mathrm{FIL}}\ (E)$;
fie $\varphi : E \to K$
ca $(\forall)\, x \in g(E') : \varphi(x) = \varphi'(g^{-1}(x))$;
acest lucru e posibil deoarece g este biunivocă,
atunci $\lim\limits_{\mathcal{F}} \varphi = 0$
deci $\varphi \cdot \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0$ deoarece $g(M') \in \mathcal{M}$
dar $g(\varphi' . \mathcal{F}') = \underset{E}{\mathrm{fil}}\ \{\{g(\varphi'(x') \cdot x') \mid x' \in F'\} \mid F' \in \mathcal{F}'\} =$
$= \underset{E}{\mathrm{fil}}\ \{\{\varphi'(x') \cdot g(x') \mid x' \in F'\} \mid F' \in \mathcal{F}'\} =$
$= \underset{E}{\mathrm{fil}}\ \{\{\varphi'(g^{-1}(x)) \cdot x \mid x \in F \cap g(E)\} \mid F \in \mathcal{F}\} =$
$= \underset{E}{\mathrm{fil}}\ \{\{\varphi(x) \cdot x \mid x \in F \cap g(E)\} \mid F \in \mathcal{F}\} =$
$= \varphi \cdot \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0$.

c) După cum am văzut, $(\pi(\sum))_g = \pi(\sum_1')$, deci $\sum_1'$ verifică condițiile 1) și 2) din definiția lui $\sum_g$ deci $\sum_1' \leqslant \sum_g$.

d) Fie $\Sigma' \in \mathrm{PTV}\,(E')$ care verifică condițiile 1) și 2) din definiția lui Σ_g, atunci evident $\Sigma' \leqslant \Sigma_1'$, deci $\Sigma_g \leqslant \Sigma_1'$.
Astfel, în definitiv, din c) și d) rezultă că $\Sigma_g = \Sigma_1'$; 3) rezultă din 2).

Din demonstrația pentru propoziția de sus rezultă și

COROLARUL 3. În condițiile de la definiția 1 avem

1) $\pi(\Sigma^f) \leqslant (\pi(\Sigma))^f$
$f(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^f$

iar dacă $(\pi(\Sigma))^f = (\mathfrak{F}', (\mathfrak{F}'_{x'} \mid x' \in E'), R', \mathfrak{D}', \mathcal{I}', \mathfrak{K}_z')$, atunci

1.1) $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}^f$
1.2) $(\forall)\ x' \in E' : \mathfrak{F}'_{x'} = \mathfrak{F}^f_{x'}$
1.3) $(\forall)\ \mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}' = \mathfrak{F}^f$:
$R'(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \Rightarrow R^f(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$
1.4) $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}^f$
1.5) $\mathcal{I}' = \mathcal{I}^f$
1.6) $\mathfrak{K}_z' = \mathfrak{K}_z^f$
2) $\pi(\Sigma_g) = (\pi(\Sigma))_g$
$g(\mathcal{M}_g) \subseteq \mathcal{M}$

3) Dacă E' este subspațiu vectorial a lui E, atunci

$$\pi(\Sigma|_{E'}) = (\pi(\Sigma))|_{E'}$$

$$\mathcal{M}|_{E'} = \mathcal{M} \cap \mathfrak{P}(E') = \{M \cap E' \mid M \in \mathcal{M}\}.$$

Observația 1. Fie E, E' spații vectoriale peste corpul K, $f : E \to E'$ o aplicație liniară, biunivocă, pe, fie $\Sigma \in PTV(E)$, $\Sigma' \in PTV(E')$, atunci, conform definiției 1, au sens spațiile vectoriale pseudotopologice $\Sigma^f \in PTV(E')$, $(\Sigma')_f \in PTV(E)$.

DEFINIȚIA 2. *Fie E, E' spații vectoriale peste corpul K, $\Sigma \in PTV(E)$ și $\Sigma' \in PTV(E')$. Spunem că Σ și Σ' sînt izomorfe numai dacă:*

$(\exists)$ f : $E \to E'$ *liniară, biunivocă, pe*:

$$\Sigma' = \Sigma^f.$$

În acest caz numim aplicația f izomorfism între Σ și Σ'.

PROPOZIȚIA 2. *În condițiile de la definiția 2, dacă f este o aplicație liniară, biunivocă, pe, atunci*

1) $\Sigma^f = \Sigma_{f^{-1}} = (f(\mathfrak{F}), (f(\mathfrak{F}_x) \mid x \in E), R \circ (f^{-1}, f^{-1}), f(\mathfrak{D}), f(\mathcal{I}), f(\mathfrak{K}_z), f(\mathcal{M}))$

2) $(\Sigma')_f = (\Sigma')^{f^{-1}} = (f^{-1}(\mathfrak{F}'), (f^{-1}(\mathfrak{F}^1_{x'}) \mid x' \in E'), R' \circ (f, f), f^{-1}(\mathfrak{D}'), f^{-1}(\mathcal{I}'), f^{-1}(\mathfrak{K}_z'), f^{-1}(\mathcal{M}'))$.

Demonstrația rezultă din punctele 1) și 2) ale propoziției 1.

TEOREMA 3. *În condițiile de la definiția 2, aplicația liniară, biunivocă, pe $f : E \to E'$ este un izomorfism între Σ și Σ' numai dacă are loc una din relațiile :*

1) $\Sigma = (\Sigma')_f$
2) $\Sigma = (\Sigma')^{f^{-1}}$
3) $\Sigma' = \Sigma_{f^{-1}}$.

În acest caz au loc și relațiile

4) $(\Sigma^f)_f = \Sigma'$,
5) $((\Sigma')_f)^f = \Sigma$.

Demonstrație. Punctele 1), 2) și 3) rezultă din propoziția 2 ; pentru a demonstra 4) și 5) observăm că

$$\Sigma^f = \Sigma'$$

deci

$$(\Sigma^f)_f = (\Sigma')_f = \Sigma$$

iar

$$(\Sigma')_f = \Sigma$$

deci

$$((\Sigma')_f)^f = \Sigma^f = \Sigma'.$$

PROPOZIȚIA 3. *În condițiile de la definiția 1 fie $\Sigma_1 \in PTV\ (E)$ ca $\Sigma \leqslant \Sigma_1$; atunci*

1) $\Sigma^f \leqslant (\Sigma_1)^f$,
2) $\Sigma_g \leqslant (\Sigma_1)_g$.

Demonstrația este imediată.

3. SPAȚII VECTORIALE PSEUDOTOPOLOGICE INDUSE

Considerațiile următoare au drept punct de plecare următoarea

LEMĂ. *Fie X, Y spații vectoriale peste corpul K, $h : X \to Y$ o aplicație liniară. Notăm cu ι_h aplicația canonică*

$$\mathring{\iota}_h : X \longrightarrow X/\ker h$$

notăm cu $\dot{h}$ aplicația

$$X/\ker h \ni \dot{x} \longrightarrow h\,(x) \in Y$$

atunci

1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathring{\iota}_h"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & X/\ker h \arrow[r, "\dot{h}"] & Y \end{tikzcd}$$

comută ;

2) $\mathring{\imath}_h$ *este liniară, pe* ;

3) $\dot{h}$ *este liniară, biunivocă.*

DEFINIȚIA 3. *Fie* E, E' *spații vectoriale peste corpul* K, $f : E \rightarrow E'$ $g : E' \rightarrow E$ *aplicații liniare și fie*

$$\Sigma = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R, \mathfrak{D}, \mathfrak{I}, \mathfrak{K}_\tau, \mathcal{M}) \in PTV\,(E).$$

Definim

$$\Sigma^f = \sup\,\{\Sigma' \in PTV\,(E') \mid (\Sigma')_{\dot f} \leqslant \Sigma^{\mathring{\imath}_f}\}$$

$$\Sigma_g = \inf\,\{\Sigma' \in PTV\,(E') \mid \Sigma_{\dot g} \leqslant \Sigma')^{\mathring{\imath}_g}\}.$$

În cazul în care f este o aplicație pe, iar g este biunivocă, această definiție concordă cu definiția 1 de la pct. 1 deoarece are loc :

PROPOZIȚIA 3. *În condițiile de la definiția 1 din pct. 1 avem*

$$1)\ \sup\,\{\Sigma' \in PTV\,(E') \left| \begin{array}{l} 1)\ \pi(\Sigma') \leqslant (\pi(\Sigma))^f \\ 2)\ f(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}' \end{array} \right\} =$$

$$= \sup\,\{\Sigma' \in PTV\,(E') \mid (\Sigma')_{\dot f} \leqslant \Sigma^{\mathring{\imath}_f}\}$$

$$2)\ \inf\,\{\Sigma' \in PTV\,(E') \left| \begin{array}{l} 1)\ (\pi(\Sigma))_g \leqslant \pi(\Sigma') \\ 2)\ g(\mathcal{M}') \subseteq \mathcal{M} \end{array} \right\} =$$

$$= \inf\,\{\Sigma' \in PTV\,(E') \mid \Sigma_{\dot g} \leqslant (\Sigma')^{\mathring{\imath}_g}\}$$

Demonstrație. 1) Deoarece $f : E \rightarrow E'$ este o aplicație pe, rezultă că $\dot f : E/\ker f \rightarrow E'$ este liniară, biunivocă, pe.

Fie $\Sigma'' = (\Sigma^{\mathring{\imath}_f})^{\dot f}$; atunci conform punctului 4) de la teorema 3

$$(\Sigma'')_{\dot f} = ((\Sigma^{\mathring{\imath}_f})^{\dot f})_{\dot f} = \Sigma^{\mathring{\imath}_f}$$

deci $\Sigma'' \leqslant \Sigma^f$ (în sensul de la definiția 2).

Fie acum $\Sigma' \in PTV\,(E')$ ca $(\Sigma')_{\dot f} \leqslant \Sigma^{\mathring{\imath}_f}$; atunci conform punctului 1) de la propoziția 3

$$((\Sigma')_{\dot f})^{\dot f} \leqslant (\Sigma^{\mathring{\imath}_f})^{\dot f}$$

deci conform punctului 4) de la teorema 3

$$\Sigma' \leqslant (\Sigma^{\mathring{\imath}_f})^{\dot f} = \Sigma''$$

de unde $\Sigma'' = \Sigma^f$ (în sensul de la definiția 2) adică $\Sigma^f = (\Sigma^{\mathring{\imath}_f})^{\dot f}$ (Σ^f fiind calculat în sensul definiției 2).

Dar, conform punctului 1) de la propoziția 1,

$$(\Sigma^{\mathring{\imath}_f})^{\dot f} = \Sigma^f \text{ (în sensul de la definiția 1)}$$

deoarece $\dot f \circ \mathring{\imath}_f = f$;

2) Deoarece $g : E' \rightarrow E$ este biunivocă, rezultă că

$\mathring{\imath}_g : E' \rightarrow E'/\ker g$ este liniară, biunivocă, pe;

Fie $\Sigma'' = (\Sigma_{\dot g})_{\mathring{\imath}_g}$.

Atunci, conform punctului 5) de la teorema 3,

$$(\Sigma'')^{\mathring{\imath}_g} = ((\Sigma_{\dot g})_{\mathring{\imath}_g})^{\mathring{\imath}_g} = \Sigma_{\dot g};$$

deci $\Sigma_g \leqslant \Sigma''$ (în sensul de la definiția 2).

Fie acum $\Sigma' \in PTV(E')$ ca $\Sigma_{\dot g} \leqslant (\Sigma')^{\mathring{\imath}_g}$; atunci, conform punctului 2) de la propoziția 3,

$$(\Sigma_{\dot g})_{\mathring{\imath}_g} \leqslant ((\Sigma')^{\mathring{\imath}_g})_{\mathring{\imath}_g} = \Sigma'$$

deci conform punctului 5) de la teorema 3

$$\Sigma'' = (\Sigma_{\dot g})_{\mathring{\imath}_g} \leqslant \Sigma'$$

de unde

$$\Sigma'' = \Sigma_g \text{ (în sensul definiției 2)}$$

adică $\Sigma_g = (\Sigma_{\dot g})_{\mathring{\imath}_g}$ (Σ_g fiind calculat în sensul definiției 2).

Dar conform punctului 2) de la propoziția 1

$$(\Sigma_{\dot g})_{\mathring{\imath}_g} = \Sigma_g \text{ (în sensul definiției 1)}$$

deoarece $\dot g \circ \mathring{\imath}_g = g$.

IV. CONSTRUCȚIA DE COMPLETARE

§ 1. ÎN CADRUL SPAȚIILOR PSEUDOTOPOLOGICE

1. SPAŢII PSEUDOTOPOLOGICE COMPLETE

DEFINIȚIA 1. *Fie* $E \in \mathfrak{M}$; *notăm cu* $PTC(E)$ *acele spații pseudotopologice* $\Sigma = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R, \mathfrak{D}, \mathfrak{J}, \mathfrak{K}_\tau) \in PT(E)$ *pentru care*

$$\text{(PTC)} \qquad \mathfrak{F} = \bigcup_{x \in E} \mathfrak{F}_x$$

și le numim complete.

Observația 1. Rezultă că spațiile pseudotopologice complete sînt cele în care orice filtru Cauchy este convergent.

2. CONSTRUIREA COMPLETATULUI

Această construcție se bazează pe noțiunea de filtru diagonal al unui filtru de filtre, expusă în anexă.

Dat fiind că în completarea unui spațiu pseudotopologic intervine în mod esențial doar substructura $\nu(\Sigma)$, la început vom considera numai astfel de spații pseudotopologice reduse, construindu-le completatul.

DEFINIȚIA 2. *Fie* $E \in \mathfrak{M}$; *notăm cu* $PTR(E)$ *mulțimea structurilor* $\nu(\Sigma)$ *unde* $\Sigma \in PT(E)$; *notăm cu* $PTRC(E)$ *acele structuri* $\nu(\Sigma)$ *pentru care* $\Sigma \in PTC(E)$.

DEFINIȚIA 3. *Fie* $E \in \mathfrak{M}$, $\tau = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R) \in PTR(E)$.

Notăm 1) $\tilde{E}^\tau = \mathfrak{F}$

2) $\widetilde{\mathfrak{F}}^\tau = \{\widetilde{\mathcal{F}} \in \mathrm{FIL}(\tilde{E}^\tau) \mid \delta_E(\widetilde{\mathcal{F}}) \in \mathfrak{F}\}$ [1]

3) $\widetilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\tilde{x}} = \{\widetilde{\mathcal{F}} \in \widetilde{\mathfrak{F}}^\tau \mid R(\delta_E(\widetilde{\mathcal{F}}), \tilde{x})\}$ *cu* $\tilde{x} \in \tilde{E}^\tau$

4) $\widetilde{R}^\tau(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{G}})$ *pentru* $\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{G}} \in \widetilde{\mathfrak{F}}^\tau$ *numai dacă*

$$R(\delta_E(\widetilde{\mathcal{F}}), \delta_E(\widetilde{\mathcal{G}}))$$

5) $\mathring{\mathfrak{i}}^E : E \to \tilde{E}^\tau$ *ca* $\mathring{\mathfrak{i}}^E(x) = \mathfrak{U}_x$

Observăm că $\mathring{\mathfrak{i}}^E$ este biunivocă.

De asemenea, notăm

$$\tilde{\tau} = (\widetilde{\mathfrak{F}}^\tau, (\widetilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\tilde{x}} \mid \tilde{x} \in \tilde{E}^\tau), \widetilde{R}^\tau).$$

PROPOZIȚIA 1. *În condițiile definiției 3 avem*

1) $\bigcup\limits_{\tilde{x} \in \tilde{E}^\tau} \widetilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\tilde{x}} = \widetilde{\mathfrak{F}}^\tau$

2) $(\forall)\, \tilde{x} \in \tilde{E}^\tau : \mathfrak{U}_{\tilde{x}} \in \widetilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\tilde{x}}$

3) $\widetilde{R}^\tau$ *este reflexivă și simetrică*

4) $\tau \in (\mathrm{PTT}) \Rightarrow \tilde{\tau} \in (\mathrm{PT3}), (\mathrm{PTS}), (\mathrm{PTT})$ [2]

5) $(\forall)\ x \in E, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x : \mathring{\mathfrak{i}}^E(\mathcal{F}) \in \widetilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\mathring{\mathfrak{i}}^E(x)}$

6) $(\forall)\, \mathcal{F} \in \mathfrak{F} : \mathring{\mathfrak{i}}^E(\mathcal{F}) \in \widetilde{\mathfrak{F}}^\tau$

7) $(\forall)\, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}, R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) : \widetilde{R}^\tau(\mathring{\mathfrak{i}}^E(\mathcal{F}), \mathring{\mathfrak{i}}^E(\mathcal{G}))$

8) $(\forall)\, \tilde{x} \in \tilde{E}^\tau : \mathring{\mathfrak{i}}^E(\tilde{x}) \in \widetilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\tilde{x}} \cap \mathop{\mathrm{FIL}}\limits_{\mathring{\mathfrak{i}}^E(E)} (\tilde{E}^\tau)$

---

[1] Prin $\delta_E(\widetilde{\mathcal{F}})$ se notează filtrul diagonal al filtrului de filtre $\widetilde{\mathcal{F}}$ (a se vedea anexa).

[2] Prin (PTT) notăm condiția: R este tranzitivă.
Prin (PTS) notăm condiția:
$(\forall)\ x \in E, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}, R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) : \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_x$.

9) *dacă* $\tau\in(\mathrm{PTT})$, *atunci*

$$(\forall)\,\tilde{x},\tilde{y}\in\tilde{E}^\tau:$$

$$\begin{pmatrix}(\forall)\,\tilde{\mathcal{F}}\in\tilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\tilde{x}},\ \tilde{\mathcal{G}}\in\tilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\tilde{y}}:\\ \tilde{R}^\tau(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{G}})\end{pmatrix}\overset{\mathrm{I}}{\Leftrightarrow}\begin{pmatrix}(\exists)\,\tilde{\mathcal{F}}\in\tilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\tilde{x}},\ \tilde{\mathcal{G}}\in\tilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\tilde{y}}:\\ \tilde{R}^\tau(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{G}})\end{pmatrix}\overset{\mathrm{II}}{\Leftrightarrow} R(\tilde{x},\tilde{y})$$

Demonstrație. 1) Incluziunea $\subseteq$ este evidentă.

Fie $\tilde{\mathcal{F}}\in\tilde{\mathfrak{F}}^\tau$; atunci $\boldsymbol{\delta}_E(\tilde{\mathcal{F}})\in\mathfrak{F}=\tilde{E}^\tau$.

Fie $\tilde{x}=\boldsymbol{\delta}_E(\tilde{\mathcal{F}})$; atunci $\tilde{\mathcal{F}}\in\tilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\tilde{x}}$.

2) Avem $\boldsymbol{\delta}_E(\mathcal{U}_{\tilde{x}})=\tilde{x}$[3]), deci $\mathcal{U}_{\tilde{x}}\in\tilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\tilde{x}}$;

3) Evidentă.

4) Faptul că $\tilde{\tau}\in(\mathrm{PTT})$ este imediat.

Fie $\tilde{x}\in\tilde{E}^\tau$, $\tilde{\mathcal{F}}\in\tilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\tilde{x}}$, $\tilde{\mathcal{G}}\in\tilde{\mathfrak{F}}^\tau$; atunci $\boldsymbol{\delta}_E(\tilde{\mathcal{F}})$, $\boldsymbol{\delta}_E(\tilde{\mathcal{G}})\in\mathfrak{F}$ și $R(\boldsymbol{\delta}_E(\tilde{\mathcal{F}}),\tilde{x})$.

Deci dacă $\tilde{\mathcal{G}}\in\tilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\tilde{x}}$, atunci și $R(\boldsymbol{\delta}_E(\tilde{\mathcal{G}}),\tilde{x})$,
de unde $R(\boldsymbol{\delta}_E(\tilde{\mathcal{F}}),\boldsymbol{\delta}_E(\tilde{\mathcal{G}}))$ căci $\tau\in(\mathrm{PTT})$
adică $\tilde{R}^\tau(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{G}})$; astfel că $\tilde{\tau}\in(\mathrm{PT3})$.

Dacă însă $\tilde{R}^\tau(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{G}})$, atunci $\tilde{R}^\tau(\boldsymbol{\delta}_E(\tilde{\mathcal{F}}),\boldsymbol{\delta}_E(\tilde{\mathcal{G}}))$
de unde $R(\boldsymbol{\delta}_E(\tilde{\mathcal{G}}),\tilde{x})$ căci $\tau\in(\mathrm{PTT})$
adică $\tilde{\mathcal{G}}\in\tilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\tilde{x}}$, deci $\tilde{\tau}\in(\mathrm{PTS})$.

5) Avem $\boldsymbol{\delta}_E(\mathring{i}^E(\mathcal{F}))=\mathcal{F}$[4])
deci $\mathring{i}^E(\mathcal{F})\in\tilde{\mathfrak{F}}^\tau$ deoarece $\mathcal{F}\in\mathfrak{F}$
dar $\mathring{i}^E(x)=\mathcal{U}_x\in\mathfrak{F}_x$ și, prin ipoteză, $\mathcal{F}\in\mathfrak{F}_x$
deci $R(\mathcal{U}_x,\mathcal{F})$
de unde $\mathring{i}^E(\mathcal{F})\in\tilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\mathcal{U}_x}=\tilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\mathring{i}^E(x)}$.

6) Avem $\boldsymbol{\delta}_E(\mathring{i}^E(\mathcal{F}))=\mathcal{F}\in\mathfrak{F}$
deci $\mathring{i}^E(\mathcal{F})\in\tilde{\mathfrak{F}}^\tau$.

7) Avem $\boldsymbol{\delta}_E(\mathring{i}^E(\mathcal{F}))=\mathcal{F}$, $\boldsymbol{\delta}_E(\mathring{i}^E(\mathcal{G}))=\mathcal{G}$
deci $R(\boldsymbol{\delta}_E(\mathring{i}^E(\mathcal{F})),\boldsymbol{\delta}_E(\mathring{i}^E(\mathcal{G})))$
adică $\tilde{R}^\tau(\mathring{i}^E(\mathcal{F}),\mathring{i}^E(\mathcal{G}))$.

8) Avem $\boldsymbol{\delta}_E(\mathring{i}^E(\tilde{x}))=\tilde{x}$
deci $\mathring{i}^E(\tilde{x})\in\tilde{\mathfrak{F}}^\tau_{\tilde{x}}$
dar evident $\mathring{i}^E(\tilde{x})\in\mathrm{FIL}_{\mathring{i}^E(E)}(\tilde{E}^\tau)$.

---

[3]) Vezi anexa despre filtrul diagonal.

[4]) A se vedea anexa despre filtrul diagonal.

9) Implicația $\overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow}$ este evidentă;

implicația $\overset{\mathrm{I}}{\Leftarrow}$ rezultă din faptul că $\widetilde{R}^{\tau}$ este tranzitivă întrucît $\tau \in (\mathrm{PTT})$ și 4);

implicația $\overset{\mathrm{II}}{\Rightarrow}$ este adevărată deoarece avem

$$R(\delta_E(\widetilde{\mathcal{F}}), \tilde{x}),\ R(\delta_E(\check{\mathcal{G}}), \tilde{y}),\ R(\delta_E(\widetilde{\mathcal{F}}), \delta_E(\check{\mathcal{G}}))$$

de unde $R(\tilde{x}, \tilde{y})$ dat fiind că $\tau \in (\mathrm{PTT})$;

implicația $\overset{\mathrm{II}}{\Leftarrow}$ este adevărată deoarece

fie $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathfrak{i}^E(\tilde{x}), \check{\mathcal{G}} = \mathfrak{i}^E(\tilde{y})$;

atunci $\widetilde{\mathcal{F}} \in \widetilde{\mathfrak{F}}^{\tau}_{\tilde{x}}, \widetilde{\mathcal{G}} \in \widetilde{\mathfrak{F}}^{\tau}_{\tilde{y}}$ și $\widetilde{R}^{\tau}(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{G}})$.

Observația 2. Punctul 8) de la propoziția 1 afirmă că prin aplicația $\mathfrak{i}^E : E \to \mathfrak{i}^E(E) \subseteq \tilde{E}^{\tau}$ imaginea lui E în $\tilde{E}^{\tau}$ este „densă", adică pentru orice $\tilde{x} \in \tilde{E}^{\tau}$ există un filtru $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathfrak{i}^E(\tilde{x})$ cu baza în $\mathfrak{i}^E(E)$ care converge către $\tilde{x}$.

TEOREMA 1. În condițiile de la definiția 3 dacă $\tau \in \mathrm{PTRT}\,(E)$, atunci $\tilde{\tau} \in \mathrm{PTRTSC}\,(\tilde{E}^{\tau})$.

Demonstrație. Faptul că $\tilde{\tau}$ verifică (PT1) este evident; $\tilde{\tau}$ verifică (PT2) deoarece avem 2) și 1) de la propoziția 1; $\tilde{\tau}$ verifică (PT3) deoarece avem 3) și 4) de la propoziția 1); $\tilde{\tau}$ verifică (PTT) și (PTS) deoarece avem 4) de la propoziția 1.

Revenim la spațiile pseudotopologice.

DEFINIȚIA 4. *Fie* $E \in \mathfrak{M}$, $\sum = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R, \mathfrak{D}, \mathcal{J}, \mathfrak{K}_\tau) \in PT\,(E)$. *Notăm*

1) $\widetilde{E}^{\Sigma} = \tilde{E}^{\nu(\Sigma)}$

2) $\widetilde{\mathfrak{F}}^{\Sigma} = \widetilde{\mathfrak{F}}^{\nu(\Sigma)}$

3) $\widetilde{\mathfrak{F}}^{\Sigma}_{\tilde{x}} = \widetilde{\mathfrak{F}}^{\nu(\Sigma)}_{\tilde{x}}$ cu $\tilde{x} \in \widetilde{E}^{\Sigma}$

4) $\widetilde{R}^{\Sigma} = \widetilde{R}^{\nu(\Sigma)}$.

Pentru $A \subseteq E$, $A \in \mathfrak{M}$ notăm

$$\mathfrak{F}_A = \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \mid (\exists)\, \mathcal{G} \in \mathfrak{F} \cap \underset{A}{\mathrm{FIL}}\,(E) : R(\mathcal{F}, \mathcal{G})\}.$$

Se observă imediat că

$$\mathfrak{i}^E(A) \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathrm{FIL}_A(E) \subseteq \mathfrak{F}_A.$$

Vom considera $\mathfrak{F}_{\emptyset_E} = \emptyset_{\mathfrak{F}}$.

Notăm

$$5)\quad \widetilde{\mathfrak{D}}^{\Sigma} = \left\{ \widetilde{D} \subseteq \widetilde{E}^{\Sigma} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \widetilde{D} \text{ verifică (PT4)} \\ 2)\ (\exists)\ D, D' \in \mathfrak{D}: \\ \mathfrak{i}^{E}(D') = \widetilde{D} \cap \mathfrak{i}^{E}(E) \subseteq \widetilde{D} \subseteq \complement_{\widetilde{E}^{\Sigma}} \mathfrak{F}_{E-D} \end{array} \right\}$$

$$6)\quad \widetilde{\mathfrak{J}}^{\Sigma} = \left\{ \widetilde{I} \subseteq \widetilde{E}^{\Sigma} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \widetilde{I} \text{ verifică (PT5)} \\ 2)\ (\exists)\ I, I' \in \mathfrak{J}: \\ \mathfrak{i}^{E}(I') = \widetilde{I} \cap \mathfrak{i}^{E}(E) \subseteq \widetilde{I} \subseteq \mathfrak{F}_{I} \end{array} \right\}$$

$$7)\quad \widetilde{\mathfrak{Kr}}^{\Sigma} = \left\{ \widetilde{K} \subseteq \widetilde{E}^{\Sigma} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \widetilde{K} \text{ verifică (PT6)} \\ 2)\ (\exists)\, K \in \mathfrak{Kr}: \widetilde{K} \subseteq \mathfrak{F}_{K} \end{array} \right\} \cup$$

$$\cup\ \{\widetilde{K} \subseteq \widetilde{E}^{\Sigma} \mid \widetilde{K} \text{ finită}\}.$$

Notăm $\widetilde{\Sigma} = (\widetilde{\mathfrak{F}}^{\Sigma}, (\widetilde{\mathfrak{F}}^{\Sigma}_{\widetilde{x}} \mid \widetilde{x} \in \widetilde{E}^{\Sigma}), \widetilde{R}^{\Sigma}, \widetilde{\mathfrak{D}}^{\Sigma}, \widetilde{\mathfrak{J}}^{\Sigma}, \widetilde{\mathfrak{Kr}}^{\Sigma})$.

Observația 3. Explicăm definițiile date pentru

$$\widetilde{\mathfrak{D}}^{\Sigma},\ \widetilde{\mathfrak{J}}^{\Sigma} \text{ și } \widetilde{\mathfrak{Kr}}^{\Sigma}.$$

În definiția lui $\widetilde{\mathfrak{D}}^{\Sigma}$ condiția

1) $\widetilde{D}$ verifică (PT4)

și prima incluziune din condiția 2):

$$(\exists)\ D' \in \mathfrak{D}: \mathfrak{i}^{E}(D') = \widetilde{D} \cap \mathfrak{i}^{E}(\mathrm{E}) \subseteq \widetilde{D}$$

sînt naturale, deoarece orice $\widetilde{D} \in \widetilde{\mathfrak{D}}^{\Sigma}$ trebuie să verifice (PT4) pentru ca $\widetilde{\Sigma} \in \mathrm{PT}\ (\widetilde{E}^{\Sigma})$ iar incluziunea precedentă e condiția necesară și suficientă pentru ca $(\mathfrak{i}^{E})^{-1}(\widetilde{D}) \in \mathfrak{D}$, deci este necesară dacă dorim ca aplicația $\mathfrak{i}^{E}: E \to \widetilde{E}^{\Sigma}$ să fie o scufundare „continuă".

Analog, în definiția lui $\widetilde{\mathfrak{J}}^{\Sigma}$ condiția

1) $\widetilde{I}$ verifică (PT5)

și prima incluziune din condiția 2):

$$(\exists)\ I' \in \mathfrak{J}: \mathfrak{i}^{E}(I') = \widetilde{I} \cap \mathfrak{i}^{E}(E) \subseteq \widetilde{I}$$

sînt de asemenea naturale.

Am cerut în definiția lui $\widetilde{\mathfrak{D}}^{\Sigma}$ condiția

$$(\exists)\ D \in \mathfrak{D}: \widetilde{\mathrm{D}} \subseteq \complement_{\widetilde{E}^{\Sigma}} \mathfrak{F}_{E-D}$$

deoarece nu este obligatoriu ca în $\widetilde{\mathfrak{D}}^{\Sigma}$ să fie cuprinse toate părțile $\widetilde{D}$ ale lui $\widetilde{E}^{\Sigma}$ care verifică condițiile (PT4) și $(\mathfrak{i}^{E})^{-1}\ (\widetilde{D}) \in \mathfrak{D}$, la fel cum nici în $\mathfrak{D}$ nu intră obligatoriu toate părțile lui E care verifică (PT4).

Analog în ceea ce privește condiția

$$(\exists) I \in \mathfrak{J}: \widetilde{I} \subseteq \mathfrak{F}_{I}$$

din definiția lui $\widetilde{\mathfrak{J}}^{\Sigma}$.

În definiția lui $\widetilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{r}}^{\Sigma}$ condiția

1) $\widetilde{K}$ verifică (PT6)

este naturală, deoarece orice $\widetilde{K} \in \widetilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{r}}^{\Sigma}$ trebuie să verifice (PT6) dacă dorim ca $\widetilde{\sum} \in \mathrm{PT}\,(\widetilde{E}^{\Sigma})$.

Condiția

2) $(\exists)\ K \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{r}} : \widetilde{K} \subseteq \mathfrak{F}_k$

a fost cerută de asemenea pentru faptul că nu este obligatoriu ca toate părțile $\widetilde{K}$ din $\widetilde{E}^{\Sigma}$ care verifică (PT6) să fie cuprinse în $\widetilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{r}}^{\Sigma}$.

TEOREMA C. *În condițiile definiției 4 dacă* $\sum \in \mathrm{PTT}\,(E)$, *atunci* $\widetilde{\sum} \in \mathrm{PTTSC}\,(\widetilde{E}^{\Sigma})$.

Demonstrație. Faptul că $\widetilde{\sum}$ verifică condițiile (PT1), (PT2), (PT3), (PTT), (PTS) și (PTC), rezultă din teorema 1; se vede imediat că $\widetilde{\sum}$ verifică și condițiile (PT4), (PT5) și (PT6).

PROPOZIȚIA 2. *În condițiile definiției 4 avem*

1) $(\forall)\ \widetilde{D} \in \widetilde{\mathfrak{D}}^{\Sigma} : (\mathfrak{i}^E)^{-1}(\widetilde{D}) \in \mathfrak{D}$

2) $(\forall)\ \widetilde{I} \in \widetilde{\mathcal{J}}^{\Sigma} : (\mathfrak{i}^E)^{-1}\,(\widetilde{I}) \in \mathcal{J}$

3) $(\forall)\ K \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{r}} : \mathfrak{i}^E(K) \in \widetilde{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{r}}^{\Sigma}$.

Demonstrație. 1) Fie $D' \in \mathfrak{D}$ ca $\mathfrak{i}^E\,(D') = \widetilde{D} \cap \mathfrak{i}^E\,(E)$;

atunci $(\mathfrak{i}^E)^{-1}(\widetilde{D}) = D' \in \mathfrak{D}$.

2) Fie $I' \in \mathcal{J}$ ca $\mathfrak{i}^E\,(I') = \widetilde{I} \cap \mathfrak{i}^E(E)$;

atunci $(\mathfrak{i}^E)^{-1}\,(\widetilde{I}) = I' \in \mathcal{J}$.

3) Fie $\widetilde{K} = \mathfrak{i}^E\,(K)$;

atunci $\widetilde{K} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathrm{FIL}_K\,(E) \subseteq \mathfrak{F}_k$

și $\widetilde{K}$ verifică (PT6) căci

fie $\widetilde{\mathcal{F}} \in U\ \mathrm{FIL}\ (\widetilde{K})$

atunci $(\forall)\, \widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{F}} : \widetilde{F} \subseteq \mathfrak{i}^E\,(K)$

fie $\mathrm{F} = \{x \in E \mid \mathfrak{U}_x \in \widetilde{F}\}$

fie $\mathcal{F} = \{\mathrm{F} \mid \widetilde{\mathrm{F}} \in \widetilde{\mathcal{F}}\}$

atunci $\mathcal{F} \in U\ \mathrm{FIL}\ (K)$ căci $\mathfrak{i}^E$ biunivocă

deci $\underset{E}{\mathrm{fil}}\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ căci $K \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{r}}$ și (PT6)

dar $\mathfrak{i}^E\,(\underset{E}{\mathrm{fil}}\ \mathcal{F}) = \underset{\widetilde{E}^{\Sigma}}{\mathrm{fil}}\ \widetilde{\mathcal{F}}$

deci $\underset{\widetilde{E}^{\Sigma}}{\mathrm{fil}}\ \widetilde{\mathcal{F}} \in \widetilde{\mathfrak{F}}^{\Sigma}$ conform cu 6) de la propoziția 1.

LEMA 1. *În condițiile de la definiția 4 avem*

1) $(\forall)\, D \in \mathfrak{D} : (\mathfrak{i}^E)^{-1}\,(\complement_{\widetilde{E}^{\Sigma}}\, \mathfrak{F}_{E-D}) \subseteq D$

2) $\sum \in \mathrm{PTS}\ (E) \Rightarrow (\forall)\ D \in \mathfrak{D} : (\mathfrak{i}^E)^{-1}\,(\complement_{\widetilde{E}^{\Sigma}}\, \mathfrak{F}_{E-D}) = D$

3) $(\forall) I \in \mathfrak{I} : (\mathring{\imath}^{E})^{-1}(\mathfrak{F}_{I}) \supseteq I$

4) $\sum \in \mathrm{PTS}(E) \Rightarrow (\forall)\ I \in \mathfrak{I} : (\mathring{\imath}^{E})^{-1}(\mathfrak{F}_{I}) = I.$

Demonstrație. 1) Fie $x \in (\mathring{\imath}^{E})^{-1}(\complement_{\tilde{E}^{\Sigma}} \mathfrak{F}_{E-D})$;

atunci $\mathcal{U}_{x} \notin \mathfrak{F}_{E-D}$
deci $x \notin E-D$
deci $x \in D$.

2) Fie $x \in \mathrm{D}$ ca $\mathcal{U}_{x} \in \mathfrak{F}_{E-D}$
atunci $(\exists)\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F} \cap \underset{E-D}{\mathrm{FIL}}(E) : R(\mathcal{F}, \mathcal{U}_{x})$
deci $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{x}$ căci $\sum \in (\mathrm{PTS})$
deci $x \in E - D$ căci $D \in \mathfrak{D}$ și (PT4),
absurd

3) Fie $x \in I$
atunci $\mathcal{U}_{x} \in \mathfrak{F} \cap \mathrm{FIL}_{I}\ (E) \subseteq \mathfrak{F}_{I}$

4) Fie $x \in E$ ca $\mathcal{U}_{x} \in \mathfrak{F}_{I}$
atunci $(\exists)\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F} \cap \mathrm{FIL}_{I}\ (E) : R(\mathcal{F}, \mathcal{U}_{x})$
deci $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{x}$ căci $\sum \in (\mathrm{PTS})$
deci $x \in I$ căci $I \in \mathfrak{I}$ și (PT5).

TEOREMA (C—O). *Fie* $E \in \mathfrak{M}$, $\sum \in \mathrm{PTT}\ (E)$; *atunci*

1) $\tilde{\Sigma} \leqslant \Sigma^{\mathring{\imath}^{E}}$

2) *dacă* $\sum \in \mathrm{PTS}\ (E)$ *atunci*

$$\nu(\tilde{\Sigma}|_{\mathring{\imath}^{E}(E)}) = \nu(\Sigma^{\underset{\smile}{\mathring{\imath}^{E}}})\ ^{5)}$$

deci $\nu(\tilde{\Sigma}|_{\mathring{\imath}^{E}(E)})$ *și* $\nu(\Sigma)$ *sînt izomorfe prin aplicația* $\underset{\smile}{\mathring{\imath}^{E}}$

3) *dacă* $\sum \in \mathrm{PTS}\ \boldsymbol{\delta} I\ (E)$, *atunci*⁶⁾

$$\tilde{\Sigma}|_{\mathring{\imath}^{E}(E)} = \Sigma^{\underset{\smile}{\mathring{\imath}^{E}}}$$

---

5) Definim $\underset{\smile}{\mathring{\imath}^{E}} : E \to \mathring{\imath}^{E}(E)$ ca

$$\underset{\smile}{\mathring{\imath}^{E}}(x) = \mathring{\imath}^{E}(x)$$

6) Notăm prin (PT $\boldsymbol{\delta}$) condiția

$$(\forall) A \in \{\complement_{E} D \mid D \in \mathfrak{D}\} \cup \mathfrak{I}, \tilde{\mathcal{F}} \in \tilde{\mathfrak{F}}^{\Sigma} \cap \underset{\mathfrak{F}_{A}}{\mathrm{FIL}}(\dot{E}^{\Sigma}) : \boldsymbol{\delta}_{E}(\tilde{\mathcal{F}}) \in \mathfrak{F}_{A};$$

notăm prin (PTI) condiția

$$(\forall) K \in \mathfrak{K}_{\imath} :$$
$$(\exists) I \in \mathfrak{I} \cap \mathfrak{K}_{\imath} : K \subseteq I.$$

deci $\tilde{\Sigma}|_{\mathring{\iota}^{E}(E)}$ *și* Σ *sînt izomorfe prin aplicația* $\underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}}$.

4) $(\forall)\ \tilde{x} \in E^{\Sigma} : (\exists)\ \tilde{\mathcal{F}} \in \tilde{\mathfrak{F}}^{\Sigma} : \tilde{\mathcal{F}} \in \mathrm{FIL}_{\mathring{\iota}(E)}(\tilde{E}^{\Sigma})$.

Demonstrație. 1) Rezultă din punctele 5), 6), 7) de la propoziția 1, din propoziția 2 și din punctul 1) al propoziției 1 de la Cap. I §4, pct. 1.

2) a) Aplicația $\underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}} : \mathfrak{F} \rightarrow \tilde{\mathfrak{F}}^{\Sigma} \cap \mathrm{FIL}_{\mathring{\iota}^{E}(E)}(\tilde{E}^{\Sigma})$ este biunivocă și pe, deoarece

fie $\tilde{\mathcal{F}} \in \tilde{\mathfrak{F}}^{\Sigma} \cap \mathrm{FIL}_{\mathring{\iota}^{E}(E)}(\tilde{E}^{\Sigma})$

fie $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \tilde{\mathcal{F}} \cap \mathfrak{P}(\mathring{\iota}^{E}(E))$

atunci $\tilde{\mathcal{F}}_1 \in \mathrm{FIL}\ (\mathring{\iota}^{E}(E))$

deci $(\exists)\ \mathcal{F} \in \mathrm{FIL}\ (E) : \tilde{\mathcal{F}}_1 = \underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}}\ (\mathcal{F})$

dar $\delta_E(\tilde{\mathcal{F}}_1) = \delta_E(\tilde{\mathcal{F}}) \in \mathfrak{F}$

deci $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}}\ (\mathcal{F}) = \underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}}\ (\delta_E(\mathring{\iota}^{E}(\mathcal{F}))) = \underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}}\ (\delta_E(\tilde{\mathcal{F}}_1)) =$

$= \underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}}\ (\delta_E(\tilde{\mathcal{F}})) \in \underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}}\ (\mathfrak{F})$;

deci $\underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}}$ este o aplicație pe; faptul că este și biunivocă este evident.

b) Fie $x \in E$; atunci aplicația

$\underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}} : \mathfrak{F}_x \rightarrow \tilde{\mathfrak{F}}^{\Sigma}_{\mathring{\iota}^{E}(x)} \cap \mathrm{FIL}_{\mathring{\iota}^{E}(E)}(\tilde{E}^{\Sigma})$

este biunivocă și pe, deoarece

fie $\tilde{\mathcal{F}} \in \tilde{\mathfrak{F}}^{\Sigma}_{\mathring{\iota}^{E}(x)} \cap \mathrm{FIL}_{\mathring{\iota}^{E}(E)}(\tilde{E}^{\Sigma})$

atunci $R(\delta_E(\tilde{\mathcal{F}}), \mathring{\iota}^{E}(x))$ adică $R(\delta_E(\tilde{\mathcal{F}}), \mathfrak{U}_x)$

deci $\delta_E(\tilde{\mathcal{F}}) \in \mathfrak{F}_x$ deoarece $\Sigma \in (\mathrm{PTS})$,

deci cu notațiile de la a) avem

$\tilde{\mathcal{F}}_1 = \underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}}\ (\delta_E(\tilde{\mathcal{F}})) \in \underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}}\ (\mathfrak{F}_x)$

c) Fie $\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}} \in \tilde{\mathfrak{F}}^{\Sigma} \cap \mathrm{FIL}_{\mathring{\iota}^{E}(E)}(\tilde{E}^{\Sigma})$ ca $\tilde{R}^{\Sigma}\ (\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$

atunci $R(\delta_E(\tilde{\mathcal{F}}), \delta_E(\tilde{\mathcal{G}}))$

fie $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \tilde{\mathcal{F}} \cap \mathfrak{P}(\mathring{\iota}^{E}(E)), \tilde{\mathcal{G}}_1 = \tilde{\mathcal{G}} \cap \mathfrak{P}(\mathring{\iota}^{E}(E))$

atunci $\tilde{\mathcal{F}}_1, \tilde{\mathcal{G}}_1 \in \mathrm{FIL}\ (\mathring{\iota}^{E}(E))$

deci $(\exists)\ \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{FIL}\ (E) : \tilde{\mathcal{F}}_1 = \underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}}\ (\mathcal{F}), \tilde{\mathcal{G}}_1 = \underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}}\ (\mathcal{G})$

deci $\delta_E(\tilde{\mathcal{F}}) = \delta_E(\tilde{\mathcal{F}}_1) = \delta_E(\underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}}\ (\mathcal{F})) = \mathcal{F}$

$\delta_E(\tilde{\mathcal{G}}) = \delta_E(\tilde{\mathcal{G}}_1) = \delta_E(\underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}}\ (\mathcal{G})) = \mathcal{G}$

deci $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}, R(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

3) Rezultă din 2) și din :

a) Aplicația $(\underset{\smile}{\mathring{\iota}^{E}})^{-1} : \mathfrak{D}^{\Sigma} \rightarrow \mathfrak{D}$ este pe, deoarece

fie $D \in \mathfrak{D}$

fie $\widetilde{D} = \complement_{\widetilde{E}^{\Sigma}} \mathfrak{F}_{E-D}$

atunci $(\underset{\smile}{\mathfrak{i}^{E}})^{-1} (\widetilde{D}) = D$ căci avem punctul 2) de la lema 1

şi $\widetilde{D}$ verifică (PT4) căci

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{fie } \widetilde{x} \in \widetilde{E}^{\Sigma}, \widetilde{\mathcal{F}} \in \mathfrak{F}^{\Sigma}_{\widetilde{x}} \cap \mathrm{FIL}_{\widetilde{E}^{\Sigma}\;\widetilde{D}}(\widetilde{E}^{\Sigma}) \\
\text{atunci } \widetilde{\mathcal{F}} \in \mathfrak{F}^{\Sigma} \cap \mathrm{FIL}_{\mathfrak{F}_{E-D}}(\widetilde{E}^{\Sigma}) \\
\text{deci } \delta_{E}(\widetilde{\mathcal{F}}) \in \mathfrak{F}_{E-D} \text{ căci } \Sigma \in (\mathrm{PT}\delta) \\
\text{dar } R\, (\delta_{E}\,(\widetilde{\mathcal{F}}), \widetilde{x}) \textit{ căci } \widetilde{\mathcal{F}} \in \mathfrak{F}^{\Sigma}_{\widetilde{x}} \\
\text{deci } \widetilde{x} \in \mathfrak{F}_{E-D} \text{ căci } \Sigma \in (\mathrm{PTT}) \\
\text{deci } \widetilde{x} \in \widetilde{E}^{\Sigma} - \widetilde{D}
\end{array}\right.$$

deci $\widetilde{D} \in \widetilde{\mathfrak{D}}^{\Sigma}$ şi am văzut că $(\underset{\smile}{\mathfrak{i}^{E}})^{-1} (\widetilde{D}) = D$

b) Aplicaţia $(\underset{\smile}{\mathfrak{i}^{E}})^{-1} : \widetilde{\mathcal{J}}^{\Sigma} \rightarrow \mathcal{J}$ este pe, deoarece

fie $I \in \mathcal{J}$

fie $\widetilde{I} = \mathfrak{F}_{I}$

atunci $(\underset{\smile}{\mathfrak{i}^{E}})^{-1} (\widehat{I}) = I$ căci avem punctul 4) de la lema 1

şi $\widetilde{I}$ verifică (PT5) căci

fie $\widetilde{x} \in \widetilde{E}^{\Sigma}, \widetilde{\mathcal{F}} \in \mathfrak{F}^{\Sigma}_{\widetilde{x}} \cap \mathrm{FIL}_{\widetilde{I}}(\widetilde{E}^{\Sigma})$

atunci $\widetilde{\mathcal{F}} \in \mathfrak{F}^{\Sigma} \cap \mathrm{FIL}_{\mathfrak{F}_{I}}(\widetilde{E}^{\Sigma})$

deci $\delta_{E}\, (\widetilde{\mathcal{F}}) \in \mathfrak{F}_{I}$ căci $\Sigma \in (\mathrm{PT}\delta)$

dar $R\, (\delta_{E}\, (\widetilde{\mathcal{F}}), \widetilde{x})$ căci $\widetilde{\mathcal{F}} \in \mathfrak{F}^{\Sigma}_{\widetilde{x}}$

deci $\widetilde{x} \in \mathfrak{F}_{I}$ căci $\Sigma \in (\mathrm{PTT})$

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{deci } \widetilde{x} \in \widetilde{I} \\
\text{deci } \widetilde{I} \in \widetilde{\mathcal{J}}^{\Sigma} \text{ şi am văzut că } (\underset{\smile}{\mathfrak{i}^{E}})^{-1} (\widetilde{I}) = I
\end{array}\right.$$

c) Aplicaţia $\underset{\smile}{\mathfrak{i}^{E}} : \mathfrak{K}_{i} \rightarrow \widetilde{\mathfrak{K}}_{i}^{\Sigma} \cap \mathfrak{P}\, (\mathfrak{i}^{E}(E))$ este pe, deoarece

fie $\widetilde{K} \in \widetilde{\mathfrak{K}}_{i}^{\Sigma} \cap \mathfrak{P}\, (\mathfrak{i}^{E}\, (E))$

atunci $(\exists)\ K \in \mathfrak{K}_{i} : \widetilde{K} \subseteq \mathfrak{F}_{K}$

dar $(\exists)\ I \in \mathcal{J} \cap \mathfrak{K}_{i} : K \subseteq I$ căci $\Sigma \in (\mathrm{PTI})$

deci $\widetilde{K} \subseteq \mathfrak{F}_{I}$ căci $K \subseteq I \Rightarrow \mathfrak{F}_{K} \subseteq \mathfrak{F}_{I}$

deci $(\underset{\smile}{\mathfrak{i}^{E}})^{-1} (\widetilde{K}) \subseteq (\underset{\smile}{\mathfrak{i}^{E}})^{-1} (\mathfrak{F}_{I}) = I$ căci avem pct. 4) de la lema 1

fie $K' = (\underset{\smile}{\mathfrak{i}^{E}})^{-1} (\widetilde{K})$

atunci $K' \in \mathfrak{K}_{i}$ căci $K' \subseteq I,\ I \in \mathfrak{K}_{i}$

dar $\widetilde{K} = \underset{\smile}{\mathfrak{i}^{E}} (K')$

---

[1] rezultă din punctul 8) de la propoziţia 1

§ 2. ÎN CADRUL STRUCTURILOR PSEUDOTOPOLOGICE

1. STRUCTURI PSEUDOTOPOLOGICE COMPLETE

DEFINIŢIA 1. Fie $E_i \in \mathfrak{M}$ cu $i = 0,1$; notăm cu $\mathrm{PTC}(E_0, E_1)$ acele structuri pseudotopologice $\boxed{\sim} = (\Sigma_0, \Sigma_1, \Phi, \Phi_u) \in PT\,(E_0, E_1)$ pentru care $\Sigma_0 \in \mathrm{PTC}\,(E_0)$ iar $\Sigma_1 \in \mathrm{PTC}\,(E_1)$ şi le numim complete.

2. CONSTRUIREA COMPLETATULUI

În completarea unei structuri pseudotopologice sîntem obligaţi să renunţăm la funcţiile continue şi să păstrăm doar cele uniform continue deoarece în general primele nu pot fi prelungite pînă la funcţii continue în completat. Deci vom completa numai structuri pseudotopologice reduse, date de:

DEFINIŢIA 2. *Fie* $E_i \in \mathfrak{M}$ *cu* $i = 0,1$; *notăm cu* $\mathrm{PTU}\,(E_0, E_1)$ *structurile de forma* $u\,(\boxed{\sim})$[7]), *unde* $\boxed{\sim} \in \mathrm{PT}\,(E_0, E_1)$; *notăm cu* $\mathrm{PTUC}\,(E_0, E_1)$ *acele structuri* $u\,(\boxed{\sim})$ *pentru care* $\boxed{\sim} \in \mathrm{PTC}\,(E_0, E_1)$.

DEFINIŢIA 3. *Fie* $E_i \in \mathfrak{M}$ *cu* $i = 0,1$, $\boxed{\sim} = (\Sigma_0, \Sigma_1, \Phi_u) \in \mathrm{PTU}\,(E_0, E_1)$ *ca* $\Sigma_i = (\mathfrak{F}^i, (\mathfrak{F}^i_{x_i} \mid x_i \in E_i), R^i, \mathfrak{D}^i, \mathfrak{I}^i, \mathfrak{K}_z{}^i)$ *cu* $i = 0,1$. *Notăm*

$$\widetilde{\Phi}_u^{\boxed{\sim}} = \left\{ \tilde f : \tilde E_0^{\Sigma_0} \to \tilde E_1^{\Sigma_1} \;\middle|\; \begin{array}{c} 1)\ (\exists)\, f \in \Phi_u : (\forall)\, \tilde x_0 \in \tilde E_0^{\Sigma_0} : \\ \tilde f(\tilde x_0) = f(\tilde x_0) \\ 2)\ \tilde f \ \textit{verifică}\ \text{(PT8.3), (PT8.4) şi} \\ \text{(PT9.2)} \end{array} \right\} \cup$$

$$\cup \{\tilde f : \tilde E_0^{\Sigma_0} \to \tilde E_1^{\Sigma_1} \mid \tilde f \ \text{constantă}\}$$[8]).

Observăm că, deoarece Φ_u verifică condiţia (PT9), definiţia de sus nu este contradictorie.

Notăm $\widetilde{\boxed{\sim}} = (\widetilde{\Sigma}_0, \widetilde{\Sigma}_1, \widetilde{\Phi}_u^{\boxed{\sim}})$.

PROPOZIŢIA 1. *În condiţiile de la definiţia 3 pentru orice* $\tilde f \in \widetilde{\Phi}_u^{\boxed{\sim}}$ *pentru care*

$$(\exists)\, f \in \Phi_u : (\forall)\, \tilde x_0 \in \tilde E_0^{\Sigma_0} : \tilde f(\tilde x_0) = f(x_0)$$

avem

$$1)\ (\forall)\, \tilde x_0 \in \tilde E_0^{\Sigma_0},\ \widetilde{\mathcal{F}}_0 \in \widetilde{\mathfrak{F}}^{0\,\Sigma_0}_{\tilde x_0} :$$

$$\tilde f(\widetilde{\mathcal{F}}_0) \in \widetilde{\mathfrak{F}}^{1\,\Sigma_1}_{\tilde f(\tilde x_0)}$$

$$2)\ (\forall)\, \widetilde{\mathcal{F}}_0 \in \widetilde{\mathfrak{F}}^{0\,\Sigma_0} : \tilde f(\widetilde{\mathcal{F}}_0) \in \widetilde{\mathfrak{F}}^{1\,\Sigma_1}.$$

---

[7] A se vedea pct. 3 de la Cap. I, §1 din [7].

[8] De fapt $\tilde x_0 \in \widetilde{E}_0^{\Sigma_0} = \mathfrak{F}^0$ deci $\tilde x_0$ este filtru pe E_0; prin $f(\tilde x_0)$ notăm filtrul imagine prin aplicaţia $f : E_0 \to E_1$.

Demonstrație. 1) *Avem* $\delta_{E_1}(\tilde{f}(\tilde{\mathcal{F}}_0)) = \tilde{f}(\delta_{E_0}(\tilde{\mathcal{F}}_0)) = f(\delta_{E_0}(\tilde{\mathcal{F}}_0))$[9]
dar $R^0(\delta_{E_0}(\tilde{\mathcal{F}}_0), \tilde{x}_0)$ deoarece $\tilde{\mathcal{F}}_0 \in \widetilde{\mathfrak{F}}^{0\Sigma_0}_{\tilde{x}_0}$
deci $R^1(f(\delta_{E_0}(\tilde{\mathcal{F}}_0)), f(\tilde{x}_0))$ deoarece
$f \in \Phi_u$ și Φ_u verifică (PT9.1)
deci $R^1(\delta_{E_1}(\tilde{f}(\tilde{\mathcal{F}}_0)), \tilde{f}(\tilde{x}_0))$
de unde $\tilde{f}(\tilde{\mathcal{F}}_0) \in \widetilde{\mathfrak{F}}^{1\Sigma_1}_{\tilde{f}(\tilde{x}_0)}$
2) avem $\delta_{E_1}(\tilde{f}(\tilde{\mathcal{F}}_0)) = f(\delta_{E_0}(\tilde{\mathcal{F}}_0))$
dar $\delta_{E_0}(\tilde{\mathcal{F}}_0) \in \mathfrak{F}^0$ deoarece $\tilde{\mathcal{F}}_0 \in \widetilde{\mathfrak{F}^{0\Sigma_0}}$
deci $f(\delta_{E_0}(\tilde{\mathcal{F}}_0)) \in \mathfrak{F}^1$ deoarece $f \in \Phi_u$ și Φ_u verifică (PT9.1).

TEOREMA (C^*). *În condițiile de la definiția 3 dacă* $\boxed{\sim} \in \mathrm{PTUT}(E_0, E_1)$ atunci $\widetilde{\boxed{\sim}} \in \mathrm{PTUTSC}\,(\tilde{E}_0^{\Sigma_0}, \tilde{E}_1^{\Sigma_1})$[10]).

Demonstrația rezultă din teorema C de la §1, punctul 2 și din propoziția 1.

ANEXĂ

FILTRUL DIAGONAL AL UNUI FILTRU DE FILTRE

Observația 1. Fie $E \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{F} \in \mathrm{FIL}\,(\mathrm{FIL}\,(E))$; atunci

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & E & \in & \mathfrak{P}(E) & \in & \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)) & \in & \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))) \\
 & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
x & \in & F & \in & \mathcal{F} & \in & \tilde{F} & \in & \tilde{\mathcal{F}} \\
\Cap & & \Cap & & \Cap & & \Cap & & \Cap \\
E & \in & \mathfrak{P}(E) & \in & \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)) & \in & \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathrm{E}))) & \in & \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)))).
\end{array}$$

DEFINIȚIA 1. *Fie* $E \in \mathfrak{M}$; *definim*

$$\delta_E : \mathrm{FIL}\,(\mathrm{FIL}\,(E)) \rightarrow \mathrm{FIL}\,(E)$$

încît

$$\delta_E(\tilde{\mathcal{F}}) = \mathrm{fil}_E \left\{ \bigcup_{\mathcal{F} \in \tilde{F}} F_{\mathcal{F}} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}} \\ 2) \\ (F_{\mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \in \tilde{F}) \in \prod\limits_{\mathcal{F} \in \tilde{F}} \mathcal{F} \end{array} \right\}.$$

Numim $\delta_E(\tilde{\mathcal{F}})$ *filtrul diagonal al filtrului de filtre* $\tilde{\mathcal{F}}$.

Faptul că această definiție are sens rezultă din

LEMA 1. *Fie* $E \in \mathfrak{W}$, $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathrm{FIL}\,(\mathrm{FIL}\,(E))$; *atunci*

$$\left\{ \bigcup_{\mathcal{F} \in \tilde{F}} F_{\mathcal{F}} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}} \\ 2)\ (F_{\mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \in \tilde{F}) \in \prod\limits_{\mathcal{F} \in \tilde{F}} \mathcal{F} \end{array} \right\} \in \mathrm{BFIL}\,(\mathrm{E}).$$

---

[9]) A se vedea anexa despre filtrul diagonal.

[10]) Prin $\boxed{\sim} \in \mathrm{PTUT}\,(E_0, E_1)$ înțelegem că Σ_0 și Σ_1 verifică condiția (PTT); prin $\boxed{\sim} \in \mathrm{PTUTSC}\,(E_0, E_1)$ înțelegem că Σ_0 și Σ_1 verifică condițiile (PTT), (PTS) și (PTC).

Demonstrație. Fie $\widetilde{F}, \widetilde{G} \in \widetilde{\mathcal{F}}$, $(F_{\mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \in \widetilde{F}) \in \prod\limits_{\mathcal{F} \in \widetilde{F}} \mathcal{F}$ și $(G_{\mathcal{G}} \mid \mathcal{G} \in \widetilde{G}) \in \prod\limits_{\mathcal{G} \in \widetilde{G}} \mathcal{G}$;

atunci $(\exists)\ \widetilde{H} \in \widetilde{\mathcal{F}} : \widetilde{H} \subseteq \widetilde{F} \cap \widetilde{G}$ deoarece $\widetilde{\mathcal{F}}$ este filtru;

fie $\mathcal{H} \in \widetilde{H}$; atunci rezultă că $\mathcal{H} \in \widetilde{F} \cap \widetilde{G}$

deci $F_{\mathcal{H}}, G_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$ de unde rezultă că

$(\exists)\ H_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H} : H_{\mathcal{H}} \subseteq F_{\mathcal{H}} \cap G_{\mathcal{H}}$ deoarece $\mathcal{H}$ este filtru

deci $(H_{\mathcal{H}} \mid \mathcal{H} \in \widetilde{H}) \in \prod\limits_{\mathcal{H} \in \widetilde{H}} \mathcal{H}$

și evident $\bigcup\limits_{\mathcal{H} \in \widetilde{H}} H_{\mathcal{H}} \subseteq \left(\bigcup\limits_{\mathcal{F} \in \widetilde{F}} F_{\mathcal{F}} \right) \cap \left(\bigcup\limits_{\mathcal{G} \in \widetilde{G}} G_{\mathcal{G}} \right)$.

Proprietățile filtrului diagonal folosite la construcția de completare sînt următoarele:

PROPOZIȚIA 1. *Fie* $E \in \mathfrak{M}$, $\mathcal{F} \in \mathrm{FIL}(E)$; *atunci*

1) $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} = \underset{\mathrm{FIL}(E)}{\mathrm{fil}} \{\mathcal{F}\} \in \mathrm{FIL}(\mathrm{FIL}(E))$ *și*

$\boldsymbol{\delta}_E(\mathcal{U}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}$

2) $\mathfrak{i}^E(\mathcal{F}) = \underset{\mathrm{FIL}(E)}{\mathrm{fil}} \{\{\mathcal{U}_x \mid x \in F\} \mid F \in \mathcal{F}\} \in \mathrm{FIL}(\mathrm{FIL}(E))$

și $\boldsymbol{\delta}_E(\mathfrak{i}^E(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$.

Demonstrație. 1) Fie $\widetilde{G} \in \mathcal{U}_{\mathcal{F}}$, $(G_{\mathcal{G}} \mid \mathcal{G} \in \widetilde{G}) \in \prod\limits_{\mathcal{G} \in \widetilde{G}} \mathcal{G}$

dar $\mathcal{F} \in \widetilde{G}$ deci $G_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$ și $G_{\mathcal{F}} \subseteq \bigcup\limits_{\mathcal{G} \in \widetilde{G}} G_{\mathcal{G}}$

deci $\boldsymbol{\delta}_E(\mathcal{U}_{\mathcal{F}}) \leqslant \mathcal{F}$;

reciproc, fie $F \in \mathcal{F}$; avem $\widetilde{G} = \{\mathcal{F}\} \in \mathcal{U}_{\mathcal{F}}$

și $(F) = (G_{\mathcal{G}} \mid \mathcal{G} \in \widetilde{G}) \in \prod\limits_{\mathcal{G} \in \widetilde{G}} \mathcal{G}$

dar $\bigcup\limits_{\mathcal{G} \in \widetilde{G}} G_{\mathcal{G}} = F \subseteq F$

deci $\mathcal{F} \leqslant \boldsymbol{\delta}_E(\mathcal{U}_{\mathcal{F}})$;

2) Fie $\widetilde{G} \in \mathfrak{i}^E(\mathcal{F})$, $(G_{\mathcal{G}} \mid \mathcal{G} \in \widetilde{G}) \in \prod\limits_{\mathcal{G} \in \widetilde{G}} \mathcal{G}$

atunci $(\exists)\ F \in \mathcal{F} : \{\mathcal{U}_x \mid x \in F\} \subseteq \widetilde{G}$

de aici rezultă însă că $\bigcup\limits_{\mathcal{G} \in \widetilde{G}} G_{\mathcal{G}} \supseteq \bigcup\limits_{x \in F} \{x\} = F$

deci $\boldsymbol{\delta}_E(\mathfrak{i}^E(\mathcal{F})) \leqslant \mathcal{F}$;

reciproc, fie $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$; avem $\widetilde{G} = \{\mathfrak{U}_x | x \in F\} \in \mathfrak{i}^E(\mathcal{F})$

şi $(G_{\mathcal{G}} = \{x\} \mid \mathcal{G} = \mathfrak{U}_x \in \widetilde{G}) \in \prod\limits_{\mathcal{G} \in \widetilde{G}} \mathcal{G}$

dar $\bigcup\limits_{\mathcal{G} \in \widetilde{G}} G_{\mathcal{G}} = \bigcup\limits_{x \in F} \{x\} = F \subseteq F$

deci $\mathcal{F} \leqslant \boldsymbol{\delta}_E(\mathfrak{i}^E(\mathcal{F}))$.

PROPOZIŢIA 2. *Fie* $E, E' \in \mathfrak{M}$, $f : E \to E'$, $\widetilde{\mathcal{F}} \in \mathrm{FIL}\,(\mathrm{FIL}\,(E))$ *atunci* $\boldsymbol{\delta}_{E'}\,(f(\widetilde{\mathcal{F}})) = f(\boldsymbol{\delta}_E(\widetilde{\mathcal{F}}))$.

Demonstrație. Fie $F' \in \boldsymbol{\delta}_{E'}(f(\widetilde{\mathcal{F}}))$

atunci $(\exists)\ \widetilde{F'} \in f(\widetilde{\mathcal{F}})$, $(F'_{\mathcal{F}'} | \mathcal{F}' \in \widetilde{F'}) \in \prod\limits_{\mathcal{F}' \in \widetilde{F'}} \mathcal{F}'$:

$$\bigcup_{\mathcal{F}' \in \widetilde{F'}} F'_{\mathcal{F}'} \subseteq F'$$

dar $(\exists)\ \widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{F}} : f(\hat{F}) \subseteq \widetilde{F}'$

iar $(\forall)\ \mathcal{F}' \in f(\widetilde{F}) :\ (\exists)\ \mathcal{F} \in \widetilde{F} : \mathcal{F}' = f(\mathcal{F})$

deci $(\forall)\ \mathcal{F}' \in f(\widetilde{F})$, $F'_{\mathcal{F}'} \in \mathcal{F}' :\ (\exists)\ \mathcal{F} \in \widetilde{F}$, $F_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F} : f(F_{\mathcal{F}}) \subseteq F'_{\mathcal{F}'}$

însă $(F_{\mathcal{F}} | \mathcal{F} \in \widetilde{F}) \in \prod\limits_{\mathcal{F} \in \widetilde{F}} \mathcal{F}$, $\bigcup\limits_{\mathcal{F} \in \widetilde{F}} F_{\mathcal{F}} \in \boldsymbol{\delta}_E(\widetilde{\mathcal{F}})$

şi $f\left(\bigcup\limits_{\mathcal{F} \in \widetilde{F}} F_{\mathcal{F}}\right) \subseteq \bigcup\limits_{\mathcal{F} \in \widetilde{F}} f(F_{\mathcal{F}}) \subseteq \bigcup\limits_{\mathcal{F}' \in \widetilde{F'}} F'_{\mathcal{F}'}$

de unde $\boldsymbol{\delta}_{E'}(f(\widetilde{\mathcal{F}})) \leqslant f(\boldsymbol{\delta}_E(\widetilde{\mathcal{F}}))$;
se arată în mod analog că

$$f(\boldsymbol{\delta}_E(\widetilde{\mathcal{F}})) \leqslant \boldsymbol{\delta}_{E'}(f(\widetilde{\mathcal{F}})).$$

Observația 2. De fapt în cursul operației de completare nu avem de a face cu filtre de filtre din FIL (FIL (E)) ci doar din FIL ($\mathfrak{F}$), unde $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{FIL}(E)$. Însă FIL ($\mathfrak{F}$) se poate considera scufundat în $\mathrm{FIL}_{\mathfrak{F}}\,(\mathrm{FIL}\,(E))$ deci în FIL (FIL (E)) prin operația biunivocă, pe

$$\underset{\mathrm{FIL}(E)}{\mathrm{FIL}\,(\mathfrak{F})} \ni \widetilde{\mathcal{F}} \to \mathrm{fil}\ \widetilde{\mathcal{F}} \in \mathrm{FIL}_{\mathfrak{F}}\,(\mathrm{FIL}\,(E))$$

a cărei inversă este

$$\mathrm{FIL}_{\mathfrak{F}}\,(\mathrm{FIL}\,(E)) \ni \hat{\mathcal{G}} \to \hat{\mathcal{G}} \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{F}) \in \mathrm{FIL}\,(\mathfrak{F}).$$

Deci pentru rigurozitate vom defini

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}_E : \left(\bigcup_{\substack{\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{FIL}(E) \\ \mathfrak{F} \neq \varnothing}} \mathrm{FIL}\,(\mathfrak{F})\right) \to \mathrm{FIL}\,(E)$$

ca $\bar{\boldsymbol{\delta}}_E(\widetilde{\mathcal{F}}) = \boldsymbol{\delta}_E(\mathop{\mathrm{fil}}\limits_{\mathrm{FIL}(E)} \widetilde{\mathcal{F}})$.

În aceste condiții are loc evident

Lema 2. *Fie* $E \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{FIL}(E)$, $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathrm{FIL}(\mathfrak{F})$

atunci $\bar{\delta}_E(\tilde{\mathcal{F}}) = \mathrm{fil}_E \left\{ \bigcup^{F}_{\mathcal{F} \in \tilde{F}} \mathcal{F} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}} \\ 2)\ (F_{\mathcal{F}} | \mathcal{F} \in \tilde{F}) \in \prod\limits_{\mathcal{F} \in \tilde{F}} \mathcal{F} \end{array} \right\}.$

Deci propozițiile 1 și 2 rămîn valabile și pentru $\bar{\delta}_E$. Acest fapt ne permite să folosim pentru ambii operatori aceeași notație și anume δ_E.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Bourbaki, *Topologie générale*. Paris, 1940, II, III, IX, X.
2. N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, vol. I, Paris 1953.
3. N. Dunford and I. T. Schwartz, *Linear Operators*, New York, London, 1958.
4. И.М. Гельфанд — Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции*. vol. II, Москва, 1958.
5. Gh. Marinescu, *Spații vectoriale topologice și pseudotopologice*, Ed. Academiei R.P.R. București, 1959.
6. M. Nicolescu, *Analiză matematică*, Ed. tehnică, București, 1958, vol. III.
7. E. Rosinger, *Structuri pseudotopologice*. Studii și cercetări matematice. **14**, 2,223–251 (1963).
8. L. Schwartz, *Théorie des distributions*, vol. I și II, Paris, 1957.

TEORIA TRANZI-GRUPURILOR. I. RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ ȘI SUBGRUPURI ASOCIATE

DE

ALEXANDRU SOLIAN

Introducere. Noțiunea de relație de echivalență într-o mulțime pare a fi scoasă din aceea de subgrup al unui grup sau invers : într-adevăr, reflexivitatea corespunde existenței și proprietății caracteristice a elementului neutru, simetria, existenței elementului invers iar tranzitivitatea, posibilității de a forma produsul. Din punct de vedere formal, în calculul cu relații, astfel de paralelisme au fost puse în evidență (a se vedea de ex. [8], [27], [34], [33] unde se instituie calculul cu relații binare mai generale); dar aceasta numai din punct de vedere formal, pentru că studiul relațiilor de echivalență făcut în legătură cu teoria grupurilor (de transformări) n-a fost încă întreprins sau dacă a fost, aceasta s-a făcut într-o manieră cu totul incidentală (semnalez principalele contribuții în această direcție pe care le cunosc). Este adevărat că funcțiile pot fi caracterizate în limbajul relațiilor dar funcția nu este o echivalență (nici măcar transformarea nu este) iar echivalența nu este o funcție uniformă. [1])

Lucrările care urmează [2]) sînt rezultatul unui astfel de studiu. Studiul relațiilor de echivalență și al partițiilor corespunzătoare este dus destul de adînc și de întins în literatură (a se vedea [8], [3], [37], [13], [22], [10], [11], [12], [5], [34], [7], [9], [15]); cadrul acestor cercetări este de obicei următorul : este vorba fie de mulțimi fără structură algebrică, fie de algebre abstracte în sensul lui Birkhoff [2], [3]; mai există o serie de lucrări care studiază relațiile de echivalență în grupoide, semigrupuri, cvasigrupuri, grupuri, inele, latici etc. Cadrul studiului nostru este acela al unei mulțimi M, dotată cu un grup $\mathfrak{A}$ de transformări (adică aplicații biunivoce ale lui M pe M; aici grupul este efectiv [25], adică

---

[1]) Pentru cazul particular al involuției a se vedea [26], unde noțiunea de relație de echivalență pare a fi asociată nu unui subgrup, ci unui element dintr-un grup.

[2]) Această introducere se referă la șiruri întregi de lucrări asupra teoriei tranzi-grupurilor.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 9, P. 1111–1127, BUCUREȘTI, 1964

transformările sînt egale dacă și numai dacă ele au același efect asupra elementelor mulțimii), în care se introduce la un moment dat un element distins; se obține astfel o nouă structură algebrică, *tranzi-grupul* care constituie obiectul principal de studiu. Legătura menționată mai sus între relațiile de echivalență în M și grupul $\mathfrak{A}$ este pusă în evidență prin noțiunile de *subgrup asociat* unei relații de echivalență și de *echivalența asociată* unui subgrup; aceste noțiuni au fost introduse, exceptînd denumirea, de P. Dubreil [8] (a se vedea și F. Šik [28]); dar noi arătăm ca primă relație că această dublă asociație dă o conexiune Galois duală (noțiune definită în [8]) între echivalențele mulțimii M și subgrupurile lui $\mathfrak{A}$ (această conexiune Galois este cunoscută de Everett [14] în cazul particular în care $\mathfrak{A}$ este grupul tuturor transformărilor lui M). Legătura nu se reduce numai la aceasta: considerînd o anumită clasă de echivalențe, echivalențele *imprimitive* față de $\mathfrak{A}$, subgrupurile asociate unor astfel de echivalențe sînt divizori normali ai lui $\mathfrak{A}$ (acest rezultat aparține lui Šik [29], [30] dar a fost regăsit independent de noi). Termenul „echivalență imprimitivă" este justificat de faptul că dacă $\mathfrak{A}$ este un grup tranzitiv, clasele unei astfel de echivalențe sînt domenii de imprimitivitate pentru $\mathfrak{A}$ (Dubreil [9] numește o astfel de echivalență, echivalență de imprimitivitate a lui $\mathfrak{A}$). Desigur, echivalențele imprimitive sînt o particularizare la cadrul nostru, a echivalențelor omomorfice ale lui Birkhoff [2], [3] pentru algebrele abstracte (a se vedea și [34], [15][3])); dar cazul particular de care este vorba este remarcabil în primul rînd pentru rezultatul de mai sus căci el pune în evidență rolul pe care aceste relații îl joacă în cadrul nostru: dacă echivalențele oarecari corespund subgrupurilor oarecari, echivalențele imprimitive corespund divizorilor normali; dacă se adaugă teorema de permutabilitate dată în prima parte precum și o teoremă de modularitate în latice (care va apărea într-o lucrare viitoare [32]) analogia cu subgrupurile normale este și mai evidentă; tabloul este completat prin aceea că, dacă echivalențele imprimitive au fost definite astfel încît transformările grupului $\mathfrak{A}$ să poată acționa pe mulțimea-cît (a se vedea și [3], [15]), tocmai grupul-factor al lui $\mathfrak{A}$ în raport cu divizorul normal asociat, este cel care acționează pe această mulțime-cît (acest rezultat aparținînd tot lui Šik [29], [30] a fost de asemenea regăsit în mod independent de noi) (a se vedea și teoremele analoage pentru cvasigrupuri la Šik [29] și Albert [1]).

Acum totul este gata pentru a introduce noua noastră noțiune, aceea de tranzi-grup (noțiunea de spațiu omogen a lui Bourbaki [6] ar putea fi considerată ca un caz particular a aceleia de tranzi-grup, și anume cazul în care $\mathfrak{A}$ este un grup tranzitiv, dacă n-ar fi vorba de elementul distins și de efectivitatea grupului de transformări). În această ordine de idei se poate pune problema dacă tranzi-grupul este un caz particular de algebră abstractă în sensul lui Birkhoff [2], [3]; fără a ține seama de

---

[3]) Pentru structurile algebrice cu o operație există o noțiune analoagă foarte utilă numită de obicei congruență de care se leagă o serie de lucrări: cităm [8], [13], [20], [5], [21] ca reprezentații acestei serii de lucrări care reunesc majoritatea rezultatelor.

elementul distins care nu e decît o nouă particularizare (și pe care îl găsim sub forma mai generală a subalgebrei distinse în [16], [17], pentru algebrele abstracte și în [12] și [7] pentru teoria echivalențelor într-o mulțime fără structură algebrică), la aproape toți autorii inclusiv Birkhoff, domeniul de operații care de altfel n-are nici o structură algebrică, e mereu același, atît în ceea ce privește subalgebrele și algebrele-cît, cît și în ceea ce privește diversele algebre care apar și care pot să se compună de exemplu în produs direct (a se vedea și [35]) ; numai în [15] domeniul de operații are parțial (în ceea ce privește așa-numitele monotații) o structură algebrică și se poate schimba prin trecerea la algebra-cît ; apoi noțiunea de subalgebră (care poate trece drept generalizare a noțiunii noastre de subtranzi-grup) nu este decît un sistem închis în raport cu operațiile [4], [35] ; în opoziție cu aceasta, la noi, subtranzi-grupul este format plecînd de la o relație de echivalență, ceea ce nu se întîmplă pentru algebrele abstracte decît la Goldie [17], unde este vorba de anumite subalgebre particulare, subalgebrele normale ; în sfîrșit, s-ar putea cita opoziția dintre definiția produsului direct în teoria algebrelor și definiția aceleiași noțiuni la noi. Toate aceste argumente m-au condus la părerea că tranzi-grupul nu este un caz particular de algebră abstractă, în sensul lui Birkhoff ; și chiar dacă cineva nu împărtășește această părere, studiul tranzi-grupurilor își justifică existența prin specificul noțiunilor și al rezultatelor care permite să se întreprindă acest studiu mai profund decît în cazul general. În ceea ce privește tranzi-grupurile se introduc noțiunile fundamentale și se demonstrează cele trei teoreme de izomorfism (primele două teoreme sînt date pentru mulțimile fără nici o structură algebrică, în [10] și [7], iar pentru algebrele abstracte în [16]) ; în afară de aceasta se studiază noțiunile de produs direct, produs liber, olomorf. Datorită specificului noțiunilor s-a introdus printre noțiunile fundamentale, în afară de cele obișnuite, noțiunea de tranzi-grup asociat unui subtranzi-grup dat și noțiunea de subtranzi-grup asociat unui subtranzi-grup conținut în alt subtranzi-grup : într-adevăr, acest lucru este necesar pentru că așa după cum se arată în [18], există o algebră care are două congruențe diferite ale căror clase care conțin elementul distins, coincid ; este deci foarte plauzibil ca la două subtranzi-grupuri distincte să se asocieze același tranzi-grup.

În ultima parte se leagă teoria tranzi-grupurilor de teoria grupurilor și iată cum : dacă grupul $\mathfrak{A}$ este un grup tranzitiv și regulat de transformări ale lui M, se poate stabili între $\mathfrak{A}$ și M o corespondență biunivocă și acțiunea unui element din $\mathfrak{A}$ asupra unui element din M poate fi interpretată ca o lege de compoziție (interioară) de grup ; acest rezultat legat de teorema de reprezentare a lui Cayley arată că grupul (abstract) poate fi conceput ca un tranzi-grup tranzitiv și regulat. Elementul grupal este deci rezultatul unui proces de unificare între transformare și elementul transformat și teoria tranzi-grupurilor prezintă interes și prin aceea că consideră un moment în care această unificare nu este încă făcută (adopt acest punct de vedere pentru tratarea noțiunii de grup abstract, într-o notă anterioară [31] unde totuși noțiunea de tranzi-grup nu apare încă în mod explicit) ; s-ar putea spune că tranzi-grupul este o formațiune intermediară între formațiunea colectivă, latice, în care elementele unei structuri preexistente nu interesează și formațiunea atomistică, grup etc., în care elementul este esențial.

Aici este cazul de a face și observația următoare : nu trebuie să se considere că mulțimea claselor de resturi ale unui grup (cu operatori) G în raport cu un subgrup H poate fi organizată ca nouă structură algebrică numai în cazul în care H este cel puțin un subgrup normal (dacă vrem ca mulțimea aceasta să fie un grup cu operatori, trebuie chiar ca H să fie un subgrup normal permis) ; în cazul general această mulțime poate fi considerată ca mulțime a elementelor transformate ale unui anumit tranzigrup).

Această primă parte este consacrată studiului noțiunilor preliminare (echivalență și subgrup asociat, imprimitivitate, permutabilitate, închidere etc) și rezultatelor corespunzătoare.

§ 1. SUBGRUP ASOCIAT UNEI RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ ȘI RELAȚIE DE ECHIVALENȚĂ ASOCIATĂ UNUI SUBGRUP

1°. **Definiții fundamentale.** 1) Fiind dată o mulțime abstractă nevidă M se numește *relația de echivalență* (sau mai pe scurt echivalență) în mulțimea M (a se vedea [8], p. 18) o relație binară $\sim$ definită între elementele lui M, și care este

a) reflexivă : $x \sim x$, pentru orice $x \in M$;

b) simetrică : $x \sim y$ implică $y \sim x$, $x, y \in M$;

c) tranzitivă : $x \sim y$, $y \sim z$ implică $x \sim z$.

O echivalență $\sim$ în M determină o partiție a lui M în submulțimi disjuncte, *clasele de echivalență* ale lui M în raport cu $\sim$ (a se vedea [36], p. 14, [8], p. 19). Mulțimea acestor clase se numește mulțimea-cît a lui M în raport cu $\sim$ și se notează cu $M/\sim$.

2) Notînd prin $\mathfrak{S}(M)$ mulțimea tuturor echivalențelor în M, se știe că $\mathfrak{S}(M)$ este o latice completă [4]) în raport cu relația de ordine următoare (a se vedea [8], p. 12, 61 [10, 3, 22]) :

Dacă $\sim_1$, $\sim_2 \in \mathfrak{S}(M)$, se spune că „$\sim_1$ este mai mică decît $\sim_2$" sau că „$\sim_1$ este mai fină decît $\sim_2$" sau că „$\sim_1$ este o minorantă a lui $\sim_2$" sau că „$\sim_2$ este o majorantă a lui $\sim_1$" se scrie

$$\sim_1 \leqslant \sim_2 \text{ sau } \sim_2 \geqslant \sim_1$$

dacă și numai dacă $a \sim_1 b$ implică $a \sim_2 b$, $a, b \in M$.

Reuniunea și intersecția sînt următoarele (a se vedea lucrările citate mai sus) : dacă $\sim_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, este o familie de echivalențe în M, atunci :

---

[4]) Pentru definiția acestei noțiuni a se vedea [19], p. 282, sau [2], § II, 1.

a) Relația binară $\sim_{\vee}$ în M definită în felul următor: „avem $a \sim_{\vee} b$, $a, b \in M$ dacă și numai dacă există un șir finit de elemente $x_i \in M$, $i = 0, \ldots, n$, astfel încît

$$a = x_0 \sim_{\lambda_1} x_1 \sim_{\lambda_2} \ldots \sim_{\lambda_n} x_n = b,\ \lambda_i \in \Lambda,\ i = 1, \ldots, n\text{''},$$

este o echivalență în M, și reprezintă cea mai mică majorantă comună conținută în $\mathfrak{E}(M)$ a echivalențelor $\sim_{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, în sensul ordinei parțiale definite; această echivalență se numește *reuniunea* echivalențelor $\sim_{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, și se notează prin $\bigvee\limits_{\lambda \in \Lambda} \sim_{\lambda}$.

b) Relația binară $\sim_{\wedge}$ în M, definită în felul următor: „avem $a \sim_{\wedge} b$, $a, b \in M$ dacă și numai dacă $a \sim_{\lambda} b$, pentru orice $\lambda \in \Lambda$" este o echivalență în M și reprezintă cea mai mare minorantă comună conținută în $\mathfrak{E}(M)$ a echivalențelor $\sim_{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$; această echivalență se numește *intersecția echivalențelor* $\sim_{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, și se notează prin $\bigwedge\limits_{\lambda \in \Lambda} \sim_{\lambda}$.

Primul (cel mai mic) element din $\mathfrak{E}(M)$ este *identitatea* sau *echivalența identică*: două elemente din M sînt în această relație dacă și numai dacă ele coincid; o notăm prin $\overset{0}{\sim}$ cînd ea apare de sine stătător, iar cînd leagă două elemente a, b, se scrie $a = b$. Ultimul (cel mai mare) element al lui $\mathfrak{E}(M)$ este *echivalența totală* notată prin $\overset{1}{\sim}$: avem $a \overset{1}{\sim} b$ oricare ar fi a, $b \in M$ (pentru definiția acestei noțiuni a se vedea [8], p. 11, 18, unde echivalența totală este numită echivalență universală sau absolută precum și [10], [13], [5]).

3) Se numește *transformare* a mulțimii M, o aplicație τ, biunivocă a lui M pe M (a se vedea [36], p. 16, [8], p. 28). Produsul a două transformări σ, τ ale lui M este aplicația $\sigma\tau : M \to M$, definită prin $(\sigma\tau)(x) = \sigma(\tau(x))$, $x \in M$; $\sigma\tau$ este o nouă transformare a lui M. Inversa unei transformări τ este aplicația $\tau^{-1} : M \to M$ care aplică un $y \in M$ în $x \in M$ dacă $\tau(x) = y$; τ^{-1} este o nouă transformare a lui M. O mulțime nevidă $\mathfrak{A}$ de transformări ale lui M care, împreună cu două transformări conține și produsul lor și împreună cu o transformare conține și inversa ei, se numește *grup de transformări* ale lui M; se știe ([19], p. 31) că cu aceste definiții un grup de transformări este și un grup abstract față de produsul de transformări, definit mai sus. În particular, toate transformările lui M formează un grup de transformări ale lui M pe care îl notăm prin $\mathfrak{T}(M)$.

Elementul unitate a lui $\mathfrak{T}(M)$ care este *transformarea identică* a lui M, îl notăm prin 1.

În cele ce urmează, atunci cînd va fi dată o mulțime M cu un grup de transformări $\mathfrak{A}$, se va presupune că grupul $\mathfrak{A}$ este un grup *efectiv* de transformări ale lui M ([25], cap. I, § 3, I)), adică două elemente din $\mathfrak{A}$ sînt egale dacă transformările corespunzătoare sînt egale.

Dacă pentru orice a, $b \in M$, există cel puțin respectiv cel mult un $\tau \in \mathfrak{A}$, astfel încît $\tau(a) = b$, se spune că grupul $\mathfrak{A}$ este un grup *tranzitiv* (a se vedea [36], p. 145) respectiv *regulat* (a se vedea [19], p. 36) de transformări ale lui M.

2°. 1) Fie M o mulțime, $\mathfrak{A}$ un grup de transformări ale lui M; dacă $\sim$ este o echivalență a lui M, se notează prin $\mathfrak{B}(\sim)$ mulțimea tuturor transformărilor τ, $\tau \in \mathfrak{A}$, pentru care avem $\tau(x) \sim x$ pentru orice $x \in M$; dacă este pericol de confuzie, în loc de $\mathfrak{B}(\sim)$ se scrie $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}(\sim)$ sau chiar $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}^{M}(\sim)$; dacă $\mathfrak{B}$ este un subgrup al lui $\mathfrak{A}$, se notează prin $\sim(\mathfrak{B})$, relația binară definită în M, prin:

$$a \sim b \Leftrightarrow \text{există un } \tau \in \mathfrak{B} \text{ astfel încît } \tau(a) = b \text{ pentru } a, b \in M.$$

Se știe (a se vedea [8] p. 125)[5]) că $\mathfrak{B}$ este un subgrup al lui $\mathfrak{A}$ și (a se vedea [8], p. 126 și [6], §7, 5) că relația $\sim(\mathfrak{B})$ este o echivalență în M.

2) DEFINIȚIA 1. $\mathfrak{B}(\sim)$ se numește *subgrupul asociat* echivalenței $\sim$; $\sim(\mathfrak{B})$ se numește *echivalența asociată* subgrupului $\mathfrak{B}$.

3°. 1) Avem

TEOREMA 1. *Perechea de aplicații care asociază pe de o parte unei echivalențe* $\sim$ *subgrupul* $\mathfrak{B}(\sim)$ *și pe de altă parte unui subgrup* $\mathfrak{B}$ *echivalența* $\sim(\mathfrak{B})$, *este o conexiune Galois duală* [6]) *între mulțimea* $\mathfrak{E}(M)$ *ordonată prin* $\leqslant$ *și mulțimea subgrupurilor lui* $\mathfrak{A}$ *ordonată prin incluziune; în această conexiune Galois duală, închiderea este obținută prin trecerea de la* $\mathfrak{B}$ *la* $\mathfrak{B}(\sim(\mathfrak{B}))$[7]).

Demonstrație. a) $\sim_1 \leqslant \sim_2$ implică $\mathfrak{B}(\sim_1) \subset \mathfrak{B}(\sim_2)$; căci dacă $\tau \in \mathfrak{B}(\sim_1)$, avem $\tau(x) \sim_1 x$ pentru orice $x \in M$, deci $\tau(x) \sim_2 x$, $x \in M$, deci $\tau \in \mathfrak{B}(\sim_2)$.

b) $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$ implică $\sim(\mathfrak{B}_1) \leqslant \sim(\mathfrak{B}_2)$; căci dacă notăm prin $\sim_i$ echivalența $\sim(\mathfrak{B}_i)$, $i = 1, 2$, și dacă $a \sim_1 b$, rezultă existența unui $\tau \in \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$ astfel încît $\tau(a) = b$; deci, $a \sim_2 b$.

c) $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}(\sim(\mathfrak{B}))$; căci dacă $\tau \in \mathfrak{B}$, atunci, notînd $\sim\, = \,\sim(\mathfrak{B})$, rezultă $\tau(x) \sim x$ pentru orice $x \in M$, deci $\tau \in \mathfrak{B}(\sim)$.

d) $\sim(\mathfrak{B}(\sim)) \leqslant \sim$; căci notînd prin $\sim_1$ echivalența $\sim(\mathfrak{B}(\sim))$, dacă $a \sim_1 b$, există un $\tau \in \mathfrak{B}(\sim)$ astfel încît să avem $\tau(a) = b$; dar $\tau(a) \sim a$, deci $a \sim b$.

2) În aceste condiții, între mulțimea echivalențelor $\sim$ pentru care există un $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, astfel încît $\sim\, = \,\sim(\mathfrak{B})$ (*echivalențe-imagine*) și mulțimea subgrupurilor $\mathfrak{B}$ ale lui $\mathfrak{A}$ pentru care există o echivalență $\sim$, astfel încît $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\sim)$ (*subgrupuri-imagine*), există două aplicații biunivoce, inverse una celeilalte care păstrează ordinea parțială, și care sînt induse de aplicațiile din teorema 1 (a se vedea [8], p. 123, [2], p. 91, [24]); avem deci

CONSECINȚA 1. *Pe mulțimea echivalențelor-imagine și mulțimea subgrupurilor-imagine, aplicațiile definite în enunțul teoremei 1, induc*

---

[5]) A se vedea și [6], §7, ex. 6) a).

[6]) Pentru definiția conexiunii Galois, a se vedea [8], p. 119, [24], sau [2] p. 91; pentru definiția conexiunii Galois duale, a se vedea [8], p. 121.

[7]) Folosirea limbajului teoriei conexiunilor Galois ne-a fost sugerat de Paul Dubreil.

aplicații biunivoce, inverse una celeilalte și care păstrează ordinea[8]; *prin urmare, avem*

$$\mathfrak{B}(\sim(\mathfrak{B}(\sim))) = \mathfrak{B}(\sim); \quad \sim(\mathfrak{B}(\sim(\mathfrak{B}))) = \sim(\mathfrak{B}).$$

3) CONSECINȚA 2. *Dacă* $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\sim)$, *atunci, în virtutea consecinței 1, avem* $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\sim_1)$, *unde* $\sim_1 = \sim(\mathfrak{B}(\sim))$; *la fel dacă* $\sim = \sim(\mathfrak{B})$, *atunci avem* $\sim = \sim(\mathfrak{B}_1)$, *unde* $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}(\sim(\mathfrak{B}))$.

4) *Observația 1.* Aplicațiile din teorema 1 sînt definite în [8], p. 123 și 126, ($\mathfrak{B}(\sim)$ este definit ca fiind subgrupul care conține transformările care *respectă* echivalența $\sim$ iar echivalența $\sim(\mathfrak{B})$ este numită *echivalența de tranzitivitate* a lui $\mathfrak{B}$); nu se demonstrează acolo decît punctele *a*) și *b*) din teorema 1 (p. 124 și 126) (a se vedea și Šik [28]; una dintre aplicații, aceea de la $\mathfrak{B}$ la $\sim(\mathfrak{B})$, este dată și în [6], § 7, 5); cealaltă este dată numai în cazul particular $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}(M)$ (§ 7, exercițiul 6) a)). Teorema 1 este dată de Everett [14] în cazul particular $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}(M)$; în cazul în care se mai presupune că M este o mulțime finită, această teoremă este dată și de Birkhoff [3]; Riguet [27] dă o conexiune Galois duală, menționată ca atare, care asociază, într-un sens, subgrupurilor lui $\mathfrak{A}$, relații de echivalență în M, dar în celălalt sens, asociază unei echivalențe $\sim$ subgrupul lui $\mathfrak{A}$ format numai din *automorfisme*, adică din transformările τ pentru care $\tau(x) \sim x$, $x \in M$; în [34] se poate găsi o conexiune Galois între mulțimea subgrupurilor lui $\mathfrak{A}$ și mulțimea echivalențelor imprimitive în raport cu $\mathfrak{A}$ (a se vedea §3). Relativ la subgrupul asociat unei echivalențe a se vedea [3] și [37], unde se asociază unei echivalențe $\sim$, grupul tuturor $\tau \in \mathfrak{T}(M)$ pentru care avem $\tau(x) \sim x$ și pentru care τ lasă invarianți aproape toți x, adică toți, cu excepția eventuală a unui număr finit dintre ei.

4°. **Proprietăți și exemple.** 1) Se poate întîmpla ca, deși $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$, echivalența $\sim(\mathfrak{B})$ să fie echivalența totală $\overset{1}{\sim}$ a lui M: aceasta în cazul în care $\mathfrak{B}$ este un subgrup tranzitiv de transformări ale lui M (de exemplu, grupul alternant, în cazul în care M este o mulțime finită iar $\mathfrak{A}$ este grupul simetric de transformări ale lui M); invers, e posibil ca $\mathfrak{A}$ însuși să aibă drept echivalență asociată, o echivalență diferită de $\overset{1}{\sim}$ (cînd $\mathfrak{A}$ este intranzitiv).

2) PROPOZIȚIA 1. (Everett [14]). *Avem* $\sim(\mathfrak{B}_{\mathfrak{T}(M)}(\sim)) = \sim$ *pentru orice echivalență* $\sim \in \mathfrak{E}(M)$.

În virtutea teoremei 1, mai rămîne de arătat că $\sim \leqslant \sim(\mathfrak{B}(\sim))$: într-adevăr, dacă $a \sim b$, să notăm prin τ, $\tau \in \mathfrak{T}(M)$, transformarea definită astfel:

$$\tau(a) = b, \ \tau(b) = a, \ \tau(x) = x, \ x \neq a, \ x \neq b;$$

avem $\tau \in \mathfrak{B}(\sim)$, deci inegalitatea este demonstrată. Această propoziție poate fi interpretată spunînd că pentru $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}(M)$, orice echivalență a lui M este o echivalență-imagine.

---

[8] Acestea sînt chiar izomorfisme de latice completă (a se vedea și [32]).

3) Faptul că, în general, avem $\sim(\mathfrak{B}(\sim)) \neq \sim$, este pus în evidență de următorul

Exemplu. Fie G un grup neabelian, al cărui centru Z conține elemente de ordine diferite (un astfel de grup G poate fi construit prin formarea produsului direct dintre un grup abelian Z, satisfăcînd proprietatea de mai sus, printr-un grup care are drept centru subgrupul identic). Drept M, se ia mulțimea elementelor lui G, drept $\mathfrak{A}$, subgrupul automorfismelor lui G; fie $\sim$ congruența în raport cu Z. $\mathfrak{B}(\sim)$ este subgrupul format de automorfismele lui G, care aplică orice element $a \in G$, într-un element situat în aceeași clasă de resturi modulo Z ca și a, cu alte cuvinte de automorfismele centrului ale lui G (a se vedea [38], p. 46). Deci notînd prin $\sim_1$ echivalența $\sim(\mathfrak{B}(\sim))$, obținem faptul că două elemente $x, y \in G$ sînt în relația $x \sim_1 y$, dacă există un automorfism τ al centrului, astfel încît $\tau(x) = y$. Fie $a, b \in Z$ două elemente de ordine diferite; avem $a \sim b$ dar $a \not\sim_1 b$, căci nu există nici un automorfism, cu atît mai puțin un automorfism al centrului, care să aplice a în b.

4) Pentru a completa cunoștințele asupra echivalențelor-imagine, enunțăm

PROPOZIȚIA 2. *O echivalență $\sim$ a lui M este o echivalență-imagine dacă și numai dacă, presupunînd $a \sim b$, $a, b \in M$, rezultă existența unui $\tau \in \mathfrak{A}$, astfel încît*

$$\alpha)\ \tau(a) = b$$

$$\beta)\ \tau(x) \sim x, \textit{ pentru orice } x \in M.$$

Demonstrație. Să presupunem că avem $\sim = \sim(\mathfrak{B})$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$; dacă $a \sim b$, $a, b \in M$, există un τ, $\tau \in \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, avînd proprietatea α); dar $\tau \in \mathfrak{B}$, deci pentru orice x avem $\tau(x) \sim x$.

Să presupunem că $\sim$ are proprietatea din enunț; fie $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\sim)$; să arătăm că

$$\sim = \sim(\mathfrak{B}). \tag{1}$$

Avînd în vedere că $\sim \geqslant \sim_1 = \sim(\mathfrak{B}(\sim))$ (teorema 1, d)), rămîne de arătat inegalitatea inversă; fie $a \sim b$; conform ipotezei, există un $\tau \in \mathfrak{A}$ care satisfac α) și β); în virtutea proprietății β), avem $\tau \in \mathfrak{B}$; deci $a \sim_1 b$ și relația (1) este demonstrată.

§ 2. ÎNCHIDEREA $\mathfrak{B}(\sim(\mathfrak{B}))$.

Dacă M este o mulțime nevidă și dacă $\mathfrak{A}$ este un grup de transformări ale lui M, să cercetăm care sînt elementele subgrupului $\mathfrak{B}(\sim(\mathfrak{B}))$, unde $\mathfrak{B}$ este un subgrup dat al grupului $\mathfrak{A}$.

1°. Se știe (teorema 1, c)) că avem $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}(\sim(\mathfrak{B})) \supset \mathfrak{B}$. Fie $\tau_1 \in \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{A}$; dacă $\sim(\mathfrak{B}) = \sim$, avem $\tau_1(x) \sim x$, pentru orice $x \in M$, deci pentru orice $x \in M$, există un $\tau_x \in \mathfrak{B}$, astfel încît

$$\tau_x(x) = \tau_1(x). \tag{2}$$

Reciproc, fie $\tau_1 \in \mathfrak{A}$, avînd proprietatea că pentru orice $x \in M$, există un $\tau_x \in \mathfrak{B}$ astfel încît să avem (2); rezultă $\tau_x(x) \sim x$ şi conform cu (2), avem $\tau_1(x) \sim x$ pentru orice $x \in M$; deci $\tau_1 \in \mathfrak{B}_1$. Avem deci

TEOREMA 2. *Subgrupul* $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}\,(\sim(\mathfrak{B}))$ *este format din toate transformările* $\tau_1 \in \mathfrak{A}$ *avînd proprietatea că, pentru orice* $x \in M$, *există un* $\tau_x \in \mathfrak{B}$, *astfel încît să avem relaţia (2).*

2°. Pentru a determina în mod explicit subgrupul $\mathfrak{B}\,(\sim(\mathfrak{B}))$, se fac următoarele consideraţii:

Fie dată o familie de transformări τ_λ, $\tau_\lambda \in \mathfrak{B}, \lambda \in \Lambda$ (Λ este o mulţime de indici), în aşa fel încît să existe o aplicaţie univocă $\alpha: M \to \Lambda$ (care asociază deci fiecărui $x \in M$ un $\lambda = \alpha(x) \in \Lambda$) care satisface următoarele proprietăţi:

1) pentru orice $\lambda \in \Lambda$ există un $x \in M$, astfel încît $\alpha(x) = \lambda$;

2) $x \neq y$ implică $\tau_{\alpha(x)}(x) \neq \tau_{\alpha(y)}(y)$;

3) pentru orice $z \in M$, există un $x \in M$, astfel încît $\tau_{\alpha(x)}(x) = z$.

Aplicaţia lui M în M dată de $x \to \tau_{\alpha(x)}(x)$ este în aceste condiţii o transformare τ_1 a lui M (nu neapărat conţinută în $\mathfrak{A}$) pentru că, conform proprietăţii 3) această aplicaţie aplică M pe M şi conform proprietăţii 2) ea este biunivocă. Avem

PROPOZIŢIA 3. *Subgrupul* $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}\,(\sim(\mathfrak{B}))$ *este format din transformările* $\tau_1 \in \mathfrak{A}$, *care corespund, în modul descris mai sus, tuturor familiilor* τ_λ, $\lambda \in \Lambda$, *şi tuturor aplicaţiilor* α *posibile care satisfac proprietăţile* 1), 2), 3).

Demonstraţie. Dacă $\tau_1 \in \mathfrak{B}_1$, pentru orice $x \in M$ există, conform teoremei 2, un $\tau_x \in \mathfrak{B}$ astfel încît să avem (2); numerotînd toţi τ_x, $x \in M$, prin indici λ (de exemplu numere ordinale), astfel încît, dacă $\tau_x = \tau_y$, τ_x şi τ_y să aibă acelaşi indice λ (chiar dacă $x \neq y$), se ia drept Λ mulţimea tuturor indicilor λ folosiţi; aplicaţia $\alpha: M \to \Lambda$ se defineşte în modul următor: dacă τ_x are indicele λ, atunci $\alpha(x) = \lambda$; condiţia 1) este satisfăcută conform definiţiei lui Λ; un indice λ nu apare în Λ, decît dacă este indice al unui anumit τ_x, deci dacă, pentru un anumit x, avem $\alpha(x) = \lambda$; condiţia 2) este satisfăcută căci $x \neq y$ implică $\tau_1(x) \neq \tau_1(y)$, deci

$$\tau_{\alpha(x)}(x) = \tau_x(x) = \tau_1(x) \neq \tau_1(y) = \tau_y(y) = \tau_{\alpha(y)}(y);$$

condiţia 3) este şi ea satisfăcută, deoarece dacă $z \in M$, există un $x \in M$ astfel încît să avem $\tau_1(x) = z$, deci $\tau_x(x) = \tau_{\alpha(x)}(x) = z$; avînd în vedere că $\tau_1(x) = \tau_{\alpha(x)}(x)$, pentru orice $x \in M$, ceea ce înseamnă că transformarea τ_1 aplică x în $\tau_{\alpha(x)}(x)$, rezultă că τ_1 corespunde în modul descris familiei τ_λ, $\lambda \in \Lambda$, şi aplicaţiei α.

Reciproc, dacă $\tau_1 \in \mathfrak{A}$ corespunde familiei τ_λ, $\lambda \in \Lambda$, şi aplicaţiei α, rezultă că, pentru orice $x \in M$, există un $\tau_x \in \mathfrak{B}$, anume $\tau_x = \tau_{\alpha(x)}$, astfel încît să avem (2); deci, conform teoremei 2, avem $\tau_1 \in \mathfrak{B}_1$.

3°. PROPOZIŢIA 4. *Dacă* $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, *este un grup tranzitiv de transformări ale lui* M, *atunci* $\mathfrak{B}(\sim(\mathfrak{B})) = \mathfrak{A}$.

Într-adevăr, dacă $\tau_1 \in \mathfrak{A}$, fie $x \in M$; să notăm $\tau_1(x) = y$; în virtutea tranzitivităţii lui $\mathfrak{B}$, rezultă existenţa unui $\tau_x \in \mathfrak{B}$ astfel încît să avem $\tau_x(x) = y$, adică (2); conform teoremei 2, avem $\tau_1 \in \mathfrak{B}\,(\sim(\mathfrak{B}))$.

§ 3. NORMALITATEA

1°. Fie M o mulțime nevidă și fie $\mathfrak{A}$ un grup de transformări ale lui M.

1) DEFINIȚIA 2. Se spune că echivalența $\sim$ în M este *imprimitivă față de* $\mathfrak{A}$, dacă, pentru orice $\tau \in \mathfrak{A}$, relația $a \sim b$ implică $\tau(a) \sim \tau(b)$.

2) *Observația 2.* Pentru definiția grupului tranzitiv, imprimitiv de transformări, a se vedea [36], p. 146, și [38], p. 36. Bineînțeles, la noi este vorba de o noțiune legată de aceasta, căci dacă $\mathfrak{A}$ este un grup tranzitiv, ceea ce noi nu presupunem, clasele de echivalență în raport cu $\sim$ sînt sisteme de imprimitivitate pentru $\mathfrak{A}$; de altfel, aici nu este vorba de un grup imprimitiv de transformări, ci de o echivalență imprimitivă : este ceea ce P. Dubreil [9], nota (3), numește, cînd $\mathfrak{A}$ este tranzitiv, *echivalența de imprimitivitate* pentru grupul dat. Relația de echivalență imprimitivă poate fi de asemenea găsită în [3] într-un caz foarte general, sub numele de *echivalență omomorfică* (a se vedea și [15], definiția Γ-partiției) și în [6], § 4, 3, sub numele de *echivalență compatibilă cu o structură* (sau *lege*); prin particularizare se obține noțiunea de echivalență imprimitivă față de un grup de transformări; bineînțeles în lucrările citate, fiind vorba de structuri algebrice foarte generale, nu se pot obține rezultatele specifice pe care le dăm noi; noțiuni similare se definesc în mulțimile organizate ca de exemplu, grupoide, semigrupuri, grupuri, inele : *echivalența regulată* [8], p. 141, [13], *congruența* [13], [5], p. 89, [21], p. 194 și 250. În această ordine de idei, Ore [22] dă definiția noțiunii de *automorfism* al unei relații de echivalență $\sim$, care este o transformare τ astfel încît din $a \sim b$, să rezulte $\tau(a) \sim \tau(b)$, $\tau^{-1}(a) \sim \tau^{-1}(b)$; automorfismele formează un grup. În acest sens, echivalența noastră imprimitivă este o echivalență, pentru care mulțimea automorfismelor conținute în $\mathfrak{A}$ este egală cu $\mathfrak{A}$; găsim și la Riguet [27] această noțiune de automorfism al unei echivalențe.

2°. 1) Avem

TEOREMA 3. (F. Šik [29], 1,8 și [30]). *Dacă $\sim$ este o echivalență în M, imprimitivă față de grupul $\mathfrak{A}$, atunci $\mathfrak{B}(\sim)$ este un divizor normal al lui $\mathfrak{A}$; la fel, dacă $\mathfrak{B}$ este un divizor normal al lui $\mathfrak{A}$, atunci $\sim(\mathfrak{B})$ este o echivalență imprimitivă față de $\mathfrak{A}$.*

Demonstrație. Fie $\sim$ o echivalență imprimitivă față de $\mathfrak{A}$, fie $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\sim)$, $\tau \in \mathfrak{A}$, $\sigma \in \mathfrak{B}$; dacă $x \in M$ avem

$$\sigma\tau(x) \sim \tau(x). \tag{3}$$

Datorită imprimitivității lui $\sim$ față de $\mathfrak{A}$, din relația (3) rezultă

$$\tau^{-1}\sigma\tau(x) \sim \tau^{-1}\tau(x) = x, \quad x \in M,$$

deci $\tau^{-1}\sigma\tau \in \mathfrak{B}$ și prima parte a teoremei este demonstrată.

Pentru a doua parte să notăm prin $\sim$ echivalența $\sim(\mathfrak{B})$ și fie a, $b \in M$ în relația $a \sim b$; există un $\sigma \in \mathfrak{B}$ astfel încît $\sigma(a) = b$; dacă $\tau \in \mathfrak{A}$, atunci în virtutea normalității lui $\mathfrak{B}$ în $\mathfrak{A}$, există un $\sigma' \in \mathfrak{B}$, astfel încît să avem $\tau\sigma = \sigma'\tau$; atunci avem $\tau(b) = \tau\sigma(a) = \sigma'\tau(a) \sim \tau(a)$.

2) *Observaţia 3.* În cazul particular în care clasele de echivalenţă în raport cu $\sim$ au toate acelaşi cardinal, prima parte a teoremei 3 poate fi dedusă din memoriile lui O. Ore [22], [23]; într-adevăr, în [22] se arată că grupul automorfismelor lui $\sim$ (a se vedea observaţia 2) este izomorf, în acest caz particular, cu grupul monomial complet în raport cu grupul de transformări al unei clase de echivalenţă; în [23] se arată că multiplicările unui grup monomial complet formează un divizor normal al acestuia; de aici se deduce că multiplicările aparţinînd unui subgrup al grupului monomial complet, formează un divizor normal al subgrupului dat; or, în cazul unei echivalenţe $\sim$, imprimitive faţă de $\mathfrak{A}$, acest ultim grup este un subgrup al grupului automorfismelor lui $\sim$ şi, prin izomorfismul din [22], menţionat mai sus, multiplicările corespund transformărilor grupului $\mathfrak{A}$ care aparţin subgrupului asociat lui $\sim$.

Pentru o teoremă analoagă primei părţi a teoremei 3 în cvasi grupuri, a se vedea [29] şi [1]; pentru o relaţie similară (între relaţii) în calculul cu relaţii, a se vedea [34].

În cazul particular în care $\mathfrak{A}$ este tranzitiv, a doua parte a teoremei 3 este dată de Bourbaki [6], §7, ex. 12.

3°. 1) CONSECINŢA 3. *Dacă $\sim$ este o echivalenţă-imagine şi dacă $\mathfrak{B}(\sim)$ este un divizor normal al lui $\mathfrak{A}$, echivalenţa $\sim$ este imprimitivă faţă de $\mathfrak{A}$.*

În virtutea consecinţei 2, se poate presupune că avem $\sim\ = \ \sim(\mathfrak{B}(\sim))$; $\mathfrak{B}(\sim)$ fiind un divizor normal al lui $\mathfrak{A}$, rămîne de aplicat a doua parte a teoremei 3.

2) CONSECINŢA 4. *Dacă echivalenţa $\sim$ este imprimitivă faţă de $\mathfrak{A}$, atunci $\sim(\mathfrak{B}(\sim))$ este şi ea imprimitivă faţă de $\mathfrak{A}$*; într-adevăr, în virtutea teoremei 3, prima parte, $\mathfrak{B}(\sim)$ este un divizor normal al lui $\mathfrak{A}$; în virtutea teoremei 3, a doua parte, $\sim(\mathfrak{B}(\sim))$ este imprimitivă faţă de $\mathfrak{A}$.

3) În acelaşi mod ca şi consecinţa 3, se demonstrează

CONSECINŢA 5. *Dacă $\mathfrak{B}$ este un subgrup-imagine al lui $\mathfrak{A}$ şi dacă $\sim(\mathfrak{B})$ este o echivalenţă imprimitivă faţă de $\mathfrak{A}$, atunci $\mathfrak{B}$ este un divizor normal al lui $\mathfrak{A}$.*

4) În acelaşi mod ca şi consecinţa 4, se demonstrează.

CONSECINŢA 6. *Dacă $\mathfrak{B}$ este un divizor normal al lui $\mathfrak{A}$, atunci şi $\mathfrak{B}(\sim(\mathfrak{B}))$ este un divizor normal al lui $\mathfrak{A}$.*

4°. **Alte proprietăţi relative la normalitate.** 1) PROPOZIŢIA 5. *Dacă $\mathfrak{A}$ este un grup tranzitiv de transformări ale mulţimii M şi dacă $\sim$ este o echivalenţă imprimitivă faţă de $\mathfrak{A}$, toate clasele de echivalenţă în raport cu $\sim$, au acelaşi cardinal*, pentru că în acest caz clasele de echivalenţă în raport cu $\sim$ sînt domenii de imprimitivate faţă de $\mathfrak{A}$ în sensul clasic şi concluzia rezultă conform [38], p. 36.

2) PROPOZIŢIA 6. *Grupul $\mathfrak{T}(M)$ nu are nici un divizor normal intranzitiv diferit de subgrupul identic.*

Aceasta rezultă din [38] (cap. II, teorema 1), sau din [6] (§7, exerc. 12, p. 113) în virtutea faptului că $\mathfrak{T}(M)$ este un grup primitiv. Pentru a ilustra metoda noastră vom da o demonstraţie proprie.

Fie $\mathfrak{B}$ un divizor normal intranzitiv, diferit de subgrupul identic al lui $\mathfrak{T}(M)$. Fie $\sim\ = \ \sim(\mathfrak{B})$; din faptul că $\mathfrak{B} \neq 1$, rezultă că cel puţin una din clasele de echivalență în raport cu $\sim$, are măcar două elemente; din faptul că $\mathfrak{B}$ este intranzitiv, rezultă că $\sim$ comportă cel puțin două clase de echivalență; din faptul că $\mathfrak{B}$ este un divizor normal al lui $\mathfrak{T}(M)$, rezultă, conform teoremei 3, că $\sim$ este o echivalență imprimitivă față de $\mathfrak{T}(M)$.

Fie K_1 o clasă de echivalență în raport cu $\sim$, conținînd două elemente distincte, a, b, $a \neq b$; fie K_2, $K_2 \neq K_1$, o altă clasă de echivalență în raport cu $\sim$; fie $c \in K_2$. Să considerăm transpoziția τ definită prin

$$\tau(b) = c, \quad \tau(c) = b, \quad \tau(x) = x \text{ dacă } x \neq b, \ x \neq c.$$

Din faptul că avem $a \sim b$, ar trebui să rezulte, în virtutea imprimitivății lui $\sim$, că $\tau(a) \sim \tau(b)$, ceea ce nu este cazul deoarece $a \nsim c$.

5°. **Permutabilitatea.** 1) DEFINIȚIA 3. Se spune că două echivalențe $\sim_1, \sim_2 \in \mathcal{E}(M)$ sînt *permutabile* (a se vedea [8] p. 63 și [10], unde astfel de echivalențe se numesc *echivalențe asociabile*; a se vedea și [22], definiția relațiilor *care comută*) dacă oricare ar fi $a, b, c \in M$, legate prin relațiile

$$a \sim_1 b, \quad b \sim_2 c \tag{4}$$

există un $d \in M$, astfel încît să avem

$$a \sim_2 d, \quad d \sim_1 c \tag{5}$$

și invers: oricare ar fi a, d, $c \in M$ care satisfac relațiile (5), există un $b \in M$, astfel încît să avem (4).

2). Avem[9])

TEOREMA 4. *Două echivalențe în M, una imprimitivă față de $\mathfrak{A}$ cealaltă echivalență-imagine, sînt permutabile.*

Demonstrație. Fie $\sim_1$ o echivalență imprimitivă fațăde $\mathfrak{A}$ și fie $\sim_2 = \sim(\mathfrak{B}_2)$, unde $\mathfrak{B}_2$ este subgrup al lui $\mathfrak{A}$; dacă $\overline{\mathfrak{B}}_2 = \mathfrak{B}(\sim_2)$, se știe (consecința 2) că avem $\sim_2 = \sim(\overline{\mathfrak{B}}_2)$; dacă a, b, c sînt elemente din M care satisfac relațiile (4), rezultă existența unui $\tau_2 \in \overline{\mathfrak{B}}_2$, astfel încît $\tau_2(c) = b$; în virtutea imprimitivității lui $\sim_1$ rezultă $c \sim_1 \tau_2^{-1}(a)$; deoarece $\tau_2^{-1} \in \mathfrak{B}_2$, avem $\tau_2^{-1}(a) \sim_2 a$; deci, punînd $d = \tau_2^{-1}(a)$, relațiile (5) sînt satisfăcute. Trecerea inversă, de la (5) la (4), este analoagă.

6°. **Exemple.** 1) Fie S un spațiu topologic[10]), fie M mulțimea punctelor sale și fie $\mathfrak{A}$, grupul omeomorfismelor lui S pe el însuși; se numește *componentă conexă* a unui punct $x \in S$, mulțimea conexă maximală (care este unic determinată) care îl conține pe x, sau, ceea ce este același lucru, reuniunea submulțimilor conexe ale lui S care îl conțin pe x. Vom spune că două puncte $x, y \in S$ sînt în relația $x \sim y$ dacă x și y au aceeași componentă conexă; evident, $\sim$ este o echivalență în M. Să arătăm că $\sim$ este imprimitivă față de $\mathfrak{A}$.

---

[9]) Pentru o chestiune înrudită a se vedea și [34].

[10]) Pentru noțiunile de topologie generală și de teoria grupurilor topologice, a se vedea de exemplu [25].

Într-adevăr, dacă $x \sim y$ și dacă $\tau \in \mathfrak{A}$ să notăm prin K componenta conexă comună a lui x și y. Avem $\tau(x)$, $\tau(y) \in \tau(K)$; dar $\tau(K)$ este o submulțime conexă pentru că τ este un omeomorfism. Deci componentele conexe ale lui $\tau(x)$ și $\tau(y)$ conțin pe $\tau(K)$; prin urmare aceste două componente nu sînt disjuncte, deci ele coincid, ceea ce înseamnă că $\tau(x) \sim \tau(y)$.

2) Fie G un grup (abstract) neabelian, al cărui centru Z este diferit de subgrupul identic E; fie M mulțimea elementelor lui G. Se numește *translație la stînga* a grupului G (a se vedea [19], p. 80, [5], p. 177) generată de elementul $g \in G$ aplicația $\sigma_g : M \to M$, definită prin $\sigma_g(x) = gx$, $x \in M$.

Se poate recunoaște că o translație la stînga a grupului G este o transformare a mulțimii M; se numește *olomorf* al grupului G ([19], p. 82), subgrupul generat în $\mathfrak{T}(M)$ de translațiile la stînga ale grupului G și de automorfismele lui G; orice element al olomorfului poate fi reprezentat ca un produs $\alpha\sigma_g$, unde α este un automorfism al lui G, și $g \in G$; să luăm drept grup $\mathfrak{A}$, olomorful lui G.

Să considerăm congruența $\equiv_Z$ a grupului G în raport cu subgrupul Z; $\equiv_Z$ este o echivalență în M. Fie $\alpha\sigma_g \in \mathfrak{A}$; relația $a \equiv_Z b$, $a, b \in M$, implică $ga \equiv_Z gb$ și în virtutea faptului că Z este un subgrup caracteristic, avem $\alpha(ga) \equiv_Z \alpha(gb)$ adică $\alpha\sigma_g(a) \equiv_Z \alpha\sigma_g(b)$; deci echivalența $\equiv_Z$ este imprimitivă față de $\mathfrak{A}$; conform teoremei 3, $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}(\equiv_Z)$ este un divizor normal al lui $\mathfrak{A}$. Vrem să determinăm forma elementelor sale: dacă $\alpha\sigma_g \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}(\equiv_Z)$, atunci pentru orice $x \in M$, avem

$$\alpha\sigma_g(x) = \alpha(gx) = z_x x, \; z_x \in Z \; ; \tag{6}$$

dacă $x = e$, avem $\alpha(g) = z_e \in Z$; datorită faptului că Z este un subgrup caracteristic, rezultă $g = \alpha^{-1}\alpha(g) \in Z$; din relația (6) mai rezultă și $\alpha(x).x^{-1} = (\alpha(g))^{-1}.\, z \in Z$ pentru orice $x \in M$; deci α este un automorfism al centrului; rezultă că orice transformare din $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}(\equiv_Z)$ este de forma $\alpha\sigma_g$, unde α este un automorfism al centrului iar $g \in Z$. Se vede ușor că și reciproca este valabilă.

§ 4. FORMAREA CÎTULUI

1°. Fie M o mulțime nevidă, $\mathfrak{A}$ un grup de transformări ale lui M. Avem

TEOREMA 5. (F. Šik [29], 1, 8 și [30]). *Dacă $\sim$ este o echivalență în M, imprimitivă față de $\mathfrak{A}$, atunci dacă $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\sim)$ grupul factor $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ (care există în virtutea teoremei 3) poate fi considerat grup de transformări ale lui $M/\sim$.*

Demonstrație. Să notăm cu $[a]$. $[a] \in M/\sim$, clasa de echivalență a lui M în raport cu $\sim$, care îl conține pe $a \in M$; să notăm cu $[\tau]$, $[\tau] \in \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, clasa de resturi a lui $\mathfrak{A}$ în raport cu $\mathfrak{B}$ care îl conține pe $\tau \in \mathfrak{A}$; se definește o aplicație canonică

$$\eta : \mathfrak{A}/\mathfrak{B} \to \mathfrak{T}(M/\sim)$$

în modul următor ($\eta\,[\tau]$ este definit prin efectul său asupra elementelor lui $M/\sim$):

$$(\eta\,[\tau])\,[x] = [\tau(x)],\quad \tau\in\mathfrak{A},\ x\in M. \qquad (7)$$

Pentru a arăta că $\eta[\tau]$ este o transformare a lui $M/\sim$, fie $x'\in M$, $\tau'\in\mathfrak{A}$, în așa fel încît

$$x'\sim x,\quad \tau'\equiv\tau \pmod{\mathfrak{B}}.$$

Avem $\tau^{-1}\tau'\in\mathfrak{B}$, deci $\tau^{-1}\tau'(x')\sim x'\sim x$ ceea ce implică, în virtutea imprimitivității lui $\sim$ față de $\mathfrak{A}$, $\tau'(x')\sim\tau(x)$, deci $[\tau'(x')]=[\tau(x)]$; prin urmare $\eta\,[\tau]$ este o aplicație univocă a lui $M/\sim$ în el însuși. Fie $[y]\in M/\sim$; există un $x\in M$, astfel încît să avem $\tau(x)=y$ deci $(\eta\,[\tau])\,[x]=[\tau(x)]=[y]$; să presupunem în sfîrșit că avem $(\eta\,[\tau])\,[x]=(\eta\,[\tau])\,[x']$; rezultă $\tau(x)\sim\tau(x')$ deci $x\sim x'$ căci $\sim$ este o echivalență imprimitivă; prin urmare avem $[x]=[x']$; rezultă că $\eta\,[\tau]$ este o transformare a lui $M/\sim$, pentru orice $[\tau]\in\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

Să presupunem că avem $\eta\,[\tau]=\eta\,[\tau']$, $\tau,\tau'\in\mathfrak{A}$; atunci, pentru orice $x\in M$, avem, conform cu (7), $\tau(x)\sim\tau'(x)$ deci, în virtutea imprimitivității lui $\sim$, $\tau^{-1}\tau'(x)\sim x$; prin urmare $\tau^{-1}\tau'\in\mathfrak{B}$, adică $[\tau]=[\tau']$ și corespondența este biunivocă. Dacă $x\in M$, $\tau_1\,\tau_2,\in\mathfrak{A}$, atunci

$$(\eta\,([\tau_1]\,[\tau_2]))\,[x] = (\eta\,[\tau_1\,\tau_2])\,[x] =$$
$$= [\tau_1\tau_2(x)] = (\eta\,[\tau_1])\,[\tau_2(x)] = (\eta\,[\tau_1]\cdot\eta\,[\tau_2])\,[x],$$

deci η este un izomorfism al lui $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ pe $\eta(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$, unde $\eta(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})\subset\mathfrak{T}(M/\sim)$.

1) În cele ce urmează îl vom identifica pe $[\tau]$ cu $\eta\,[\tau]$.

2) *Observația 4.* Foster [15] cunoaște faptul că orice transformare a mulțimii date M induce o transformare a mulțimii-cît și că aceste transformări sînt asociate printr-un omomorfism transformărilor lui M; teorema 5 demonstrează, în afară de aceasta, că tocmai grupul-factor de care este vorba poate fi considerată ca grupul de transformări al acestei mulțimi-cît.

Pentru cvasigrupuri o teoremă analoagă teoremei 5 este dată în [1].

2°. **Consecințe și proprietăți.** 1) Fie $f: M\rightarrow M'$ o aplicație a unei mulțimi M pe o mulțime M'; fie $\mathfrak{A}$ un grup de transformări ale lui M; aplicația f definește o echivalență în M (a se vedea [22], cap. 3 și [11]). Avem

CONSECINȚA 7. *Dacă relația $\sim$ este imprimitivă față de $\mathfrak{A}$, atunci f definește un omomorfism al grupului $\mathfrak{A}$ pe un grup $\mathfrak{A}'$ de transformări ale lui M'.*

Într-adevăr, conform teoremei 5, în aceste condiții, $\mathfrak{A}$ se aplică printr-un omomorfism pe un grup de transformări $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ ale lui $M/\sim$; dar între $M/\sim$ și M' există o corespondență biunivocă (a se vedea [11]), deci $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ este izomorf cu un grup $\mathfrak{A}'$ de transformări ale lui M', definit prin asemănare.

2) PROPOZIȚIA 7. *În aceleași ipoteze și cu aceleași notații ca în teorema 5, dacă $\mathfrak{A}$ este un grup tranzitiv* de *transformări ale lui M, atunci $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ este de asemenea un grup tranzitiv de transformări ale lui $M/\sim$,* pentru că dacă $[x]$, $[y]\in M/\sim$ fie $\tau\in\mathfrak{A}$ în așa fel încît $\tau(x)=y$; avem $[\tau]\,[x]=[y]$.

3) PROPOZIŢIA 8. *În aceleași ipoteze și folosind aceleași notații ca în teorema 5 dacă* $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ *este un grup tranzitiv de transformări ale lui* $M/\sim$, *atunci toate clasele de echivalență ale lui* M *în raport cu* $\sim$, *au același cardinal.*

Într-adevăr, dacă $[a]$, $[b] \in M/\sim$ şi dacă $[\tau]\ [a] = [b]$, transformarea τ aplică biunivoc clasa $[a]$ în clasa $[b]$; deci card $[a] \leqslant$ card $[b]$; în același mod, avem card $[b] \leqslant$ card $[a]$, de unde rezultă propoziția.

3°. **Cazurile în care $\sim$ este o echivalență-imagine.** 1) DEFINIȚIA 4. Fie M o mulțime şi fie G un grup; să presupunem că fiecărui $g \in G$ i se asociază în mod omomorf o transformare $\tau(g)$ a lui M; atunci grupul $\mathfrak{A}$ al tuturor transformărilor $\tau(g)$ ale lui M, $g \in G$, se numeşte *grupul de transformări ale lui M indus de G.*

Acest grup este izomorf cu grupul-factor al lui G în raport cu nucleul (subgrupul) de inefectivitate H (a se vedea [25], cap. I, § 3, I)), adică în raport cu divizorul normal format de elementele g ale lui G, a căror transformare asociată $\tau(g)$ este transformarea identică.

2) Propoziția 7 poate fi completată în modul următor : *În aceleași ipoteze și cu aceleași notații ca în teorema 5, dacă* $\sim$ *este o echivalentă-imagine, atunci grupul* $\mathfrak{B}$ *are proprietatea lui G din definiția 4, pentru orice clasă de echivalență K, a lui M în raport cu* $\sim$ *și grupul de transformări ale lui K, indus de* $\mathfrak{B}$, *este un grup tranzitiv de transformări ale lui K.*

Într-adevăr, dacă $\tau \in \mathfrak{B}$, $x \in K$, atunci $\tau(x) \in K$; dacă $y \in K$, atunci $\tau^{-1}(y) = z \in K$, deci există $z \in K$ astfel încît $\tau(z) = y$; se asociază lui τ transformarea $\psi(\tau)$ a lui K, definită prin $(\psi(\tau))(x) = \tau(x)$; evident, ψ este un omomorfism; deci $\mathfrak{B}$ are proprietatea lui G pentru mulțimea K. Pe de altă parte, dacă $\sim\ = \ \sim(\mathfrak{B}')$, $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{A}$, și dacă a, $b \in K$ avem $a \sim b$, deci există un $\tau \in \mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ (a se vedea teorema 1, c)) astfel încît $\tau(a) = b$ sau încît $(\psi(\tau))(a) = b$; deci $\psi(\mathfrak{B})$ este un grup tranzitiv de transformări ale lui K.

3) Să presupunem, în aceleași ipoteze și cu aceleași notații ca în teorema 5, că $\sim$ este o echivalență-imagine, $\sim\ = \ \sim(\mathfrak{B}')$, $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{A}$[11]; atunci mulțimea claselor de resturi la stînga ale lui $\mathfrak{A}$ în raport cu $\mathfrak{B}'$, se aplică prin același procedeu pe un grup de transformări ale lui $M/\sim$; notînd prin $[\tau]_S$ clasa de resturi la stînga în raport cu $\mathfrak{B}'$, care conține pe τ, $\tau \in \mathfrak{A}$, se asociază lui $[\tau]_S$ transformarea $\varphi([\tau]_S)$ a lui $M/\sim$, în modul următor: $(\varphi([\tau]_S))[x] = [\tau(x)]$, $x \in M$; fie $x' \in M$, $\tau' \in \mathfrak{A}$, astfel încît $x' \sim x$, $\tau' \equiv \tau$ (mod $\mathfrak{B}'_S$) (adică modulo $\mathfrak{B}'$ la stînga); există un $\sigma' \in \mathfrak{B}'$ astfel încît $\sigma'(x) = x'$, deci astfel încît $\tau^{-1}\tau'(x') = \tau^{-1}\tau'\sigma'(x)$; din faptul că $\tau^{-1}\tau' \in \mathfrak{B}'$ rezultă $\tau^{-1}\tau'\sigma'(x) \sim x$; datorită imprimitivității lui $\sim$ față de $\mathfrak{A}$, rezultă $\tau'(x') \sim \tau(x)$, deci rezultatul obținut prin aplicarea lui $\varphi([\tau]_S)$ asupra lui $[x]$, nu depinde de alegerea reprezentanților în aceste clase; începînd de la acest punct se poate continua în același mod ca și în demonstrația teoremei 5; bineînțeles nu se va putea demonstra biunivocitatea lui φ; dar φ aplică

---

[11] $\mathfrak{B}'$ este un subgrup oarecare care satisface condiția $\sim\ = \ \sim(\mathfrak{B}')$; altfel, se poate lua $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}(\sim)$ (a se vedea consecința 2) și toate aceste considerații se reduc la conținutul teoremei 5.

mulțimea claselor de resturi la stînga ale lui $\mathfrak{A}$ în raport cu $\mathfrak{B}'$ *pe* $\eta(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$ căci $\varphi([\tau]_s) = \eta[\tau]$.

În cazul particular în care $\mathfrak{B}'$ este un subgrup normal al lui $\mathfrak{A}$ se poate vorbi de grupul factor $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}'$ și atunci φ este un omomorfism, al lui $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}'$ pe $\eta(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$, omomorfism care compus cu η^{-1} (la stînga) dă ca rezultat omomorfismul canonic al lui $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}'$ pe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

§ 5. CAZUL ÎN CARE INTERVIN MAI MULTE GRUPURI $\mathfrak{A}$

1°. Dacă $\mathfrak{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, este o familie de grupuri de transformări ale mulțimii M, și dacă $\sim$ este o echivalență imprimitivă față de fiecare dintre $\mathfrak{A}_\lambda$, atunci $\sim$ este o echivalență imprimitivă și față de $\mathfrak{A}^\star = \{\mathfrak{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ (subgrupul generat în $\mathfrak{T}(M)$ de familia de subgrupuri $\mathfrak{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ precum și față de $\mathfrak{A}_\star = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$; pentru a arăta aceasta vom face uz de un argument a cărui cheie se găsește în memoriul lui O. Ore [22] (a se vedea observația noastră 2) : într-adevăr, în ipotezele făcute asupra echivalenței $\sim$, fiecare $\mathfrak{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, este un grup de automorfisme ale lui $\sim$; deci $\mathfrak{A}^\star$ și $\mathfrak{A}_\star$ sînt de asemenea grupuri de automorfisme ale lui $\sim$.

2°. Dacă $\mathfrak{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, este o familie de grupuri de transformări ale mulțimii M și dacă relativ la fiecare $\mathfrak{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, avem

$$\sim \; = \; \sim(\mathfrak{B}_\lambda), \tag{8}$$

unde $\mathfrak{B}_\lambda$ este un subgrup al lui $\mathfrak{A}_\lambda$, atunci, față de $\mathfrak{A}^\star$, avem

$$\sim \; = \; \sim(\mathfrak{B}^\star),$$

unde $\mathfrak{B}^\star = \{\mathfrak{B}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$; fie a, $b \in M$ în relația $a \sim b$; dacă $\lambda \in \Lambda$, rezultă, în virtutea lui (8), că există un τ, $\tau \in \mathfrak{B}_\lambda \subset \mathfrak{B}^\star$, astfel încît $\tau(a) = b$; reciproc, dacă $\tau(a) = b$, $\tau \in \mathfrak{B}^\star$, avem $\tau = \tau_{\lambda_1} \ldots \tau_{\lambda_n}$, $\tau_{\lambda_i} \in \mathfrak{B}_{\lambda_i}$, $\lambda_i \in \Lambda$, $i = 1, \ldots, n$; conform lui (8) avem
$\tau_{\lambda_n}(a) \sim a$, $\tau_{\lambda_{n-1}} \tau_{\lambda_n}(a) \sim \tau_{\lambda_n}(a), \ldots, \tau(a) = \tau_{\lambda_1} \ldots \tau_{\lambda_n}(a) \sim \tau_{\lambda_2} \ldots \tau_{\lambda_n}(a)$, deci $b = \tau(a) \sim a$.

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. ALBERT, *Quasigroups I.* Trans. Amer. Math. Soc., **54**, 507–519 (1943).
2. G. BIRKHOFF, *Lattice Theory.* Revised Edition, New York, 1948.
3. — *On the structure of abstract algebras.* Proc. Cambridge Phil. Soc., **31**, 443–454 (1935).
4. — *On the combination of subalgebras.* Proc. Cambridge Phil. Soc., **29**, 441–464 (1933).
5. O. BORŮVKA, *Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie, DVW*, Berlin, 1960.
6. N. BOURBAKI, *Algèbre*, Chap. I, *Structures algébriques.* Act. sci. et ind. n° 934, Hermann, Paris (1942).
7. A. CHÂTELET, *Les théorèmes de Jordan-Hőlder et Schreier*, Revue Scientifique, III-ème série, **85**, 578–596 (1947).
8. P. DUBREIL, *Algèbre.* II-ème édition, Gauthier-Villars, Paris, 1954.
9. — *Remarques sur les théorèmes d'isomorphisme.* C. R. Acad. Sci. Paris, **215**, 239–241 (1942).

10. P. Dubreil et M.-L. Dubreil-Jacotin, *Théorie algébrique des relations d'équivalence.* J. Math. pures et appl., **18**, 63—95 (1939).
11. P. Dubreil et M.-L. Dubreil-Jacotin, *Propriétés algébriques des relations d'équivalence.* C.R. Acad. Sci. Paris, **205**, 704—706 (1937).
12. — *Propriétés algébriques des relations d'équivalences*; *théorèmes de Schreier et de Jordan-Hölder.* C R. Acad. Sci. Paris, **205**, 1349—1351 (1937).
13. M.-L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, R. Croisot, *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques.* Cahiers scientifiques, fasc. XXI, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
14. C.-J. Everett, *Closure operators and Galois theory in lattices.* Trans. Amer. Math. Soc., **55**, 514—525 (1944).
15. A. L. Foster, *On the permutational representation of general sets of operations by partition lattices.* Trans. Amer. Math. Soc., **66**, 366—388 (1949).
16. A. W. Goldie, *The Jordan-Hölder theorem for general abstract algebras.* Proc. London Math. Soc. (2) **52**, 107—131 (1950).
17. — *The scope of the Jordan-Hőlder theorem in abstract algebras.* Proc. London Math. Soc. (3), **2**, 349—368 (1952).
18. J. Jakubík, *Congruence relations on abstract algebras.* Czechoslovak math. J., **4** (**79**), 314—317 (1954).
19. А.Г. Курош, *Теория групп*, Изд. второе, переработанное, ГИТТЛ, Москва, 1953.
20. Е.С. Ляпин, *Полугруппы*, ГИФМЛ, Москва, 1960.
21. Gr. C. Moisil, *Introducere în Algebră I. Inele și ideale*, vol. I. Editura Academiei R.P.R., București, 1954.
22. O. Ore, *Theory of equivalence relations.* Duke Math. J., **9**, 573—627 (1942).
23. — *Theory of monomial groups.* Trans. Amer. Math. Soc., **51**, 15—64 (1942).
24. — *Galois connexions.* Trans. Amer. Math. Soc., **55**, 493 —513 (1944).
25. Л.С. Понтрягин, *Непрерывные группы.* ГИТТЛ, Москва, 1954.
26. G. Y. Rainich, *Involution and equivalence.* Michigan Math. J., **2**, 33—34 (1954).
27. J. Riguet, *Relations binaires, fermetures et correspondences de Galois.* Bull. Soc. Math. de France, **76**, 114—155 (1948).
28. F. Šik, *Über Charakterisierung kommutativer Zerlegungen.* Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, **354**, 97—102 (1954).
29. — *Über abgeschlossene Kongruenzen auf Quasigruppen.* Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, **354**, 103—112 (1954).
30. — *Sur les décompositions créatrices sur les quasigroupes.* Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, **329**, 169—186 (1951).
31. A. Solian, *Abstract group and transformation group.* Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., **3** (**53**), *4*, 489—498 (1959).
32. — *Le treillis des relations d'equivalence dans un ensemble et le treillis des sous-groupes d'un groupe de transformations du même ensemble* (sub tipar).
33. H. G. Steiner, *Einführung in die Relationentheorie*, Math.-Phys. Semesterber., **5**, 261—271 (1956).
34. H. A. Thurston, *Equivalences and mappings.* Proc. London, Math. Soc. (3), **2**, 175—182 (1952).
35. Н.Н. Воробьев, *О конгруэнциях алгебр.* Докл. Акад. Наук СССР, н.с., **93**, *4*, 607—608 (1953).
36. B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, vol. I, Springer, Berlin, 1930.
37. P. M. Whitman, *Lattices, equivalence relations and subgroups.* Bull. Amer. Math. Soc., **52**, 507—522 (1946).
38. H. Zassenhaus, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, vol. I, Teubner, Leipzig u. Berlin, 1937.

ALGORITMI DE PRELUCRARE A EXPRESIILOR FORMALE CU AJUTORUL MAŞINILOR CIFRICE DE CALCUL [1]

DE

T. RUS

1. În multe din problemele de matematică un rol esenţial îl joacă transformările asupra unor şiruri de simboluri (pe care în general le numim expresii formale) în alte şiruri de simboluri (sau în alte expresii formale). Aşa este cazul în oricare algebră sau în oricare alt capitol al matematicii, unde se porneşte de la premisa precizării iniţiale a unor obiecte (numite de bază) şi a construirii altor obiecte din cele de bază după reguli date. În cazul cînd obiectele de bază sînt prevăzute cu reguli semantice (de ataşare a valorilor sau de interpretare), atunci şirurile de simboluri dacă au sens se pot reduce de fapt la simboluri prin interpretarea lor. Un astfel de proces de obicei se convine să se numească *de calcul al valorii unei expresii.* Maşinile cifrice de calcul, cu program de conducere, se dovedesc deosebit de utile pentru astfel de scopuri. Dacă însă interpretăm procesul de calcul aşa cum am făcut mai sus, ca un caz particular al unui proces mult mai general de transformare în general a unui şir de simboluri într-un alt şir de simboluri, atunci se iveşte în mod necesar problema folosirii maşinilor cifrice de calcul cu program de conducere în scopul realizării unor asemenea transformări generale. Bineînţeles că facem acum abstracţie de mulţi factori care ar putea influenţa soluţionarea efectivă a unei asemenea probleme cum ar fi de exemplu codificarea expresiilor formale, păstrarea lor în maşină etc. Aceste probleme vor deveni clare, sperăm, la sfîrşitul expunerii prezentei lucrări. Ceea ce dorim însă să subliniem de la început este faptul că problema pusă mai sus este într-o strînsă legătură cu multe probleme legate de teoria algoritmilor, de teoria limbilor algoritmice, de teoria formalizării problemelor etc. Noi pornim de la premisa cunoaşterii în suficientă măsură

---

[1] Comunicare prezentată la Sesiunea ştiinţifică a tineretului din 19—20 iunie 1964, Bucureşti.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 9, P. 1129–1139, BUCUREŞTI, 1964

a acestor capitole ale matematicii şi vom construi în continuare o teorie generală a folosirii maşinilor cifrice de calcul în scopul pe care l-am subliniat mai sus. Pentru aceasta, facem ipoteza că expresia iniţială pe care o transformăm are sens (sau este compatibilă [7]) iar expresia formală obţinută respectă anumite condiţii în raport cu prima. Cu alte cuvinte pe noi ne interesează transformările care se execută cu un anumit scop. Pentru precizare vom considera că expresiile pe care le avem în vedere sînt cuvintele compatibile [7] într-un sistem formal.

2. După cum se poate vedea uşor din lucrarea [8], dacă P este un cuvînt compatibil într-un sistem formal, atunci el se poate reprezenta sub forma unui oarecare arbore. Vom reţine deci reprezentarea sub formă de arbore a cuvintelor compatibile sau a expresiilor care vor constitui obiectul transformărilor pe care noi le vom defini. Acest lucru pentru noi are o dublă importanţă. În primul rînd transformările definite mai jos asupra arborilor au un grad foarte mare de generalitate, ele putînd cuprinde, de exemplu, ca şi cazuri particulare, multe din transformările des folosite în diferite calcule algebrice sau de altă natură. Acest lucru se poate constata şi din faptul că arborii fiind cazuri particulare de complexe liniare, aceştia intră ca şi obiecte ale algoritmilor de o natură foarte generală definiţi în [5]. În al doilea rînd reprezentarea sub formă de arbore a cuvintelor compatibile sau a expresiilor pe care noi le considerăm, ne dă posibilitatea soluţionării relativ uşoare a problemei codificării lor pentru maşină. Acest lucru rezultă din faptul că oricare ar fi un arbore a, el este bine determinat de o matrice care se poate obţine recursiv pornindu-se de la matricile ataşate elementelor de bază sau, mai precis, de la matricile ataşate arborilor corespunzători elementelor de bază. Este cazul aici să spunem că de fapt noi considerăm arborii ca şi grafe orientate care nu conţin cicluri, a căror noduri sînt marcate de simbolurile de bază de la care pornim. Vom trece uşor peste aceste chestiuni trimiţînd cititorul la lucrarea [9], unde sînt expuse problemele legate de reprezentarea matricială a arborilor. Pentru claritatea expunerii în continuare vom introduce cîteva noţiuni din teoria arborilor.

DEFINIŢIA 1. *Se numeşte arbore orice complex liniar care se reduce la un graf orientat ce nu conţine cicluri.*

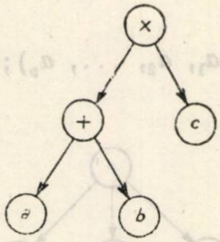
Vom nota în continuare arborii cu litera a cu indici. Fie deci a un arbore oarecare. Atunci el este format dintr-o mulţime de noduri pe care le notăm cu o şi dintr-o mulţime de segmente care leagă nodurile. Segmentele le presupunem orientate, adică sub formă de săgeată cu un singur vîrf. Fiecare nod al arborelui presupunem că este marcat de un simbol în felul următor :

1. Dacă dintr-un nod oarecare al arborelui nu pleacă nici o săgeată, atunci simbolul care marchează nodul respectiv va fi un simbol de bază pentru care este dată o regulă semantică [1].

2. Dacă din nodul respectiv pleacă cel puțin o săgeată, atunci simbolul care marchează acest nod este un simbol sintactic [1]. De exemplu dată fiind expresia

$$((a)+(b))\times(c)$$

ei îi corespunde arborele



DEFINIȚIA 2. *Nodul arborelui a în care nu intră nici o săgeată convenim să-l numim rădăcină a arborelui respectiv, arborele a numindu-se înrădăcinat în el.*

Dacă între două noduri oarecare ale arborelui *a* există o săgeată, de exemplu $\textcircled{n_1}\rightarrow\textcircled{n_2}$ **sau** $\textcircled{n_2}\rightarrow\textcircled{n_1}$, **atunci spunem că între** $\textcircled{n_1}$ **și** $\textcircled{n_2}$ **există un drum orientat de lungime egală cu unitatea.**

Despre nodurile $\textcircled{n_p}$ **și** $\textcircled{n_q}$ **spunem că sînt legate printr-un drum în arborele *a* dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :**

1. Există mulțimea $\{\ \textcircled{n_{k_0}},\ \textcircled{n_{k_1}},\dots,\ \textcircled{n_{k_l}}\ \}$ **de noduri ale arborelui *a* astfel ca**

$$\textcircled{n_{k_1}}\ \underline{\overline{\mathrm{o}}}\ \textcircled{n_p}\ ,\ \textcircled{n_{kl}}\ \underline{\overline{\mathrm{o}}}\ \textcircled{n_q}\ .$$

2. Între nodurile $\textcircled{n_{k_i}}$ **și** $\textcircled{n_{k_{i+1}}}$ **există un drum orientat de lungime unitatea oricare ar fi** $0\leqslant i\leqslant l-1$.

Numărul *l* se va numi lungimea drumului dintre $\textcircled{n_p}$ **și** $\textcircled{n_q}$, $l=l\left[\ \textcircled{n_p}\ ,\ \textcircled{n_q}\ \right]$.

DEFINIȚIA 3. *O mulțime de noduri* $\{\ \textcircled{n_1}\ ,\ \textcircled{n_2},\dots,\ \textcircled{n_p}\ \}$ *spunem că formează un subarbore al arborelui a dacă mulțimea respectivă poate fi privită ca arbore și fiecare nod al său este un nod al arborelui a.*

DEFINIȚIA 4. *Nodurile* $\textcircled{n_1}\ ,\ \textcircled{n_2}\ ,\dots,\ \textcircled{n_p}$ *ale unui arbore a spunem că se găsesc pe nivelul k al arborelui a dacă* $\textcircled{n}$ *fiind rădăcina arborelui a avem*

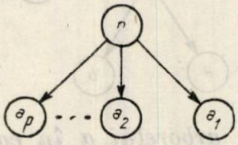
$$l\left[\ \textcircled{n}\ ,\ \textcircled{n_i}\ \right]=k,\qquad (i=1,\,2,\,\dots,\,p).$$

Subarborii unui arbore a care au ca rădăcină noduri ale arborelui a situate pe nivelul 1 al arborelui a, convenim să-i numim subarbori principali. În continuare vom nota cu $\delta\ (n)$ numărul săgeților care ies din nodul marcat de simbolul n. Acesta este același cu numărul operanților care sînt necesari pentru un oarecare operator, definiți în [9].

Cu notațiile folosite mai sus, un arbore a poate fi reprezentat sub forma

$$a = (\textcircled{n},\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p)\ ;\ \delta\,(n) = p$$

sau

$a =$ 

unde a_1, a_2, $\ldots$, a_p sînt subarbori principali ai arborelui a.

3. Fie P un cuvînt compatibil deci o expresie care va trebui transformată conform unui oarecare algoritm într-o altă expresie. Pentru aceasta vom folosi următoarea cale de rezolvare a problemei. Facem să corespundă cuvîntului P arborele său caracteristic a, transformăm acest arbore în arborele a' iar lui a' îi atașăm cuvîntul compatibil P'. În felul acesta dacă notăm cu $\mathfrak{a}$ algoritmul care transformă pe P în P', atunci acesta se va scrie sub forma

$$\mathfrak{a}(P) = P' \qquad \text{sau}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_1(P) &= a \\ \mathfrak{a}_2(a) &= a' \\ \mathfrak{a}_3(a') &= P' \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

iar $\mathfrak{a}_1 \circ \mathfrak{a}_2 \circ \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}$, unde $\circ$ înseamnă operația de compunere a algoritmilor definită în sensul din [6].

Să definim acum mulțimea operațiilor admise [5] sau a transformărilor admise, cu ajutorul cărora vom construi algoritmii respectivi.

Prima operație pe care o definim o numim operație de înlocuire și o notăm cu T_1. Ea se definește în felul următor. Se dă arborele a și perechea de arbori $(a_s,\ a'_s)$. Prin aplicarea operației $T_1\ (a\ ;\ a_s,\ a'_s)$ arborelui a înțelegem procesul de înlocuire a tuturor subarborilor arborelui a egali cu arborele a_s cu arborele a'_s prin identificarea rădăcinilor lor. Acest proces se realizează în felul următor : se analizează arborele a pe **nivele. Fie nodurile $\textcircled{n_1^k}$ ... $\textcircled{n_p^k}$ pe nivelul k al arborelui a. Dacă printre subarborii cu rădăcinile $\textcircled{n_1^k}$, ..., $\textcircled{n_p^k}$ există vreunul egal cu a_s, atunci acesta se suprimă și se înlocuiește cu arborele a'_s identificînd rădăcinile lor.**

Dacă pe nivelul k nu există nici o rădăcină a unui oarecare subarbore al arborelui a egal cu a_s, atunci se trece la nivelul $k+1$. Aplicarea transformării $T_1(a\,;\,a_s,\,a'_s)$ se socotește terminată atunci cînd s-a epuizat examinarea tuturor nivelelor arborelui a. Examinarea începe cu nivelul zero al arborelui a.

A doua operație pe care o definim o numim operație de înlocuire condiționată și o notăm cu T_2. Ea se definește în felul următor : Se dă arborele a, perechea de arbori $(a_s,\,a'_s)$ și o anumită condiție $\mathfrak{P}\{a_s\}$ asupra unei mulțimi determinate de noduri a subarborilor arborelui a egali cu a_s. Această condiție trebuie înțeleasă ca un predicat logic. Dacă $\mathfrak{P}\{a_s\} = 1$, atunci transformarea T_2 se aplică arborelui a iar dacă $\mathfrak{P}\{a_s] = 0$, atunci T_2 nu se aplică. Cu alte cuvinte în afară de egalitatea unui oarecare subarbore al arborelui a cu un arbore a_s dat se mai cere ca o oarecare mulțime determinată a nodurilor acestui subarbore să verifice o anumită proprietate. Procesul de aplicare al transformării T_2 este în rest absolut analog cu procesul de aplicare a lui T_1.

A treia operație pe care o definim o numim operație de permutare și o notăm cu P. Fie arborele a și $a_1, a_2, \ldots, a_p$ subarborii săi principali adică $a = (\textcircled{n},\, a_1,\, a_2, \ldots, a_p)$, $\delta(n) = p$ și fie o permutare $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p)$ a grupului șirului G a permutărilor șirului $\{1, 2, \ldots, p\}$. Atunci avem

$$P(a\,;\,n,\,\Phi) = (\textcircled{n},\, a_{\Phi_1},\, a_{\Phi_2}, \ldots, a_{\Phi_p}).$$

Procesul de aplicare a operației P este anlog cu cel al aplicării operației T_2 și poate fi definit în felul, următor :

Se examinează arborele a pe nivele. Fie pentru aceasta dat un oarecare nod $\textcircled{n}$ și $\delta(n) = p$ și o permutare Φ a grupului G a permutărilor șirului $\{1, 2, \ldots, p\}$. Dacă pe nivelul k al arborelui a există noduri egale grafic cu $\textcircled{n}$ iar $\delta(n) = p$, și dacă aceste noduri sînt rădăcini ale unor arbori ce posedă cel puțin nivelul zero și nivelul unu, atunci se aplică operația P acestor subarbori după formula de mai sus. Operația se socotește terminată dacă s-au epuizat toate nivelele arborelui a. Aplicarea ei începe cu nivelul zero. Trebuie subliniat că operația este de fapt condiționată de anumite proprietăți ale simbolului n cum este, de exemplu, asociativitatea, comutativitatea etc.

A patra operație pe care o definim o numim operație de atașare a valorii și o notăm cu V. Ea se definește în felul următor : Fie n simbolul unei operații care se aplică asupra elementelor $e_1, e_2, \ldots, e_p$, [9]. Dacă în procesul acestei aplicări există un element e numit valoarea lui $n(e_1, e_2, \ldots, e_p)$, [9], atunci operația $V(a\,;\,a_i,\,n)$ pune în locul unui subarbore a_i cu două nivele, nivelul zero marcat de n și primul nivel marcat de $e_1, e_2, \ldots, e_p$ un subarbore format dintr-un singur nod şi marcat pe elementul e. Procesul de aplicare al operaţiei de ataşare a valorii este absolut analog cu acela al aplicării operaţiei T_1 în care a_s este arbore format din două nivele iar a_s' este arbore format dintr-un nod marcat pe o valoare.

Algoritmul $\mathfrak{a}_2$ despre care a fost vorba mai sus va consta acum din şiruri finite de operaţii de unul din tipurile definite mai sus. Aceste şiruri în continuare vor fi numite transformări. Vom deosebi în continuare două tipuri de transformări.

Primul tip de transformare va fi numit transformare normală şi se va nota cu T_η ea fiind definită în felul următor : Fie $T^1, T^2, \ldots, T^n$ o mulţime dată de operaţii de oricare dintre cele patru tipuri definite mai sus. Atunci T_η se scrie

$$T_\eta = \eta\, T^1\, T^2 \ldots T^n$$

iar $T_\eta\,(a)$ înseamnă următorul proces.

Se aplică arborelui a operaţia T^1. După aceea se aplică operaţia T^2 ş.a.m.d. Dacă s-a ajuns la operaţia T^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, atunci dacă această operaţie se poate aplica arborelui a se aplică şi apoi se trece la operaţia T^1 iar dacă T^i nu se poate aplica se trece la operaţia T^{i+1}. Transformarea $T_\eta = y\, T^1\, T^2 \ldots T^n$ se socoteşte terminată dacă nu se poate aplica nici una din operaţiile $T^1, T^2, \ldots, T^n$.

Al doilea tip de transformare pe care o vom defini va fi numită transformare pe nivele şi se va nota cu T_ν fiind definită în felul următor : Fie $T^1, T^2, \ldots T^m$, o mulţime dată cu operaţii de oricare din cele patru tipuri definite mai sus. Atunci T_ν se scrie

$$T_\nu = \nu T^1\, T^2 \ldots T^m$$

iar $T_\nu\,(a)$ înseamnă următorul proces.

Fie $\textcircled{n_1^k}$, $\textcircled{n_2^k}$, …, $\textcircled{n_p^k}$ toate nodurile arborelui *a* de pe nivelul *k* al acestui arbore. Prin aplicarea unei operaţii pe acest nivel vom înţelege aplicarea operaţiei respective pur şi simplu subarborilor de pe acest nivel, fără o trecere prealabilă la examinarea nivelelor subarborelui respectiv. Cu alte cuvinte pe nivelul pus în evidenţă mai sus se verifică dacă operaţiile $T^1, \ldots, T^m$ se pot aplica sau nu se pot aplica. Dacă se pot, ele se aplică, iar dacă nu, se trece mai departe. După ce s-au verificat toţi subarborii cu rădăcinile pe nivelul k şi toate operaţiile $T^1, T^2, \ldots, T^m$ — se trece la nivelul următor începîndu-se cu operaţia T^1. Transformarea se socoteşte terminată dacă s-au epuizat toate nivelele arborelui a.

În cele ce urmează vom înşira cîteva aplicaţii ale transformărilor definite mai sus.

a) O primă aplicaţie va fi aceea a construirii unui program de programare interpretativ, sau cu alte cuvinte a unui program de analiză a unei expresii, care ataşează acestei expresii valoarea ei. Acest program are avantajul că nu construieşte instrucţiuni ci numai rezultate. El se poate aplica ori de cîte ori avem de-a face cu calcularea valorii unei anumite expresii. De asemenea subliniem că se poate aplica și în scopuri ciclice cu condiția ca să-i atașăm niște operatori de atribuire a valorilor [2]. Principiul său de bază este următorul:

Fie mașina cifrică de calcul $\mathcal{M}$ cu program de conducere și $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ operațiile care intră în limba ei. Dacă o oarecare operație se aplică unei mărimi, atunci prin aceasta vom înțelege că această mărime se transformă într-o altă mărime după o regulă determinată de operația respectivă. Prin urmare se presupune că este dată o regulă de atașare a valorii oricărei operații $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ aplicată asupra operanzilor ei. Să presupunem acum că toate simbolurile $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ împreună cu regulile lor semantice sînt conținute ca elemente de bază în sistemul formal pe care îl avem în vedere. În afară de aceasta să presupunem că dacă un oarecare simbol de operator, sau cu alte cuvinte un oarecare simbol sintactic de operator [4], [7] care apare în sistemul formal considerat diferă de simbolurile $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, atunci regula de atașare a valorii lui aplicat asupra operanzilor săi se poate exprima cu ajutorul regulilor de atașare a valorilor pentru $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$. De exemplu, dacă presupunem că avem pentru mașina $\mathcal{M}$ simbolurile + (adunare), × (înmulțire), atunci valoarea simbolului : (împărțire), se poate obține cu ajutorul primelor două într-un mod recursiv. Să notăm cu $\ominus_1, \ominus_2, \ldots, \ominus_l$ toate acele simboluri de operatori pentru care regulile de atașare a valorii lor se pot exprima cu ajutorul regulilor precizate pentru operatorii $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ și să presupunem că alte simboluri sintactice de operatori nu mai avem în sistemul formal. Programul de programare despre care vorbeam mai sus va fi atunci programul algoritmului realizat de transformarea

$$T_{\eta} = \eta\, T^1\, T^2 \ldots T^S$$

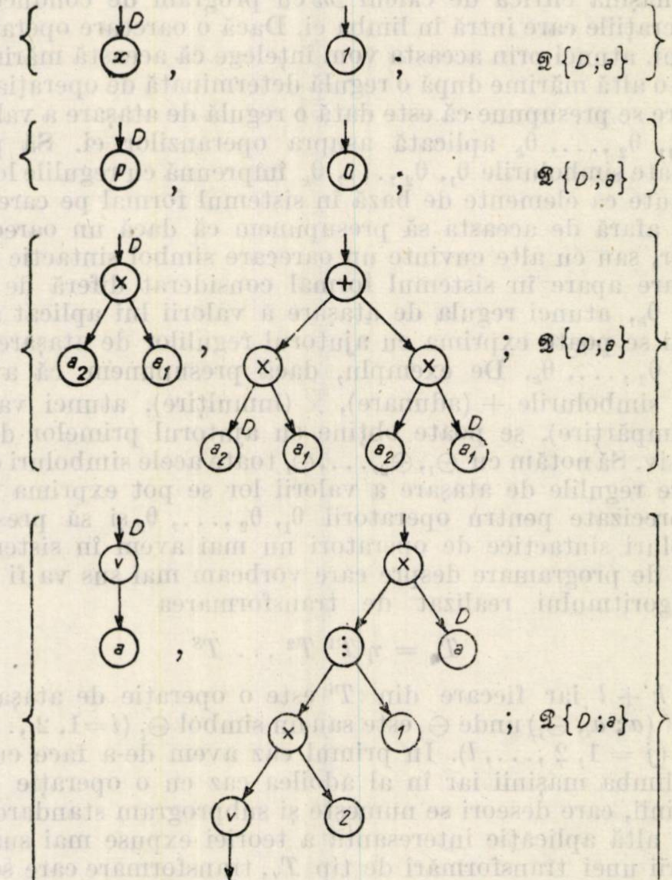
unde $s = k + l$ iar fiecare din T^i este o operație de atașare a valorii de tipul $V(a; a_i, \ominus_j)$ unde $\ominus_j$ este sau un simbol $\ominus_l$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ sau un simbol $\ominus_j$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$. În primul caz avem de-a face cu o operație simplă în limba mașinii iar în al adoilea caz cu o operație compusă în limba mașinii, care deseori se numește și subprogram standard al mașinii.

b) O altă aplicație interesantă a teoriei expuse mai sus este aceea a construirii unei transformări de tip T_ν, transformare care se bucură de proprietatea că algoritmul descris de ea aplicat unui arbore a corespunzător cuvîntului P îl transformă în arborele a' corespunzător cuvîntului P', P și P' fiind legate prin relația de derivare, adică P' este cuvîntul sau expresia derivată a cuvîntului sau expresiei P.

Acest lucru trebuie înțeles în felul următor. Dacă cuvîntul P se poate considera ca și o funcție definită de o formulă, atunci P' poate fi considerat ca și o funcție definită de formula derivată primei formule. Transformarea T_ν al cărui algoritm va realiza cele supuse mai sus va fi definită de relația

$$T_\nu = \nu\, T^1\, T^2 \ldots T^m,$$

unde fiecare dintre operațiile $T^1, T^2, \ldots, T^m$ sînt de tipul T_2, ele fiind de fapt reprezentarea sub formă de arbore a regulilor elementare de derivare. Condiția $\mathfrak{A}$ care trebuie să apară va fi aceea a apariției unui semnal numit semnalul de derivare la rădăcina subarborelui la care se aplică operația respectivă. Exemple de operații de acest tip pot fi :



Aici tripletul $\{a_s, a'_s, \mathfrak{A}\}$ înseamnă perechea (a_s, a'_s) și condiția $\mathfrak{A}$, iar prin D s-a notat semnalul de derivare.

Bineînțeles că șirul unor asemenea operații se poate completa pînă cînd epuizăm toate regulile elementare de derivare. La prima vedere se poate constata că de fapt algoritmul despre care vorbeam mai sus urmărește transportarea simbolului D al derivării de la rădăcina arborelui spre vîrful lui pînă cînd semnalul respectiv dispare din arbore.

c) O altă aplicație pe care o mai amintim pentru teoria descrisă mai sus va fi construirea unei transformări T de tipul T_η al cărui algoritm va realiza simplificarea unei expresii raționale oarecare. Această transformare se compune de fapt din trei transformări.

O primă transformare care aduce oricare expresie rațională întreagă (polinom) la forma canonică, adică la forma unui polinom ordonat [10].

A doua transformare care se folosește este aceea care aduce orice expresie rațională la forma $(P):(Q)$, unde P și Q sînt expresii raționale întregi.

A treia transformare care se folosește este aceea după care se găsește c.m.m.d.c. al polinoamelor ordonate corespunzătoare lui P și Q și simplifică, dacă este posibil, expresia $(P):(Q)$ cu polinomul găsit.

Dacă notăm cu T_η^1, T_η^2, T_η^3 cele trei transformări definite mai sus, atunci transformarea T_η de simplificare a expresiilor raționale va fi

$$T_\eta = \eta\, T_\eta^1\, T_\eta^2\, T_\eta^3.$$

Bineînțeles că fiecare din T_η^1, T_η^2, T_η^3 constă din șiruri de operații de tipuri precizate.

4. Vom prezenta în continuare unele din schemele graf ale algoritmilor adresă [2] a transformărilor definite mai sus ceea ce constituie de fapt traducerea algoritmilor descriși de transformările date într-o limbă practic accesibilă mașinii.

Să notăm cu M matricea atașată unui arbore oarecare a prin procedeul descris în [9] și cu $\mathfrak{L}$ și $\mathfrak{L}^{-1}$ cei doi algoritmi prezentați în [9] care au menirea : primul de a construi matricea M corespunzătoare arborelui a din matricile $M_1, M_2, \dots, M_p$ corespunzătoare arborilor $a_1, a_2, \dots, a_p$

dacă $a = (\textcircled{n}, a_1, \dots, a_p)$, $\delta(n) = \mathrm{p}$ iar al doilea algoritm $\mathfrak{L}^{-1}$ avînd

menirea de a construi matricile $M_1, M_2, \dots, M_p$ din matricea M în situația amintită. Algoritmul adresă care realizează operația $T_1(a : a_s, a'_s)$ se compune din două blocuri. Un bloc notat cu A și numit de analiză a arborelui a și un bloc notat cu S și numit de sinteză a arborelui analizat. Primul care lucrează este blocul A. Să presupunem că am notat cu M, M_s, M'_s masivele adreselor corespunzătoare matricelor arborilor a, a_s, a'_s obținute cu ajutorul transformării adresă [2] sau a codificării. Notăm cu $\delta_0(M_s)$, $\nu_0(M_s)$ primele componente ale vectorului grad, respectiv vectorului nod al matricei M_s [3, 9]. De asemenea, presupunem date șirurile de masive bidimensionale de adrese

$$M^1,\ M^2,\ \dots,\ M^{N_k} \tag{1}$$

$$M_1,\ M_2,\ \dots,\ M_{N_k} \tag{2}$$

$$U_0,\ U_1,\ \dots,\ U_{'\rho_5} \tag{3}$$

unde N_k este numărul maxim al nodurilor care se găsesc pe un oarecare nivel al arborelui a, $'\rho_5$ fiind determinat de algoritm. Șirul (1) se va numi șir de acumulare, iar șirul (2) se va numi șir de alimentare. Aceste numiri se vor justifica în cursul descrierii algoritmului. Șirul (3) se va numi șir rezultat. De asemenea fixăm un masiv bidimensional de adrese notat cu M_c de aceeași dimensiune cu masivul corespunzător lui M. Prin $l(M_s)$ notăm lungimea vectorului nod a matricei M_s. Folosim de asemenea notațiile

$$'\eta_1 = *,\ '\eta_2 = **,\ '\eta_6 = l(M_s).$$

Rezultatul lucrului algoritmului descris de blocul A va fi format din conținutul șirului de masive (3) ale cărui elemente vor fi de unul din tipurile :

(1) $'U_{'\sigma_1}$ va fi un element de tipul t_0 care este un număr ce reprezintă prima componentă a vectorului grad a unei matrici date. În acest caz masivul $U_{'\sigma_1}$ se reduce la o singură adresă.

(2) $'U_{'\sigma_1}$ va fi un element de tipul t_1, care este un simbol ce marchează un oarecare nod al arborelui a. Și în acest caz $U_{'\sigma_1}$ se reduce la o adresă.

(3) $'U_{'\sigma_1}$ va fi un element de tipul t_2 care este tipul unei oarecare matrici. $U_{'\sigma_1}$ în acest caz este un masiv bidimensional bine determinat.

(4) $'U_{'\sigma_1}$ va fi un separator de tip $*$ notat cu t_3.

(5) $'U_{'\sigma_1}$ va fi un separator de tip $**$ notat cu t_4. Algoritmul blocului A analizează matricea M, descompunînd-o în submatricile corespunzătoare subarborilor arborelui a, execută operația de înlocuire respectivă și construiește elemente ale șirului (3), pînă cînd se epuizează toate nivelele arborelui a. După aceea se trece la blocul S care compune cu ajutorul algoritmului $\mathfrak{L}$ matrici din șirul (3) pentru obținerea matricei corespunzătoare arborelui a' transformat. Schema graf a algoritmului adresă corespunzătoare blocului A va fi cea din figura 1, unde am notat cu $'\tau_1$, $'\tau_2$, $'\tau_3$, $'\sigma_1$, $'\sigma_2$, $'\sigma_3$, diferiți parametrii care lucrează în această schemă iar prin C am notat operația de urmare [2].

Schema graf a algoritmului adresă descris de blocul S va fi, cu aceleași notații, cea din figura 2.

Pentru celelalte tipuri de operații nu mai dăm schemele graf ale algoritmilor adresă corespunzător lor, ele fiind aceleași sau aproape aceleași cu aceea corespunzătoare lui T_1. Vom mai prezenta acum doar schemele graf ale algoritmilor adresă ale transformărilor de tipul T_η și T_ν. Astfel pentru transformarea

$$T_\eta = \eta\, T^1\, T^2 \ldots T^n$$

schema graf a algoritmului adresă este aceea din figura 3, unde

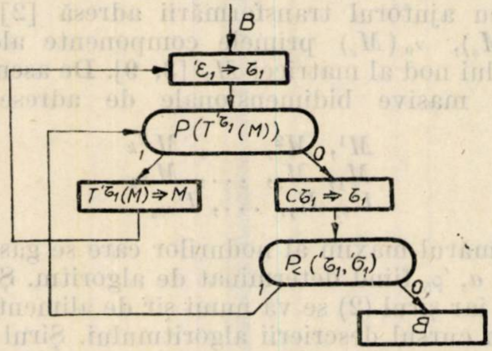


Fig. 3

$'\sigma_1 = n$ iar $P(T'^{\tau_1}(M))$ este o condiție care verifică dacă operația T'^{τ_1} se aplică sau nu matricei M.

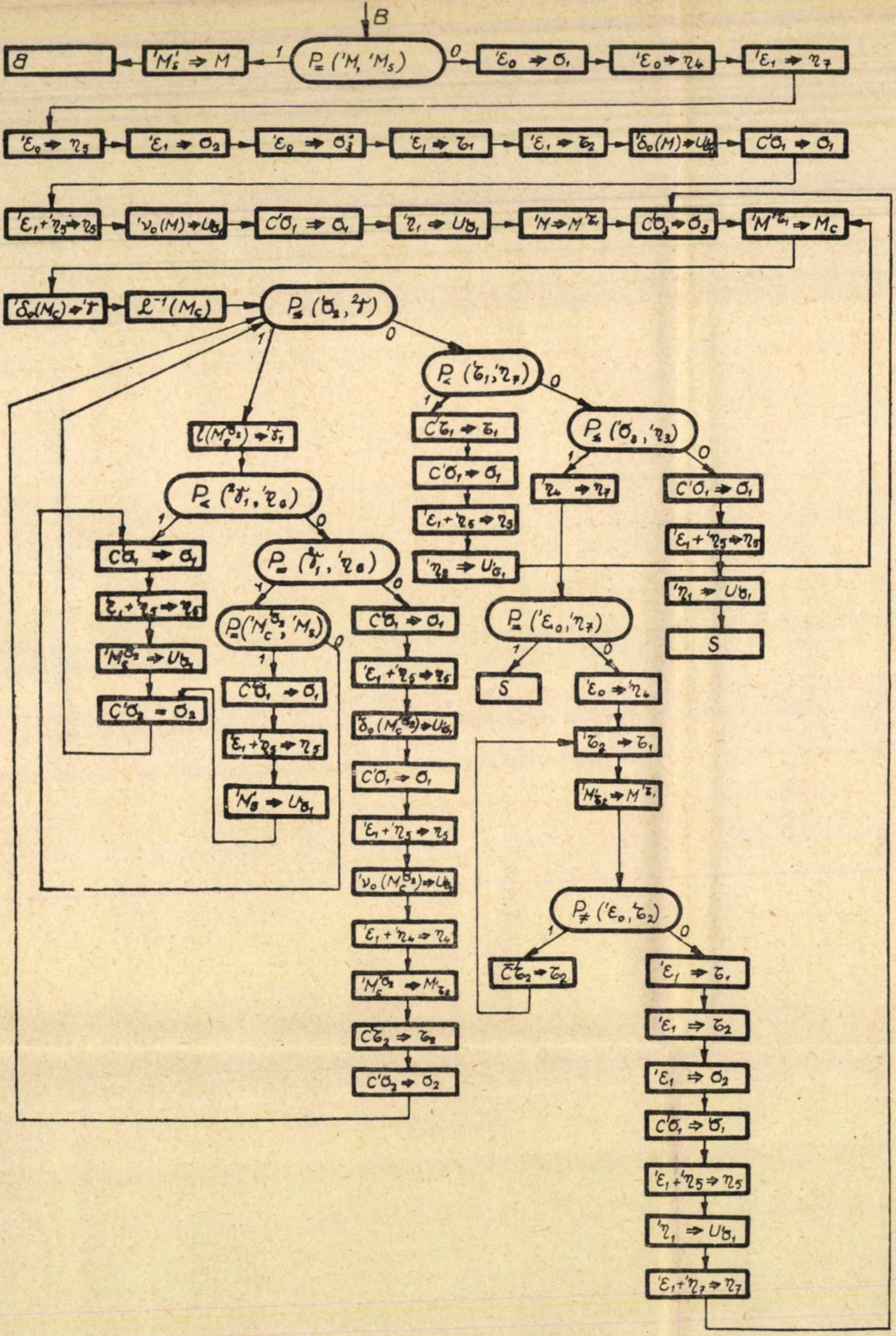

B
$P_=('M, 'M_s)$
1
0
$'M'_s \Rightarrow M$
B
$'\varepsilon_0 \Rightarrow \sigma_1$
$'\varepsilon_0 \Rightarrow \eta_4$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \eta_7$
$'\varepsilon_0 \Rightarrow \eta_3$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \sigma_2$
$'\varepsilon_0 \Rightarrow \sigma'_3$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \tau_1$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \tau_2$
$'\delta_0(M) \Rightarrow U_{\sigma_1}$
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
$'\varepsilon_1 + '\eta_5 \Rightarrow \eta_5$
$'\nu_0(M) \Rightarrow U_{\sigma_1}$
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
$'\eta_1 \Rightarrow U_{\sigma_1}$
$'M \Rightarrow M'^{\tau_1}$
$C'\sigma_3 \Rightarrow \sigma_3$
$'M'^{\tau_1} \Rightarrow M_c$
$'\delta_0(M_c) \Rightarrow 'T$
$\mathcal{L}^{-1}(M_c)$
$P_\leq(\sigma_2, {}^2T)$
1
0
$l(M_c^{\sigma_2}) \Rightarrow '\gamma_1$
$P_<({}^2\gamma_1, '\eta_0)$
1
0
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
$'\varepsilon_1 + '\eta_5 \Rightarrow \eta_5$
$'M_c^{\sigma_2} \Rightarrow U_{\sigma_1}$
$C'\sigma_2 \Rightarrow \sigma_2$
$P_=({}^2\gamma_1, '\eta_0)$
1
0
$P_=('M_c^{\sigma_2}, 'M_s)$
1
0
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
$'\varepsilon_1 + '\eta_5 \Rightarrow \eta_5$
$'M_s \Rightarrow U_{\sigma_1}$
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
$'\varepsilon_1 + '\eta_5 \Rightarrow \eta_5$
$'\delta_0(M_c^{\sigma_2}) \Rightarrow U_{\sigma_1}$
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
$'\varepsilon_1 + '\eta_5 \Rightarrow \eta_5$
$'\nu_0(M_c^{\sigma_2}) \Rightarrow U_{\sigma_1}$
$'\varepsilon_1 + '\eta_4 \Rightarrow \eta_4$
$'M_c^{\sigma_2} \Rightarrow M'_{\tau_2}$
$C'\tau_2 \Rightarrow \tau_2$
$C'\sigma_2 \Rightarrow \sigma_2$
$P_<('\tau_1, '\eta_7)$
1
0
$C'\tau_1 \Rightarrow \tau_1$
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
$'\varepsilon_1 + '\eta_5 \Rightarrow \eta_5$
$'\eta_8 \Rightarrow U'_{\sigma_1}$
$P_\leq('\sigma_3, '\eta_3)$
1
0
$'\eta_4 \Rightarrow \eta_7$
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
$'\varepsilon_1 + '\eta_5 \Rightarrow \eta_5$
$'\eta_1 \Rightarrow U_{\sigma_1}$
S
$P_=('\varepsilon_0, '\eta_7)$
1
0
S
$'\varepsilon_0 \Rightarrow '\eta_4$
$'\tau_2 \Rightarrow \tau_1$
$'M'_{\tau_2} \Rightarrow M'^{\tau_1}$
$P_\neq('\varepsilon_0, '\tau_2)$
1
0
$\bar{C}'\tau_2 \Rightarrow \tau_2$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \tau_1$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \tau_2$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \sigma_2$
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
$'\varepsilon_1 + '\eta_5 \Rightarrow \eta_5$
$'\eta_1 \Rightarrow U_{\sigma_1}$
$'\varepsilon_1 + '\eta_7 \Rightarrow \eta_7$

Fig 1

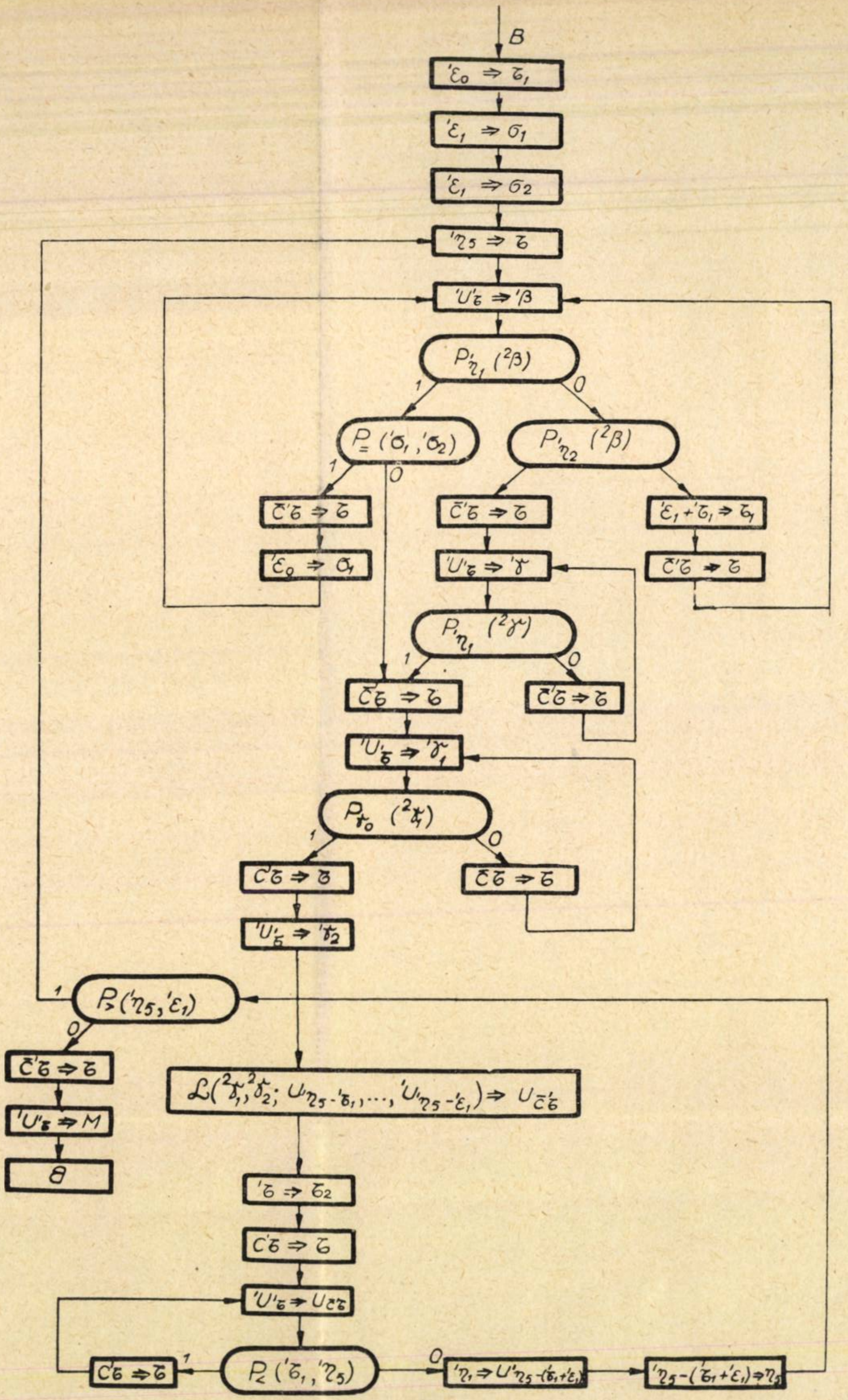

B
$'\varepsilon_0 \Rightarrow \tau_1$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \sigma_1$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \sigma_2$
$'\eta_5 \Rightarrow \tau$
$'U'_\tau \Rightarrow '\beta$
$P'_{\eta_1}({}^2\beta)$
1
0
$P_=('\sigma_1, '\sigma_2)$
1
0
$P'_{\eta_2}({}^2\beta)$
$\bar{C}'\tau \Rightarrow \tau$
$'\varepsilon_0 \Rightarrow \sigma_1$
$\bar{C}'\tau \Rightarrow \tau$
$'U'_\tau \Rightarrow '\gamma$
$'\varepsilon_1 + '\tau_1 \Rightarrow \tau_1$
$\bar{C}'\tau \Rightarrow \tau$
$P'_{\eta_1}({}^2\gamma)$
1
0
$\bar{C}\tau \Rightarrow \tau$
$\bar{C}'\tau \Rightarrow \tau$
$'U'_\tau \Rightarrow '\gamma_1$
$P_{\gamma_0}({}^2\gamma_1)$
1
0
$C\tau \Rightarrow \tau$
$\bar{C}\tau \Rightarrow \tau$
$'U'_\tau \Rightarrow '\gamma_2$
$P_>('\eta_5, '\varepsilon_1)$
1
0
$\bar{C}'\tau \Rightarrow \tau$
$'U'_\tau \Rightarrow M$
B
$\mathcal{L}({}^2\gamma_1, {}^2\gamma_2; U_{'\eta_5 - '\tau_1}, \ldots, 'U_{'\eta_5 - '\varepsilon_1}) \Rightarrow U_{\bar{C}'\tau}$
$'\tau \Rightarrow \tau_2$
$C'\tau \Rightarrow \tau$
$'U'_\tau \Rightarrow U_{C\tau}$
$P_<('\tau_1, '\eta_5)$
1
0
$C'\tau \Rightarrow \tau$
$'\eta_1 \Rightarrow U'_{\eta_5 - ('\tau_1 + '\varepsilon_1)}$
$'\eta_5 - ('\tau_1 + '\varepsilon_1) \Rightarrow \eta_5$

Fig. 2

c. 3452

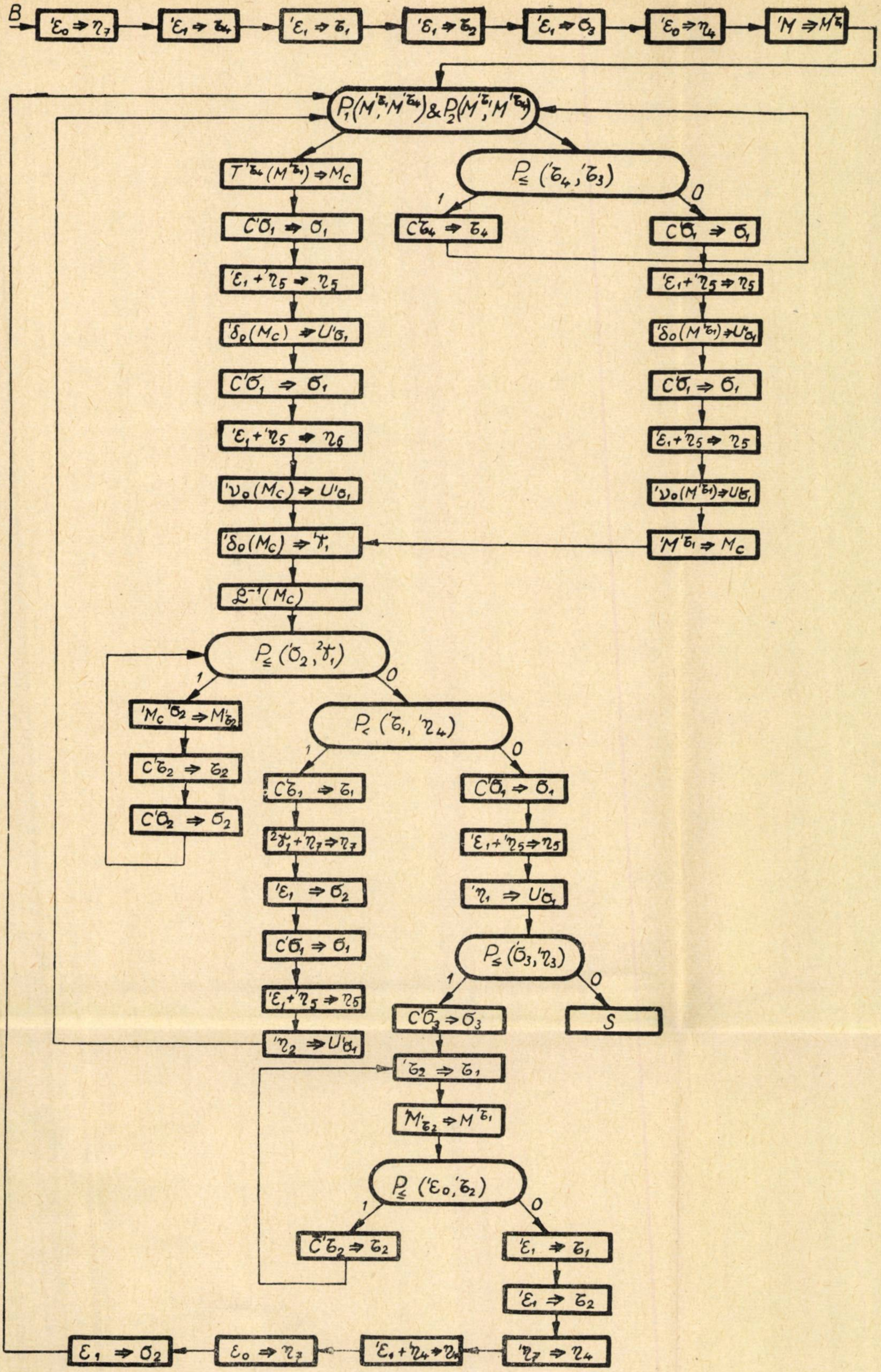

B
$'\varepsilon_0 \Rightarrow \eta_7$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \tau_4$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \tau_1$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \tau_2$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \sigma_3$
$'\varepsilon_0 \Rightarrow \eta_4$
$'M \Rightarrow M^{'\tau_1}$
$P_1(M^{'\tau_1}, M^{'\tau_4}) \& P_2(M^{'\tau_1}, M^{'\tau_4})$
$T^{'\tau_4}(M^{'\tau_1}) \Rightarrow M_c$
$P_{\leq}('\tau_4, '\tau_3)$
1
0
$C'\tau_4 \Rightarrow \tau_4$
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
$'\varepsilon_1 + '\eta_5 \Rightarrow \eta_5$
$'\varepsilon_1 + '\eta_5 \Rightarrow \eta_5$
$'\delta_0(M_c) \Rightarrow U'\sigma_1$
$'\delta_0(M^{'\tau_1}) \Rightarrow U'\sigma_1$
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
$'\varepsilon_1 + '\eta_5 \Rightarrow \eta_5$
$'\varepsilon_1 + '\eta_5 \Rightarrow \eta_5$
$'\nu_0(M_c) \Rightarrow U'\sigma_1$
$'\nu_0(M^{'\tau_1}) \Rightarrow U'\sigma_1$
$'\delta_0(M_c) \Rightarrow {}'\gamma_1$
$'M^{'\tau_1} \Rightarrow M_c$
$\mathfrak{L}^{-1}(M_c)$
$P_{\leq}('\sigma_2, {}^2\gamma_1)$
1
0
$'M_c{}'\sigma_2 \Rightarrow M'_{\tau_2}$
$P_{<}('\tau_1, '\eta_4)$
$C'\tau_2 \Rightarrow \tau_2$
$C'\sigma_2 \Rightarrow \sigma_2$
1
0
$C'\tau_1 \Rightarrow \tau_1$
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
${}^2\gamma_1 + '\eta_7 \Rightarrow \eta_7$
$'\varepsilon_1 + '\eta_5 \Rightarrow \eta_5$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \sigma_2$
$'\eta_1 \Rightarrow U'\sigma_1$
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
$P_{\leq}('\sigma_3, '\eta_3)$
$'\varepsilon_1 + '\eta_5 \Rightarrow \eta_5$
1
0
$'\eta_2 \Rightarrow U'\sigma_1$
$C'\sigma_3 \Rightarrow \sigma_3$
S
$'\tau_2 \Rightarrow \tau_1$
$'M'_{\tau_2} \Rightarrow M^{'\tau_1}$
$P_{\leq}('\varepsilon_0, '\tau_2)$
1
0
$C'\tau_2 \Rightarrow \tau_2$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \tau_1$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \tau_2$
$\varepsilon_1 \Rightarrow \sigma_2$
$\varepsilon_0 \Rightarrow \eta_3$
$'\varepsilon_1 + '\eta_4 \Rightarrow \eta_4$
$'\eta_7 \Rightarrow \eta_4$

Fig. 4

Atît în schemele de mai sus (fig 1 și 2), cît și în cea de aici (fig. 3) am notat

$$'\varepsilon_0 = 0, '\varepsilon_1 = 1.$$

În cazul transformării de tipul T_ν

$$T_\nu = \nu\, T^1\, T^2, \ldots, T^m,$$

schema graf a algoritmului adresă o presupunem descompusă de asemenea în două blocuri. Blocul A de analiză și blocul S de sinteză. Blocul S este absolut analog cu cel descris mai sus pentru operația T_1. Schema graf a algoritmului adresă descris de blocul A va fi cea din figura 4.

În teza de candidat a autorului sînt expuși pe larg algoritmii de mai sus, precum și alții care sînt necesari pentru înțelegerea completă a problemei. Am expus mai sus pe scurt doar spicuiri din unele rezultate obținute de autor în această direcție.

Tot ceea ce am spus mai sus se referă numai la faza algoritmului $\mathfrak{a}_2$ care apare în relațiile (a). Algoritmii $\mathfrak{a}_1$ și $\mathfrak{a}_3$ reprezintă de fapt procesul de traducere obișnuită a expresiilor scrise în limba formulelor sau în limba unui sistem formal, în expresiile scrise în limba arborilor, mai precis a matricilor corespunzătoare acestor arbori și invers. Mecanizarea acestei munci de traducere deocamdată nu ne-o punem, ea fiind echivalentă de exemplu cu mecanizarea muncii de traducere a unui algoritm de calul în limba ALGOL.

Ceea ce am vrea să subliniem în încheiere este faptul că diferitele expresii cu sens în matematică pentru care există o formalizare într-un anumit sistem formal pot fi reprezentate ușor într-o limbă, să-i zicem limba arborilor, care permite mecanizarea relativ ușoară a multor aspecte ale muncii de transformare a acestor expresii. Pornind pe această cale, rezultatele cercetărilor cu privire la cîmpul de aplicabilitate ale mașinilor cifrice de calcul sînt surprinzător de încurajatoare.

BIBLIOGRAFIE

1. A. CHURCH, *Introduction to Mathematical Logic I*, Princenton, New Jersey, 1956 (Ed. rusă Изд. И. Л.,, М., 1960)
2. Э. Л. ЮШЧЕНКО, *Адресные программирования*, Государственное изд. технической литературы, УССР, Киев, 1963.
3. K. E. IVERSON, *A programming Language*, John Wiley and Sons, Inc. New York — London, 1962.
4. S. C. KLEENE, *Introduction to methamathematics*, D. van Nostrand Company Inc., New York — Toronto, 1952 (Ed. rusă Изд. И. Л., М., 1957).
5. А. Н. КОЛМОГОРОВ, В. А. УСПЕНСКИЙ, *К определению алгорифма*, УМН **13**, *4*, 3—28 (1958).
6. А.А. МАРКОВ, *Теория алгорифмов*, Труды матем. инст. им. В. А. Стеклова **XLII**, Москва, 1954.
7. T. RUS, *Asupra unui sistem formal I*, Studii și cercetări matematice, **XV**, *4* (1964).
8. T. RUS, *Asupra unui sistem formal II*. Studii și cercetări matematice, **XV**, *5* (1964).
9. T. RUS, *Asupra reprezentării matriciale a arborilor*. Studii și cercetări matematice, **XVI** (1964).
10. T. RUS, *Un algoritm de decidere în teoria arborilor*. Studii și cercetări matematice. **XVI** (1964).

RADICALUL LIMITEI PROIECTIVE DE INELE ASOCIATIVE 1)

DE

ION D. ION

§ 1. INTRODUCERE

Este cunoscut rolul important pe care îl joacă conceptul de radical în problemele de structură pentru inelele asociative. În multe împrejurări se pot face precizări importante asupra structurii unui inel dat Λ dacă se stabileşte o relaţie între radicalul său şi radicalul unui alt inel Γ a cărui structură e mai bine cunoscută şi care e înrudit cu inelul Λ într-un anumit sens [1]. În această lucrare vom stabili cîteva rezultate în legătură cu radicalul limitei proiective al unei familii proiective de inele asociative. Vom putea astfel, ca în anumite împrejurări, care vor fi precizate în cele ce urmează, să stabilim structura inelului limită proiectivă al unei familii proiective de inele asociative. Atenţia e îndreptată asupra conceptelor de radicali cu proprietatea că radicalul imaginii omomorfe a unui inel conţine imaginea radicalului inelului dat. Această proprietate o au radicalul Jacobson [1], F-radicalul [2], radicalul Brown-McCoy [2].

§ 2. PRELIMINARII

Un element a al unui inel Λ îl numim cvasiregulat dacă există un alt element b în Λ astfel ca $a + b - ab = b + a - ba = 0$. Radicalul Jacobson al unui inel Λ îl vom nota cu $J(\Lambda)$. În cele ce urmează vom folosi următoarea caracterizare a radicalului Jacobson [1]:

$$J(\Lambda) = \{x \in \Lambda \mid a\,x\,b \text{ este cvasiregulat } \forall\; a, b \in \Lambda\}.$$

Reamintim, de asemenea, definiţia F-radicalului unui inel [2]. Pentru orice inel Λ se dă o aplicaţie F care asociază la elemente

---

1) Lucrare comunicată la Sesiunea ştiinţifică a tineretului din 19–20 iunie 1964, Institutul de matematică al Academiei R.P.R.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 9, P. 1141–1145, BUCUREŞTI, 1964

$a \in \Lambda$ ideale ale inelului Λ cu proprietatea că oricare ar fi epimorfismul $\varphi : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ avem

$$\varphi(F(a)) = F(\varphi(a)), \qquad \forall a \in \Lambda.$$

Un element $a \in \Lambda$ îl numim F-regulat dacă $a \in F(a)$ iar un ideal I al lui Λ îl numim F-regulat dacă toate elementele sale sînt F-regulate. F-radicalul unui inel, pe care îl notăm cu $F(\Lambda)$, e format din acele elemente $a \in \Lambda$ cu proprietatea că idealul principal (a) este F-regulat. $F(\Lambda)$ este un ideal al lui Λ şi pentru orice epimorfism $\varphi : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ avem $\varphi(F(\Lambda)) \subseteq F(\Lambda')$. De asemenea, $\varphi(J(\Lambda)) \subseteq J(\Lambda')$.

Fie M o mulţime filtrantă la dreapta şi $\{\Lambda_\alpha, \pi^\beta_\alpha\}_{\alpha \in M}$ o familie proiectivă de inele peste M. Ca limită proiectivă, notată $\varprojlim \Lambda_\alpha$, a familiei proiective $\{\Lambda_\alpha, \pi^\beta_\alpha\}_{\alpha \in M}$ luăm acea submulţime a inelului $\prod_\alpha \Lambda_\alpha$ definită astfel

$$\varprojlim \Lambda_\alpha = \{x \in \prod_\alpha \Lambda_\alpha \mid x = [x_\alpha],\ x_\alpha \in \Lambda_\alpha,\ \pi^\beta_\alpha(x_\beta) = x_\alpha,\ \alpha \leqslant \beta\}.$$

Notăm cu π_α aplicaţia care la orice $x \in \varprojlim \Lambda_\alpha$ asociază pe x_α (componenta de indice α a lui x). Evident, π_α e un omomorfism de inel.

Dacă $\{\Lambda_\alpha, \pi^\beta_\alpha\}_{\alpha \in M}$ e familie proiectivă de inele peste M iar π^β_α sînt epimorfisme, atunci $\{J(\Lambda_\alpha), \mathring{\pi}^\beta_\alpha\}_{\alpha \in M}$ şi $\{F(\Lambda_\alpha), \mathring{\pi}^\beta_\alpha\}_{\alpha \in M}$ sînt familii proiective de inele peste M, unde $\mathring{\pi}^\beta_\alpha$ este restricţia omomorfismului $\pi^\beta_\alpha : \Lambda_\beta \rightarrow \Lambda_\alpha$ la $J(\Lambda_\beta)$, respectiv $F(\Lambda_\beta)$.

Au sens deci $\varprojlim J(\Lambda_\alpha)$ şi $\varprojlim F(\Lambda_\alpha)$. Dacă π^β_α sînt epimorfisme, atunci omomorfismele π_α $(\alpha \in M)$ nu sînt în mod obligatoriu epimorfisme [3]. În caz că M e o mulţime numerabilă sau admite o submulţime numerabilă cofinală iar π^β_α sînt epimorfisme, atunci π_α $(\alpha \in M)$ sînt epimorfisme [3].

§ 3. RADICALUL JACOBSON AL LIMITEI PROIECTIVE DE INELE

În acest paragraf vom da condiţii în care radicalul Jacobson permută cu trecerea la limita proiectivă, deci dacă $\{\Lambda_\alpha, \pi^\beta_\alpha\}_{\alpha \in M}$ e o familie proiectivă de inele asociative să avem

$$J(\varprojlim \Lambda_\alpha) = \varprojlim J(\Lambda_\alpha).$$

LEMA 1. *Dacă* $\{\Lambda_\alpha, \pi^\beta_\alpha\}_{\alpha \in M}$ *e o familie proiectivă de inele asociative iar aplicaţiile* π^β_α *şi* π_α *sînt epimorfisme, atunci*

$$J(\varprojlim \Lambda_\alpha) \subseteq \varprojlim J(\Lambda_\alpha).$$

Demonstraţie. Notăm cu $\Lambda = \varprojlim \Lambda_\alpha$ şi fie $x \in J(\Lambda)$. Deci $x = [x_\alpha]$ cu $x_\alpha \in \Lambda_\alpha$, $\alpha \in M$ şi $\pi^\beta_\alpha(x_\beta) = x_\alpha$ pentru $\alpha \leqslant \beta$. Pentru a proba că $x \in \varprojlim J(\Lambda_\alpha)$

e suficient să arătăm că $x_\alpha \in J(\Lambda_\alpha)$, $\alpha \in M$ şi că $\mathring{\pi}^\beta_\alpha(x_\beta) = x_\alpha$. Cum $x \in J(\Lambda)$, atunci oricare ar fi $a, b \in \Lambda$ există $x' \in \Lambda$ astfel ca

$$a x b + x' - (a x b) x' = 0. \tag{1}$$

Aplicînd în (1) pe π_α, $\alpha \in M$ obţinem

$$a_\alpha x_\alpha b_\alpha + x'_\alpha - (a_\alpha x_\alpha b_\alpha) x'_\alpha = 0, \tag{2}$$

unde a_α, b_α, x'_α sînt componentele de indice α ale lui a, b, x' respectiv. Cum π_α e epimorfism, relaţia (2) e adevărată oricare ar fi a_α şi b_α din Λ_α şi deci $x_\alpha \in J(\Lambda_\alpha)$. Cum $\mathring{\pi}^\beta_\alpha$ e restricţia lui π^β_α la $J(\Lambda_\beta)$, rezultă şi $\mathring{\pi}^\beta_\alpha(x_\beta) = x_\alpha$.

COROLARUL 1. *În condiţiile lemei 1 dacă Λ_α, $\alpha \in M$ sînt inele J-semisimple, atunci $\Lambda = \varprojlim \Lambda_\alpha$ e inel J-semisimplu.*

LEMA 2. *Dacă $\{\Lambda_\alpha, \pi^\beta_\alpha\}_{\alpha \in M}$ e o familie proiectivă de inele asociative iar aplicaţiile π^β_α sînt epimorfisme, atunci*

$$\varprojlim J(\Lambda_\alpha) \subseteq J(\varprojlim \Lambda_\alpha).$$

Demonstraţie. Dacă $x \in \varprojlim J(\Lambda_\alpha)$, atunci $x = [x_\alpha]$, $x_\alpha \in J(\Lambda_\alpha)$ şi $\mathring{\pi}^\beta_\alpha(x_\beta) = x_\alpha$. Deci $\pi^\beta_\alpha(x_\beta) = x_\alpha$, de unde rezultă că $x \in \Lambda$.

Fie $a, b \in \Lambda$, $a = [a_\alpha]$, $b = [b_\alpha]$. Cum $x_\alpha \in J(\Lambda_\alpha)$, există x'_α în Λ_α astfel ca

$$a_\alpha x_\alpha b_\alpha + x'_\alpha - (a_\alpha x_\alpha b_\alpha) x'_\alpha = 0. \tag{3}$$

Fie $x' = [x'_\alpha]$, unde componentele sale x'_α ($\alpha \in M$) sînt determinate prin relaţia (3). Evident, avem

$$a x b + x' - (a x b) x' = 0. \tag{4}$$

Dacă arătăm că $x' \in \Lambda$, atunci va rezulta că $x \in J(\Lambda)$ şi demonstraţia lemei va fi terminată. Fie pentru aceasta $\alpha, \beta \in M$, $\alpha \leqslant \beta$. Elementul $x'_\beta \in \Lambda_\beta$ satisface relaţia

$$a_\beta x_\beta b_\beta + x'_\beta - (a_\beta x_\beta b_\beta) x'_\beta = 0. \tag{3'}$$

Aplicînd relaţiei (3') pe π^β_α şi ţinînd seama că $a, b, x \in \Lambda$, deducem

$$a_\alpha x_\alpha b_\alpha + \pi^\beta_\alpha(x'_\beta) - (a_\alpha x_\alpha b_\alpha) \pi^\beta_\alpha(x'_\beta) = 0. \tag{5}$$

Scăzînd relaţiile (3) şi (5) şi grupînd convenabil obţinem

$$\pi^\beta_\alpha(x'_\beta) - x'_\alpha - (a_\alpha x_\alpha b_\alpha)(\pi^\beta_\alpha(x'_\beta) - x'_\alpha) = 0$$

şi dacă notăm cu $\xi_\alpha = \pi^\beta_\alpha(x'_\beta) - x'_\alpha$, $\eta_\alpha = a_\alpha x_\alpha b_\alpha$ avem

$$\xi_\alpha = \eta_\alpha \xi_\alpha.$$

Dar $\eta_\alpha \in J(\Lambda_\alpha)$, deci e un element cvasiregulat şi fie η'_α cvasiinversul său. Urmînd un artificiu des folosit se obţine

$$0 = \xi_\alpha - \eta_\alpha \xi_\alpha - \eta'_\alpha(\xi_\alpha - \eta_\alpha \xi_\alpha) = \xi_\alpha - (\eta_\alpha + \eta'_\alpha - \eta'_\alpha \eta_\alpha) \xi_\alpha = \xi_\alpha$$

și deci

$$\pi_\alpha^\beta(x'_\beta) = x'_\alpha$$

de unde rezultă că $x' \in \Lambda$.

COROLAR 2. *Dacă într-o familie proiectivă* $\{\Lambda_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}_{\alpha \in M}$ *de inele asociative fiecare* Λ_α *e inel J-radical, atunci* $\Lambda = \underset{\longleftarrow}{\lim} \Lambda_\alpha$ *e inel J-radical.*

Observăm că corolarul 2 e adevărat fără a mai impune ca π_α^β să fie epimorfisme. De asemenea, dacă $J(\Lambda_\alpha) \subseteq \operatorname{Ker}(\pi_\alpha^\beta)$ oricare ar fi $\alpha, \beta \in M$, $\alpha \leqslant \beta$, atunci corolarul 1 e adevărat fără a mai impune ca π_α^β să fie epimorfisme.

Strîngînd la un loc rezultatele de mai sus obținem următoarea teoremă de permutabilitate.

TEOREMA 1. *Dacă* $\{\Lambda_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}_{\alpha \in M}$ *e o familie proiectivă de inele asociative iar aplicațiile* π_α^β *și* π_α *sînt epimorfisme, atunci*

$$J(\underset{\longleftarrow}{\lim}\ \Lambda_\alpha) = \underset{\longleftarrow}{\lim}\ J(\Lambda_\alpha).$$

Următoarea propoziție precizează una din ipotezele teoremei precedente.

PROPOZIȚIA 1. *Dacă* $\{\Lambda_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}_{\alpha \in M}$ *e o familie proiectivă de inele asociative, atunci* π_α $(\alpha \in M)$ *sînt epimorfisme dacă și numai dacă* $\Lambda = \underset{\longleftarrow}{\lim}\ \Lambda_\alpha$ *e sumă subdirectă a familiei de inele* $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha \in M}$.

Demonstrație. Evident, $\bigcap\limits_\alpha \operatorname{Ker}(\pi_\alpha) = 0$ și dacă π_α sînt epimorfisme, atunci $\underset{\longleftarrow}{\lim}\ \Lambda_\alpha$ e o sumă subdirectă a familiei $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha \in M}$ [1]. Reciproca e tot atît de imediată.

PROPOZIȚIA 2. *Dacă* $\{\Lambda_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}_{\alpha \in M}$ *e o familie proiectivă de inele asociative și pentru un* $\alpha_0 \in M$ *inelul* Λ_{α_0} *e J-semisimplu și cu condiția minimală pentru idealele stîngi (drepte) iar* π_{α_0} *e epimorfism, atunci:*

1) *Inelul* $\underset{\longleftarrow}{\lim}\ \Lambda_\alpha$ *e J-semisimplu și cu condiția minimală pentru idealele stîngi (drepte).*

2) $\underset{\longleftarrow}{\lim}\ \Lambda_\alpha \cong \mathrm{I}_1 \oplus \mathrm{I}_2 \oplus \dots \oplus \mathrm{I}_t$, *unde* $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \dots, \mathrm{I}_t$ *sînt ideale simple ale lui* Λ_{α_0}.

Demonstrație. Inelul Λ_{α_0} fiind J-semisimplu și cu condiția minimală pentru idealele stîngi (drepte), atunci după teorema lui Wedderburn-Artin [1] avem

$$\Lambda_{\alpha 0} = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n,$$

unde I_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ sînt ideale simple ale lui Λ_{α_0}. Orice imagine omomorfă a lui Λ_{α_0} e izomorfă cu $I_{j_1} \oplus \dots \oplus I_{j_t}$, unde $j_1, \dots, j_t$ sînt aleși dintre indicii $1, 2, \dots, n$. Cum $\underset{\longleftarrow}{\lim}\ \Lambda_\alpha$ e imagine omomorfă a inelului Λ_{α_0}, atunci, după o renumerotare convenabilă, obținem (2). Acum (1) e o consecință imediată a lui (2) și a teoremei lui Wedderburn-Artin.

§ 4. F-RADICALUL LIMITEI PROIECTIVE DE INELE

Vom arăta că F-radicalul are unele din proprietățile radicalului Jacobson stabilite în paragraful precedent. Rezultatele obținute vor fi adevărate și pentru radicalul Brown-McCoy căci acesta e un caz particular al F-radicalului [2].

PROPOZIȚIA 3. *Dacă* $\{\Lambda_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}_{\alpha\in M}$ *e o familie proiectivă de inele asociative iar aplicațiile* π_α^β *și* π_α *sînt epimorfisme, atunci*

$$F(\underset{\longleftarrow}{\lim}\,\Lambda_\alpha) \subseteq \underset{\longleftarrow}{\lim}\,F(\Lambda_\alpha).$$

Demonstrație. Se constată ușor că imaginea printr-un epimorfism a unui element F-regulat e încă un element F-regulat, pentru că dacă $\varphi : \Lambda \to \Lambda'$ e un epimorfism și $a \in F(a)$, atunci $\varphi(a) \in \varphi(F(a)) = F(\varphi(a))$ și deci $\varphi(a)$ este, o dată cu a, un element F-regulat. Deci imaginea printr-un epimorfism a unui ideal F-regulat e un ideal F-regulat.

Dacă $a \in F(\underset{\longleftarrow}{\lim}\,\Lambda_\alpha)$, atunci $a = [a_\alpha]$ cu $a_\alpha \in \Lambda_\alpha$ și $\pi_\alpha^\beta(a_\beta) = a_\alpha$ pentru $\alpha \leqslant \beta$. Dar idealul (a) este F-regulat și imaginea sa prin epimorfismul π_α este idealul principal (a_α) al inelului Λ_α și deci (a_α) e un ideal F-regulat. Obținem că $a_\alpha \in F(\Lambda_\alpha)$ pentru orice $\alpha \in M$. Cum $\pi_\alpha^\beta(a_\beta) = a_\alpha$, avem $\mathring{\pi}_\alpha^\beta(a_\beta) = a_\alpha$ și în definitiv $a \in \underset{\longleftarrow}{\lim}\,F(\Lambda_\alpha)$.

COROLARUL 3. *Dacă* $\{\Lambda_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}_{\alpha\in M}$ *este o familie proiectivă de inele asociative iar aplicațiile* π_α^β, π_α *sînt epimorfisme, atunci dacă* $\Lambda_\alpha\ (\alpha \in M)$ *sînt inele F-semisimple, inelul* $\Lambda = \underset{\longleftarrow}{\lim}\,\Lambda_\alpha$ *este F-semisimplu.*

Dacă pentru F-radical e adevărat un analog al lemei 2, și deci al teoremei 1, rămîne ca o problemă deschisă.

BIBLIOGRAFIE

1. N. JACOBSON, *Structure of Rings*. Amer. Math. Soc. Coll. Pub., **37** (1957).
2. B. BROWN and N. MC COY, *Radicals and subdirect sums*, Amer. J. Math., 1949.
3. S. EILENBERG and N. STEENROD, *Fundations of Algebric Topology*. Princenton University Press, 1952.

§ 3. F-RADICALUL LIMITEI PROIECTIVE DE INELE

Vom arăta că F-radicalul are unele din proprietățile radicalului Jacobson stabilite în paragraful precedent. Rezultatele obținute vor fi adevărate și pentru radicalul Brown-McCoy, care este un caz particular al F-radicalului [2].

PROPOZIȚIA 2. *Dacă* $\{A_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}_{\alpha\in\mathfrak{M}}$ *e o familie proiectivă de inele asociative iar aplicațiile* π_α^β *și* π_α *sînt epimorfisme, atunci*

$$F(\underset{\longrightarrow}{\lim} A_\alpha) \subseteq \underset{\longrightarrow}{\lim} F(A_\alpha).$$

Demonstrație. Se constată ușor că imaginea printr-un epimorfism a unui element F-regulat e încă un element F-regulat, pentru că dacă $\varphi : A \to A'$ e un epimorfism și $a \in \mathcal{F}(a)$, atunci $\varphi(a) \in \varphi(\mathcal{F}(a)) = \mathcal{F}(\varphi(a))$ și deci $\varphi(a)$ este, o dată cu a, un element F-regulat. Deci imaginea printr-un epimorfism a unui ideal F-regulat e un ideal F-regulat.

Dacă $a \in F(\underset{\longrightarrow}{\lim} A_\alpha)$, atunci $a = [a_\alpha]$ cu $a_\alpha \in A_\alpha$ și $\pi_\alpha^\beta(a_\beta) = a_\alpha$ pentru $\alpha \leq \beta$. Dar idealul (a) este F-regulat și imaginea sa prin epimorfismul π_α este idealul principal (a_α) al inelului A_α și deci (a_α) e un ideal F-regulat. Obținem că $a_\alpha \in F(A_\alpha)$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{M}$. Cum $\pi_\alpha^\beta(a_\beta) = a_\alpha$, avem $\pi_\alpha^\beta(a_\beta) = a_\alpha$ și în definitiv $a \in \underset{\longrightarrow}{\lim} F(A_\alpha)$.

COROLARUL 3. *Dacă* $\{A_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}_{\alpha\in\mathfrak{M}}$ *este o familie proiectivă de inele asociative iar aplicațiile* π_α^β, π_α *sînt epimorfisme, atunci dacă* A_α $(\alpha \in \mathfrak{M})$ *sînt toate F-semisimple, inelul* $A = \underset{\longrightarrow}{\lim} A_\alpha$ *este F-semisimplu.*

Dacă pentru F-radical e adevărat un analog al lemei 2, și deci al teoremei 1, rămîne ca o problemă deschisă.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Jacobson, *Structure of rings*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 37 (1957).
2. B. Brown and N. McCoy, *Radicals and subdirect sums*, Amer. J. Math., 1947.
3. S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, 1952.

O GENERALIZARE A NOȚIUNII DE CATEGORIE GRAMATICALĂ ÎN SENSUL LUI DOBRUŠIN

DE

CONSTANTIN V. CRĂCIUN

1. INTRODUCERE

În cele ce urmează, vom studia unele probleme relative la noțiunea de categorie gramaticală, așa cum a fost ea definită în teoria algebrică a gramaticii, inițiată de O. S. Kulagina, R. L. Dobrušin, I. I. Revzin, V. A. Uspenskiĭ și alții.

2. NOȚIUNI PRELIMINARE

Fie E o mulțime de elemente numite *cuvinte*. Vom numi *frază* orice șir finit $x_1 x_2 \ldots x_n$ de elemente din E (unele din ele putîndu-se repeta).

Anumite fraze vor fi considerate fraze *marcate* sau *reperate*.

Notăm cu F mulțimea tuturor frazelor reperate ce se pot forma cu elemente din E.

Vom asocia fiecărui cuvînt x din E o anumită submulțime a lui E pe care o vom nota cu $V(x)$ și o vom numi *paradigma* lui x.

Presupunem că fiecare cuvînt din E aparține la o paradigmă și numai la una singură.

Fie V mulțimea paradigmelor cuvintelor din E.

Cuvintele, frazele reperate și paradigmele sînt considerate ca date.

Se numește *limbă* un triplet (E, V, F), unde E, V și F au semnificațiile de mai sus.

3. CLASE DE DISTRIBUȚIE

Fie două cuvinte x și y. Spunem că x *domină* pe y și scriem $x \rightarrow y$, dacă pentru orice pereche de fraze f_1 și f_2 pentru care fraza $f_1 x f_2$ este reperată, fraza $f_1 y f_2$ este de asemenea reperată.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 9, P. 1147–1152, BUCUREȘTI, 1964

Relația → se numește *relație de dominare*.

Exemplu : *beaux* → *gras*, deoarece în orice frază aparținînd limbii franceze, care conține pe *beaux*, înlocuirea lui *beaux* prin *gras* conduce la o frază aparținînd de asemenea limbii franceze.

În schimb, *gras* nu domină pe *beaux*, deoarece în fraza *Cet objet est gras*, înlocuirea lui *gras* prin *beaux* conduce la *Cet objet est beaux* care nu este o frază a limbii franceze. (În acest exemplu, s-a luat în rolul mulțimii F mulțimea frazelor corect construite din limba franceză.)

Vom spune că o mulțime de cuvinte A domină mulțimea de cuvinte B și vom scrie $A \rightarrow B$, dacă, oricare ar fi $x \in A$ și oricare ar fi $y \in B$, avem : $x \rightarrow y$.

Numim *clasa de distribuție a cuvîntului* x totalitatea cuvintelor y care au proprietatea : $x \rightarrow y$ și $y \rightarrow x$.

Scriem pe scurt aceasta astfel : $x \leftrightarrow y$ și citim „x este congruent cu y".

Relația ↔ se numește *relație de congruență*. În [1] și [4] clasele de distribuție sînt numite familii ; în [4] se face un studiu matematic amănunțit al familiilor.

4. MULȚIMI INIȚIALE

O mulțime A de cuvinte va fi numită *mulțime inițială*, dacă nu există nici un cuvînt din afara mulțimii A, care să domine mulțimea A.

În [4] sînt studiate amănunțit mulțimile inițiale.

5. CATEGORII GRAMATICALE

Numim categorie gramaticală generată de mulțimea inițială A și o notăm cu $\mathcal{G}(A)$, totalitatea cuvintelor obținute prin reuniunea mulțimii A cu toate cuvintele care sînt dominate de orice cuvînt din A.

Dacă

$$A_1 = \{y\,;\, A \rightarrow y\}$$

avem :

$$\mathcal{G}(A) = A \cup A_1.$$

Această noțiune de categorie gramaticală a fost introdusă și studiată de S. Marcus în [4].

O ilustrare cu exemple din limba romînă se găsește în [6].

Se numește *categorie gramaticală elementară*, categoria gramaticală generată de o clasă de distribuție inițială.

Această noțiune a fost introdusă de R. L. Dobrušin în [3] și a constituit punctul de plecare pentru cercetările din [4].

În [7] este folosit pentru noțiunea de categorie gramaticală elementară termenul de „*serie elementară*" ([7], p. 106).

În [2], R. L. Dobrušin a considerat clasa de distribuție K formată din cuvintele :

Это, то

Această clasă de distribuție nu e inițială, deoarece e dominată de clasa de distribuție compusă din cuvintele :

Красное, зелёное, широкое,.....

Deși clasa K de distribuție considerată mai sus nu e inițială, reuniunii $K \cup K_1$, unde $K_1 = \{y\, ;\, K \rightarrow y\}$, i se asociază o semnificație lingvistică naturală.

Pentru a studia situații de acest tip, este necesar să se extindă noțiunea de categorie gramaticală, luîndu-se în considerare și unele clase de distribuție neinițiale.

În acest scop, R. L. Dobrušin a introdus în [2] noțiunea de ***rădăcină*** pe care o prezentăm mai jos folosind notația din [5].

6. DEFINIȚIA RĂDĂCINII DUPĂ DOBRUŠIN

Vom numi *context* orice pereche ordonată de fraze (f_1, f_2).

O clasă de distribuție M se numește ***rădăcină***, dacă îndeplinește una din următoarele condiții :

1) M este mulțime inițială ;

2) M nu este mulțime inițială, dar există un context (f_1, f_2) cu proprietățile :

2.1) $f_1 x f_2$ este reperată pentru orice $x \in M$;

2.2) pentru orice familie M^* cu proprietatea $M^* \rightarrow M$, $f_1 y f_2$ este nerepetată $(M^* \cap M = \emptyset)$ pentru orice $y \in M^*$.

În [5], S. Marcus a demonstrat următoarea

TEOREMĂ. *Fie* M^* *și* M *două familii distincte, astfel încît* $M^* \rightarrow M$ *iar* M^* *este unica familie care domină pe* M.

În aceste condiții, M *este o rădăcină* (teorema 21, capitolul V).

O ilustrare a acestei teoreme este dată tocmai de exemplul considerat de Dobrušin în [2] ; într-adevăr, clasa de distribuție {Это, то} este dominată de o singură clasă de distribuție diferită de ea, și anume :

{ Красное, зелёное, широкое,...}

7. NOȚIUNEA DE RĂDĂCINĂ ÎN SENS GENERALIZAT

După cum s-a dovedit interesant să se studieze categorii gramaticale care nu sînt generate de clase de distribuție inițiale, ci de către mulțimi inițiale generale, în mod analog ne-am pus problema (urmînd o sugestie din [5], cap. V) să studiem categoriile gramaticale care nu sînt generate de rădăcini clase de distribuție, ci de rădăcini într-un sens mai larg, în care clasele de distribuție sînt înlocuite prin mulțimi arbitrare de cuvinte.

Vom pune următoarea

DEFINIȚIE. *Mulțimea A se numește rădăcină în sens generalizat* (pe *scurt, r. g.*), *dacă are loc una din următoarele două condiții* :

1. *A este mulțime inițială* ;

2. *A nu este mulțime inițială, dar pentru fiecare $x \in A$ există un context (f_1, f_2) astfel încît* :

2.1) *f_1xf_2 este reperată*

și

2.2) *pentru orice $y \to A, y \notin A, f_1yf_2$ este nereperată.*

PROPOZIȚIE. *Orice rădăcină în sensul lui Dobrušin este o rădăcină în sens generalizat dar nu și reciproc.*

Într-adevăr, fie M o rădăcină în sensul lui Dobrušin.

Conform definiției, rezultă că M este *clasă de distribuție* și îndeplinește una din cele două condiții.

Avem de considerat două cazuri :

1°. M este mulțimea inițială. Atunci M este r. g. deoarece este îndeplinită condiția 1) de definiție a rădăcinii în sens generalizat.

2°. M nu este mulțime inițială, dar există un context (f_1, f_2) cu proprietățile :

2°1. f_1xf_2 este reperată pentru orice $x \in M$;

2°2. Oricare ar fi familia M^* cu proprietatea $M^* \to M$, f_1yf_2 este nereperată pentru orice $y \in M^*$ $(M^* \cap M = \emptyset)$.

De aici se vede că este îndeplinită condiția 2 din definiția rădăcinii în sens generalizat (în cazul nostru contextul (f_1, f_2) este același pentru orice $x \in M$ și pentru orice $y \to M$, $y \notin M$). Ținînd seamă de 1° și 2°, rezultă că M este r.g. Reciproca nu este adevărată.

Într-adevăr, n-avem decît să considerăm o rădăcină în sens generalizat A, supusă la condiția : A nu e familie.

Această condiție e suficientă pentru a ne asigura că A nu e rădăcină în sensul lui Dobrušin.

Observație. În alegerea acestei definiții, am pornit de la constatarea faptului că reuniunea a două rădăcini în sensul lui Dobrušin nu mai este o rădăcină în sensul lui Dobrušin (deoarece reuniunea a două clase de distribuție nu mai e o clasă de distribuție).

Dintre diversele posibilități de extensiune care se oferă, am ales pe aceea care face posibilă o teoremă de tipul teoremei 1 (a se vedea mai departe).

După cum se știe, mulțimile inițiale formează un semigrup în raport cu operația de reuniune. Vom arăta că și rădăcinile în sens generalizat formează un semigrup în raport cu operația de reuniune.

TEOREMA 1. *Dacă M și N sînt două rădăcini în sens generalizat, atunci $M \cup N$ este tot o rădăcină în sens generalizat.*

Demonstrație. Deoarece reuniunea dintre o mulțime inițială și o mulțime oarecare este tot o mulțime inițială, rezultă că pentru demonstrarea teoremei e suficient să arătăm că reuniunea a două rădăcini în sens generalizat, neiniţiale, este tot o rădăcină în sens generalizat (neiniţială).

Din faptul că M este r. g. neiniţială, rezultă că pentru *fiecare* $x \in M$ există un context (f_1, f_2) cu următoarele proprietăţi :

1) $f_1 x f_2$ este reperată

şi

2) Pentru orice $y \to M, y \notin M, f_1 y f_2$ este nereperată.

N fiind şi ea r. g. neiniţială, rezultă că pentru fiecare $x \in N$ există un context (g_1, g_2) cu proprietăţile :

1′) $g_1 x g_2$ este reperată

şi

2′) oricare ar fi $y \to N, y \notin N$ avem : $g_1 y g_2$ nereperată.

Notăm cu $A = M \cup N$ şi punem $B = \{y\,;\ y \to A,\ y \notin A\}$ $C = \{y\,;\ y \to M, y \notin M\}$. Fie $x \in A$.

Avem de considerat două cazuri :

I. $x \in M$.

II. $x \in N$.

Cazul I. $x \in M$. Din condiţia 1) de definiţie a lui M rezultă că, pentru fiecare $x \in M$, există un context (f_1, f_2) cu proprietăţile :

α) $f_1\, x\, f_2$ este reperată

şi

β) pentru orice $y \to A$, $y \notin A$, $f_1 y f_2$ este nereperată.

Justificarea proprietăţii β) rezultă din incluziunea $B \subset C$ care se stabileşte imediat, ţinînd seamă de proprietăţile relaţiei $\to$.

Cazul II. $x \in N$. Demonstraţia se face la fel, considerînd în loc de contextele (f_1, f_2), contextele (g_1, g_2) ce corespund la cuvintele din N în baza proprietăţii lui N de a fi rădăcină în sens generalizat neiniţială.

Teorema este astfel complet demonstrată.

TEOREMA 2. *Categoria gramaticală generată de o rădăcină în sens generalizat este tot o rădăcină în sens generalizat.*

Demonstraţie. Fie A o rădăcină în sens generalizat. Notăm cu A_1 mulţimea tuturor cuvintelor dominate de A ; deci $A_1 = \{x\,; A \to x\}$.

Categoria gramaticală generată de A va fi $\mathcal{G}(A) = A \cup A_1$.

Dacă A este mulţime iniţială, atunci $\mathcal{G}(A)$ este şi ea mulţime iniţială (deoarece reuniunea dintre o mulţime iniţială şi o mulţime oarecare este tot o mulţime iniţială) şi deci este r. g.

Presupunem că A nu este iniţială.

Fie $x \in \mathcal{G}(A) = A \cup A_1$.

Avem unul din următoarele două cazuri :

1. $x \in A$.

A fiind r. g. neiniţială, înseamnă că există un context (f_1', f_2') cu proprietăţile :

I_1) $f_1' x f_2'$ este reperată

şi

I_2) oricare ar fi y astfel încît $y \to A \cup A_2$ şi $y \notin A \cup A_1$, $f_1' y f_2'$ este nereperată.

(Mulţimea elementelor y cu proprietăţile : $y \to A \cup A_1$ şi $y \notin A \cup A_1$ este o submulţime a mulţimii elementelor y care au proprietăţile $y \to A$ şi $y \notin A$).

II. $x \in A_1$. Din definiţia lui A_1 avem : $A \to x$. Ţinînd seamă de definiţia relaţiei$\to$, rezultă că pentru contextele (f'_1, f'_2) din cazul I avem :

II$_1$) $f'_1 \, x \, f'_2$ este reperată

$(x \in A_1)$

şi

II$_2$) pentru orice $y \to A \cup A_1$ astfel încît $y \notin A \cup A_1$, fraza $f_1 \, y \, f_2$ este nereperată.

Ţinînd seama de cele arătate mai sus, rezultă că $\mathcal{G}(A)$ este r. g. şi teorema este complet demonstrată.

BIBLIOGRAFIE

1. О.С. Кулагина, *Об одном способе определения грамматических понятий на базе теории множеств.* Проблемы Кибернетики (вып. I) Москва, 1958, 203—214.
2. Р. Л. Добрушин, *Математические методы в лингвистике.* Математическое просвещение. **6**, 52—60 (1961).
3. Р. Л. Добрушин, *Элементарная грамматическая категория.* Бюллетень объединения по проблемам машинного перевода, **5**, 19—21 (1957).
4. S. Marcus, *Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire I.* Revue de mathématiques pures et appliquées, **VII**, *1* (1962).
5. S. Marcus, *Lingvistică matematică. Modele matematice în lingvistică.* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
6. S. Marcus, *Un criteriu contextual de clasificare a cuvintelor (cu aplicaţie la adjectivele din limba romînă).* Studii şi cercetări lingvistice, **2**, 177—189 (1962).
7. И.И. Ревзин, *Модели языка.* Издательство Академии наук СССР, Москва, 1962, 105—115.

NUMĂRUL TIPURILOR DE SINONIMIE A CLASELOR DE DIPOLI, FUNCȚIONAL ECHIVALENȚI, CU SELECTORI

DE

TOMA GAŞPAR

Fie $S_1, \ldots, S_p$, p selectori cu cîte m_i poziții respectiv. Asociem contactului $j(i)$ al selectorului i variabila bivalentă $x_i^{j(i)}$. Aceste variabile vor satisface următoarele condiții :

$$x_i^{j(i)} x_i^{h(i)} = 0 \text{ pentru } j(i) \neq h(i) \text{ şi } \overline{x}_i^1 \cdot \overline{x}_i^2 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_i^{s_i} = 0. \tag{1}$$

Fiecărei clase de dipoli funcțional echivalenți, de acești selectori îi asociem o funcție de lucru care va fi o funcție booleană de variabilele bivalente $x_i^{j(i)}$. Dacă ținem seama de relația (1), această funcție poate fi adusă la forma :

$$f(x_i^{j(i)}) = \bigcup \left(\varepsilon_j \prod_{i=1}^{p} x_i^{j(i)} \right) \text{ cu } \varepsilon_j \in L_2,$$

unde disjuncția se ia asupra tuturor sistemelor $j(i)$ $(j(i) = 1, \ldots, m_i)$.

Produsul $\prod_{i=1}^{p} x_i^{j(i)}$ îl vom numi conjuncție elementară de variabilele x_i sau mai pe scurt conjuncție elementară, acest termen nefiind folosit în alt sens în cursul lucrării.

Cum alegerea poziției inițiale a unui selector este arbitrară şi de asemenea şi numerotarea selectorilor cu acelaşi număr de poziții, atunci conform unui izomorfism analog cu cel din [1] putem considera sinonime 2 clase de dipoli ale căror funcții de lucru sînt echivalente respectiv în sensul dat de § 3. Ne propunem să aflăm numărul tipurilor de sinonimie.

I. DEFINIȚII ȘI NOȚIUNI INTRODUCTIVE

§ 1. Fie $x_i^{j(i)}$, $i = 1, \ldots, s$, $j(i) = 1, \ldots, m$, m^s obiecte distincte şi fie $\mathfrak{S}_{m^s}$, grupul simetric al permutărilor acestor obiecte. Vom considera următoarele trei subgrupuri ale acestui grup.

1) Subgrupul R_{m^s}, pe care îl vom numi grup de rotații, pentru care avem :

$$r \in R_{m^s},\; r\,(x_i^{j(i)}) = x_i^{l(i)}\; l\,(i) \equiv j\,(i) + r\,(i)\,k\,(m).$$

Se vede ușor că grupul R_n este produs direct de s grupuri ciclice de ordinul m și deci este un grup comutativ. Vom spune că elementul r este dat de numerele $r(i)$ și de asemenea cînd va fi vorba de indici superiori în loc de congruențe vom scrie $=$ înțelegînd egalitatea în inelul Z/m.

2) Subgrupul elementelor (τ) pentru care vom avea : $\tau\,(x_i^k) = x_{\sigma(i)}^k$, unde $\sigma \in \mathfrak{S}_{s!}$. Acest grup este evident izomorf cu $\mathfrak{S}_{s!}$ și vom face chiar identificarea dată de acest izomorfism și anume în cursul lucrării cînd va fi vorba de un grup $\mathfrak{S}_{s!}$ (sau un element din el) care acționează asupra lui x_i (fără a indica indicii superiori) se va înțelege exact acest subgrup al lui $\mathfrak{S}_{m^s!}$.

Cele două subgrupuri R_{m^s} și $\mathfrak{S}_{s!}$ comută. Într-adevăr, fie r dat de numerele $r\,(i)$, $r \in R_{m^s}$ și $\sigma \in \mathfrak{S}_{s!}$. Atunci $\sigma r = r'\sigma$, unde r' e dat de numerele $r(\sigma^{-1}(i))$. Atunci, după cum se știe, mulțimea $H_{m^s} = R_{m^s} \cdot \mathfrak{S}_{s!}$ este grup și anume chiar subgrup al lui $\mathfrak{S}_{m^s!}$. În continuare vom lucra cu acest subgrup.

§ 2. Fie $x_{i(k)}^{j(i(k))}$, $k = 1, \ldots, p$, $i\,(k) = 1, \ldots, s_k$, $j\,(i(k)) = 1, \ldots, m_k$, variabile bivalente satisfăcînd relațiile (1) (le putem considera ca asociate la contactele a $\sum\limits_{k=1}^{p} s_k$ selectori avînd respectiv m_k poziții).

Fie $\mathfrak{F}$ mulțimea funcțiilor booleene de aceste variabile, funcțiile fiind aduse la forma de disjuncție de conjuncții elementare.

Fie $H_{m_k^{s_k}}$ grupuri cu semnificația dată mai sus și fie H subgrup al mulțimii permutărilor tuturor obiectelor x definit astfel :

$$H = H_{m_1^{s_1}} \times H_{m_2^{s_2}} \times \ldots \times H_{m_p^{s_p}}\,. \tag{2}$$

§ 3. DEFINIȚIE. Două funcții din $\mathfrak{F}$ sînt de același tip în raport cu H dacă se obțin una din alta prin transformări din H.

Această relație este o relație de echivalență care împarte pe $\mathfrak{F}$ în clase de echivalență. Ne propunem să aflăm numărul acestor clase.

§ 4. Fie $h \in H$. Atunci h induce o permutare a funcțiilor din $\mathfrak{F}$. Considerînd matricile de permutări, ele realizează o reprezentare liniară reductibilă, a grupului H, reprezentare care, conform celor arătate în [2] și [3], va conține reprezentarea identică unidimensională de exact atîtea ori cît este numărul claselor de funcții din $\mathfrak{F}$, după H. Însă numărul care ne dă, de cîte ori este conținut reprezentarea identică unidimensională într-o reprezentare, este [8] :

$$\nu = \frac{1}{\mathrm{o}\,(\mathrm{H})} \sum_{h \in H} \chi\,(h) \tag{3}$$

unde $\mathrm{o}\,(H)$ este ordinul grupului H, iar $\chi\,(h)$ este caracterul elementului h, adică numărul de funcții care rămîn invariante la transformarea h.

§ 5. o (H) rezultă din formula (2) întrucît un grup H_{m^s} conține $m^s \cdot s\,!$ obiecte. Deci :

$$o\,(H) = \prod_{k=1}^{p} (s_k\,!\; m_k^{s_k}). \tag{4}$$

II. CALCULUL LUI χ (h)

§ 6. O transformare h induce în mulțimea conjuncțiilor elementare o permutare. Dacă această permutare are a cicluri, atunci $\chi\,(h) = 2^a$ [3].

Într-adevăr, vor rămîne pe loc exact acele funcții care au aceeași valoare a lui ε (0 sau 1) pentru toate conjuncțiile elementare care intră în același ciclu.

§ 7. Fie $h = h_1 \,.\, h_2$ cu proprietatea că h_i nu acționează (în sensul că lasă pe loc) asupra variabilelor x_i (nici măcar la indici superiori) asupra cărora acționează h_j $(i \neq j)$. Să considerăm un ciclu de lungime a din permutarea indusă de h_1 și unul de lungime b din cea indusă de h_2 în mulțimea conjuncțiilor elementare de variabilele asupra cărora acționează. Atunci cele $a.b$ conjuncții obținute înmulțind o conjuncție din primul ciclu cu una din cel de-al doilea, vor intra toate în cicluri de lungime c, $c = [a, b]$, în permutarea indusă de h în mulțimea conjuncțiilor elementare.

Într-adevăr, fie primul ciclu $(u_1, \ldots, u_a)$ iar al doilea $(v_1, \ldots, v_b)$ și fie τ permutarea indusă de h. Atunci :

$$\tau^c(u_i)\begin{cases} = u_i, & c = ka \\ \neq u_i, & c \neq ka \end{cases} \qquad \tau^c(v_j)\begin{cases} = v_j, & c = kb \\ \neq v_j, & c \neq kb \end{cases} \quad \text{deci}$$

$$\tau^c(u_i\,v_j)\begin{cases} = u_i v_j, & c = k_1\, a = k_2 b \\ \neq u_i v_j, & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

ceea ce demonstrează afirmația ([2] și [3]).

§ 8. Punînd $h = h_1 + \ldots + h_t$, cu h_i satisfăcînd condițiile din paragraful anterior și în plus presupunînd că asupra fiecărui x_i acționează exact un h_j și atașînd fiecărui h_j polinomul ([2]) :

$$P_j^*\,(z) = \sum_i \alpha_i^{(j)} z_i,$$

unde $\alpha_i^{(j)}$ este numărul de cicluri de lungime i din permutarea indusă de h_j în mulțimea conjuncțiilor elementare de variabilele asupra cărora e considerat că acționează, iar cu α_i notînd numărul ciclurilor de lungime i din permutarea indusă de h, avem :

$$P\,(z) = \sum \alpha_i\, z_i = \prod_{j=1}^{t} P_j(z), \tag{5}$$

unde înmulțirea se face cu formulele $z_a z_b = (a, b)\, z_{[a,\,b]}$. [1]

---

[1] Notațiile folosite aici și în continuare sînt cele obișnuite din teoria numerelor (vezi de exemplu [9]), cu excepția faptului că ne mărginim la numere nenegative.

Cum grupurile R sînt comutative, iar orice element din ele permută cu orice transformare ce lasă pe loc toate variabilele x_i pentru care el are numere $r(i)$ nenule, putem avea pentru orice $h \in H$ o descompunere $h = \Pi h_j$, unde $h_j = \sigma r$ cu σ o permutare ciclică (dintr-un $\mathfrak{S}_s$; vezi § 1) iar r avînd numere $r(i)$ nenule cel mult pentru acei x_i asupra cărora acționează σ.

Deci va fi suficient să calculăm $P(z)$ pentru astfel de transformări.

Convenim ca să înțelegem de acum înainte prin număr întreg un număr întreg nenegativ, întrucît cele negative nu ne interesează.

§ 9. TEOREMĂ. *Fie* $h = \sigma . r$, *unde* σ *e un ciclu de lungime* l, *iar* r *e dat de numerele* $r(i)$ (considerați doar pentru x_i care intră în σ, ceilalți fiind nuli, vezi § 8) *și fie* d *cel mai mic număr natural pentru care* $d \sum_{i=1}^{l} r(i) = km$ (m este ordinul grupurilor ciclice ce formează subgrupul R din care e luat r) — adică d este ordinul elementului $\sum r(i)$ în grupul ciclic de ordinul m, *iar* l', μ *și* η *valori date de relațiile* (7) *și* (8) *de mai jos. Atunci polinomul* $P(z)$ *corespunzător acestei transformări este dat de relația*:

$$P_{d,l_s}^{(m)}(z) = \sum_{\delta | l'} \frac{\eta_{d,\mu,\delta}^{(m)}}{d\mu\delta} z_{d\mu\delta}. \tag{6}$$

Vom numi d ordinul ciclului σ.

§ 10. *Demonstrație* Avem:

$$h(x_i^{j(i)}) = x_{\sigma(i)}^{j(i)+r(i)}.$$

Fie τ permutarea indusă de h în mulțimea conjuncțiilor elementare asupra cărora acționează. Avem:

$$\tau(\Pi x_i^{j(i)}) = \Pi x_{\sigma(i)}^{j(i)+r(i)}.$$

Fie ρ un astfel de număr încît să existe cicluri de lungime ρ adică să existe o conjuncție pentru care să avem:

$$\tau^{\rho}(\Pi x_i^{j(i)}) = \Pi x_i^{j(i)} \text{ și } \tau^{\rho'}(\Pi x_i^{j(i)}) \neq \Pi x_i^{j(i)} \text{ pentru } \rho' < \rho$$

dar

$$\tau^{l}(x_{i}^{j(i)}) = \Pi x_i^{(j(i)+\Sigma r(i))}$$

și

$$\tau^{ld}(\Pi x_i^{j(i)}) = \Pi x_i^{j(i)+d\Sigma r(i)} = \Pi x_i^{j(i)}.$$

Dar totodată:

$$\tau^{ld'}(\Pi x_i^{j(i)}) = \Pi x_i^{j(i)+d'\Sigma r(i)} \neq \Pi x_i^{j(i)},\ d' < d.$$

Din aceste relații deducem că: ρ/ld dar ρ/ld' pentru $d' < d$, deci $\rho = dl_1$ cu l_1/l, căci în cazul contrar am avea $\rho/(d, \rho)\, l$ cu $(d, \rho) < d$.

Mai departe să considerăm descompunerile canonice în numere prime ale lui l şi d; fie:

$$l = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{q} p_j'^{\gamma_j}, \; d = \prod_{j=1}^{t} p_i^{\beta_i} \prod_{j=q+1}^{w} p_j'^{\gamma_j},$$

unde p_i sînt numerele prime comune iar p_j' numerele prime necomune. Notînd

$$\mu = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i}$$

μ este definit de relaţiile:

$$l = \mu l' \text{ cu } \{(d, l') = 1\} \;\&\; \{(l''), \, l'/l''/\, l \Rightarrow (l'', d) \neq 1\}. \tag{7}$$

Avem l/l_1.

Într-adevăr, dacă măcar un p_i ar intra în l_1 la o putere mai mică decît α_i, atunci $\rho / \frac{l}{p_i} \; d = l \frac{d}{p_i}$, absurd.

Ca atare am demonstrat că pentru a exista un ciclu de lungime ρ trebuie ca să avem: $\rho = d\mu\delta$, unde δ / l', iar μ şi l' sînt daţi de (7).

§ 11. Pentru a completa teorema mai trebuie să evaluăm numărul $\eta_{d,\mu,\delta}^{(m)}$ al conjuncţiilor elementare ce intră în ciclurile de lungime $d\mu\delta$ (vom arăta că acest număr nu depinde de l').

Vom demonstra relaţia

$$\eta_{d,\mu,\delta}^{(m)} = m^{\mu\delta} - \sum_{\substack{\gamma/\delta \\ \gamma<\delta}} \eta_{d,\mu,\delta}^{(m)}. \tag{8}$$

Să presupunem $\rho = d\mu\delta$. Să calculăm indicii $j\,(i)$ astfel ca să avem o conjuncţie care intră într-un ciclu a cărui lungime e divizor al lui ρ. Atunci avem:

$$\Pi\, x^{j(i)} = \tau^{\rho}\,(\Pi\, x_i^{j(i)}) = \Pi\, x_{i+\rho}^{j(i)+r(i)+\ldots+r(i+\rho-1)} \tag{9}$$

(în această relaţie precum şi în celelalte din acest paragraf sumele sînt considerate în inelele claselor de resturi respective).

Fie γ cel mai mic număr natural astfel ca $\gamma\rho = lk$. Avem:

$$\gamma d\mu\delta = k\mu l', \; (d, l') = 1 \Rightarrow d \mid k \text{ şi } \rho \mid dl, \text{ avem } k = d \text{ şi } \gamma = \frac{ld}{\rho} = \frac{l}{\mu\delta}.$$

Atunci pentru a avea loc egalitatea (9), dîndu-ne pe $j\,(i)$ pentru un i dat, trebuie să avem egalităţile:

$$\begin{aligned}
j\,(i+\rho) &= j\,(i) + r\,(i) + \ldots + r\,(i+\rho-1)\\
j\,(1+2\rho) &= j\,(i+\rho) + r\,(i+\rho) + \ldots + r\,(i+2\rho-1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
j\,(i) &= j\,(i+\rho\,(\gamma-1)) + r\,(i+\rho\,(\gamma-1)) + \ldots + r\,(i-1)\\
\hline
0 &= r\,(i) + \ldots + r\,(i-1) = \left(\sum_{i=1}^{l} r\,(i)\right)\frac{\gamma\rho}{l} = \left(\sum_{i=1}^{l} r\,(i)\right) d.
\end{aligned}$$

Întrucît prin însumare am obţinut o egalitate adevărată în baza definiţiei lui d, rezultă că ultima relaţie (dinainte de adunare) este o consecinţă a celorlalte. Ca atare, dacă am ales pe $j\,(i)$ arbitrar, calculăm din aceste egalităţi pe $j\,(i+\rho)\ldots j\,(i+(\gamma-1)\,\rho)$ astfel ca (9) să fie satisfăcută. Deci cei l indici i se împart în $\mu\delta$ clase de cîte γ indici, iar în fiecare clasă putem determina arbitrar pe $j\,(i)$ pentru un singur (i). Deci avem $m^{\mu\delta}$ conjucţii ce intră în cicluri de lungime divizor al lui $d\mu\delta$, cu aceasta fiind demonstrată relaţia (8) şi totodată şi teorema (§ 9).

III. CALCULUL NUMĂRULUI DE TRANSFORMĂRI CU ACELAŞI χ

§ 12. După cum am văzut la punctul precedent, χ e dat cu ajutorul descompunerii lui h în produs de transformări care sînt produse de un ciclu şi de o anumită rotaţie, rotaţia intervenind doar prin ordinul ciclului (§ 9).

Fie deci $d\,(1), \ldots, d\,(\sigma_k)$ (unde prin σ_k notăm numărul divizorilor pozitivi ai lui m_k), toţi divizorii lui m_k, ordonaţi într-o ordine arbitrară.

Fie $h = h_1 \cdot \ldots \cdot h_p$, cu $h_k \in H_{m_k^{s_k}}$ din (2). Iniţial vom face raţionamentele pentru un k fix căci în descompunerea lui h dată în § 8 evident factori h_k de mai sus apar ca grupe de factori. O transformare h_k este un produs σr (§ 1). Permutarea σ e dată de structura de cicluri $\alpha_l^{(k)}$ cu $\sum\limits_{l=1}^{s_k} l\,\alpha_l^{(k)} = s_k$. Notăm cu $\beta_{l,i}^{(k)}$ $(l = 1, \ldots, s_k,\ i = 1, \ldots, \sigma_k,\ k = 1, \ldots, p)$ numărul ciclurilor de lungime l din h_k, al căror ordin este $d\,(i)$. Numerele $\beta_{l,i}^{(k)}$ satisfac relaţia:

$$\sum_{i=1}^{\sigma_k} \beta_{l,i}^{(k)} = \alpha_l^{(k)}. \tag{10}$$

Sistemul $\beta_{l,i}^{(k)}$ caracterizează complet pe χ şi anume pentru un h avînd un sistem dat $\beta_{l,i}^{(k)}$ avem pe χ calculat cu ajutorul polinomului $P_\beta\,(z)$ unde:

$$P_\beta\,(z) = \prod_{k=1}^{p} \prod_{l=1}^{s_k} \prod_{i=1}^{\sigma_k} \left(P_{d(i),\,l}^{(m_k)}\,(z)\right)^{\beta_{l,i}^{(k)}}. \tag{11}$$

Ne propunem deci să calculăm numărul transformărilor h cu un anumit sistem $\beta_{l,i}^{(k)}$ dat. Numărul permutărilor cu structura de cicluri $\alpha_l^{(k)}$ dată de (10) (pentru k fix), este:

$$\frac{s_k\,!}{\prod\limits_{l=1}^{s_k} \left(\alpha_l^{(k)}\,!\; l^{\alpha_l^{(k)}}\right)}.$$

Pentru o permutare dată, ordinele $d\ (i)$ se pot asocia în

$$\prod_{l=1}^{s_k} c_{\beta_{l,1}^{(k)}, \ldots, \beta_{l,\sigma_k}^{(k)}}^{\alpha_l^{(k)}}$$

moduri, unde prin c înțelegem combinări cu repetiție.

Deci transformările h_k cu ciclurile de lungime și ordin dat se pot alege — dacă nu ținem seama de alegerea numerelor $r\ (i)$ — în :

$$\frac{s_k\,!}{\prod\limits_{l=1}^{s_k} (l^{\alpha_l^{(k)}} \cdot \prod\limits_{i=1}^{\sigma_k} \beta_{l,i}^{(k)}\,!)} \tag{12}$$

moduri.

Pentru un ciclu dat de lungime l și ordin $d\ (i)$ sistemele de numere $r\ (i)$ se pot alege în $\Delta_{l,d(i)}^{(k)}$ moduri, unde Δ este dat de relația :

$$\Delta_{l,d(i)}^{(k)} = \sum_{\substack{j = \frac{m_k}{d(i)} \xi \\ (\xi,\, d(i)) = 1 \\ \xi \leqslant \frac{m_k - 1}{m_k} \cdot l \cdot d\ (i)}} S_{j,m_k}^{(l)} \tag{13}$$

unde $S_{j,m_k}^{(l)}$ este numărul posibilităților de a-l scrie pe j ca o sumă de numere întregi (nenegative), mai mici ca m_k. Într-adevăr, se vede că exact acei j asupra cărora se face însumarea au ordinul $d\ (i)$ în grupul aditiv al lui $Z/(m)$. Numărul S se poate calcula prin formulele de recurență :

$$S_{j,m_k}^{(l)} = \begin{cases} 0 & 0 > j, \quad l > 0 \\ 0 & j \geqslant m_k, \quad l = 1 \\ 1 & 0 \leqslant j < m_k, \quad l = 1 \\ \sum\limits_{h=0}^{m_k - 1} S_{j-h,m_k}^{(l-1)} & 0 \leqslant j, \quad l > 1. \end{cases} \tag{14}$$

Concentrînd formulele (12) — (13) și înmulțind după k obținem pentru un sistem dat $\beta_{l,i}^{(k)}$ numărul de transformări h caracterizat de acest sistem :

$$n_\beta = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{s_k\,!}{\prod\limits_{l=1}^{s_k} \left(l^{\alpha_l^{(k)}} \prod\limits_{i=1}^{\sigma_k} \beta_{l,i}^{(k)}\,! \right)} \prod_{l=1}^{s_k} \prod_{i=1}^{\sigma_k} \left(\sum_{\substack{j = \frac{m_k}{d(i)} \xi \\ (\xi,\, d(i)) = 1 \\ \xi \leqslant \frac{m_k - 1}{m_k} \cdot l \cdot d(i)}} S_{j,m_k}^{(k)} \right)^{\beta_{l,i}^{(k)}} \right) . \tag{15}$$

§ 13. În formula (3) însumarea o vom face deci după toate sistemele β. Să vedem cum putem stabili aceste sisteme. Pentru aceasta le vom stabili pentru fiecare k fix, apoi vom combina sistemele astfel obținute pentru fiecare k, în grupe de p sisteme cîte unul pentru fiecare k.

Pentru k dat determinăm mai întîi sistemele $\alpha_l^{(k)}$ posibile cu ajutorul descompunerii lui s_k în sume necrescătoare de s_k numere întregi (partiţii) şi anume fiecărei astfel de sume : $s_k = a_1 + \ldots + a_{s_k}$ îi ataşăm sistemul $\alpha_l^{(k)} = a_l - a_{l+1}$ cu $l < s_k$ şi $\alpha_{s_k}^{(k)} = a_{s_k}$. În acest fel vom obţine toate sistemele posibile. Pentru un sistem $\alpha_l^{(k)}$ dat şi pentru un l dat, descompunem în toate modurile posibile pe $\alpha_l^{(k)}$ în sumă de σ_k numere întregi (două descompuneri putînd să difere şi numai prin ordine!) şi obţinem astfel sistemul β pentru k şi l dat ; combinînd apoi sistemele astfel obţinute cîte unul pentru fiecare l, obţinem sistemul β pentru un k dat. În acest fel determinăm toate sistemele β posibile.

★

§ 14. În final obţinem pentru calculul lui ν (din formula (3)) următoarea expresie :

$$\nu = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{p} m_k^{s_k}} \sum_{(\beta)} \left(2^{\Sigma a_w} \prod_{k=1}^{p} \left(\prod_{l=1}^{s_k} \left(\frac{1}{l^{\alpha_l^{(k)}}} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{\beta_{l,i}^{(k)}\,!} \left(\sum_{\substack{j = \frac{m_k}{d(i)}\xi \\ (\xi,\, d(i))=1 \\ \xi \leqslant \frac{m_k - 1}{m_k} \cdot l \cdot d(i)}} S_{j,m_k}^{(l)} \right)^{\beta_{l,i}^{(k)}} \right) \right) \right) \right)$$

cu

$$S_{j,m_k}^{(l)} = \begin{cases} 0 & 0 > j \quad , \; l > 0 \\ 0 & \quad j \geqq m_k , \; l = 1 \\ 1 & 0 \leqslant j < m_k , \; l = 1 \\ \sum\limits_{h=0}^{m_k - 1} S_{j-h,m_k}^{(l-1)} & 0 \leqslant j \qquad l > 1 \end{cases}$$

şi unde

$$P(z) = \sum a_w z_w = \prod_{k=1}^{p} \prod_{l=1}^{s_k} \prod_{i=1}^{\sigma_k} \left(P_{d(i),l}^{(m_k)}(z) \right)^{\beta_{l,i}^{(k)}}$$

cu

$$z_a z_b = (a, b)\; z_{[a,b]}$$

şi

$$P_{d(i),l}^{(m_k)}(z) = \sum_{\delta / l'(i)} \frac{\eta d(i), \mu(i), \delta}{d(i) \cdot \mu(i) \cdot \delta}\, z_{d(i) \cdot \mu(i) \cdot \delta}$$

în care am notat

$$l = l'(i)\mu(i) \text{ cu } \{(d(i), l'(i)) = 1\} \;\&\; \{(l''), l'(i) \mid l'' \mid l \Rightarrow (l'', d(i)) \neq 1\}$$

şi

$$\eta_{d(i),\, \mu(i),\, \delta} = m_k^{\mu(i) \cdot \delta} - \sum_{\substack{\gamma | \delta \\ \gamma < \delta}} \eta_{d(i),\, \mu(i),\, \gamma} \tag{16}$$

§ 15. *Observații finale.* I°. Dacă în formulele (16) pentru ν particularizăm pe m și anume luînd toți $m_k = 2$, se obțin în particular rezultatele obținute în [2] și în parte cele din [3] și [7] (după grupul N, grupul $\mathfrak{S}$ neobținîndu-se în mod direct de aici). În particular, formula (6) (împreună cu (7) și (8) care o întregesc și fără care singură nu are sens) ne dă polinoamele P pare (pentru $d = 1$) și impare ($d = 2$) din lucrările citate.

II°. Polinomul $P_\beta(z)$ (formula (11)) dă în realitate structura de cicluri a permutării funcțiilor din $\mathfrak{F}$ indusă de h caracterizat prin sistemul β. Folosind formula dată în [4] și utilizată și în [5] și [6], se poate obține numărul de tipuri de multipoli ($1 - k$) de selectori generalizîndu-se totodată rezultatele din [4] și [6].

III°. Pentru un selector, ca grup de simetrie, se putea lua în loc de grupul ciclic, grupul diedric, dacă am considera și posibilitatea de inversare a curentului. De acest lucru ne vom ocupa într-o lucrare viitoare.

BIBLIOGRAFIE

1. GR. C. MOISIL, *Teoria algebrică a mecanismelor automate.* Ed. tehnică, București, 1959.
2. D. SLEPIAN, *On the number of symetry types of Boolean functions of n variables.* Canad. Jr. Math. **5**, *2* (1952).
3. P. CONSTANTINESCU. *Asupra numărului de tipuri de funcții booleene după unele subgrupuri ale grupului hiperoctaedric.* Bull. Math. de la Soc. Sco. Math. Phys. de la R.P.R., *1* (1960).
4. Ю.С. ШАГАЛОВИЧ, *О числе типов симметрии контактных 1-к полиузников.* ДАН СССР I (1960).
5. P. CONSTANTINESCU, *Numărul tipurilor de sinonimie ale multipolilor* (1—k). Analele Universității București, Seria Șt. naturii — Mat.-Fiz., X *29* (1961).
6. TOMA GAȘPAR, *Numărul tipurilor de multipoli (1—k) după grupul negațiilor.* Analele Universității București, Seria Șt. naturii,-Mat.-Fiz., X *29* (1961).
7. P. CONSTANTINESCU și T. GAȘPAR, *Numărul tipurilor de funcții booleene după unele produse directe de subgrupuri ale grupului hiperoctaedric.* Bull. Math. de la Soc. Sci. Math.-Phys. de la R.P.R. număr sub tipar.
8. Ф. МУРНАГАН, *Теории представлений групп.* Изд. иностр. лит. Москва, 1950.
9. I. M. VINOGRADOV, *Bazele teoriei numerelor.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1954.

O GENERALIZARE A FUNCȚIEI θ ȘI FOLOSIREA EI LA STUDIUL FUNCȚIILOR ELIPTICE. II.

DE

N. PRAPORGESCU

În lucrarea [1] cu ajutorul unei generalizări a funcției θ am construit funcțiile fundamentale ale teoriei funcțiilor eliptice și formulele de exprimare a acestora cu ajutorul funcțiilor lui Weierstrass. Menționam că acestea servesc la studiul funcțiilor eliptice, ale căror perioade sînt un multiplu al perioadelor fundamentale ale funcțiilor eliptice obținute, dar sînt situate în planuri deosebite.

Ca completare a lucrării [1], în cele ce urmează folosim rezultatele din [1] la studiul funcțiilor eliptice ale lui Jacobi generalizate.

6. FUNCȚIILE ${}_qs(u)\,{}_qc(u)$, ${}_q\Delta(u)$

1° *Definiția funcțiilor eliptice ale lui Iacobi generalizate și relațiile algebrice dintre ele.* Amintim că funcțiile ${}_1s\ (u')$, ${}_1c(u')_1\,\Delta(u')$, se definesc prin relațiile [2] : ¹)

$$\begin{aligned}
{}_1s(u') &= \frac{{}_1\sigma_0(u')}{{}_1\sigma_3(u')} = 2\omega_1' \frac{{}_1\vartheta_0}{{}_1\vartheta_1'} \frac{{}_1\vartheta_1(v')}{{}_1\vartheta_0(v')},\\
{}_1c(u') &= \frac{{}_1\sigma_1(u')}{{}_1\sigma_3(u')} = \frac{{}_1\vartheta_0}{{}_1\vartheta_2} \frac{{}_1\vartheta_2(v')}{{}_1\vartheta_0(v')},\\
{}_1\Delta(u') &= \frac{{}_1\sigma_2(u')}{{}_1\sigma_3(u')} = \frac{{}_1\vartheta_0}{{}_1\vartheta_3} \frac{{}_1\vartheta_3(v')}{{}_1\vartheta_0(v')}.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

---

[1]) P. 212.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 9, P. 1163–1174, BUCUREȘTI, 1964

Analog definim și funcțiile :

$$
\begin{aligned}
{}_q s(u) &= \frac{{}_q\sigma_0(u)}{{}_q\sigma_3(u)} = 2\omega_1 \frac{{}_q\vartheta_0\left(\dfrac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_1'\left(\dfrac{q-1}{2}\tau\right)} \frac{{}_q\vartheta_1(v)}{{}_q\vartheta_0(v)} \\
{}_q c(u) &= \frac{{}_q\sigma_1(u)}{{}_q\sigma_3(u)} = \frac{{}_q\vartheta_0\left(\dfrac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_2\left(\dfrac{q-1}{2}\tau\right)} \frac{{}_q\vartheta_2(v)}{{}_q\vartheta_0(v)} \\
{}_q\Delta(u) &= \frac{{}_q\sigma_2(u)}{{}_q\sigma_3(u)} = \frac{{}_q\vartheta_0\left(\dfrac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_3\left(\dfrac{q-1}{2}\tau\right)} \frac{{}_q\vartheta_3(v)}{{}_q\vartheta_0(v)}
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

variabilele u, u', v, v' și perioadele ω_1 și ω_1' fiind legate prin relațiile (1.13), (3.5) și (3.10), iar funcțiile ${}_q\sigma(u)$ sînt definite prin relațiile (3.3), (3.4).

În baza relațiilor (3.6) și (3.10) din (6.1) și (6.2), deducem

$$
\begin{aligned}
{}_q s(u) &= q^2\, {}_1 s(u') \\
{}_q c(u) &= {}_1 c(u') \\
{}_q\Delta(u) &= {}_1\Delta(u').
\end{aligned}
$$

Ținînd seama de (4.9), din (6.2) obținem :

$$
\begin{aligned}
\sqrt{{}_q\wp(u) - {}_q e_3} &= \frac{{}_q\sigma_3(u)}{{}_q\sigma_0(u)} C_3(u) = \frac{1}{{}_q s(u)} C_3(u) \\
\sqrt{{}_q\wp(u) - {}_q e_1} &= \frac{{}_q\sigma_1(u)}{{}_q\sigma_0(u)} C_1(u) = \frac{{}_q c(u)}{{}_q s(u)} C_1(u) \\
\sqrt{{}_q\wp(u) - {}_q e_2} &= \frac{{}_q\sigma_2(u)}{{}_q\sigma_0(u)} C_2(u) = \frac{{}_q\Delta(u)}{{}_q s(u)} C_2(u),
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

din care eliminăm pe ${}_q\wp(u)$ rezultă :

$$
\begin{aligned}
({}_q e_1 - {}_q e_3)\, {}_q s^2(u) + C_1^2(u)\, {}_q c^2(u) &= C_3^2(u) \\
({}_q e_2 - {}_q e_3)\, {}_q s^2(u) + C_2^2(u)\, {}_q\Delta^2(u) &= C_3^2(u).
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Pentru simplificare notăm :

$$
C_\alpha(u) = \frac{K_0(u)}{{}_0K_\alpha(u)}, \qquad C_4(u) = \frac{K^2{}_0(u)}{{}_0K_1(u)\, {}_0K_2(u)\, {}_0K_3(u)}
$$

$$
C_\alpha(\omega_1, \omega_2) = \frac{K_0(\omega_1')}{{}_0K\alpha(\omega_1 + (1-q')\omega_2)}, \quad (\alpha = 1, 2, 3)
$$

$$
C_\alpha(\omega_1 + \omega_2, \omega_2) = \frac{K_0(\omega_1' + \omega_2')}{{}_0K_\alpha(\omega_1 + \omega_2 + (1-q')\,\omega_2)}.
$$

Dacă luăm ${}_qe_1 - {}_qe_3 = 1$, din (4.10) ²) deducem

$$\omega_1^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 \left(\frac{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}\right)^2 \left(\frac{{}_q\vartheta_3\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_2\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}\right)^2 C_3^2(\omega_1, \omega_2) \tag{6.5}$$

şi celelalte două relaţii din (4.10) devin

$$ {}_qe_1 - {}_qe_2 = \frac{C_2^2(\omega_1, \omega_2)}{C_3^2(\omega_1, \omega_1)} \left(\frac{{}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_3\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}\right)^4 = {}_q\chi'^2 \tag{6.6}$$

$$ {}_qe_2 - {}_qe_3 = \frac{C_1^2(\omega_1 + \omega_2, \omega_2)}{C_3^2(\omega_1, \omega_2)} \left(\frac{{}_q\vartheta_2\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_3\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}\right)^4 Q_1^{-4}$$

$$ {}_q\chi'^2 + \frac{C_1^2(\omega_1 + \omega_2, \omega_2)}{C_3^2(\omega_1, \omega_2)} \left(\frac{{}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_\alpha\vartheta_3\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}\right)^4 Q_1^4 = 1.$$

Cu acestea relaţiile (6.4) se scriu :

$$ {}_qs^2(u) + C_1^2(u)\, {}_qc^2(u) = C_3^2(u)$$

$$ C_2^2(u)\, {}_q\Delta^2(u) + \frac{C_1^2(\omega_1 + \omega_2, \omega_2)}{C_3^2(\omega_1, \omega_2)} Q^{-4} \left(\frac{{}_q\vartheta_2\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_3\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}\right)^4 {}_qs^2(u) = C_3^2(u). \tag{6.7}$$

Dacă notăm

$$ {}_q\chi = \frac{C_1(\omega_1 + \omega_2, \omega_2)}{C_3(\omega_1, \omega_2)} Q_1^{-2} \left(\frac{{}_q\vartheta_2\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_3\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}\right)^2, \tag{6.8}$$

ecuaţia precedentă devine

$$ C_2^2(u)\, {}_q\Delta^2(u) + {}_q\chi^2\, {}_qs^2(u) = C_3^2(u) \tag{6.9}$$

care în baza relaţiei (6.7) se mai scrie :

$$ C_2^2(u)\, {}_q\Delta^2(u) + {}_q\chi^2 \left(C_3^2(u) - C_1^2(u)\, {}_qc^2(u)\right) = C_3^2(u).$$

---

²) $\frac{q'}{2\omega_1}$ se înlocuieşte cu $\frac{q}{2\omega_1}$ şi $K_0(\omega_1')$ Q_1 cu K_0 (ω_1').

Cu acestea din (6.6) şi (6.8) obţinem:

$$ {}_qe_1 - {}_qe_2 + {}_qe_2 - {}_qe_3 = {}_q\chi^2 + {}_q\chi'^2 = 1. $$

Din (6.5), (6.6) şi (6.8) deducem:

$$ 2\omega_1 \frac{{}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} = q\sqrt{\frac{1}{{}_q\chi}\,\frac{C_1(\omega_1+\omega_2,\omega_2)}{C_3^{-1}(\omega_1,\omega_2)}\,Q_1^{-2}} $$

$$ \frac{{}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_2\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} = \sqrt{\frac{{}_q\chi'}{{}_q\chi}\,\frac{C_1(\omega_1+\omega_2,\omega_2)}{C_2(\omega_1,\omega_2)}\,Q_1^{-2}} $$

$$ \frac{{}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_3\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} = \sqrt{{}_q\chi'\,\frac{C_3(\omega_1,\omega_2)}{C_2(\omega_1,\omega_2)}} $$

şi relaţiile (6.2) se scriu şi sub forma

$$ \begin{aligned} {}_qs(u) &= q\sqrt{\frac{1}{{}_q\chi}\,\frac{C_1(\omega_1+\omega_2,\omega_2)}{C_3^{-1}(\omega_1,\omega_2)}}\,\frac{{}_q\vartheta_1(v)}{{}_q\vartheta_0(v)}\,Q_1^{-1}, \\ {}_qc(u) &= \sqrt{\frac{{}_q\chi'}{{}_q\chi}\,\frac{C_1(\omega_1+\omega_2,\omega_2)}{C_2(\omega_1,\omega_2)}}\,\frac{{}_q\vartheta_2(v)}{{}_q\vartheta_0(v)}\,Q_1^{-1}, \\ {}_q\Delta(u) &= \sqrt{{}_q\chi'\,\frac{C_3(\omega_1,\omega_2)}{C_2(\omega_1,\omega_2)}}\,\frac{{}_q\vartheta_3(v)}{{}_q\vartheta_0(v)}. \end{aligned} \tag{6.10} $$

Fiindcă ${}_q\sigma(u)$ este nepereche, iar ${}_q\sigma_1(u)$, ${}_q\sigma_2(u)$, ${}_q\sigma_3(u)$ sînt pereche, rezultă că ${}_qs(u)$ este nepereche; ${}_qc(u)$ şi ${}_q\Delta(u)$ sînt pereche şi din (6.2) ţinînd seama că ${}_q\vartheta_1\left(\frac{q-1}{2}\tau\right) = 0$ avem

$$ {}_qs((1-q')\omega_2) = 0,\ {}_qc((1-q')\omega_2) = {}_q\Delta((1-q')\omega_2) = 1; \tag{6.11} $$

din (6.7) şi (6.9) rezultă

$$ C_1((1-q')\omega_2) = C_2((1-q')\omega_2) = C_3((1-q')\omega_2). \tag{6.12} $$

Cu notațiile :

$$
\begin{aligned}
&{}_q\chi\,\frac{C_3^{-1}(\omega_1,\omega_2)}{C_1(\omega_1+\omega_2,\omega_2)}\,Q_1^2={}_q\bar{\chi}\\
&{}_q\chi'\,\frac{C_3(\omega_1,\omega_2)}{C_2(\omega_1,\omega_2)}={}_q\bar{\chi}'\\
&\frac{{}_q\chi'}{{}_q\chi}\,\frac{C_1(\omega_1+\omega_2,\omega_2)}{C_2(\omega_1,\omega_2)}\,Q_1^{-2}=\frac{{}_q\bar{\chi}'}{{}_q\bar{\chi}}\,K_{3,1}\\
&\frac{1}{C_3^2(\omega_1,\omega_2)}=K_{3,1}\qquad (K_{1,3}\cdot K_{3,1}=1)
\end{aligned}
$$

ecuațiile (6.10) devin :

$$
\begin{aligned}
{}_qs(u)&=q\sqrt{\frac{1}{{}_q\bar{\chi}}}\,\frac{{}_q\vartheta_1(v)}{{}_q\vartheta_0(v)},\\
{}_qc(u)&=\sqrt{\frac{{}_q\bar{\chi}'}{{}_q\bar{\chi}}K_{3,1}}\,\frac{{}_q\vartheta_2(v)}{{}_q\vartheta_0(v)},\\
{}_q\Delta(u)&=\sqrt{{}_q\bar{\chi}}\,\frac{{}_q\vartheta_3(v)}{{}_q\vartheta_0(v)}.
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

2° *Tabela de transformare, zerourile, polurile și perioadele funcțiilor* ${}_qs(u)$, ${}_qc(u)$, ${}_q\Delta(u)$. În baza relațiilor (6.11) și ecuațiilor (6.13) din tabela de transformare a funcțiilor ${}_e\vartheta(v)$, (2.11) și (2.12), deducem tabelele de transformare ale funcțiilor ${}_qs(u)$, ${}_qc(u)$, ${}_q\Delta(u)$ (tabelul 1).

Tabelul 1

	1	2	3
	$u + w_1$	$u + \omega_2$	$u + \omega_1 + \omega_2$
${}_qs$	$q\sqrt{K_{1,3}}\,\frac{{}_qc(u)}{{}_q\Delta(u)}$	$q^2\frac{1}{{}_q\bar{\chi}}\,Q_1^2\,\frac{1}{{}_qs(u)}$	$q\sqrt{K_{3,1}}\,\frac{1}{{}_q\bar{\chi}}\,Q_1^2\,\frac{{}_q\Delta(u)}{{}_qc(u)}$
${}_qc$	$-q'\sqrt{K_{3,1}}\,{}_q\bar{\chi}'\,\frac{{}_qs(u)}{{}_q\Delta(u)}$	$-iq\sqrt{K_{3,1}}\,\frac{1}{{}_q\bar{\chi}}\,Q_1^2\,\frac{{}_q\Delta(u)}{{}_qs(u)}$	$-i\,K_{3,1}\,\frac{{}_q\bar{\chi}'}{{}_q\bar{\chi}}\,Q_1^2\,\frac{1}{{}_qc(u)}$
${}_q\Delta$	${}_q\bar{\chi}^1\,\frac{1}{{}_q\Delta(u)}$	$-iq\sqrt{K_{1,3}}\,{}_q\bar{\chi}'\,\frac{{}_qc(u)}{{}_qs(u)}$	$iq'\sqrt{K_{3,1}}\,{}_q\bar{\chi}'\,\frac{{}_qs(u)}{{}_qc(u)}$

	4	5	6
	$u + 2\omega_1$	$u + 2\omega_2$	$u = 2\omega_1 + 2\omega_2$
${}_qs$	$-{}_qs(u)$	${}_qs(u)$	$-{}_qs(u)$
${}_qc$	$-{}_qc(u)$	$-{}_qc(u)$	${}_qc(u)$
${}_q\Delta$	$-{}_q\Delta(u)$	$-{}_q\Delta(u)$	$-\Delta(u)$

Ținînd seama că *zerourile* funcțiilor ${}_q\vartheta$, deduse din acelea ale funcțiilor ${}_1\vartheta$, [2], sînt

$$q\,(m_1 + m_2\,\tau) + \frac{q-1}{2}\,\tau$$

$$q\left(m_1 + m_2\,\tau + \frac{1}{2}\right) + \frac{q-1}{2}\,\tau$$

$$q\left(m_1 + m_2\,\tau + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) + \frac{q-1}{2}\,\tau$$

$$q\left(m_1 + m_2\tau + \frac{\tau}{2}\right) + \frac{q-1}{2}\,\tau$$

m_1 și m_2 luînd toate valorile întregi de la $-\infty$ la $+\infty$, cu ajutorul relațiilor (6.2) se obțin *zerourile* funcțiilor ${}_qs\,(u)$, ${}_qc\,(u)$, ${}_q\Delta\,(u)$:

$$
\begin{aligned}
{}_qs &= 2\,m_1\,\omega_1 + 2\,m_2\,\omega_2 + (1 - q')\,\omega_2\\
{}_qc &= (2\,m_1 + 1)\,\omega_1 + 2\,m_2\,\omega_2 + (1 - q')\,\omega_2\\
{}_q\Delta &= (2\,m_1 + 1)\,\omega_1 + (2\,m_2 + 1)\,\omega_2 + (1 - q')\,\omega_2.
\end{aligned}
$$

Polurile sînt zerourile lui ${}_q\vartheta_0\,(2\,\omega_1'\,v)$

$$2\,m_1\,\omega_1 + (2\,m_2 + 1)\,\omega_2 + (1 - q')\,\omega_2.$$

Din tabelul 1 se constată că *perioadele* sînt :

${}_qs\,(u)$	$4\omega_1$	$2\omega_2$
${}_qc\,(u)$	$4\omega_1$	$2\,\omega_1 + 2\,\omega_2$
${}_q\Delta\,(u)$	$2\omega_1$	$4\omega_2$.

3° *Tabela de transformare a funcției* ${}_q\mathfrak{p}\,(u)$. Cu ajutorul tabelului 1 și al relațiilor (6.3) se construiește tabela de transformare a lui ${}_q\mathfrak{p}\,(u)$ într-o primă formă (tabelul 2).

Tabelul 2

	1	2
	u	$u + \omega_1$
$\sqrt{{}_q\mathfrak{p} - {}_qe_1}$	$C_1\,\dfrac{{}_qc}{{}_qs}$	$C_1\,q'^2\,K_{3,1}\,{}_q\bar{\chi}'\,\dfrac{{}_qs}{{}_qc}$
$\sqrt{{}_q\mathfrak{p} - {}_qe_2}$	$C_2\,\dfrac{{}_q\Delta}{{}_qs}$	$C_2\,q'\sqrt{K_{3,1}}\,{}_q\bar{\chi}'\,\dfrac{1}{{}_qc}$
$\sqrt{{}_q\mathfrak{p} - {}_qe_3}$	$C_3\,\dfrac{1}{{}_qs}$	$C_3\,q'\sqrt{K_{3,1}}\,\dfrac{{}_q\Delta}{{}_qc}$

Tabelul 2 (continuare)

	3	4
	$u+\omega_2$	$u+\omega_1+\omega_2$
$\sqrt{{}_q\wp-{}_qe_1}$	$-C_1\,i\,q'\sqrt{K_{3,1}}\,{}_q\Delta$	$-C_1\,i\,q'\,{}_q\bar{\chi}\,\dfrac{\sqrt{K_{3,1}}}{{}_q\Delta}$
$\sqrt{{}_q\wp-{}_qe_2}$	$-C_2\,i\,q'^3\sqrt{K_{3,1}}\,{}_q\chi\,{}_q\bar{\chi}'\,Q_1^{-2}\,{}_qc$	$C_2\,i\,q'^2\sqrt{K_{1,3}}\,{}_q\chi\,{}_q\bar{\chi}'\,Q_1^{-2}\,\dfrac{{}_qs}{{}_q\Delta}$
$\sqrt{{}_q\wp-{}_qe_3}$	$C_3\,q'^2\,{}_q\bar{\chi}\,Q_1^{-2}\,{}_qs$	$C_3\,q'\sqrt{K_{1,3}}\,{}_q\bar{\chi}\,Q_1^{-2}\,\dfrac{{}_qc}{{}_q\Delta}$

Argumentul funcţiilor ce intervin este u. Tabelul se citeşte astfel:

$$\sqrt{{}_q\wp(u)-{}_qe_2}=C_2(u)\,\frac{{}_q\Delta(u)}{{}_qs(u)}$$

$$\sqrt{{}_q\wp(u)-{}_qe_3}=C_3(u)\,q'^2\,{}_q\bar{\chi}\,Q_1^{-2}\,{}_qs(u).$$

4° *Ecuaţiile diferenţiale ale funcţiilor* ${}_qs(u)$, ${}_qc(u)$, ${}_q\Delta(u)$. Din ecuaţia:

$${}_q\wp'(u)=-2\sqrt{q\,({}_q\wp(u)-{}_qe_1)\,({}_q\wp(u)-{}_qe_2)\,({}_q\wp(u)-{}_qe_3)}$$

stabilită la § 4, punctul 1, în baza relaţiilor (6.3), deducem

$${}_q\wp'(u)=-2\sqrt{q}\,{}_qc(u)\,{}_q\Delta(u)\,C_4(u)\,{}_qs^{-3}(u)$$

şi din

$${}_q\wp(u)-{}_qe_3=C_3^2(u)\,{}_qs^{-2}(u)$$

avem

$${}_q\wp'(u)=(C_3^2(u)\,{}_qs^{-2}(u))';$$

rezultă astfel ecuaţia

$$(C_3^2(u)\,{}_qs^{-2}(u))'=-2\sqrt{q}\,{}_qc(u)\,{}_q\Delta(u)\,C_4(u)\,{}_qs^{-3}(u),\tag{6.14}$$

din care, ţinînd seama de relaţia (6.7), obţinem ecuaţia diferenţială a funcţiei ${}_qs(u)$:

$$\left[-\frac{1}{2}(C_3^2(u))'\,{}_qs(u)+C_3^2(u)\,{}_qs'(u)\right]^2=$$

$$=q\,(C_3^2(u)-{}_qs^2(u))\,(C_3^2(u)-{}_q\chi^2\,{}_qs^2(u))\,C_3^2(u).$$

De asemenea tot din (6.7) în baza relaţiilor (6.9) şi (6.14) obţinem ecuaţia diferenţială a lui ${}_qc(u)$. Din (6.7) deducem

$$2\,{}_qs(u)\,{}_qs'(u)=(C_3^2(u)-C_1^2(u)\,{}_qc^2(u))'$$

şi din (6.14) avem

$$\begin{aligned} & -2\,{}_q s(u)\,{}_q s'(u) + \frac{(C_3^2(u))'}{C_3^2(u)}\,{}_q s^2(u) = \\ & = -\frac{2\sqrt{q}}{C_3^2(u)}\,{}_q c(u)\,{}_q \Delta(u)\,C_4(u)\,{}_q s(u), \end{aligned} \tag{6.15}$$

din care eliminînd pe $2\,{}_q s(u)\,{}_q s'(u)$ şi ${}_q\Delta(u)$ obţinem :

$$\begin{aligned} & [C_3^2(u)\,(C_3^2(u) - C_1^2(u)\,{}_q c^2(u))' - (C_3^2(u))'\,(C_3^2(u) - C_1^2(u)\,{}_q c^2(u))]^2 = \\ & = 4\,q\cdot{}_q c^2(u)\,(C_3^2(u)\,{}_q\chi'^2 + {}_q\chi^2\,C_1^2(u)\,{}_q c^2(u)) \times \\ & \times C_1^2(u)\,C_3^2(u)\,(C_3^2(u) - C_1^2(u)\,{}_q c^2(u)). \end{aligned}$$

În sfîrşit, din (6.9) şi (6.14) obţinem ecuaţia diferenţială a lui ${}_q\Delta(u)$. Din (6.9) avem

$$2\,{}_q s(u)\,{}_q s'(u) = {}_q\chi^{-2}\,(C_3^2(u) - C_2^2(u)\,{}_q\Delta^2(u))'$$

şi prin eliminarea lui $2\,{}_q s(u)\,{}_q s'(u)$ între aceasta şi (6.15), precum şi a lui ${}_q s^2(u)$ şi ${}_q c^2(u)$ rezultă ecuaţia diferenţială a lui ${}_q\Delta(u)$:

$$\begin{aligned} & [C_3^2(u)\,(C_3^2(u) - C_2^2(u)\,{}_q\Delta^2(u))' - (C_3^2(u))'\,(C_3^2(u) - C_2^2(u)\,{}_q\Delta^2(u)]^2 = \\ & = -4\,q\cdot(C_3^2(u)\,{}_q\chi'^2 - C_2^2(u)\,{}_q\Delta^2(u))\,{}_q\Delta^2(u) \times \\ & \times C_2^2(u)\,C_3^2(u)\,(C_3^2(u) - C_2^2(u)\,{}_q\Delta^2(u). \end{aligned}$$

În baza relaţiilor (6.11) şi (6. 12), din aceste ecuaţii rezultă pentru $u = (1 - q')\,\omega_2$:

$$\begin{aligned} & [{}_q s'((1 - q')\,\omega_2)]^2 = q\,C_1^2((1 - q')\,\omega_2) \\ & {}_q c'((1 - q')\,\omega_2) = {}_q\Delta'((1 - q')\,\omega_2) = 0. \end{aligned} \tag{6.16}$$

5° *Formulele de adiţiune.* Folosind metoda întrebuinţată în cazul $q = 1$ [2] [3]), să luăm pentru v o valoare nedivizibilă prin ω_1, ω_2. În acest caz, funcţiile $\varphi_1(u) = {}_q s(u)\,{}_q s(u + v)$, $\varphi_2(u) = {}_q c(u)\,{}_q c(u + v)$, $\varphi_3(u) = {}_q\Delta(u)\,{}_q\Delta(u + v)$ după tabela de transformare 2 au perioadele $2\omega_1$, $2\omega_2$ şi în paralelogramul format cu aceste perioade au polurile $u = \omega_2$ şi $u = -v + \omega_2$; acestea sînt deci funcţii eliptice de gradul doi cu aceste două poluri şi funcţiile $\varphi_2 + A\,\varphi_1$, $\varphi_3 + B\,\varphi_1$ sînt constante, dacă A şi B se aleg aşa fel ca aceste funcţii să nu admită polul ω_2.

Avem astfel două ecuaţii

$$\begin{aligned} & {}_q c(u)\,{}_q c(u + v) + A\,{}_q s(u)\,{}_q s(u + v) = A_1 \\ & {}_q\Delta(u)\,{}_q\Delta(u + v) + B\,{}_q s(u)\,{}_q s(u + v) = B_1 \end{aligned} \tag{6.17}$$

A, B, A_1, B_1 fiind independente de u care se determină astfel :

Din (6.17) pentru $u = (1 - q')\,\omega_2$ obţinem în baza relaţiilor (6.11) :

$$\begin{aligned} & A_1 = {}_q c((1 - q')\,\omega_2 + v) \\ & B_1 = {}_q\Delta((1 - q')\,\omega_2 + v) \end{aligned}$$

---

[3]) Pag. 216.

şi ecuaţiile (6.17) devin :

$$
\begin{aligned}
&{}_q c\,(u)\,{}_q c\,(u+v) + A\,{}_q s\,(u)\,{}_q s\,(u+v) = {}_q s\,((1-q')\,\omega_2 + v)\\
&{}_q \Delta\,(u)\,{}_q \Delta\,(u+v) + B\,{}_q s\,(u)\,{}_q s\,(u+v) = {}_q \Delta\,((1-q')\,\omega_2 + v),
\end{aligned}
$$

din care, prin diferenţiere pentru $u = (1-q')\,\omega_2$ ţinînd seama de (6.11), (6.12), (6.15), obţinem :

$$
A = -\frac{{}_q c'\,((1-q')'\,\omega_2 + v)}{q\cdot C_1^2((1-q')\,\omega_2)\,{}_q s\,((1-q')\,\omega_2 + v)}
$$

$$
B = -\frac{{}_q \Delta'\,((1-q')\omega_2 + v)}{q\cdot C_1^2\,((1-q')\,\omega_2)\,{}_q s\,((1-q')\,\omega_2 + v)}.
$$

Cu acestea ecuaţiile (6.17) se scriu :

$$
\begin{aligned}
&{}_q c\,(u)\,{}_q c\,(u+v) - {}_q c\,((1-q')\,\omega_2)\,{}_q c'\,((1-q')\,\omega_2 + v)\times\\
&\times\frac{{}_q s\,(u)\,{}_q s\,(u+v)}{q\cdot C_1^2\,((1-q')\,\omega_2)\,{}_q s\,((1-q')\,\omega_2 + v)} = {}_q c\,((1-q')\omega_2 + v)\\
&{}_q \Delta\,(u)\,{}_q \Delta\,(u+v) - {}_q \Delta\,((1-q')\,\omega_2)\,{}_q \Delta'\,((1-q')\,\omega_2 + v)\times\\
&\times\frac{{}_q s\,(u)\,{}_q s\,(u+v)}{q\cdot C_1^2\,((1-q')\,\omega_2)\,{}_q s\,((1-q')\,\omega_2 + v)} = {}_q \Delta\,((1-q')\,\omega_2 + v).
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

Punînd $-u$ în loc de u şi $u + v - (1-q')\,\omega_2$ în loc de v, din ecuaţiile precedente obţinem :

$$
\begin{aligned}
&{}_q c\,(u)\,{}_q c\,((v-(1-q')\,\omega_2) + {}_q c\,((1-q')\,\omega_2)\,{}_q c'\,(u+v)\times\\
&\times\frac{{}_q s\,(u)\,{}_q s\,(v-(1-q')\,\omega_2)}{q\cdot C_1^2\,((1-q')\,\omega_2)\,{}_q s\,(u+v)} = {}_q c\,(u+v)\\
&{}_q \Delta\,(u)\,{}_q \Delta\,((v-(1-q')\,\omega_2) + {}_q \Delta\,((1-q')\,\omega_2)\,\Delta'\,(u+v)\times\\
&\times\frac{{}_q s\,(u)\,{}_q s\,(v-(1-q')\,\omega_2)}{q\cdot C_1^2\,((1-q')\,\omega_2)\,{}_q s\,(u+v)} = {}_q \Delta\,(u+v).
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

Introducînd aceste valori ale lui ${}_q c\,(u+v)$ şi ${}_q \Delta\,(u+v)$ în (6.18) se obţine formula de adiţiune a lui ${}_q s\,(u)$ exprimată respectiv cu ${}_q c$ şi ${}_q s$, ${}_q \Delta$ şi ${}_q s$, pe care le introducem în ecuaţia corespunzătoare din (6.19) şi obţinem formulele de adiţiune ale funcţiilor ${}_q c\,(u)$ şi ${}_q \Delta\,(u)$.

6° *Exprimarea funcţiilor* ${}_q s\,(u)$, ${}_q c\,(u)$, ${}_q \Delta\,(u)$, *cu ajutorul funcţiei* $\wp\,(u)$. Din (4.10) şi (6.5), dacă prin $2\,K$ şi $2i\,K'$ însemnăm perioadele funcţiei ${}_q s\,(u)$, deducem

$$
2K = 2\,\omega_1\sqrt{({}_q e_1 - {}_q e_3)},\quad 2i\,K' = 2\,\omega_2\sqrt{({}_q e_1 - {}_q e_3)}
$$

şi apoi

$$
{}_q \chi^2 = \frac{{}_q e_2 - {}_q e_3}{{}_q e_1 - {}_q e_3},\quad {}_q \chi'^2 = \frac{{}_q e_1 - {}_q e_2}{{}_q e_1 - {}_q e_3}.
$$

Din tabelul 1 se constată că funcția ${}_qs^2\,(u\sqrt{{}_qe_1 - {}_qe_3})$ are perioadele $2\,\omega_1$, $2\,\omega_2$, polul dublu $u = \omega_2 + (1 - q')\,\omega_2 = (2 - q')\,\omega_2$ și pentru $u = \omega_1 + (1 - q')\,\omega_2$ are valoarea $q\sqrt{K_{1,3}}$ (coloana 1) așa că avem relația :

$${}_q\mathfrak{p}\,(u + \omega_2) - {}_qe_3 = C\,{}_qs\,(u\sqrt{{}_qe_1 - {}_qe_3}) = q'^2\,K_{3,1}\,({}_qe_2 - {}_qe_3)\,{}_qs^2\,(u\sqrt{{}_qe_1 - {}_qe_3}).$$

Tot astfel se stabilesc și relațiile :

$${}_q\mathfrak{p}\,(u + \omega_2) - {}_qe_1 = \frac{1}{{}_q\bar{\chi}^2}\,({}_qe_2 - {}_qe_1)\,{}_q\Delta^2\,(u\sqrt{{}_qe_1 - {}_qe_3})$$

$${}_q\mathfrak{p}\,(u + \omega_2) - {}_qe_2 = -\,K_{1,3}^2\left(\frac{\bar{\chi}^2}{\bar{\chi}^1}\right)^{-4} Q_1^{-4}\,({}_qe_1 - {}_qe_2)\,{}_qc^2\,(u\sqrt{{}_qe_1 - {}_qe_3})\cdot$$

$$(K_{1,3}\cdot K_{3,1} = 1).$$

Pentru determinarea constantei C, în prima din aceste două ecuații se ia $u = \omega_1 + (1-q')\,\omega_2$ și se ține seama că valoarea lui ${}_q\Delta^2\,(u\sqrt{{}_qe_1 - {}_qe_3})$ indicată în coloana 1 din tabela de transformare de la punctul 1 (nota [1]) este $\bar{\chi}'^2$. În a doua ecuație se ia $u = \omega_1 + \omega_2 + (1 - q')\,\omega_2$ și se ține seama că

$${}_q\mathfrak{p}\,(\omega_1 + \omega_2 + (1 - q')\,\omega_2) = {}_q\mathfrak{p}\,(\omega_1 + (1 - q')\,\omega_2) = {}_qe_1$$

și valoarea lui ${}_qc\;(u\sqrt{{}_qe_1 - {}_qe_3})$ este $-\,i\,(K_{3,1}\,\frac{{}_q\bar{\chi}'}{{}_q\chi}\,Q_1^2)$ (coloana 3).

7° *Tabela de transformare a funcției* ${}_q\mathfrak{p}\,(u)$. Cu ajutorul relațiilor precedente și a tabelului 1 construim tabela de transformare a lui ${}_q\mathfrak{p}\,(u)$ într-o a doua formă (tabelul 3), similară cu tabelul 2.

Tabelul 3

	1	2	3	4
	u	$u + \omega_1$	$u + \omega_2$	$u + \omega_1 + \omega_2$
${}_q\mathfrak{p} - {}_qe_1$	$({}_qe_1 - {}_qc_3)\,\frac{{}_qc^2}{{}_qs^2}$	$({}_qe_1 - {}_qe_3)\,(q'^2\,K_{2,1}\,{}_q\bar{\chi}')^2\,\frac{{}_qs^2}{{}_qc^2}$	$-\,({}_qe_1 - {}_qe_3)\,(q'\sqrt{K_{3,1}})^2\,{}_q\Delta^2$	$-\,({}_qe_1 - {}_qe_3)\,(q'\,{}_q\bar{\chi}')^2\,\frac{\sqrt{K_{3,1}}}{{}_q\Delta^2}$
${}_q\mathfrak{p} - {}_qe_2$	$({}_qe_1 - {}_qe_3)\,\frac{{}_q\Delta^2}{{}_qs^2}$	$({}_qe_1 - {}_qe^3)\,(q'\sqrt{K_{3,1}}\,{}_q\bar{\chi})^2\,\frac{1}{{}_qc^2}$	$({}_qe_1 - {}_qe_3)\,(q'^3\sqrt{K_{3,1}}\,{}_q\bar{\chi}\,{}_q\bar{\chi}^1\,\bar{Q}_1^2)^2\,{}_qc^2$	$-\,({}_qe_1 - {}_qe_3)\,(q'^2\sqrt{K_{1,3}}\,{}_q\bar{\chi}\,{}_q\chi'\,\overline{Q}_1^2)^2\,\frac{{}_qs^2}{{}_q\Delta^2}$
${}_q\mathfrak{p} - {}_qe_3$	$({}_qe_1 - {}_qe_3)\,\frac{1}{{}_qs^2}$	$({}_qe_1 - {}_qe_3)\,(q'\sqrt{K_{3,1}})^2\,\frac{{}_q\Delta^2}{{}_qc^2}$	$({}_qe_1 - {}_qe_3)\,(q'^2\,{}_q\bar{\chi}\,\overline{Q}_1^2)\,{}_qs^2$	$({}_qe_1 - {}_qe_3)\,(q'\sqrt{K_{1,3}}\,{}_q\bar{\chi}\,\overline{Q}_1^2)^2\,\frac{{}_qc^2}{{}_q\Delta^2}$

Argumentul funcțiilor ${}_qs$, ${}_qc$, ${}_q\Delta$ este $u\sqrt{{}_qe_1 - {}_qe_3}$ iar a lui ${}_q\wp$ este $u + \omega_2$.

Tabelul se citește astfel : ${}_q\wp\,(u+\omega_2)-{}_qe_3=({}_qe_1-{}_qe_3)\,\dfrac{1}{{}_qs\,(u\sqrt{{}_qe_1-{}_qe_3})}$,

$$ {}_q\wp\,(u + \omega_2+\omega_1) - {}_qe_1=({}_qe_1 - {}_qe_3)\,(q'^2\,K_{3.1}\,{}_q\bar{\chi}^1)^2 \times \frac{{}_qs^2\,(u\sqrt{{}_qe_1 - {}_qe_3})}{{}_qc^2\,(u\sqrt{{}_qe_1 - {}_qe_3})}. $$

8° *Valori asimptotice.* În considerațiile de mai sus s-a presupus că atît variabilele, cît și celelalte cantități ce intervin rămîn finite. Este interesant cazul cînd $\tau\to\infty$.

În acest caz, fiindcă $\tau = v + i + s$ și $h = e^{\frac{\pi i}{q}\tau} = e^{\frac{\pi i}{q}v}\cdot e^{-\frac{\pi i}{q}s}$, dacă $0 < q < 1$ iar r rămîne fix și $s\to\infty$, h, Q_1^{-1}, ${}_q\chi\to 0$. Din (6.5) în baza relațiilor (2.10) rezultă

$$ 2\,\omega_1 = \frac{q2\,\pi q'\,h^{\frac{q}{4}}\,(1-\ldots)}{1-\ldots}\cdot\frac{1+\ldots}{2h^{\frac{q}{4}}(1+\ldots)}\cdot $$

$$ \cdot\, C_3\,(\omega_1, \omega_2)\to C_3\,(\omega_1, \omega_2)\,\pi $$

$$ 2\omega_1' = 2q'\,\omega_1 = C_3\,(\omega_1\,, \omega_2)\,\pi q'. $$

Cu acestea, ținînd seama de (1.13) și că

$$ v' = \frac{u'}{2\,\omega_1'} = \frac{u'}{q'C_3\,(\omega_1, \omega_2)\,\pi}, $$

relațiile (6.2) devin :

$$ {}_qs\,(u) = C_3\,(\omega_1, \omega_2)\,\pi\,\frac{1}{2\pi q'\,h^{\frac{q}{4}}(1-\ldots)}\cdot\frac{2h^{\frac{q}{4}}(\sin\,\pi v' - \ldots)}{1-\ldots}\to $$

$$ \to q\,C_3\,(\omega_1, \omega_2)\,\sin\,\pi v' = q\,C_3\,(\omega_1, \omega_2)\,\sin\,\frac{u'}{q'\,C_3\,(\omega_1, \omega_2)} $$

$$ {}_qc\,(u) = \frac{1-\ldots}{2h^{\frac{q}{4}}\,(1+\ldots)}\cdot\frac{2h^{\frac{q}{4}}\,(\cos\,\pi v' - \ldots)}{1-\ldots}\to\cos\,\frac{u'}{q'\,C_3\,(\omega_1, \omega_2)} $$

$$ {}_q\Delta\,(u) = \frac{1-\ldots 1+\ldots}{1+\ldots 1-\ldots}\to 1, $$

din care deducem :

$$ ({}_qs\,(u))'\to q\,\cos\,\frac{u'}{q'\,C_3\,(\omega_1, \omega_2)} $$

$$ ({}_qc\,(u))'\to\frac{1}{C_3\,(\omega_1, \omega_2)}\,\sin\,\frac{u'}{q'\,C_3\,(\omega_1, \omega_2)}. $$

Aceste valori satisfac asimptotic ecuațiilor algebrice, diferențiale și formulelor de adițiune de mai sus pentru $C_\alpha^2(u)$ și $C_3^2(\omega_1, \omega_2) \rightarrow q$, $(C_1^2(u))' = (C_2(u))' = (C_3^2(u)'\ \sin \dfrac{u'}{q'\, C_3(\omega_1, \omega_2)} = 0$, (16.11), (6.12) (6.16)).

Variabilele v și u tind la infinit cu ω_2, cum rezultă din relațiile: $v = q\,v' + \dfrac{1}{2}(q-1)\,\tau$ și $u = 2\,\omega_1'\,v$. Ele rămîn finite numai cînd $q = 1$ cu limitele ${}_q s(u) \rightarrow \sin u$, ${}_q c(u) \rightarrow \cos u$, ${}_q\Delta(u) \rightarrow 1$, [2].

Primită la redacție la 6 ianuarie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. N. PRAPORGESCU, *O generalizare a funcției θ și folosirea ei la studiul funcțiilor eliptice.* Studii și cercetări matematice, **XIV**, *3* (1963).
2. A. HURWITZ, R. COURANT, *Funktionentheorie und elliptische — funktionen.* Dritte Auflage, I. Springer, Berlin, 1929.

CERCETĂRI ASUPRA SERIILOR TRIGONOMETRICE

O CLASĂ DE SERII TRIGONOMETRICE DIVERGENTE PE *R* CU ŞIRUL COEFICIENŢILOR CONVERGENT CĂTRE ZERO

DE

MARCEL N. ROŞCULEŢ

Obiectul acestei note este demonstraţia teoremei următoare:

TEOREMĂ. *Fie seria trigonometrică*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a(k) \cos k\,[x - b(k)], \tag{1}$$

unde funcţiile $a(t)$ *şi* $b(t)$ *îndeplinesc condiţiile*:

1) $a(t)$, *definită pe mulţimea numerelor naturale* N, *este pozitivă, descrescătoare cu* $\lim\limits_{t \to \infty} a(t) = 0$,

2) $$\frac{1}{a(t)} < t,$$

3) $$\lim_{t \to \infty} \frac{a(2t)}{a(t)} = \mu > 0, \quad t \in N$$

1′) $b(t)$, *definită pe* $[1, +\infty)$, *este pozitivă, crescătoare, continuă, cu* $\lim\limits_{t \to \infty} b(t) = +\infty$.

2′) $b(t)$ *este derivabilă pe* $[1, +\infty)$ *cu derivata* $b'(t)$ *continuă, descrescătoare pe* $[1, +\infty)$.

3′) $$\lim_{t \to \infty} \frac{(t + E(t))^2}{a^2(t)}\, b'^2(t) = \nu \leqslant \mu, \quad t \in N$$

unde $E(t)$ *este cel mai mare întreg conţinut în* $\frac{1}{a(t)}$.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 9, p. 1175–1177, BUCUREŞTI, 1964.

În aceste condiții seria (1) este divergentă în orice punct $x \in R$.

Demonstrație. Dacă $E(n)$ este cel mai mare întreg conținut în $\frac{1}{a(n)}$, avem

$$\frac{1}{a(n)} - 1 \leqslant E(n) \leqslant \frac{1}{a(n)} < n,$$

de unde se deduce

$$\frac{a(2n)}{a(n)} - a(2n) \leqslant a(2n)\,E(n) \leqslant \frac{a(2n)}{a(n)},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} a(2n)\,E(n) = \lim_{n\to\infty}\frac{a(2n)}{a(n)} = \mu > 0, \tag{2}$$

Fie

$$S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+E(n)} a(k)\cos k(x - b(k)),\quad S_n = \sum_{k=n+1}^{n+E(n)} a(k).$$

Şirul $a(n)$ fiind descrescător, avem

$$S_n \geqslant E(n)\,a[n + E(n)] \geqslant E(n)\,a(2n);$$

dacă se ține seamă de (2), urmează că există un număr n_0 astfel încît pentru orice $n > n_0$,

$$S_n > \frac{2}{3}\mu. \tag{3}$$

Avem, de asemenea,

$$0 \leqslant S_n - S_n(x) \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+E(n)} a(k)\,[1 - \cos k(x - b(k))] =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+E(n)} 2\,a(k)\sin^2\frac{k}{2}(x - b(k)) \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+E(n)} \frac{1}{2}\,a(k)\,k^2\,[x - b(k)]^2,$$

sau

$$0 \leqslant S_n - S_n(x) \leqslant \frac{1}{2}\,a(n)\sum_{k=n+1}^{n+E(n)} k^2\,[x - b(k)]^2. \tag{4}$$

Funcția $b(x)$ este pozitivă, crescătoare, deci

$$b(n) \leqslant b(n+1) \leqslant b(k) \leqslant b(n + E(n))$$

dacă $n + 1 \leqslant k \leqslant n + E(n)$.

Pentru $b(n) \leqslant x \leqslant b(n+1)$ avem

$$|x - b(k)| \leqslant b(n + E(n)) - b(n) \leqslant E(n)\,b'(n + \theta E(n)),\quad 0<\theta<1 \tag{5}$$

deoarece funcţia $b(x)$ are derivata continuă şi pozitivă pe $[1, \infty)$. Din (4) şi (5) se deduce

$$0 \leqslant S_n - S_n(x) \leqslant \frac{1}{2} \frac{(n + E(n))^2}{a^2(n)} b'^2(n + \theta E(n)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \frac{(n + E(n))^2}{a^2(n)} b'^2(n)$$

însă $\frac{(n + E(n))^2}{a^2(n)} b'^2(n) \to \nu \leqslant \mu$ cînd $n \to \infty$, deci există un număr n_1 astfel încît pentru orice $n > n_1$ avem

$$0 \leqslant S_n - S_n(x) \leqslant \frac{1}{2} \nu + \frac{1}{12} \mu \leqslant \frac{7}{12} \mu. \tag{6}$$

Din (3) şi (6) se obţine

$$S_n(x) = S_n - [S_n - S_n(x)] > \frac{2}{3} \mu - \frac{7}{12} \mu = \frac{1}{12} \mu$$

pentru $n > \max(n_0, n_1)$. Fie $x \in R$ oarecare; dacă seria (1) ar fi convergentă în x, ar exista un număr n_2 încît

$$S_n(x) < \frac{1}{24} \mu, \text{ pentru } n > n_2 \tag{7}$$

Pentru $n > \max(n_0, n_1, n_2)$ există m întreg astfel încît

$$b(n) \leqslant x + 2m\pi \leqslant b(n + 1),$$

deci

$$S_n(x) = S_n(x + 2\pi m) > \frac{1}{12} \mu. \tag{8}$$

Relaţiile (7) şi (8) arată că seria (1) este divergentă în punctul x. Teorema este demonstrată.

Pentru $a(x) = \ln x$, $b(x) = \ln \ln x$ se obţine exemplul lui H. Steinhaus.

ASUPRA REPREZENTĂRII MATRICIALE A ARBORILOR

DE

T. RUS

În lucrarea [2] pornindu-se de la definiţia arborilor ca şi grafe fără cicluri se consideră un mod de reprezentare a lor cu ajutorul matricilor. În cele ce urmează vom defini arborii recursiv şi vom ataşa în mod recursiv fiecărui arbore cîte o matrice. De asemenea vom construi un algoritm de descompunere a matricii corespunzătoare unui arbore în matricile corespunzătoare subarborilor principali [1] ai arborelui dat.

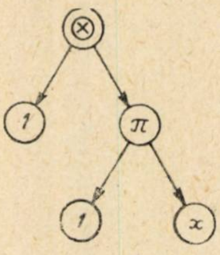
Fie $\mathfrak{N}$ o mulţime finită de simboluri astfel încît pe această mulţime este definită o funcţie caracteristică grad, în felul următor : Dacă $n \in \mathfrak{N}$, atunci avem $\delta(n) = p$, p fiind un număr natural pozitiv sau $\delta(n) = 0$. Se vede deci că elementele mulţimii $\mathfrak{N}$ sînt împărţite în clase de elemente de către funcţia δ. Dacă $n \in \mathfrak{N}$ şi dacă $\delta(n) = 0$, atunci n se va numi element de bază al mulţimii $\mathfrak{N}$. Subliniem că dată fiind mulţimea $\mathfrak{N}_1$ a elementelor de bază ale mulţimii $\mathfrak{N}$, vom presupune că există o submulţime a mulţimii $\mathfrak{N}_1$ astfel încît aceasta considerată ca şi un alfabet, atunci şi cuvintele în acest alfabet vor fi numite elemente de bază ale mulţimii $\mathfrak{N}$, pentru care valoarea funcţiei δ o considerăm de asemenea zero. Elementele acestei submulţimi, împreună cu cuvintele în această submulţime, vor fi numite constante. Restul elementelor de bază vor fi numite variabile.

Dacă $\delta(n) = p$, $p \geqslant 1$, atunci n se va numi operator p-ar al mulţimii $\mathfrak{N}$. Fie n un operator p-ar al mulţimii $\mathfrak{N}$. Oricare ar fi în mulţimea elementelor de bază p elemente n_1 $n_2, \ldots, n_p$, aceste elemente vor fi numite operanzii operatorului n. Definim atunci pentru fiecare element $n \in \mathfrak{N}$ cu proprietatea $\delta(n) = p$, $p \geqslant 1$ o funcţie care face ca oricărui vector $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ de dimensiunea p ale cărui componente sînt elemente de bază constante ale mulţimii $\mathfrak{N}$ să-i punem în corespondenţă un element de bază constant $\tilde{n}$ notat cu $n\,(n_1, n_2, \ldots, n_p)$.

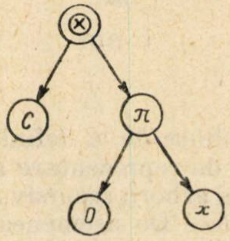
Acest element va fi numit valoarea operatorului n aplicat asupra elementelor $n_1, n_2, \ldots, n_p$.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 9, P. 1179–1185, BUCUREŞTI, 1964.

Să atașăm acum fiecărui element de bază al mulțimii $\mathfrak{N}$ un arbore numit arbore elementar de tipul



dacă elementul de bază respectiv este o variabilă oarecare x sau



dacă elementul de bază respectiv este o constantă c. Simbolurile $\otimes$ și π sînt simbolurii de operatorii pentru care avem definite valoarea lor, respectiv corespunzătoare produsului și puterii din aritmetica obișnuită. Simbolurile 1 și 0 sînt două constante fixe, ele corespunzînd lui 1 și 0 din aritmetica obișnuită. Elementele arborilor elementari marcate de simbolurile mulțimii $\mathfrak{N}$ sau de elementele de bază, vor fi numite noduri. Nodul în care nu intră nici o săgeată va fi numit rădăcină. Nodul în care intră o singură săgeată, dar din care nu pleacă nici o săgeată va fi numit vîrf. Săgeata care unește două noduri oarecare ale unui arbore elementar se numește drumul orientat între cele două noduri. Două noduri oarecare n_p și n_q spunem că sînt legate printr-un drum dacă sînt îndeplinite condițiile :

(1) Există o mulțime de noduri $\{n_{k_0}, \ldots, n_{k_l}\}$ astfel ca

$$n_{k_0} = n_p,\ n_{k_l} = n_q,$$

în sens grafic.

(2) Între nodurile n_{k_i} și $n_{k_{i+1}}$ să existe un drum orientat oricare ar fi $0 \leqslant i \leqslant l - 1$.

Vom numi în cele ce urmează lungimea drumului dintre nodurile n_p și n_q numărul l și-l vom nota cu $l = l\ (n_p,\ n_q)$.

Noțiunea de arbore o vom defini recursiv în felul următor :

1. Oricare arbore elementar se numește arbore.

2. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sînt arbori şi dacă $n \in \mathfrak{N}$, $\delta(n) = p$, atunci şi $a = (n, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ este un arbore obţinut în felul următor: n este rădăcina arborelui a iar $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sînt astfel că drumul de la n la rădăcina oricăruia dintre aceşti arbori este de lungimea 1. Săgeţile care pleacă de la n la rădăcinile arborilor $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sînt numerotate cu indicii 1, 2, ..., p, de la stînga la dreapta corespunzător arborilor $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Noţiunea de drum de lungime dată permite să introducem într-un arbore noţiunea de nivel. Pentru aceasta însă vom defini noţiunea de subarbore al unui arbore dat. O mulţime $\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ de noduri ale arborelui a se numeşte subarbore al arborelui a dacă sînt îndeplinite condiţiile :

(1) Fiecare nod al mulţimii $\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ este un nod al arborelui a.

(2) Există un singur nod n' în mulţimea $\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ cu proprietatea că el este legat de fiecare din celelalte noduri ale acestei mulţimi prin drumuri de lungime $l \geqslant 1$. Acesta va fi numit rădăcina subarborelui respectiv, iar subarborele se va numi înrădăcinat în nodul n'.

Vom nota subarborele respectiv cu a_p, p fiind numărul nodurilor lui.

Dat fiind arborele a, nodurile $n_1, n_2, \ldots, n_p$ ale acestui arbore se vor numi nivelul k al arborelui a dacă, n fiind rădăcina lui a, avem

$$l(n, n_i) = k, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

În cele ce urmează va fi deseori important de ştiut care este numărul nodurilor pe un nivel oarecare k al arborelui a. Dacă notăm cu N_k acest număr, atunci el se obţine recursiv cu ajutorul schemei

$$N_0 = 1$$

$$N_{k+1} = \sum_{i=1}^{p} \delta(n_i)$$

unde $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sînt nodurile de pe nivelul k. Numărul nivelelor k, cu proprietatea că $N_k > 0$, îl vom nota cu N. Dacă presupunem că am numerotat nodurile n ale arborelui a cu indicii $1, 2, \ldots, p$, în ordinea în care ele apar pe nivelele succesive ale arborelui a, atunci schema de mai sus se poate pune sub forma

$$N_0 = 1,$$

$$N_1 = \delta(n_1),$$

$$N_{k+1} = \sum_{i=0}^{N_k} \delta\left(n_{\sum_{j=1}^{k-1} N_j + i}\right).$$

Vom ataşa acum oricărui arbore a o matrice M în felul următor. Fie $N_0, N_1, \ldots, N_p$ numărul nodurilor de pe nivelele 0, 1, 2, ... p, $N_0 = 1$, $N_i \geqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Prima linie a matricei M va fi atunci

$$\delta(n_1)\; n_1\; 00 \ldots 01,$$

unde numărul zerourilor este egal cu lungimea maximă a drumurilor care pornesc din nodul n_1, rădăcina arborelui a, respectiv cu numărul p. Dacă s-au construit primele N_i linii ale matricei M, atunci următoarele N_{i+1} linii se construiesc în mod analog, atașîndu-se în ordinea în care apar fiecărui nod de pe nivelul $i + 1$ cîte o linie în felul următor :

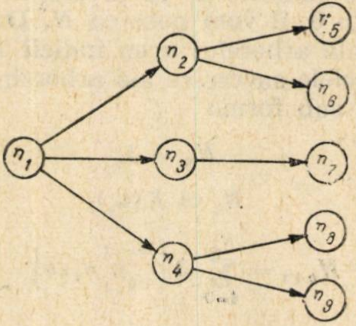
Fie $n_1^{i+1}, n_2^{i+1}, \ldots, n_{N_{i+1}}^{i+1}$ nodurile de pe nivelul $i + 1$ și $n_1^i, n_2^i \ldots, \ldots, n_{N_i}^i$ nodurile de pe nivelul i. Dacă liniile corespunzătoare nodurilor de pe nivelul i sînt de tipul

$$\delta(n_k^i)\ n_k^i\ 00 \ldots 0\, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i,$$

atunci liniile corespunzătoare de pe nivelul $i + 1$ sînt de tipul

$$\delta(n_k^{i+1})\, n_k^{i+1}\, 00 \ldots 0\, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{i+1},$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i+1}$ sînt construiți în felul următor : dacă n_k^i este o rădăcină a unui subarbore și dacă $n_1^{i+1}, n_2^{i+1}, \ldots, n_p^{i+1}$ sînt noduri care aparțin acestui subarbore și $l(n_k^i, n_j^{i+1}) = 1$, $j = 1, 2, \ldots, p$, atunci $\delta(n_k^i) = p$. Liniile corespunzătoare nodurilor $n_1^{i+1}, \ldots, n_p^{i+1}$ se obțin atunci din linia lui n_k^i prin ștergerea ultimului zero din această linie și înlocuirea lui cu 1, iar primul indice după acest 1 luînd valorile corespunzătoare $1, 2, \ldots, p$ pentru liniile corespunzătoare nodurilor n_1^{i+1}, $n_2^{i+1}, \ldots, n_p^{i+1}$, restul indicilor rămînînd neschimbați. Acest proces se repetă pentru fiecare nod n_k^i, $k = 1, 2, \ldots, u_i$ începînd de la dreapta spre stînga după cum apare el în arbore. Din definiția recursivă a arborilor precum și din definiția subarborilor rezultă că toate nodurile de pe nivelul $i + 1$ sînt noduri în subarbori cu rădăcinile pe nivelul i. De aici rezultă că matricea M este bine definită pentru oricare arbore a. Prima coloană a acestei matrici va fi numită vector grad al arborelui a, a doua coloană va fi numită vector nod al arborelui a. Matricea obținută din M prin



Figură

eliminarea vectorului nod și a vectorului grad se numește matrice de indici. Matricea M se vede ușor că caracterizează complet arborele a corespunzător. Pentru exemplificare să considerăm arborele din figură.

Matricea M atașată acestui arbore este atunci următoarea:

$$M = \left| \begin{array}{ccccc} 3 & n_1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & n_2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & n_3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & n_4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & n_5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & n_6 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & n_7 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & n_8 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & n_9 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right|$$

Vectorul grad este $(3, 2, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0)$, iar vectorul nod este $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9)$.

Fie dați, în continuare, arborii $a_1, a_2, \ldots, a_p$ și simbolul $n \in \mathfrak{N}$ pentru care $\delta(n) = p$. De asemenea, presupunem date matricile $M_1, M_2, \ldots, M_p$ corespunzătoare arborilor $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Vom descrie acum algoritmul de obținere al matricii M corespunzătoare arborelui $a = (n, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ din matricile $M_1, M_2, \ldots, M_p$. Fie, de asemenea, $N_0^1, N_1^1, \ldots, N_{k_1}^1, N_0^2, N_1^2, \ldots, N_{k_2}^2, \ldots, N_0^p, N_1^p, \ldots, N_{k_p}^p$ numărul nodurilor pe fiecare din nivelele $0, 1, \ldots, K_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$ ale arborilor $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Primul pas al algoritmului constă atunci în aplicarea asupra matricilor $M_1, M_2, \ldots, M_p$ a următoarelor reguli de transformare.

Regula 1. În matricea de indici ai matricei M_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ se va insera în fiecare linie după primul element diferit de zero indicele i, restul elementelor lăsîndu-se neschimbate.

Fie $k_j = \max\limits_{i=1}^{p} \{k_i\}$. Aceasta înseamnă că lungimea liniilor matricei de indici a matricei M_j este egală cu k_j.

Regula 2. Se vor atașa în matricile de indici ale matricilor M_i, $i \neq j$ atîtea simboluri zero, la începutul liniilor matricei de indici, pînă cînd lungimile lor vor deveni egale cu k_j.

Să notăm cu $M_1', M_2', \ldots, M_p'$ matricile obținute din $M_1, M_2, \ldots, M_p$ după transformarea lor conform regulilor 1 și 2. Matricea M se va obține atunci aplicînd următorii pași ai algoritmului despre care a fost vorba mai sus. La pasul al doilea se va construi prima linie a matricei M de forma

$$\delta(n)\, n\, 00 \ldots 01,$$

unde numărul simbolurilor zero este egal cu k_j.

Pasul al treilea al algoritmului constă în alegerea unui număr de N_k^i linii din matricile M_i^1 și atașarea lor ca următoarele linii ale matricei M, în ordine, pentru $i = 1, 2, \ldots, p$. Acest pas se repetă pentru $k = 0, 1, \ldots, k_i$ pînă cînd se epuizează în întregime toate matricile M_i'. Aceasta bineînțeles se obține pentru cazul cînd $k = k_j$.

Algoritmul se oprește cînd nu se mai poate aplica pasul al treilea. Matricea obținută o notăm cu M și vom arăta că ea este matricea corespunzătoare arborelui a.

Pentru aceasta se observă imediat că prima ei linie coincide cu prima linie a matricei care se atașează arborelui a după procedeul recursiv descris mai sus. Ceea ce se realizează la pasul al treilea al algoritmului de construire a matricei M nu este altceva decît trecerea recursivă de la liniile corespunzătoare nivelului k la liniile corespunzătoare nivelului $k+1$, pînă cînd $k = k_j$ pentru $k = 0, 1, \ldots, k_j$. Pentru claritate vom considera exemplul următor : fie arborii a_1, a_2, a_3 subarbori ai arborelui din figură, înrădăcinați respectiv în nodurile n_2, n_3, n_4 iar arborele $a = (n, a_1, a_2, a_3)$. Matricile corespunzătoare lui a_1, a_2, a_3 sînt respectiv

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & n_2 & 0 & 1 \\ 0 & n_5 & 1 & 1 \\ 0 & n_6 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & n_3 & 0 & 1 \\ 0 & n_7 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 2 & n_4 & 0 & 1 \\ 0 & n_8 & 1 & 1 \\ 0 & n_9 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$N_0^1 = 1,\ N_1^1 = 2\,;\ N_0^2 = 1,\ N_1^2 = 1\,;\ N_0^3 = 1,\ N_1^3 = 2.$$

Matricile transformate M_1', M_2', M_3' după regulile 1 și 2 vor fi

$$M_1' = \begin{vmatrix} 2 & n_2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & n_5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & n_6 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_2' = \begin{vmatrix} 1 & n_3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & n_7 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_3' = \begin{vmatrix} 2 & n_4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & n_8 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & n_9 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicînd al doilea și al treilea pas al algoritmului descris mai sus vom obține matricea

$$M = \begin{vmatrix} 3 & n_1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & n_2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & n_3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & n_4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & n_5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & n_6 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & n_7 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & n_8 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & n_9 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

care, după cum se vede, coincide cu matricea atașată arborelui din figură.

În cele de mai sus nu am folosit reprezentările matricilor corespunzătoare arborilor elementari, respectiv corespunzătoare elementelor n din matricea unui arbore pentru care $\delta(n) = 0$ deoarece în codificarea lor în limba unei mașini electronice de calcul acestora, după cum se va vedea ulterior, le corespunde o singură celulă de tipul

n	$'C_1$	x	$'C_2$

unde $'C_1$, $'C_2$ sînt adrese de celule care conțin elementele de bază C_1 și C_2 iar x este codul unei variabile. Prin n am notat un cod special care are menirea de a arăta că este vorba de un arbore elementar pe care-l vom numi nucleu.

Fie dată acum matricea M corespunzătoare arborelui $a = (n, a_1, \ldots, a_p)$. Vom construi un algoritm care aplicat matricei M o va transforma în şirul matricilor $M_1, M_2, \ldots, M_p$ corespunzătoare arborilor $a_1, a_2, \ldots, a_p$ şi în prima ei linie. Pentru aceasta să observăm că prima linie a matricei M are forma $p, n\ 00 \ldots 01$.

Primul pas al algoritmului va consta atunci în punerea în evidenţă a acestei linii.

Pasul al doilea al algoritmului constă în alegerea următoarelor p linii ale matricei M şi în scrierea lor separată. Acestea vor fi respectiv primele linii ale unor matrici $M'_1, M'_2, \ldots, M'_p$ pe care le vom obţine din matricea M.

Pasul al treilea al algoritmului constă în considerarea componentelor corespunzătoare ale vectorului grad, din liniile puse deja în evidenţă ale matricelor $M'_1, M'_2, \ldots, M'_p$. Fie aceste componente $\delta(n'_1), \delta(n'_2), \ldots, \ldots, \delta(n'_p)$. Atunci se iau în ordine din matricea M următoarele $\delta(n'_i)$ linii şi se aşază sub formă de următoarele linii ale matricilor M'_i pentru $i = 1, 2, \ldots, p$. Se consideră apoi componentele vectorilor grad ataşaţi matricilor M'_i la aplicarea precedentă a pasului al treilea al algoritmului, şi se face suma componentelor lor. Fie aceste numere $N_1, N_2, \ldots, N_p$. Se procedează apoi la următoarea aplicare a pasului al treilea al algoritmului cu N_i ca şi cu $\delta(n'_i)$. Procedeul se repetă pînă cînd se epuizează complet matricea M. Aplicarea algoritmului se începe cu primul pas şi se continuă în felul descris mai sus. Fie $M'_1, M'_2, \ldots, M'_p$ matricile obţinute în urma acestui proces. Aceste matrici vor fi transformate la pasul următor al algoritmului după următoarele reguli:

Regula 3. Se va şterge din fiecare linie a matricilor de indici ai matricilor M'_i al doilea indice diferit de zero.

Regula 4. Matricile obţinute în urma aplicării regulii 3 se transformă scoţînd din matricile lor de indici din fiecare linie atîţia indici zero de la începutul lor pînă cînd rămîne cel puţin o linie care nu conţine indici zero, lungimile liniilor respective păstrîndu-se egale.

Este evident că trebuie să existe cel puţin o matrice pentru care regula 4 nu se poate aplica deoarece în matricea ei de indici există linii care nu conţin indici zero. Matricile obţinute în urma aplicării regulii 4 le vom nota cu $M_1, M_2, \ldots, M_p$ ele fiind matricile corespunzătoare arborilor $a_1, a_2 \ldots, a_p$ ceea ce se poate demonstra uşor.

BIBLIOGRAFIE

1. TREVOR EVANS, *A decision problem for transformation of trees.* Canadian Journal of Mathematics, 15, *4*, 584–590 (1963).
2. KENNETH E. IVERSON, *A programing Language*, John Wiley and Sons, Inc. New York — — London, 1962.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

S. STOILOW, **Oeuvre mathématique**, 1964, 417 p., 39 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici și automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferențială neeuclidiană**, 1964, 387 p., 13 lei.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoreme de descompunere ale algebrei)**, **1960**, **619 p.**, 25,50 lei (epuizat).

D. BARBILIAN, **Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative) 1956, 380 p., 7 lei.**

JANKÖ BÉLA, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații liniare, 1961, 223 p., 8,85 lei.**

N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU și A. CORNEA, **Seminar S. Stoilow (1959—1960) Teoria potențialului pe suprafețe riemanniene**, 1962, 160 p., 5 lei.

G. CIUCU și R. THEODORESCU, **Procese cu legături complete**, 1960, 232 **p.**, **9,85 lei** (epuizat).

C. CONSTANTINESCU, **Seminar M. Neculce, Teoria mulțimilor**, 1960, 108 **p.**, **3,25 lei** (epuizat).

C. CORDUNEANU, **Funcții aproape-periodice**, 1961, 191 p., 8,30 lei (epuizat).

ROMULUS CRISTESCU, **Spații liniare ordonate**, 1959, 332 p., 11,10 lei.

I. CUCULESCU, **Seminar O. Onicescu, Algebre Lie**, 1962, 148 p., 5,15 lei.

C. FOIAȘ, **Seminar M. Nicolescu 1959—1960, Teoria spectrală în algebre Banach (necomutative) axată pe noțiunea de rezolventă**, 1962, 82 p., 2,85 lei.

ALEXANDRU FRODA, **Algebra superioară, fundamente: mulțimi și operații, divizibilitate, spații liniare, forme pătratice**, 1958, 455 p., 24,50 lei.

GH. GALBURĂ, **Corpuri de funcții algebrice și varietăți algebrice**, 1961, 180 p., 7,85 lei.

M. GHERMĂNESCU, **Ecuații funcționale**, 1960, 523 p., 25,60 lei (epuizat).

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

CAIUS IACOB, **Introduction mathématique à la mécanique des fluides**, 1959, 1288 p., 66,50 lei (epuizat).

TRAIAN LALESCU, **Introducere în teoria ecuațiilor integrale**, 1956, 135 p., 5,90 lei.

LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice și hidraulice**, 1963, 52 **p.**, 18,50 lei.

* * * **Lucrările celui de al IV-lea Congres al matematicienilor romîni**, 1960, 228 p., 8,55 lei (epuizat)

* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie și topologie Iași 2—5 iunie 1959**, 1962, 264 p., 9,75 lei.

* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie diferențială din 9—12 iunie 1955, organizată de Secția de științe matematice și fizice a Academiei R.P.R.**, 1956, 368 p., 9,50 lei.

G. MARINESCU, **Spații vectoriale normate**, 1956, 295 p., 6 lei.

G. MARINESCU, **Spații vectoriale topologice și pseudotopologice**, 1959, 219 p., 8,80 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometria neeuclidiană**, 1954, 144 p., 4,30 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă**, 1958, 496 p., 25,90 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă, Teoria corespondenței**, **1963**, 232 p., 10,50 lei.

GH. MIHOC și V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 1962, 732 **p.**, 34,70 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 1961, 142 p., 8,55 lei (epuizat), vol. II, **1962**, 155 p., 8,25 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Funcționarea în mai mulți timpi a schemelor cu relee ideale**, 1960, 279 p., 12 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Introducere în algebră, I. Inele și ideale**, vol. I, 1954, 256 p., 9,10 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Matricele asociate sistemelor de ecuații cu derivate parțiale. Introducere în studiul cercetărilor lui I. N. Lopatinschi, 1950, 64 p., 1,20 lei.**

GR. C. MOISIL, **Scheme cu comandă directă cu contacte și relee**, 1959, 205 p., 9,65 lei (epuizat)

ALEXANDRU MYLLER, **Scrieri matematice**, 1959, 595 p. + 1 pl., 30, 40 lei.

VERA MYLLER-LEBEDEV, **Lecții de algebră**, 1953, 396 p., 8,75 lei (epuizat).

MIRON NICOLESCU, **Analiza matematică**, vol. II, 1953, 420 p., 11,90 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU, **Numere și sisteme aleatoare**, 1962, 260 p., 11,20 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU, **Strategia jocurilor, cu aplicații la programarea liniară**, 1961, 228 p., 8,45 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU și colab., **Calculul probabilităților și aplicații**, 1956, 788 p., 15 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU și R. THEODORESCU, **Seminar de funcții sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

* * * **Opera matematică a lui Alexandru Pantazi**, 1956, 496 p., 24,20 lei.

DIMITRIE POMPEI, **Opera matematică**, 1959, 535 p. + 1 pl., 30,20 lei.

N. RANCU și L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicații în producție**, 1963, 898 p. + 20 pl., 45 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor și ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Teoria funcțiilor de o variabilă complexă**, vol. I, 1954, 308 p., 10 lei (epuizat), vol. II în colaborare cu Cabiria Andreian-Cazacu, 1958, 379 p., 25,70 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticității**, vol. I, 1961, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.

GHEORGHE ŢIŢEICA, **Geometria diferențială proiectivă a rețelelor**, 1956, 287 p., 8 lei.

DRAGOŞ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 1961, 76 p., 3,15 lei.

SERGIU VASILACHE, **Elemente de teoria mulțimilor și structurilor algebrice**, 1956, 235 p., 5 lei.

GH. VRĂNCEANU, **Leçons de géometrie différentielle**, vol. I, 1957, 407 p., 26,50 lei ; vol. II 1957, 428 p., 27,60 lei.

GH. VRĂNCEANU, **Lecții de geometrie diferențială**, vol. III, 1960, 454 p., 15 lei.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 7883

NOTĂ CATRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Citarea bibliografiei în text se va face în ordinea numerelor. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Revistele din bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 9, P. 1065—1186, BUCUREŞTI, 1964

I. P. „Informaţia" —c. 3452

43831

Lei 12

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

10

TOMUL 16
1964

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Acad. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
Acad. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
GH. MARINESCU — membru corespondent al Academiei R.P.R.
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie

Pentru a se asigura colecţia completă şi primirea la timp a revistei, reînnoiţi abonamentul dv. pe anul 1965.

În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, Bucureşti, Căsuţa poştală 134—135 sau la reprezentanţii săi din străinătate.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie pe adresa: str. Mihail Eminescu, nr. 47, Bucureşti
Revista apare de 10 ori pe an

TOM. 16, Nr. 10
1964

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR
DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

V. VÂLCOVICI, Asupra mișcării de rotație a unui fluid vîscos . . . 1189

G. VRĂNCEANU, Despre corespondența izometrică a două spații riemanniene de categoria $n-1$ 1207

I. SUCIU, Reprezentări spectral dilatabile ale unei algebre Banach comutative 1211

TUDOR ZAMFIRESCU, Asupra compunerii funcțiilor monotone și convexe 1221

DAN PASCALI, Monogeneitatea Fedorov în plan 1231

A. CREANGĂ-SÎMBOAN, Funcții sumă vectoriale 1243

H. COHN, Asupra consistenței testului raportului de verosimilități 1249

P. STAVRE, Asupra formulelor lui Frenet pentru curbe din spațiu cu conexiune afină L_n 1257

A. PETCU, Definirea laticilor numai cu ajutorul legilor de asociativitate și absorbție 1265

LADISLAU NÉMETI, Asupra tratării matematice a unor probleme de planificarea dezvoltării macroeconomice socialiste 1281

RECENZIE 1295

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 10, P. 1187–1296, BUCUREȘTI, 1964

ASUPRA MIŞCĂRII DE ROTAŢIE A UNUI FLUID VÎSCOS[1]

DE

V. VÂLCOVICI

§ 1. INTRODUCERE

În cosmogonie se vorbeşte adesea de o nebuloasă aproape plană, care s-ar găsi în mişcare de rotaţie în jurul unei axe centrale, normală pe planul ei[2]. Se cuvine să se precizeze această mişcare de rotaţie : este vorba de o rotaţie rigidă sau de o altfel de mişcare ?

Rotaţia rigidă trebuie înlăturată din capul locului, ca fiind incompatibilă cu realitatea fizică ; dacă am presupune că viteza liniară ar fi numai de 10 km/s la distanţa de un milion de km de centru, ceea ce este plauzibil, la distanţa de 200 u.a., adică la distanţa de 3.10^4 milioane de km viteza ar avea valoarea de 300 000 km/s, ceea ce este inadmisibil.

Rezultă că mişcarea de rotaţie a unei nebuloase aproape plane, trebuie concepută altfel. Cel mai simplu mod de a o concepe constă în a presupune că particulele materiale descriu cercuri concentrice, avînd centrul situat în centrul nebuloasei, viteza unghiulară corespunzătoare depinzînd de raza cercului respectiv.

În lucrarea de faţă se studiază o atare mişcare, presupunînd fluidul vîscos şi barotrop. Se arată că mişcarea trebuie să fie nestaţionară ; dacă este presupusă staţionară, se ajunge din nou la rotaţia rigidă, pe care am înlăturat-o ca fiind lipsită de sens fizic pentru dimensiuni mari. Se mai arată că existenţa mişcării nu este compatibilă cu ipoteza absenţei totale de forţe masive, ceea ce se explică fiziceşte prin necesitatea unor forţe centripete, care să asigure forma circulară a traiectoriei ; aceste forţe centripete ar putea fi datorite atracţiilor reciproce dintre particulele alcătuind masa totală a nebuloasei.

---

[1] Articolul apare în limba franceză în Rev. Roum. de math. pures et appl., **X**, *1* (1965).

[2] A se vedea [1], [2], [6].

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 10, P. 1189–1205 BUCUREŞTI, 1964

Presupunînd mişcarea axial simetrică, adică presupunînd că parametrii mişcării nu depind de azimutul particulei fluide, se ajunge la o ecuaţie de tip parabolic cu condiţii iniţiale şi pe frontieră. Se determină soluţia corespunzătoare. În cazul special cînd se presupune că fluidul se întinde în plan la infinit, se studiază forma soluţiei în ipoteza structurii ,,fibroase'' a nebuloasei, înţelesul noţiunii de ,,fibre'' fiind aproximativ acela dat de astronomul sovietic V. G. Fesenkov. Se pun astfel în evidenţă, în planul nebuloasei, două regiuni distincte cu regimuri diferite de mişcare, separate între ele printr-o a treia regiune de formă inelară, şi anume o regiune situată la o mare distanţă de centru, unde influenţa timpului asupra mişcării iniţiale este insensibilă, şi o altă regiune circulară, în jurul şi în apropierea centrului, în care fluidul are aproximativ o rotaţie rigidă, cu viteză unghiulară lent descrescătoare, tinzînd spre zero.

§ 2. ENUNŢAREA MATEMATICĂ A PROBLEMEI

Pentru simplificarea problemei vom presupune că nebuloasa poate fi asimilată cu un disc fluid, plan, de formă circulară, de rază egal cu r_0. Vom presupune că mişcarea fluidului se menţine tot timpul circulară, cu alte cuvinte, traiectoriile circulare ale particulelor se păstrează. Vom mai presupune că mişcarea pe aceste traiectorii este determinată de viteza v, funcţie numai de distanţa r a punctului considerat, la centrul O al discului, şi de timpul t,

$$v = v(r, t).$$

Raportînd mişcarea la coordonatele polare în planul discului, polul fiind însuşi centrul O al discului, viteza v a punctului de coordonate r, θ va avea proiecţiile v_r, v_θ pe rază şi pe o perpendiculară pe rază. Vom lua axa Oz normală pe planul discului în centrul O şi vom nota cu v proiecţia vectorului $\overline{v}$ pe această axă, proiecţie care, evident, este nulă.

Ecuaţiile de mişcare Navier-Stokes în coordonate polare sînt, după cum se ştie:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \\
&\qquad + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right), \\
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} = F_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \Theta}{r \partial \theta} + \\
&\qquad + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right), \qquad (2.1) \\
&\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_z}{r \partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \\
&\qquad + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right).
\end{aligned}$$

Am însemnat cu Θ scalarul div $\bar{v}$, cu F_r, F_θ, F_z proiecţiile forţei masice (redusă la unitatea de masă) pe axele polare de coordonate, cu ρ masa specifică a fluidului, cu p presiunea şi cu ν coeficientul cinematic de frecare. În aceste ecuaţii va trebui să facem

$$v_r = 0, \quad v_\theta = v, \quad v_z = 0$$

aşa încît vom avea pentru Θ

$$\Theta \equiv \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0.$$

Vom presupune apoi că forţa masică este dirijată radial,

$$F_\theta = 0, \quad F_z = 0,$$

şi că proiecţia ei, F_r, admite o funcţie de forţă $U\,(r,\,t)$,

$$F_r = \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Dacă mai admitem că mişcarea este barotropă, adică dacă admitem că ecuaţia stării (caracteristică) a fluidului are forma

$$p = f\,(\rho), \tag{2.2}$$

f fiind o funcţie definită, continuă , derivabilă pentru toate valorile pozitive ale lui ρ, atunci prima ecuaţie (2.1) ne dă

$$r\omega^2 + (U - P)' = 0, \tag{2.3}$$

punînd

$$P = \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho}, \tag{2.4}$$

$$v = r\omega \tag{2.5}$$

şi notînd cu $(U - P)'$ derivata funcţiei $U - P$ în raport cu r. Vom întrebuinţa de altfel sistematic notaţiile

$$a' = \frac{\partial a}{\partial r}, \quad a'' = \frac{\partial^2 a}{\partial r^2}, \quad \dot{a} = \frac{\partial a}{\partial t},$$

a fiind o funcţie oarecare de r şi de t,

$$a = a\,(r,\,t).$$

Cea de-a doua ecuaţie (2.1) ne va da

$$\dot{v} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{r\partial\theta} + \nu\left(v'' + \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2}\right).$$

Dacă presupunem că p nu depinde de θ, această ecuaţie devine

$$L\,(v) \equiv \dot{v} - \nu\left(v'' + \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2}\right) = 0 \tag{2.6}$$

sau, cu (2.5),

$$\dot{\omega} = \nu\left(\omega'' + 3\,\frac{\omega'}{r}\right). \tag{2.7}$$

Cea de-a treia ecuaţie Navier-Stokes din (2.1) devine o identitate, $0 = 0$.
Ecuaţia continuităţii

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\Theta + \overline{v}\,\mathrm{grad}\,\rho = 0,$$

se reduce la

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + v\,\frac{\partial\rho}{r\partial\theta} = 0.$$

Vom presupune însă că ρ nu depinde de θ, din cauza simetriei mişcării, aşa încît vom deduce că ρ nu este decît funcţie de r,

$$\rho = \rho(r).$$

Din relaţia (2.2) adică din ecuaţia caracteristică a mişcării barotrope, vom deduce că şi p depinde numai de r,

$$p = p(r).$$

Ecuaţia (2.7) ne spune că mişcarea nu poate fi staţionară. În adevăr, în cazul staţionar am avea

$$\omega'' + 3\,\frac{\omega'}{r} = 0,$$

adică

$$\omega = \frac{\alpha}{r^2} + \beta,$$

unde α, β înseamnă două constante de integrare. Presupunînd funcţia $v(= r\omega)$ continuă în centrul discului, va trebui să luăm $\alpha = 0$, aşa că mişcarea considerată a discului ar fi o rotaţie rigidă în planul său, în jurul centrului, cu o viteză unghiulară constantă. Eliminînd acest caz pe care îl considerăm, cum am menţionat la început, ca fiind incompatibil cu caracterul fizic al problemei, sîntem obligaţi a presupune $\dot{\omega} \neq 0$, deci mişcare nestaţionară.

§ 3. SOLUŢIA PROBLEMEI

Problema rotaţiei discului fluid se reduce, aşadar, la determinarea funcţiilor ρ şi v de variabilele r, t, definite în toate punctele domeniului D determinat de relaţiile

$$t > 0, \qquad 0 \leqslant r \leqslant r_0 \tag{D}$$

şi astfel încît ele să satisfacă ecuaţiile (2.6) şi (2.3) în domeniul D^1 determinat de relaţiile

$$t \geqslant 0, \quad 0 < r \leqslant r_0, \quad r_0 > 0 \tag{D^1}$$

discul avînd forma unui cerc de rază r_0, U fiind presupus dat, iar p fiind determinat de relaţia (2.2). Vom presupune că funcţia $v(r, t)$ este dată pentru valoarea $t = 0$ (momentul iniţial)

$$v(r, 0) = v_0(r), \tag{3.1}$$

$v_0(r)$ fiind o funcţie definită de r, finită, continuă, derivabilă pentru $0 \leqslant r \leqslant r_0$; vom mai presupune că v este dat pe frontiera l_0 a discului $r = r_0$,

$$v(r_0, t) = \varphi(t), \tag{3.2}$$

$\varphi(t)$ fiind o funcţie definită, continuă şi derivabilă de t, pentru orice valoare $t \geqslant 0$ luînd valoarea $v_0(r_0)$ pentru $t = 0$,

$$\varphi(0) = v_0(r_0).$$

În ceea ce priveşte pe ρ, vom presupune că ne este dată valoarea sa într-un singur punct, de altfel oarecare, al domeniului D.

Ne vom mărgini deocamdată la tratarea cazului particular

$$\varphi(t) \equiv 0, \quad \rho \equiv \text{const.} > 0. \tag{3.3}$$

Vom încerca, în acest scop, o separare de variabile, pentru o soluţie celulară, punînd

$$v = RT,$$

unde R înseamnă o funcţie numai de r iar T o funcţie numai de t. Ecuaţia (2.6) devine

$$TR = \nu\left(R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{1}{r^2}R\right)T.$$

Conchidem că R şi T sînt respectiv soluţiile ecuaţiilor

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\frac{\lambda}{\nu} - \frac{1}{r^2}\right)R = 0, \tag{3.4}$$

$$\dot{T} + \lambda T = 0, \tag{3.5}$$

λ fiind o constantă pozitivă. Ecuaţia (3.4) este de tip Bessel. Soluţia ei generală este dată de

$$R = AJ_1(kr) + B\,Y_1(kr), \quad k^2 = \frac{\lambda}{\nu} \tag{3.6}$$

unde $J_1(z)$, $Y_1(z)$ sînt funcţiile lui Bessel de ordinul întîi şi de speţa întîi respectiv a doua, iar A şi B două constante arbitrare.

Ecuaţia (3.5) are soluţia generală.

$$T = C\,\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Vom lua $B = 0$ în (3.6) pentru a evita singularitatea din punctul $r = 0$, care nu este compatibilă cu natura fizică a problemei, şi vom impune condiţia la frontieră $v(r_0, t) = 0$,

$$v(r_0, t) = 0 \Rightarrow J_1(kr_0) = 0$$

de unde vom scoate

$$k_n = \frac{1}{r_0} j_{1n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

j_{1n} fiind rădăcina de ordinul n a funcţiei $J_1(z)$ iar k_n valoarea lui k, corespunzătoare acestei rădăcini. Deducem pentru λ valoarea

$$\lambda_n = \nu k_n^2 = \nu \left(\frac{j_{1n}}{r_0}\right)^2 \tag{3.7}$$

corespunzătoare aceleaşi rădăcini j_{1n}.

Se ştie că în acest caz soluţia ecuaţiei (2.6) îndeplinind condiţia la limită (3.1) se poate pune sub forma

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_1\left(\frac{j_{1n}}{r_0} r\right) \mathrm{e}^{-\nu\left(\frac{j_{1n}}{r_0}\right)^2 t}, \tag{3.8}$$

unde am notat

$$C_n = \frac{1}{r_0^2 J_1'^2(j_{1n})} \int_0^{r_0} v_0(r) J_1\left(\frac{j_{1n}}{r_0} r\right) r\,\mathrm{d}r\,{}^{[3]} . \tag{3.9}$$

Se ştie de asemenea că seria (3.8) converge absolut şi uniform pentru toate valorile variabilelor t şi r din domeniul D dacă funcţia $v_0(r)$ îndeplineşte anumite condiţii, destul de largi, de altfel, pentru a cuprinde problema ce ne preocupă[4]. În particular, dacă $v_0(r)$ este o funcţie continuă şi derivabilă de r, condiţiile cerute sînt satisfăcute.

Observăm că soluţia (3.8) astfel obţinută se anulează pentru $r = 0$ şi $t \geqslant 0$, aşa fel încît $\omega \left(= \frac{v}{r}\right)$ să rămînă finit pentru $r = 0$.

În altă lucrare [12] am demonstrat că soluţia (3.8) este unica pentru condiţiile iniţiale şi la limită date.

---

[3] A se vedea [11], p. 436.

[4] A se vedea [13], p. 591 şi urm.

§ 4. OBSERVAŢIE ASUPRA SOLUŢIEI OBŢINUTE

În cazul problemei cosmogonice care ne preocupă, numărul $\lambda_n \left(= n \frac{j_{1n}^2}{r_0^2}\right)$ care figurează în exponenţii soluţiei (3.8) este foarte mic. În adevăr, r_0 trebuie presupus a fi de ordinul de mărime a 100 u.a., adică $1{,}5 \cdot 10^{15}$ cm. Luînd $v \sim 10^5$ cm / s (gazul avînd ipotetic densitatea de 10^{-6} gr cm^{-3}) şi $j_{1n} \sim n\pi$ vom avea

$$\lambda_n \sim 4\, 10^{-24}\, n^2\, \mathrm{s}^{-1}.$$

Pentru $t = 1$ miliard de ani, adică $t = \frac{1}{4} 10^{17}$ s, vom avea

$$\lambda_n t \sim 10^{-7} n^2.$$

Aşadar, $\lambda_n t$ va fi o mărime neglijabilă, dacă n nu depăşeşte o anumită limită. Rezultă că în formula (3.8) putem înlocui, pentru scopuri practice, pe $e^{-\lambda_n t}$ prin unitate. Procesul acesta de aproximare este foarte grosolan. Vom avea ocazia să indicăm alte aproximări mai bune cu ajutorul unei a doua forme a soluţiei, care este mai proprie calculelor.

§ 5. ECUAŢIILE GENERALIZATE ALE LUI HELMHOLTZ

Ne propunem a determina soluţia problemei pornind de la vectorul turbion

$$\overline{\Omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \overline{v}.$$

Vom da, cu acest prilej, o formă generalizată a ecuaţiilor lui Helmholtz. Vom porni în acest scop de la ecuaţiile Navier-Stokes pe care le vom pune sub forma vectorială

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + 2\,\overline{\Omega} \times \overline{v} = \operatorname{grad}\left(U - P - \frac{v^2}{2}\right) + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad} \Theta + \nu \triangle \overline{v}.$$

Aplicîndu-i operatorul diferenţial rot vom obţine

$$\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial t} + (\overline{v} \nabla)\, \overline{\Omega} = (\overline{\Omega} \nabla)\, \overline{v} + \frac{1}{6} (\nabla \Theta) \times (\nabla \nu) + \nu \triangle \overline{\Omega} + $$
$$+ \frac{1}{2} (\nabla \nu) \times (\triangle \overline{v})$$

sau

$$\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial t} + (\overline{v} \nabla)\, \overline{\Omega} = (\overline{\Omega} \nabla)\, \overline{v} + \frac{1}{2} (\nabla \nu) \times \left[(\triangle \overline{v}) - \frac{1}{3} (\nabla \Theta)\right] + $$
$$+ \nu (\triangle \overline{\Omega}). \tag{5.1}$$

Această ecuaţie poate fi privită ca o extindere a ecuaţiilor lui Helmholtz la cazul fluidelor vîscoase, compresibile. Pentru fluidele incompresibile ($\nu = \text{const.}$), aceasta se reduce la

$$\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial t} + (\overline{v}\,\nabla)\,\overline{\Omega} = (\overline{\Omega}\nabla)\,\overline{v} + \nu(\triangle\,\overline{\Omega}),$$

ecuaţie care este cunoscută[5]).

Revenind la ecuaţia generală (5.1) şi făcînd $\Theta = 0$ vom obţine ecuaţia care convine problemei noastre

$$\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial t} + (\overline{v}\,\nabla)\,\overline{\Omega} = (\overline{\Omega}\,\nabla)\,\overline{v} + \frac{1}{2}(\nabla\nu) \times (\triangle\overline{v}) + \nu(\triangle\overline{v}).$$

Proiectînd această ecuaţie pe axa *Oz* şi ţinînd seama de faptul că proiecţia vectorului $(\nabla\nu) \times (\triangle\overline{v})$ pe această axă este egală cu

$$\nu'\left[4\left(\frac{v}{r}\right)' r + r^3\left(\left(\frac{v}{r}\right)'\frac{1}{r}\right)'\right]$$

vom avea

$$\dot{\Omega} = \frac{\nu'}{2}\,r\left[4\left(\frac{v}{r}\right)' + r^2\left(\left(\frac{v}{r}\right)'\frac{1}{r}\right)'\right] + \nu\triangle\,\Omega \tag{5.2}$$

dacă Ω înseamnă valoarea scalară a vectorului turbion $\overline{\Omega}$

$$\overline{\Omega} = \Omega\,\overline{k},$$

$\overline{k}$ fiind versorul axei *Oz*. Între Ω şi v există relaţia evidentă

$$2\Omega = \frac{1}{r}(rv)' \tag{5.3}$$

de unde relaţia

$$2\Omega = \frac{1}{r}(r^2\,\omega)' \tag{5.4}$$

între Ω şi ω. Aceste două relaţii ne dau

$$\omega = \frac{2}{r^2}\int^r \Omega r\,\mathrm{d}r \tag{5.5}$$

şi

$$v = \frac{2}{r}\int^r \Omega r\,\mathrm{d}r \tag{5.6}$$

Înlocuind în paranteza dreaptă din (5.2) pe $\frac{v}{r}$ prin ω avem

$$4\left(\frac{v}{r}\right)' + r^2\left[\left[\left(\frac{v}{r}\right)'\frac{1}{r}\right]' = r\omega'' + 3\omega'$$

---

[5]) A se vedea [5], p. 300 sau [8], p. 578.

sau cu (5.4)

$$= 2\,\Omega' .$$

Astfel ecuaţia (5.2) devine

$$\dot{\Omega} = \nu'\Omega' + \nu\,\Delta\Omega. \tag{5.7}$$

În cazul particular al fluidului incompresibil, ecuaţia devine

$$\Omega = \nu\,\Delta\,\Omega \tag{5.8}$$

formă care se întîlneşte şi în problema conductibilităţii căldurii. Cum Ω este funcţie numai de r şi de t, ea se mai poate scrie

$$\dot{\Omega} = \nu\left(\Omega'' + \frac{1}{r}\Omega'\right). \tag{5.9}$$

Trebuie să menţionăm că această din urmă ecuaţie se putea obţine şi din (2.6) cu ajutorul substituţiei (5.3).

§ 6. CAZUL CÎND DISCUL SE ÎNTINDE ÎN TOT PLANUL

Dacă fluidul se întinde la infinit acoperind tot planul, va trebui să facem, în expresia (3.8) a soluţiei obţinute, pe r, să tindă la infinit. În acest mod am putea deduce din formula (3.8) expresia funcţiei $v(r, t)$ pentru cazul $r_0 \to \infty$, prin transformarea seriei care intervine în (3.8), într-o integrală. Transformarea aceasta se face cu ajutorul unui artificiu cunoscut[6]).

Pentru a evita procesele la limită incomode care trebuie făcute, pe deoparte, iar pe de alta pentru a ne elibera de condiţiile $v_0(0)=0$, $v_0(r_0) = 0$ pe care ni le impune forma (3.8) a soluţiei, vom porni de la ecuaţia (5.9) în scopul de a determina mai întîi tubionul $\Omega\,(r, t)$ pentru ca apoi să deducem viteza $v(r, t)$ cu ajutorul formulei (5.6).

Condiţia iniţială pentru Ω va fi

$$\Omega\,(r, 0) = \Omega_0\,(r) = \frac{1}{2r}(r\,v_0)'$$

potrivit relaţiei (5.3). Soluţia acestei probleme se găseşte în [5], p. 351, formula (16.17):

$$\Omega\,(r, t) = \frac{1}{2\nu t}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\int_0^\infty \Omega_0\,(R)\,\mathrm{e}^{-\frac{R^2}{4\nu t}}\,I_0\left(\frac{R_r}{2\nu t}\right)R\mathrm{d}R \tag{6.1}$$

unde am însemnat cu $I_0\,(z)$ cunoscuta funcţie Bessel de ordinul zero, legată de $J_0\,(z)$ prin relaţia

$$J_0\,(iz) = I_0\,(z), \quad i = \sqrt{-1}\,. \tag{6.2}$$

---

[6]) A se vedea [11], p. 217 şi urm.

Funcţia $v(r, t)$ se va deduce, cum am menţionat mai sus, cu ajutorul formulei (5.6) care devine în cazul de faţă

$$v(r,t) = \frac{1}{\nu r t}\int_0^\infty \Omega_0(R)\, e^{-\frac{R^2}{4\nu t}} R\mathrm{d}R \int_0^r e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} I_0\left(\frac{Rr}{2\nu t}\right) r\mathrm{d}r. \qquad (6.3)$$

§ 7. UN CAZ PARTICULAR INTERESANT

În tratatul [5] de Kocin, Kibel, Roze, citat mai sus, Kocin dezvoltă calculele în cazul particular următor

$$\Omega_0(r) = \begin{cases} \text{const. pentru } r \leqslant a \\ 0 \quad \text{pentru } r > a, \quad a = \text{const.} > 0. \end{cases}$$

Urmărind soluţionarea unei probleme de cosmogonie, aşa cum am menţionat mai sus, vom presupune că viteza iniţială pe cerc este constantă, deci $v_0(r)$ independent de r, aşa încît vom avea pentru $\Omega_0(r)$ relaţia

$$\Omega_0(r) = \frac{v_0}{2r}\cdot \qquad (7.1)$$

Expresia (6.1) devine astfel

$$\Omega(r,t) = \frac{v_0}{4\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \int_0^\infty e^{-\frac{R^2}{4\nu t}} I_0\left(\frac{Rr}{2\nu t}\right) \mathrm{d}R. \qquad (7.2)$$

Pentru a efectua calculele indicate vom face următoarea schimbare de variabile

$$\frac{r^2}{4\nu t} = \sigma, \quad \frac{R^2}{4\nu t} = s^2. \qquad (7.3)$$

Formula (7.2) devine astfel

$$\Omega(r,t) = \frac{v_0\, e^{-\sigma}}{2\sqrt{\nu t}} \int_0^\infty e^{-s^2} I_0(2\sqrt{\sigma s^2})\, \mathrm{d}s. \qquad (7.4)$$

Se ştie însă ([10], p. 529 şi 530) că funcţia Bessel de ordinul zero, $J_0(z)$, se poate pune sub forma

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_0} e^{u-\frac{z^2}{4u}} \frac{\mathrm{d}u}{u},$$

unde l_0 înseamnă un contur închis, simplu, în jurul originei, altfel arbitrar, în planul complex u. Vom presupune în cele ce urmează că acest contur este un cerc avînd centrul în origine şi raza σ_0 mai mare decît σ.

Exprimînd formula precedentă cu ajutorul funcţiei $I_0(z)$ vom avea

$$I_0(z) = J_0(zi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_0} e^{u+\frac{z^2}{4u}}\frac{du}{u} \tag{7.5}$$

sau încă, punînd $z = 2\,s\sqrt{\sigma}$,

$$J_0(2s\sqrt{\sigma}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_0} e^{u+\frac{\sigma s^2}{u}}\frac{du}{u}.$$

Vom introduce acum această valoare a lui $I_0(2s\sqrt{\sigma})$ în expresia (7.4) a lui $\Omega(r, t)$. Vom obţine astfel

$$\Omega(r, t) = \frac{v_0 e^{-\sigma}}{4\pi i\sqrt{\nu t}}\int_0^\infty e^{-s^2}\left(\int_{l_0} e^{u+\frac{\sigma s^2}{u}}\frac{du}{u}\right)ds.$$

Cum însă integrala

$$\int_0^\infty e^{-s^2}\,ds$$

este absolut şi uniform convergentă şi cum funcţia

$$\frac{1}{u}\,e^{u+\frac{\sigma s^2}{u}}$$

este mărginită pe cercul l_0, vom putea schimba ordinea de integrare, aşa încît vom putea scrie

$$\Omega(r, t) = \frac{v_0 e^{-\sigma}}{4\pi i\sqrt{\nu t}}\int_{l_0} e^{u}\left(\int_0^\infty e^{-s^2+\frac{\sigma s^2}{u}}\,ds\right)\frac{du}{u}, \tag{7.6}$$

sau încă

$$\Omega(r, t) = \frac{v_0 e^{-\sigma}}{4\pi i\sqrt{\nu t}}\int_0^\infty e^{u} A(u)\,\frac{du}{u}, \tag{7.7}$$

unde am notat

$$A(u) = \int_0^\infty e^{-ks^2}\,ds,\quad k = 1 - \frac{\sigma}{u}\cdot \tag{7.8}$$

Numărul k este complex, deci de forma

$$k = k_1 + i\,k_2,$$

k_1, k_2 fiind două numere reale. Ne întrebăm ce condiţii trebuie îndeplinite pentru ca integrala $A(u)$ să existe? Aceasta revine la a determina condiţiile în care integralele

$$A_1 = \int_0^\infty e^{-k_1 s^2}\cos k_2 s^2\,ds, A_2 = \int_0^\infty e^{-k_1 s^2}\sin k_2 s^2\,ds \tag{7.9}$$

există.

Însă aceste integrale există dacă presupunem

$$k_1 = \mathrm{Re}\,(k) > 0 \tag{7.10}$$

În adevăr, integrala

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-k_1 s^2}\,\mathrm{d}s, \quad k_1 > 0$$

este, după cum se știe, absolut convergentă, iar funcțiile cos $k_2 s^2$, sin $k_2 s^2$ sînt mărginite; rezultă că integrala A va avea în cazul (7.10) un sens și va fi egală cu

$$A = A_1 - iA_2.$$

Pe de altă parte, valoarea integralei A, cînd ea există este

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}. \tag{7.11}$$

Această valoare este perfect determinată, dacă impunem condiția ca ea să se reducă la

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k_1}}$$

pentru $k_2 = 0$, deoarece mărimea k nu există în planul complex decît în semiplanul $k_1 > 0$ mărginit de axa imaginară, din care am exclus punctul $k = 0$, așa încît funcția $\sqrt{k}$ are o valoare bine definită în acest semiplan.

Introducînd în (7.11) valoarea

$$k = 1 - \frac{\sigma}{u}$$

a lui k, dată de (7.8), vom avea

$$A(u) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{u}{u-\sigma}}. \tag{7.12}$$

Am obținut pe această cale pentru integralele A_1, A_2 expresiile

$$A_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cos\frac{\varphi}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sin\frac{\varphi}{2},$$

dacă punem

$$k = a\mathrm{e}^{i\varphi}$$

a fiind un număr real, pozitiv, și φ un unghi real îndeplinind condiția

$$a\cos\varphi > 0 \tag{7.13}$$

care reiese din (7.10).

Reducînd acum problema a cărei soluționare o urmărim, ne propunem să determinăm împrejurările în care este îndeplinită condiția (7.10), pentru

$$k = 1 - \frac{\sigma}{u},$$

u fiind un punct oarecare pe cercul l_0,

$$|u| = \sigma_0, \quad \sigma_0 > \sigma.$$

Punînd

$$u = \sigma_0 \, e^{i\theta}$$

vom avea

$$k = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_0} \cos\theta + i \frac{\sigma}{\sigma_0} \sin\theta,$$

aşa încît condiţia (7.10) va lua forma,

$$\cos\theta < \frac{\sigma_0}{\sigma}$$

deci ea va fi îndeplinită pentru orice punct de pe cercul l_0 deoarece am presupus $\sigma_0 > \sigma$. Expresia (7.7) a lui $\Omega\,(r, t)$ devine, ţinînd seama de valoarea (7.12) a lui $A(u)$,

$$\Omega\,(r, t) = \frac{v_0 \, e^{-\sigma}}{8i \sqrt{\pi \nu t}} \int_{l_0} \frac{e^u \, du}{\sqrt{u\,(u - \sigma)}}. \tag{7.14}$$

Pentru a calcula integrala

$$\mathcal{J} = \int_{l_0} \frac{e^u \, du}{\sqrt{u\,(u - \sigma)}}$$

vom face mai întîi schimbarea de variabilă

$$u = v + \frac{\sigma}{2}$$

care transformă integrala $\mathcal{J}$ în

$$\mathcal{J} = e^{\frac{\sigma}{2}} \int_{l_0} \frac{e^v \, dv}{\sqrt{v^2 - \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2}},$$

l_0 fiind cercul

$$\left| v + \frac{\sigma}{2} \right| = \sigma_0$$

care cuprinde punctele $v = \pm \frac{\sigma}{2}$ în interiorul său. Facem acum schimbarea de variabilă

$$v = w + \frac{z^2}{4w}, \tag{7.15}$$

unde am notat

$$z = \frac{\sigma}{2}.$$

Această din urmă schimbare de variabilă revine la o transformare conformă a planului v pe planul w, transformare care are punctele

$$w = \pm \frac{z}{2} = \pm \frac{\sigma}{4}$$

drept puncte singulare. Lor le corespund în planul v punctele

$$v = \pm z = \pm \frac{\sigma}{2}.$$

Vom folosi acea ramură a reprezentării conforme, care face să corespundă punctul de la ∞ în planul w punctului de la infinit din planul v. Curba l_0 se va transforma într-o curbă l_0 în planul w — o curbă închisă, simplă, conținînd în interiorul ei punctele singulare $w = \pm \frac{z}{2}$. Ținînd seama de relațiile

$$\mathrm{d}v = \left(1 - \frac{z^2}{4w^2}\right)\mathrm{d}z, \quad v^2 - z^2 = \left(w - \frac{z^2}{4w}\right)^2$$

care se deduc din (7.15), vom putea pune integrala $\mathcal{J}$ sub forma

$$\mathcal{J} = \mathrm{e}^z \int_{l'_0} \mathrm{e}^{w + \frac{z^2}{4w}} \frac{\mathrm{d}w}{w},$$

sau încă, folosind formula (7.5).

$$\mathcal{J} = 2\,\pi\, i\, I_0(z)\, \mathrm{e}^z.$$

Cu acest prilej, am obținut formulele

$$I_0(z) = \frac{\mathrm{e}^{-z}}{2\pi i} \int_{l_0} \frac{\mathrm{e}^u\, \mathrm{d}u}{\sqrt{u(u-2z)}}, \tag{7.16}$$

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_0} \frac{\mathrm{e}^v\, \mathrm{d}v}{\sqrt{v^2 - z^2}}, \tag{7.17}$$

pentru funcția Bessel $I_0(z)$; l_0 este o curbă închisă, simplă, în planul u respectiv v, cuprinzînd în interior punctele singulare $u = 0$, $u = 2z$, respectiv punctele $v = \pm z$. Ele sînt valabile și pentru z complex.

Revenind acum la formula (7.14) vom putea scrie

$$\Omega(r, t) = \frac{v_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{2}}}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\nu t}}\, I_0\left(\frac{\sigma}{2}\right), \tag{7.18}$$

σ fiind dat de prima dintre relaţiile (7.3). Vom avea deci

$$\Omega(r,t)=\frac{v_0 e^{-\frac{r^2}{8\nu t}}}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\nu t}}\,I_0\left(\frac{r^2}{8\nu t}\right). \tag{7.19}$$

Funcţia $v(r, t)$ rezultă din (5.6)

$$v(r,t)=\frac{v_0}{r}\sqrt{4\pi\nu t}\int_0^{\frac{r^2}{8\nu t}} e^{-z} I_0(z)\,dz. \tag{7.20}$$

§ 8. VALORI APROXIMATIVE

Să presupunem că în formulele obţinute (7.19) şi (7.20) pentru turbionul Ω şi respectiv viteza v, raza r se mărgineşte a fi foarte mică în raport cu $\sqrt{4\nu t}$, cu alte cuvinte avem

$$\sigma \ll 1.$$

În cazul acesta vom putea pune în relaţiile (7.18) şi (7.19)

$$e^{-z}\sim 1, \quad I_0(z)\sim 1,$$

aşa încît vom avea

$$\left.\begin{aligned}\Omega(r,t)&\sim\frac{\nu_0}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\nu t}},\\ v(r,t)&\sim r\,\frac{\nu_0}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\nu t}}.\end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

Mişcarea fluidului ne apare astfel ca o rotaţie rigidă în jurul originii, viteza unghiulară ω fiind egală cu

$$\omega=\frac{v_0}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\nu t}}.$$

Pentru t foarte mare, această viteză este foarte mică.

Dacă presupunem, dimpotrivă, r foarte mare faţă de $\sqrt{4\nu t}$, atunci σ şi z vor fi foarte mari ,adică vom avea

$$\sigma \gg 1, \quad z \gg 1.$$

Vom înlocui deci pe $I_0(z)$ în (7.18) şi (7.19) prin valoarea sa asimptotică.

Neglijînd termenul $O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right)$, adică luînd valoarea aproximativă

$$I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}$$

pentru $I_0(z)$, valorile mărimilor $\Omega(r, t)$ și $v(r, t)$ date de formulele (7.16) și (7.17) vor deveni respectiv

$$\Omega(r, t) \sim \frac{v_0}{2r}$$

$$v(r, t) \sim v_0.$$

De aici conchidem că la distanțe foarte mari de centru, discul fluid își menține mișcarea inițială cu viteza constantă v_0 și cu turbionul $\Omega = \frac{v_0}{2r}$.

Între aceste două regimuri semnalate — pentru $r \ll \sqrt{4\nu t}$ și pentru $r \gg \sqrt{4\nu t}$ — există o regiune medie, unde mișcarea fluidului nu mai este nici o rotație rigidă, dar nici o mișcare circulară cu aceeași viteză constantă, independentă de raza r a cercului, ci o mișcare mijlocie între aceste două.

Pentru $t = 10^5$ ani avem $\sqrt{4\nu t} = 10^4$ km, adică prima regiune cu rotație rigidă este redusă la un cerc central, un nucleu avînd raza de circa 1 000 km. Pentru $t = 10^9$ ani (1 miliard de ani) avem $\sqrt{4\nu t} = 10^6$ km, așa că regiunea cu rotație rigidă este un nucleu circular avînd raza de 100 000 km să zicem; în orice caz, în regiunea situată dincolo de raza de 10^8 km (100 milioane km) mișcarea inițială se păstrează, adică mișcarea avînd viteza independentă de rază. Acest fenomen se explică fizicește prin faptul că turbionul este aproape nul $\left(\frac{v_0}{2r}\right)$ la distanțe mari și forțele tangențiale dintre straturile fluide sînt de asemenea foarte mici, așa încît mișcarea inițială se conservă.

Primită la redacție la 9 mai 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. V. S. AMBARTUMIAN, *Problème de l'origine des étoiles.* Vestinik Acad. Nauk, SSSR, *12* (1953).
2. K. EDGEWORTH, *The origin and evolution of the solar system,* Monthly Not. of the R. Astr., Soc., **109**, *5*, 600—609 (1949).
3. V. G. FESENKOV, *Densité des fibres des nebuleuses.* Dokladî Ak. Nauk SSSR., **XCVI**, *5*, 941—944 (1954).
4. A. GRAY, G. B. MATHEWS, *Bessel Functions and their apllications to Physics* (trad. în l. rusă), Moscova, 1953.

5. N. E. Kotchine, I. A. Kibel, N. V. Roze, *Teoreticeskaia Ghidromehanika*. vol. II, Oghiz, 1948, ed. III.
6. G. P. Kuiper, *On the origin of the solar system*. Prof. of the National Ac. of Sc. of the U.S.A., **37**, 1—14 şi 383—393 (1951).
7. N. Mc. Lachlam, *Bessel Functions for Engineers*, Oxford Univ. Press, 1946.
8. H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge, 1932, ed. VI-a.
9. H. Müller, *Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten*, Leipzig, 1932, ed. II-a.
10. V. I. Smirnov, *Curs vîşci matematiki*. t. III, p. 2, Moskwa, 1953.
11. A. N. Tihanov u A. A. Samarski, *Uravnenia matematiceskoi Fiziki*. Moscova, 1953, ed. II-a.
12. V. Vâlcovici, *Asupra teoremei de valori extremale*. Bul. Ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, **7**, 741—749 (1955).
13. G. N. Watson, *A treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge, 1948, ed. II-a.

DESPRE CORESPONDENŢA IZOMETRICĂ A DOUĂ SPAŢII RIEMANNIENE DE CATEGORIA $n-1$[1])

DE

G. VRĂNCEANU

Un spaţiu riemannian V_n cu metrică pozitiv definită se zice că este de categoria $n-1$ dacă posedă $n-1$ invarianţi absoluţi independenţi. Dacă luăm aceşti invarianţi drept coordonate $(y^2, \ldots, y^n)$, metrica acestui spaţiu poate fi scrisă sub forma

$$ds^2 = a_{ij}(y^2, \ldots, y^n)\, dy^i\, dy^j, \ (i, j = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

deci admite un grup de mişcări

$$y'^1 = y^1 + a, \quad y'^\alpha = y^\alpha, \qquad (\alpha = 2, \ldots, n), \tag{1'}$$

unde a este un parametru. Dacă se dau două asemenea spaţii este natural să ne întrebăm dacă ele sînt echivalente. E o problemă care a fost studiată de J. T. Sen şi Hwang Cheng-chung [2]). Scopul acestei note e să arate cum pot fi simplificate condiţiile date de Hwang-Cheng-chung. În adevăr, dacă metrica spaţiului V'_n e scrisă sub forma

$$ds^2 = a'_{ij}(y'^2, \ldots, y'^n)\, dy'^i\, dy'^j \tag{2}$$

cele două spaţii (1) şi (2) vor fi izometric echivalente dacă putem găsi

$$y'^1 = \frac{y^1}{c} + \varphi(y^2, \ldots, y^n) \tag{3}$$

care să reducă metrica (2) la metrica (1), c fiind o constantă, deoarece (3) este cea mai generală transformare care lasă neschimbată metrica (1).

---

[1]) Acest articol a apărut în limba chineză în revista Shuxue Juizhan, 6, *4*, 339—40 (1963).

[2]) Hwang Cheng-chung, *On the Isometric Correspondence of Riemannian spaces of category n—1*. Progress of Mathematica, 4, 123—125 (1958) (în chinese).

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 10, P. 1207—1209, BUCUREŞTI, 1964.

Deci următoarele condiţii trebuie să fie satisfăcute

$$
\begin{aligned}
& a'_{11} = c^2 a_{11}, \\
& a'_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial y^\alpha} + a'_{1\alpha} = c a_{1\alpha}, \\
& a'_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial y^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial y^\beta} + a'_{1\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial y^\alpha} + a'_{1\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial y^\alpha} + a'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Prima din aceste condiţii înseamnă că dacă punem $y'^\lambda = y^\lambda$, funcţiile $a'_{11}(y'^2, \ldots, y'^n)$ şi $a_{11}(y^2, \ldots, y^n)$ diferă cel mult printr-un factor constant. În virtutea acestei ecuaţii, cea de-a doua ecuaţie din (4) poate fi redusă la forma

$$
\frac{\partial \varphi}{\partial y^\alpha} = \frac{1}{c} \frac{a_{1\alpha}}{a_{11}} - \frac{a'_{1\alpha}}{a'_{11}}
\tag{5}
$$

deci, cînd punem $y'^\lambda = y^\lambda$, membrul drept al lui (5) trebuie să fie gradientul unei funcţii. Cu ajutorul acestor formule ultima ecuaţie din (4) poate fi scrisă sub forma

$$
A'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta},
$$

unde am pus

$$
A_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - \frac{a_{1\alpha} a_{1\beta}}{a_{11}}.
$$

Astfel cantităţile $A'_{\alpha\beta}$ considerate ca funcţii de y'^λ sînt aceleaşi ca $A_{\alpha\beta}$ considerate ca funcţii de y^λ.

Rămîne să arătăm că aceste condiţii sînt şi suficiente. În acest scop, să observăm că dacă punem $y^\lambda = y'^\lambda$ şi prima ecuaţie a lui (4) este adevărată pentru o anumită constantă c, atunci înlocuind y'^1 cu $\frac{y^1}{c}$, va fi de asemenea adevărată pentru $c = 1$. Atunci a'_{11} ca funcţie de y'^λ este aceeaşi ca a_{11} ca funcţie de y^λ.

Dacă presupunem că şi condiţia (5) e satisfăcută cînd avem $y'^\lambda = y^\lambda$, putem scrie

$$
\frac{\partial f}{\partial y^\alpha} = \frac{a_{1\alpha}}{a_{11}} - \frac{a'_{1\alpha}(y^2, \ldots, y^n)}{a'_{11}(y^2 \ldots y^n)}.
\tag{7}
$$

Luînd

$$
y'^1 - f(y'^2 \ldots y'^n), y'^\lambda,
$$

ca noi variabile în (2), condiţia (7) în funcţie de noile variabile devine

$$
a'_{1\alpha}(y'^2 \ldots y'^n) = a_{1\alpha}(y^2 \ldots y^n).
$$

Aceasta înseamnă că $a'_{1\alpha}$ considerate ca funcţii de y'^λ sînt aceleaşi ca $a_{1\alpha}$ de y^λ.

Astfel am ajuns la situația că pentru tensorii fundamentali (1) și (2) coeficienții a'_{ij} ca funcții de y'^{λ} sînt aceiași ca a_{ij} considerați ca funcții de y^{λ}. Evident că relativ la transformările grupului (1'), două asemenea metrici sînt echivalente.

Am obținut următoarea teoremă :

Condițiile necesare și suficiente pentru ca două spații (1), (2) de categoria n — 1 să poată fi echivalente cînd $y'^{\lambda} = y^{\lambda}$,

$$a'_{11} = c^2 a_{11}, \quad A'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}$$

și, în plus, dacă punem $y'^{\lambda} = y^{\lambda}$, *cantitățile*

$$\frac{a_{1\alpha}}{c\, a_{11}} - \frac{a'_{1\alpha}}{a'_{11}}$$

formează gradientul unei anumite funcții, c fiind o constantă.

Condițiile enunțate mai sus sînt mai simple decît cele date de Hwang Chen-chung, fiindcă în cazul acestuia apar atît componentele covariante a_{ij} cît și cele contravariante a^{ij}.

(tradusă în limba chineză de Hwang Chen-chung)

Observații ale traducătorului. Prof. G. Vrănceanu, membru al Acad. R.P.R., mi-a trimis o scrisoare la 14 iunie 1962, împreună cu manuscrisul lucrării de mai sus în care a arătat, în mod amabil, că în lucrarea mea *Despre corespondența isometrică a spațiilor riemanniene de categoria n — 1* condiția (iv) poate fi omisă, deoarece, este o consecință a condițiilor (i) și (ii). Pentru aceasta îi adresez sincere mulțumiri.

Primită la redacție la 22 august 1964

REPREZENTĂRI SPECTRAL DILATABILE ALE UNEI ALGEBRE BANACH COMUTATIVE[1]

DE

I. SUCIU

Introducere. În [1] au fost generalizate unele din rezultatele obţinute de B. Sz. Nagy şi C. Foiaş în [2] pentru contracţii, la cazul reprezentărilor unor algebre Banach comutative. Demonstraţia teoremei de descompunere în partea frontieră (unitară) şi respectiv partea complet nefrontieră (complet neunitară) a unei reprezentări fiind dată în cazul general, cînd nu se ştie dacă reprezentarea admite dilatări spectrale, a necesitat raţionamente de teorie spectrală, nefiind o transpunere directă a celei din [2].

În lucrarea de faţă considerîndu-se numai reprezentări spectral dilatabile ale unei algebre Banach comutative, s-a putut reface demonstraţia teoremei de descompunere dată în [2] cu noţiuni de unitaritate şi complet neunitaritate care depind de dilatarea spectrală considerată (teorema 1).

Rezultatul acestei teoreme coincide cu cel al teoremei de descompunere dată în [1] în cazul cînd descompunerea nu depinde de dilatare (cum se întîmplă de exemplu în cazul reprezentărilor algebrelor Dirichlet unde dilatarea este unică).

În lucrarea de faţă se stabileşte faptul că nici în cazul algebrelor S-generate descompunerea nu depinde de dilatare. Totodată, se caracterizează reprezentările unitare ale unei algebre S-generate (propoziţia 2) precum şi subspaţiul de unitaritate a unei reprezentări oarecare a unei astfel de algebre (propoziţia 1).

1. *Preliminarii*. Fie X un spaţiu Hausdorff compact şi $C(X)$ algebra funcţiilor continue pe X normată cu superiorul modulului adică

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

---

[1] Lucrare prezentată la „Sesiunea Ştiinţifică a tineretului", Bucureşti, 18—20 iunie 1964

Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert şi $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ algebra operatorilor liniari şi mărginiţi definiţi pe $\mathcal{H}$.

DEFINIŢIE. O aplicaţie liniară $\varphi \to T_\varphi \ (\varphi \in C(X))$ a lui $C(X)$ în $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se zice semispectrală (de tip pozitiv) dacă

a) $T_1 = I$

b) $\varphi \geqslant 0 \Rightarrow T_\varphi \geqslant 0$.

Se verifică uşor că dacă $\varphi \to T_\varphi \ (\varphi \in C(X))$ este de tip pozitiv, avem :

$$T_{\mathrm{R}} = \mathrm{Re}\, T_\varphi = \frac{1}{2}(T_\varphi + T_\varphi^*)$$

$$T_{\bar{\varphi}} = T_\varphi^*$$

$$\| T_\varphi \| \leqslant 2 \| \varphi \| .$$

DEFINIŢIE. Aplicaţia semispectrală $\varphi \to T_\varphi \ (\varphi \in C(X))$ se numeşte *spectrală* dacă ea este multiplicativă, adică dacă

$$T_{\varphi_1 \varphi_2} = T_{\varphi_1} T_{\varphi_2} \text{ pentru orice } \varphi_1, \ \varphi_2 \in C(X).$$

Se ştie [2]) că există o corespondenţă biunivocă între familia aplicaţiilor semispectrale $\varphi \to T_\varphi \ (\varphi \in C(X))$ şi familia măsurilor semispectrale $(F(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ (unde $B(X)$ = corpul mulţimilor boreliene pe X) definite pe X şi cu valori în $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Aplicaţia semispectrală $\varphi \to T_\varphi \ (\varphi \in C(X))$ este spectrală dacă şi numai dacă măsura $(F(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ corespunzătoare este spectrală.

O teoremă a lui Neumark [2]) ne spune că dacă $(F(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ este o măsură semispectrală pe X valorificată în $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, atunci există un spaţiu Hilbert $\mathcal{H}'$ care-l conţine pe $\mathcal{H}$ ca subspaţiu şi o măsură spectrală $(E(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ pe X valorificată în $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$ astfel încît

$$F(\sigma) = PE(\sigma)$$

pentru orice $\sigma \in B(X)$, P fiind operatorul de proiecţie de pe $\mathcal{H}'$ pe $\mathcal{H}$.

Măsura $(E(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ se numeşte *dilatarea spectrală a lui* $(F(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$, iar aplicaţia spectrală $\varphi \to U_\varphi \ (\varphi \in C(X))$ a lui $C(X)$ în $\mathcal{L}(\ ')$ corespunzătoare lui $(E(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ o vom numi *dilatare spectrală a lui* $\varphi \to T_\varphi \ (\varphi \in C(X))$.

Avem

$$T_\varphi = P\, U_\varphi$$

pentru orice $\varphi \in C(X)$.

Dacă $\mathcal{H}'$ este astfel ales încît $\bigcup\limits_{\sigma \in B(X)} E(\sigma)\mathcal{H}$ să genereze un subspaţiu dens în $\mathcal{H}'$, dilatarea spectrală $(E(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ (respectiv $\varphi \to U_\varphi \ (\varphi \in C(X))$ se numeşte *minimală*.

---

[2]) C. Foiaş, *Algebre Banach comutative*. Seminar ţinut în cadrul Institutului de matematică al Academiei R.P.R.

Două dilatări spectrale minimale $(E_1(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$, $(E_2(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ ale unei măsuri semispectrale $(F(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ coincid în sensul următor: dacă $\mathcal{H}'_1$ și $\mathcal{H}'_2$ sînt spațiile Hilbert corespunzătoare, atunci există un operator unitar $U : \mathcal{H}'_1 \to \mathcal{H}'_2$ care reduce pe $\mathcal{H}$ astfel încît

$$U(E_1(\sigma)) = E_2(\sigma)$$

pentru orice $\sigma \in B(X)$.

2. *Reprezentări spectral dilatabile ale unei algebre Banach.* Fie $A \subset C(X)$ o supnorm algebră Banach pe X, adică o subalgebră Banach a lui $C(X)$ cu proprietățile:

a) A conține constantele

b) A separă punctele lui X.

O reprezentare a lui A în algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ a operatorilor liniari și mărginiți pe spațiul Hilbert $\mathcal{H}$ este o aplicație $f \to T_f (f \in A)$ cu proprietățile:

1) $T_{\alpha f + \beta g} = \alpha T_f + \beta T_g$

2) $T_{fg} = T_f T_g$

3) $T_1 = I$

4) $\| T_f \| \leqslant \| f \|$.

Definiție. Reprezentarea $f \to T_f (f \in A)$ a lui A în $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se zice *spectral dilatabilă* dacă există un spațiu Hilbert $\mathcal{H}' \supset \mathcal{H}$ și o aplicație spectrală $\varphi \to U_\varphi$ $(\varphi \in C(X))$ în $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$ astfel încît

$$T_f = P U_f$$

pentru orice $f \in A$, P fiind proiecția lui $\mathcal{H}'$ pe $\mathcal{H}$.

Aplicația spectrală $\varphi \to U_\varphi (\varphi \in C(X))$ se numește *dilatare spectrală* a lui $f \to T_f (f \in A)$.

Orice reprezentare a lui $C(X)$ este o aplicație spectrală.

Dacă $\varphi \to U_\varphi (\varphi \in C(X))$ este o dilatare spectrală a lui $f \to T_f (f \in A)$, atunci este clar că $\varphi \to P U_\varphi (\varphi \in C(X))$ este o aplicație semispectrală a lui $C(X)$ în $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ și că $\varphi \to U_\varphi (\varphi \in C(X))$ este o dilatare spectrală a sa.

Dilatarea spectrală $\varphi \to U_\varphi (\varphi \in C(X))$ a lui $f \to T_f (f \in A)$ se zice *minimală* dacă ea este o dilatare spectrală minimală a lui $\varphi \to U_\varphi (\varphi \in C(X))$.

E clar că dacă $f \to T_f (f \in A)$ este spectral dilatabilă, atunci ea admite și dilatări spectrale minimale. În cele ce urmează vom considera numai dilatări spectrale minimale ale lui $f \to T_f (f \in A)$. În general o reprezentare dilatabilă $f \to T_f (f \in A)$ a lui A admite mai multe dilatări spectrale.

Fie $\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}$ un subspațiu Hilbert al lui $\mathcal{H}$ care reduce pe $P U_\varphi$ oricare ar fi $\varphi \in C(X)$. Atunci $\varphi \to P U_\varphi P_0$ $(\varphi \in C(X))$ (cu P_0 proiecția lui $\mathcal{H}'$ pe $\mathcal{H}^0$) este o aplicație semispectrală a lui $C(X)$ în $\mathcal{L}(\mathcal{H}^0)$. Dilatarea ei spectrală minimală (care este unică) o vom numi $\mathcal{H}^0$ — componenta lui

$\varphi \to U_\varphi\ (\varphi \in C(X))$. E clar că ea este o dilatare spectrală a $\mathcal{H}^0$ — componentei lui $f \to T_f\ (f \in C(X))$. Această reprezentare este restricţia lui $\varphi \to U_\varphi\ (\varphi \in C(X))$ la subspaţiul generat de $\bigcup_{\varphi \in C(X)} U_\varphi\, \mathcal{H}^0$ în $\mathcal{H}'$.

DEFINIŢIE. Vom spune că dilatarea spectrală $\varphi \to U_\varphi\ (\varphi \in C(X))$ a lui $f \to T_f\ (f \in A)$ este o *dilatare unitară* dacă $U_\varphi \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ pentru orice $\varphi \in C(X)$.

DEFINIŢIE. Dilatarea $\varphi \to U_\varphi\ (\varphi \in C(X))$ se zice *complet neunitară* dacă oricare ar fi subspaţiul $\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}$ care reduce pe $PU_\varphi\ (\varphi \in C(X))$ $\mathcal{H}^0$ — componenta lui $\varphi \to U_\varphi\ (\varphi \in C(X))$ nu este unitară.

TEOREMA 1. *Fie $f \to T_f\ (f \in A)$ o reprezentare spectral dilatabilă a lui A în $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ şi $\varphi \to U_\varphi\ (\varphi \in C(X))$ o dilatare spectrală a sa. Atunci există o descompunere unică $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(u)} + \mathcal{H}^{(c)}$ care reduce pe PU_φ pentru orice $\varphi \in C(X)$ astfel încît $\mathcal{H}^{(u)}$ — componenta lui $\varphi \to U_\varphi\ (\varphi \in C(X))$ să fie unitară iar $H^{(c)}$ — componenta lui $\varphi \to U_\varphi\ (\varphi \in C(X))$ să fie complet neunitară.*

Demonstraţie. Fie

$$\mathcal{H}^{(u)} = \{h \in \mathcal{H} : U_\varphi h \in \mathcal{H} \text{ pentru orice } \varphi \in C(X)\}.$$

Dacă $h \in \mathcal{H}^{(u)}$ avem

$$U_\psi(U_\varphi h) = U_{\psi\varphi}\, h \in \mathcal{H}$$

oricare ar fi ψ şi $\varphi \in C(X)$. Deci $U_\varphi\, h \in \mathcal{H}^{(u)}$ oricare ar fi $\varphi \in C(X)$ adică $\mathcal{H}^{(u)}$ reduce pe U_φ oricare ar fi U_φ. Rezultă că $\mathcal{H}^{(u)}$ este un subspaţiu al lui $\mathcal{H}$. Evident, $\mathcal{H}^{(u)}$ reduce PU_φ pentru orice $\varphi \in C(X)$.

Fie

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(u)} + \mathcal{H}^{(c)}.$$

E clar că $\mathcal{H}^{(u)}$ — componenta lui $\varphi \to U_\varphi\ (\varphi \in C(X))$ este unitară. Dacă $\mathcal{H}^{(c)}$ — componenta lui $\varphi \to U_\varphi\ (\varphi \in C(X))$ n-ar fi complet neunitară, ar exista $h \in \mathcal{H}^{(c)}$ cu proprietatea:

$$U_\varphi h \in \mathcal{H}^{(c)} \subset \mathcal{H}$$

pentru orice $\varphi \in C(X)$, adică $h \in \mathcal{H}^{(u)}$ ceea ce nu se poate.

Fie acum

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$

o nouă descompunere a lui $\mathcal{H}$ care reduce pe PU_φ astfel încît $\mathcal{H}_1$ — componenta lui $\varphi \to U_\varphi\ (\varphi \in C(X))$, U^1_φ să fie unitară iar $\mathcal{H}_2$ — componenta lui $\varphi \to U_\varphi\ (\varphi \in C(X))$, U^2_φ să fie complet neunitară.

Fie $h \in \mathcal{H}^1$. Avem

$$U^1_\varphi h \in \mathcal{H}^1.$$

Deci

$$U_\varphi h = U^1_\varphi h \in \mathcal{H}_1,$$

adică

$$\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}^{(u)}.$$

Fie

$$h \in \mathcal{H}^0 = \mathcal{H}^{(u)} \cap \mathcal{H}_2$$

Avem

$$U_\varphi h \in \mathcal{H}^0$$

pentru orice $\varphi \in C(X)$. Rezultă că $\mathcal{H}^0$ — componenta lui $\varphi \to U_\varphi$ $(\varphi \in C(X))$ este unitară ceea ce nu se poate deoarece $\mathcal{H}_2$ — componenta lui $\varphi \to U_\varphi$ $(\varphi \in C(X))$ este complet neunitară.

Deci

$$\mathcal{H}_0 = \{0\}$$

şi deci

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}^{(u)} \text{ şi } \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}^{(c)}.$$

Şi cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Observaţie. Dilatarea $\varphi \to U_\varphi$ $(\varphi \in C(X))$ este unitară dacă şi numai dacă $\mathcal{H}^{(u)} = \mathcal{H}$ şi complet neunitară dacă şi numai dacă $\mathcal{H}^{(u)} = 0$.

3. *Cazul algebrelor S-generate. Fie* $A \subset C(X)$ o supnorm algebră Banach. În cele ce urmează vom presupune că X este frontiera Şilov a lui A. Fie

$$S = \{s \in A \mid s \neq 0, \|sf\| = \|s\| \, \|f\| \text{ pentru orice } f \in A\}.$$

Se ştie că (vezi [3])

$$S = \{s \in A \mid s \neq 0 \, |s(x)| = \|s\| \text{ pentru orice } x \in X\}.$$

Algebra A se zice S-generată dacă mulţimea polinoamelor cu elemente din S şi coeficienţi complecşi este densă în A, adică dacă

$$A = \overline{C[S]}.$$

Cum S este multiplicativ închis, elementele din $C[S]$ sînt de forma

$$f = \sum c_i s_i \text{ cu } c_i \in C \text{ şi } s_i \in S.$$

Evident se poate presupune şi $\|s_i\| = 1$ pentru orice i şi de aceea vom considera că în S intră numai elemente de normă 1.

În [4] s-a demonstrat că dacă algebra A este S-generată, atunci algebra de fracţii cu numitori în S a lui A este densă în $C(X)$. Elementele algebrei de fracţii cu numitori în S se pot evident scrie sub forma

$$g = \sum c_i s_i \bar{s} \text{ cu } s_i, s \in S \text{ şi } \|s_i\| = \|s\| = 1.$$

De asemenea se ştie [3] că dacă A este S-generată, atunci frontiera sa Şilov (în cazul nostru X) este

$$X = \{M \in \mathfrak{M} \mid |s(M)| = \|s\| \text{ pentru orice } s \in S\},$$

unde $\mathfrak{M}$ este spaţiul idealelor maximale ale lui A.

Să ne întoarcem acum la reprezentările noastre.

Fie $A \subset C(X)$ o algebră S-generată şi $f \rightarrow T_f$ $(f \in A)$ o reprezentare spectral dilatabilă a sa în algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ a operatorilor liniari şi mărginiţi pe spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$. Fie $\varphi \rightarrow U_\varphi$ $(\varphi \in C(X))$ o dilatare a sa valorificată în $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$.

Fie

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(u)} \oplus \mathcal{H}^{(c)}$$

descompunerea dată de teorema 1 care reduce dilatarea $\varphi \rightarrow U_\varphi$ $(\varphi \in C(X))$ la o componentă unitară respectiv complet neunitară.

PROPOZIŢIA 1. *Dacă A este S-generată, atunci*

$$\mathcal{H}^{(u)} = \{h \in \mathcal{H} \mid \| T_s \; T_\sigma^* h \| = \|h\| \text{ pentru orice } s, \; \sigma \in S\}.$$

Demonstraţie. Să observăm mai întîi că dacă $\varphi \in C(X)$ şi $|\varphi(x)| = 1$ pentru orice $x \in X$, atunci U_φ este un operator unitar. Într-adevăr, avem

$$U_\varphi U_\varphi^* = U_\varphi U_{\bar{\varphi}} = U_{\varphi\bar{\varphi}} = U_1 = I = U_{\bar{\varphi}\varphi} = U_\varphi^* U_\varphi .$$

Să notăm

$$\mathcal{H}^0 = \{h \in \mathcal{H} \mid \| Ts T_\sigma^* h \| = \| h \| \text{ pentru orice } s, \; \sigma \in S\}.$$

Fie $h \in \mathcal{H}^0$. Avem

$$\| PU_s h \| = \| T_s h \| = \| h \| = \| U_s h \|.$$

Deci

$$\| PU_s h \| = \| U_s h \|$$

şi deci

$$U_s h \in \mathcal{H}$$

pentru orice $s \in S$.

Analog

$$U_{\bar{s}} h \in \mathcal{H}.$$

Fie acum $g \in C(X)$ de formă

$$g = \sum c_i \, s_i \, \bar{s}.$$

Avem

$$U_g = \sum c_i \, U_{s_i} \, U_{\bar{s}}$$

Dar pentru $h \in \mathcal{H}^0$ avem

$$\| PU_{s_i} U_{\bar{s}} h \| = \| PU_{s_i} PU_{\bar{s}} h \| = \| T_{s_i} \; T_s^* h \| = \| h \| = \| U_{s_i} U_{\bar{s}} h \|$$

şi deci

$$\| PU_{s_i} \, U_{\bar{s}} h \| = \| U_{s_i} U_{\bar{s}} h \|$$

adică

$$U_{s_i} U_{\bar{s}} h \in \mathcal{H}.$$

Deci

$$U_g h \in \mathcal{H}$$

şi cum elementele g de această formă sînt dense în $C(X)$ avem

$$U_\varphi h \in \mathcal{H}$$

pentru orice $\varphi \in C(X)$ adică $h \in \mathcal{H}^{(u)}$ (din definiţia lui $\mathcal{H}^{(u)}$). Deci

$$\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}^{(u)}.$$

Fie acum $h \in \mathcal{H}^{(u)}$. Cum $U_{\bar\varphi} h \in \mathcal{H}$ pentru orice φ, avem

$$\| T_s\, T_\sigma^* h \| = \| P U_s\, P U_{\bar\sigma} h \| = P U_s\, U_{\bar\sigma} h \| =$$

$$= \| P U_{s\bar\sigma} h \| = \| U_{s\bar\sigma} h \| = \| h \|,$$

adică $h \in \mathcal{H}^{(0)}$.

Avem deci

$$\mathcal{H}^{(u)} = \mathcal{H}^0$$

şi propoziţia este complet demonstrată.

În cazul algebrelor S-generate, descompunerea

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(u)} + \mathcal{H}^{(c)}$$

nu depinde deci de dilatarea $\varphi \to U_\varphi$ ($\varphi \in C(X)$) a lui $f \to T_f$ ($f \in A$). De aceea au sens următoarele definiţii.

Fie $f \to T_f$ ($f \in A$) o reprezentare spectral dilatabilă a unei algebre S-generate A în $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ şi

$$\mathcal{H}^{(u)} = \{h \in \mathcal{H} \mid \| T_s T_\sigma^* h \| = \| h \| \text{ pentru orice } s,\ \sigma \in S\}.$$

Reprezentarea $f \to T_f$ ($f \in A$) se zice *unitară* dacă $\mathcal{H}^{(u)} = \mathcal{H}$.

Dacă $\mathcal{H}^{(u)} = \{0\}$ reprezentarea $f \to T_f$ ($f \in A$) se zice *complet neunitară.*

PROPOZIŢIA 2. *Reprezentarea spectral dilatabilă $f \to T_f$ ($f \in A$) a unei algebre S-generate A este unitară dacă şi numai dacă T_s este unitar pentru orice $s \in S$. În acest caz există o singură dilatare spectrală a lui $f \to T_f$ ($f \in A$).*

Demonstraţie. Dacă reprezentarea $f \to T_f$ ($f \in A$) este unitară avem $\mathcal{H}^{(u)} = \mathcal{H}$ şi deci

$$\| T_s h \| = \| T_s^* h \| = \| h \|$$

pentru orice $h \in \mathcal{H}$ ceea ce înseamnă că T_s este unitar.

Fie acum că T_s este un operator unitar pentru orice $s \in S$. Avem

$$\| T_s\, T_\sigma^* h \| = \| T_\sigma^* h \| = \| h \|$$

pentru orice $h \in \mathcal{H}$ şi deci

$$\mathcal{H}^{(u)} = \mathcal{H}$$

adică reprezentarea $f \to T_f$ $(f \in A)$ este unitară.

Fie acum $\varphi \to U_\varphi$ $(\varphi \in C(X))$ şi $\varphi \to U'_\varphi$ $(\varphi \in C(X))$ două dilatări spectrale ale lui $f \to T_f$ $(f \in A)$. Cum $f \to T_f$ $(f \in A)$ este unitară, $U_\varphi h \in \mathcal{H}$, $U'_\varphi h \in \mathcal{H}$ pentru orice $h \in \mathcal{H}$ şi deci

$$U_f = T_f h = U'_f h$$

$$U_f^* h = T_f^* h = U_f'^* h.$$

Atunci

$$U_{f\bar{g}} = U_f U_{\bar{g}} = U_f U_g^* = T_f T_g^* = U_f U_g'^* = U'_f U'_{\bar{g}} = U'_{f\bar{g}}$$

pentru orice f, $g \in A$. Sau

$$U_{\Sigma f_i \bar{g}_i} = U'_{\Sigma f_i \bar{g}_i}$$

pentru orice f_i, $g_i \in A$.

Elementele de această formă fiind dense în $C(X)$ avem

$$U_\varphi = U'_\varphi$$

pentru orice $\varphi \in C(X)$.

În cadrul algebrelor S-generate, teorema 1 se poate întări astfel.

TEOREMA 2. *Fie* $f \to T_f$ $(f \in A)$ *o reprezentare spectral dilatabilă a algebrei S-generate A în algebra* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. *Atunci există o descompunere*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(u)} \oplus \mathcal{H}^{(c)}$$

a lui $\mathcal{H}$, *care reduce pe* $f \to T_f$ $(f \in A)$ *astfel încît* $\mathcal{H}^{(u)}$ *— componenta lui* $f \to T_f$ $(f \in A)$ *să fie unitară şi* $\mathcal{H}^{(c)}$ *— componenta lui* $f \to T_f$ $(f \in A)$ *să fie complet neunitară. Această descompunere este unică şi avem*

$$\mathcal{H}^{(u)} = \{h \in \mathcal{H} \mid \|T_s T_\sigma^* h\| = \|h\| \text{ pentru orice } s, \sigma \in S\}.$$

Demonstraţie. Existenţa rezultă din teorema 1 şi propoziţia 1. Pentru ca şi unicitatea să rezulte din teorema 1, este suficient să arătăm că dacă descompunerea

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$$

reduce pe $f \to T_f$ $(f \in A)$ la o reprezentare unitară în $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ şi respectiv la o reprezentare complet neunitară în $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, atunci ea reduce operatorii $PU\varphi$ $(\varphi \in C(X))$ oricare ar fi dilatarea spectrală $\varphi \to U_\varphi$ $(\varphi \in C(X))$ a lui $f \to T_f$ $(f \in A)$.

Fie $\varphi \to U_\varphi$ $(\varphi \in C(X))$ o dilatare oarecare a lui $f \to T_f$ $(f \in A)$. Cum

$$\|T_s T_\sigma^* h\| = \|h\|$$

pentru orice $h \in \mathcal{H}_0$, avem

$$\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}^{(u)}$$

şi deci

$$U_\varphi h \in \mathcal{H}$$

pentru orice $h \in \mathcal{H}_0$.

Atunci

$$U_{s\bar{\sigma}} h = P U_{s\bar{\sigma}} h = P U_s U_{\bar{\sigma}} h = P U_s P U_{\bar{\sigma}} h = T_s T^*_\sigma h \in \mathcal{H}_0$$

pentru orice s, $\sigma \in S$ şi $h \in \mathcal{H}_0$. Atunci pentru orice g de forma $g = \sum s_i \bar{\sigma}$ avem

$$U_g h \in \mathcal{H}_0$$

pentru orice $h \in \mathcal{H}^0$ şi deci şi pentru orice $\varphi \in C(X)$. Adică $\mathcal{H}_0$ reduce pe $\varphi \to U_\varphi (\varphi \in C(X))$, ceea ce trebuia arătat.

4. *Exemple.* a) *Reprezentări canonice ale lui A.* Fie $A \subset C(X)$ o supnormă algebră Banach şi μ o măsură pozitivă pe X. Notăm cu $H^2(\mu\,; A)$ închiderea lui A în $L^2(\mu)$.

Vom numi reprezentare canonică a lui A în $H^2(\mu\,; A)$ reprezentarea $f \to T_f\,(f \in A)$ definită prin

$$T_f h = f h$$

pentru orice $h \in H^2(\mu\,; A)$.

E clar că $\varphi \to U_\varphi (\varphi \in C(X))$, definită prin

$$U_\varphi h = \varphi h$$

pentru orice $h \in L^2(\mu)$, este o dilatare spectrală a lui $f \to T_f\,(f \in A)$.

Măsura μ se zice măsură *Szegö* relativ la A [1] dacă

$$\chi_\omega L^2(\mu) \subset H^2(\mu\,; A) \quad (\omega = \text{mulţime Borel a lui } X)$$

implică $\mu(\omega) = 0$ (unde $\chi_\omega =$ funcţia caracteristică a lui ω).

În [1] s-a demonstrat că o *măsură de reprezentare pentru A* [4] adică o măsură multiplicativă pe A şi de normă 1 este o măsură Szegö dacă şi numai dacă ea nu este punctuală (nu e de forma $\mu(f) = f(x)$ cu $x \in X$, fixat).

De asemenea s-a demonstrat următoarea propoziţie.

PROPOZIŢIA 3. *Reprezentarea canonică a lui A în* $H^2(\mu\,; A)$ *este complet neunitară dacă şi numai dacă măsura* μ *este o măsură Szegö.*

Dacă A este S-generată şi X frontiera sa Şilov obţinem următorul

COROLAR. *Dacă* μ *este o măsură Szegö pe* X *şi* $f \to T_f\,(f \in A)$ *este reprezentarea canonică a lui A în* $H^2(\mu\,; A)$, *atunci* T_s *sînt izometrici şi complet neunitari pentru orice* $s \in S$.

b) *Reprezentări scalare ale lui A.* Reprezentarea $f \to T_f (f \in A)$ a lui A în $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ se zice scalară dacă există $c_f \in C$ astfel încît

$$T_f = c_f I.$$

Dacă $f \to T_f\,(f \in A)$ este o reprezentare scalară a lui A, atunci există o măsură de reprezentare pentru A pe X, astfel încît

$$T_f = \mu(f)\, I.$$

Pentru aceasta este suficient să observăm că $f \to c_f$ este o funcţională liniară şi multiplicativă pe A. Dacă M este idealul maximal corespunzător, atunci măsura de reprezentare μ_M a lui M satisface condiţia

$$T_f = \mu_M(f)\, I.$$

Punînd

$$U'_\varphi = \mu_M(\varphi)\, I,$$

obţinem o aplicaţie semispectrală a lui $C(X)$ în $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dilatarea spectrală $\varphi \to U_\varphi$ $(\varphi \in C(X))$ a acestei aplicaţii va fi evident o dilatare spectrală a lui $f \to T_f$ $(f \in A)$.

PROPOZIŢIA 4. *Fie* $A \subset C(X)$ *S-generată cu* X *frontiera sa Şilov. Reprezentarea scalară* $f \to T_f = \mu_M(f)\, I$ $(f \in A)$ *a lui* A *este unitară dacă* $M \in X$ *şi complet neunitară dacă* $M \notin X$.

Demonstraţie. Dacă $M \in X$ avem

$$|s(M)| = 1$$

pentru orice $s \in S$. Deci

$$\|Ts\,h\| = \|\mu_M(s)\, h\| = \|s(M)\,h\| = |s(M)|\, \|h\| = \|h\|$$

pentru orice $h \in \mathcal{H}$. Şi analog

$$\|T_s^* h\| = \|\overline{\mu_M(s)}\, h\| = \|s(\overline{M})\,h\| = |s(M)|\, \|h\| = \|h\|$$

pentru orice $h \in \mathcal{H}$.

Operatorul T_s este deci unitar oricare ar fi $s \in S$ şi deci reprezentarea $f \to T_f$ $(f \in A)$ este unitară.

Dacă $M \notin X$ există $s \in S$ astfel încît $|s(M)| < 1$. Avem deci

$$\|T_s h\| = \|\mu_M(s)\, h\| = \|s(M) h\| = |s(M)|\, \|h\| < \|h\|$$

pentru orice $h \in \mathcal{H}$ şi deci reprezentarea $f \to T_f$ $(f \in A)$ este complet neunitară.

Primită la redacţie la 17 iulie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. C. FOIAŞ and I. SUCIU, *Szegö measures and Spectral theory in Hilbert spaces.* (va apare).
2. B. SZ. NAGY et C. FOIAŞ, *Sur les contractions de l'espace de Hilbert.* IV. Acta Sci. Math., **21**, 251 –259 (1960).
3. I. SUCIU, *Algebre Banach analitice.* Studii şi cercetări matematice, **15**, *1*, 55—76 (1964).

ASUPRA COMPUNERII FUNCŢIILOR MONOTONE ŞI CONVEXE

DE

TUDOR ZAMFIRESCU

1. INTRODUCERE[1]

G. Szekeres a dat acum 8 ani o teoremă relativă la funcţiile numite de către S. Marcus de tip K. Este vorba despre funcţiile f reale, definite pe un interval (a, b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$, astfel încît $f(x) = \psi(\varphi(x))$, unde φ este o funcţie reală, definită, convexă şi strict crescătoare pe (a, b), ψ este o funcţie reală, definită, concavă şi strict crescătoare pe $(\varphi(a), \varphi(b))$ şi $x \in (a, b)$. Dacă înlocuim mai sus convexitatea în sensul obişnuit (concavitatea) prin convexitatea Jensen (concavitatea (J)), nu se schimbă nimic deoarece o funcţie monotonă admite puncte de continuitate, de unde rezultă echivalenţa între convexitatea (concavitatea) Jensen şi cea propriu-zisă.

G. Szekeres [1] a obţinut rezultatul următor:

Dacă f este o funcţie reală, definită, strict crescătoare şi avînd derivata a doua continuă pe (a, b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$, atunci există o funcţie reală φ, definită şi strict crescătoare pe (a, b) şi o funcţie reală ψ, definită şi strict crescătoare pe $(\varphi(a), \varphi(b))$, astfel încît $\varphi''(x) \geqslant 0$ pentru $a < x < b$, $\psi''(x) \leqslant 0$ pentru $\varphi(a) < u < \varphi(b)$ şi $f(x) = \psi(\varphi(x))$ pentru $a < x < b$.

Mai recent, S. Marcus [2] a adus o corectare[2] şi o îmbunătăţire teoremei date de către G. Szekeres şi a stabilit condiţii necesare pentru ca o funcţie să fie de tip K. Prezentăm aici teorema sa de suficienţă:

Fie f o funcţie reală definită pe (a, b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$. Presupunem că f este derivabilă pe (a, b) şi că $f'(x) > 0$ pentru $a < x < b$. Presupunem de asemenea că $f''(x)$ există, finită, în fiecare punct din (a, b)

---

[1] Articolul va apare în versiune franceză în „Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées", **10**, *1* (1965), sub titlul „Sur quelques théorèmes de G. Szekes et S. Marcus concernant les fonctions monotones et convexes".

[2] În special se cere ca $f' > 0$ peste tot.

ST. CERC. MAT. TOM. 16, NR. 10, P. 1221–1230, BUCUREŞTI, 1964.

şi că f'' este sumabilă pe fiecare interval compact conţinut în (a, b). Atunci, f este, pe (a, b), o funcţie de tip K.

Vom da o nouă îmbunătăţire teoremelor de mai sus, privind în special derivabilitatea. Condiţiile teoremei de suficienţă vor deveni încă mai apropiate de cele necesare. Se va obţine o metodă efectivă de construcţie şi, mai mult, în condiţiile acestei teoreme vom putea stabili, în întregime, clasele funcţiilor φ şi ψ.

2. DEFINIŢII ŞI NOTAŢII

Notăm cu $f^+(x)$ şi $f^-(x)$ derivatele la dreapta şi la stînga ale funcţiei f, cînd ele există şi sînt finite, în punctul x, iar cu $f^{-1}(x)$ inversa funcţiei f, de asemenea dacă ea există. Notăm cu M' mulţimea derivată a unei mulţimi M oarecare şi D_f mulţimea punctelor de discontinuitate şi de extrem relativ strict ale unei funcţii f. Numim puncte de creştere (descreştere) punctele de discontinuitate de prima speţă ale unei funcţii oarecare, în care limita la stînga este inferioară (superioară) celei la dreapta. Înţelegem prin puncte $(+, +)$ (sau $(+, -)$, $(-, +)$, $(-, -)$) punctele x de discontinuitate ale unei funcţii pentru care există o vecinătate (y_x, z_x) astfel încît funcţia să fie crescătoare pe (y_x, x) şi pe (x, z_x) (sau crescătoare pe (y_x, x) şi descrescătoare pe (x, z_x) etc.).

3. CONDIŢII SUFICIENTE

TEOREMA 1. *Pentru ca o funcţie* $f: (a, b) \to R$ *să fie de tip* K *este suficient ca următoarele patru condiţii să fie satisfăcute:*

1. f *este continuă pe* (a, b),

2. $f^+(f^-)$ *este definită pe* (a, b) *şi cu variaţie mărginită pe fiecare* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$,

3. *Marginea inferioară a funcţiei* $f^+(f^-)$ *este strict pozitivă pe fiecare* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$,

4. $D''_{f^+} \subseteq \{a, b\}$ $(D''_{f^-} \subseteq \{a, b\})$.

Observaţie. Dintre aceste condiţii, primele trei sînt de asemenea necesare [2].

Demonstraţie. Funcţia f este strict crescătoare pe (a, b) deoarece $f^+ > 0$. Imaginea unui interval prin f este de asemenea un interval. Notăm $(c, d) = f((a, b))$ $(-\infty \leqslant c < d \leqslant \infty)$. Punctele de discontinuitate d_n ale funcţiei f^+ sînt de prima speţă, f^+ fiind cu variaţie mărginită pe intervalele închise $[\alpha_n, \beta_n]$ cu proprietatea $d_n \in [\alpha_n, \beta_n] \subset (a, b)$. Funcţia f transformă punctele de discontinuitate şi de extrem pentru f^+ în puncte de acelaşi fel pentru $(f^{-1})^+$, deoarece avem $(f^{-1})^+(f(x)) = \dfrac{1}{f^+(x)}$, dar punctele de maxim, de creştere sau de tip $(+, +)$ şi $(+, -)$ se transformă în puncte de minim, de descreştere sau de tip $(-, -)$ şi $(-, +)$ şi reciproc. Lăsăm cititorului sarcina de a demonstra că $D''_{(f^{-1})^+} \subseteq \{c, d\}$.

Fie o partiţie a intervalului (c, d):

$$c < \ldots < x_{-n} < \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots < d$$

astfel că fiecare interval (x_i, x_{i+1}) conține un punct unic y_i de acumulare de puncte de discontinuitate sau de extrem relativ strict ale funcției $(f^{-1})^+$. Ne vom îndrepta atenția asupra intervalului (x_i, y_i), unde i este arbitrar, la care vom atașa o funcție g_i. Notăm cu $\{x_i^n\}$ șirul crescător de puncte de discontinuitate sau de extrem relativ strict pentru $(f^{-1})^+$, situate în (x_i, y_i). Luăm de asemenea $x_i^0 = x_i$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_i^n = y_i$.

Notăm provizoriu cu $\mathcal{M}_M$ $(\mathcal{M}_m)$ mulțimea punctelor de maxim (minim) relativ strict și în același timp de continuitate pentru $(f^{-1})^+$ pe $[x_i, y_i]$, $\mathcal{M}_c^{++}$, $\mathcal{M}_c^{+-}$ etc. ($\mathcal{M}_d^{++}$, $\mathcal{M}_d^{+-}$ etc.) mulțimile de puncte de creștere (descreștere) și de tip $(+, +)$, $(+, -)$ etc. Vom construi funcția $g_i : [x_i, y_i) \to R$ astfel

$$g_i(x) = \begin{cases} k_i^+ > 0 & \text{dacă} \quad x = x_i \\ g_i(x_i^m) & \text{,,} \quad x_i^m \in \mathcal{M}_M \\ \dfrac{g_i(x_i^m)\cdot(f^{-1})^+(x)}{(f^{-1})^+(x_i^m)} & \text{,,} \quad x_i^m \in \mathcal{M}_m \\ \dfrac{g_i(x_i^m - 0)\cdot(f^{-1})^+(x)}{(f^{-1})^+(x_i^m)} & \text{,,} \quad x_i^m \in \mathcal{M}_d^{++} \cup \mathcal{M}_d^{-+} \\ g_i(x_i^m - 0) & \text{,,} \quad x_i^m \in \mathcal{M}_d^{+-} \cup \mathcal{M}_d^{--} \\ \dfrac{g_i(x_i^m - 0)\cdot(f^{-1})^+(x)}{(f^{-1})^+(x_i^m - 0)} & \text{,,} \quad x_i^m \in \mathcal{M}_c^{++} \cup \mathcal{M}_c^{-+} \\ \dfrac{g_i(x_i^m - 0)\cdot(f^{-1})^+(x_i^m)}{(f^{-1})^+(x_i^m - 0)} & \text{,,} \quad x_i^m \in \mathcal{M}_c^{+-} \cup \mathcal{M}_c^{--} \end{cases}$$

unde $x_i^m = \max\ \{x_i^n\ ;\ x_i^n \leqslant x\}$.

Vom construi într-un mod analog funcția $h_i(x) : (y_{i-1}, x_i] \to R$. Pentru aceasta, să notăm cu $\{x_i^n\}$ șirul descrescător al punctelor de discontinuitate sau de extrem relativ strict pentru $(f^{-1})^+$ situate în (y_{i-1}, x_i) și $x_i^0 = x_i$ (am abandonat notațiile analoage utilizate la definirea funcției $g_i(x)$; reținem totuși semnificațiile mulțimilor $\mathcal{M}_M$, $\mathcal{M}_m$, $\mathcal{M}_c^{++}$ etc. schimbînd numai intervalul $[x_i, y,)$ prin $(y_{i-1}, x_i])$.

Definim

$$h_i(x) = \begin{cases} k_i^- > 0 & \text{dacă} \quad x = x_i \\ h_i(x_i^m) & \text{,,} \quad x_i^m \in \mathcal{M}_m \cup \mathcal{M}_d^{-+} \cup \mathcal{M}_d^{--} \\ \dfrac{h_i(x_i^m)\cdot(f^{-1})^+(x)}{(f^{-1})^+(x_i^m)} & \text{,,} \quad x_i^m \in \mathcal{M}_M \cup \mathcal{M}_c^{++} \cup \mathcal{M}_c^{+-} \\ \dfrac{h_i(x_i^m)\cdot(f^{-1})^+(x)}{(f^{-1})^+(x_i^m - 0)} & \text{,,} \quad x_i^m \in \mathcal{M}_d^{++} \cup \mathcal{M}_d^{+-} \\ \dfrac{h_i(x_i^m)\cdot(f^{-1})^+(x_i^m - 0)}{(f^{-1})^+(x_i^m)} & \text{,,} \quad x_i^m \in \mathcal{M}_c^{-+} \cup \mathcal{M}_c^{--} \end{cases}$$

unde $x_i^m = \min\ \{x_i^n\ ;\ x_i^n > x\}$.

Am ţinut seamă în cele două construcţii că $(f^{-1})^+(x_i^m) = (f^{-1})^+(x_i^m + 0)$.

Astfel construite, funcţiile g_i şi h_i sînt crescătoare şi toate punctele lor de discontinuitate sînt de creştere şi coincid cu punctele de creştere ale funcţiei $(f^{-1})^+$. Intenţionăm acum de a racorda toate funcţiile g_i şi h_i. Trebuie suprapuse aceste două familii de funcţii în x_i şi prelungite prin continuitate în y_i.

Să arătăm că, notînd $l_i^- = \lim\limits_{x \to y_i} g_i(x)$ (g_i fiind definită pe $[x_i, y_i)$, trecerea la limită se face prin $x < y_i$), avem $0 < l_i^- < \infty$. Existenţa limitei (finită sau infinită) este asigurată de monotonia lui g_i. Inegalitatea $l_i^- > 0$ este evidentă deoarece $l_i^- \geqslant k_i^+ > 0$. Pentru a arăta că $g_i(x_i^n)$ tinde către o limită finită cînd $n \to \infty$, extragem subşirul $\{g_i(x_i^{n_m})\}$, unde $(x_i^{n_m}, x_i^{p_m})$ sînt intervalele de constanţă sau $x_i^{n_m} = x_i^{p_m}$ punctele de discontinuitate ale lui g_i. Studiul construcţiei funcţiei g_i ne procură relaţia de recurenţă

$$g_i(x_i^{n_m}) = \frac{g_i(x_i^{n_{m-1}})(f^{-1})^+(x_i^{n_m})}{(f^{-1})^+(x_i^{p_{m-1}} \pm 0)},$$

unde $(f^{-1})^+(x_i^{p_{m-1}} \pm 0) = \min\{(f^{-1})^+(x_i^{p_{m-1}} - 0), (f^{-1})^+(x_i^{p_{m-1}} + 0)\}$, deci

$$g_i(x_i^{n_m}) = \frac{g_i(x_i^{n_1})\,(f^{-1})^+(x_i^{n_2}) \ldots (f^{-1})^+(x_i^{n_m})}{(f^{-1})^+(x_i^{p_1} \pm 0)(f^{-1})^+(x_i^{p_2} \pm 0) \ldots (f^{-1})^+(x_i^{p_{m-1}} \pm 0)},$$

Notăm $(f^{-1})^+(x_i^{n_{m+1}}) - (f^{-1})^+(x_i^{p_m} \pm 0) = a_m$. Atunci

$$g_i(x_i^{n_m}) = \frac{g_i(x_i^{n_1})\,[(f^{-1})^+(x_i^{p_1} \pm 0) + a_1] \ldots [(f^{-1})^+(x_i^{p_{m-1}} \pm 0) + a_{m-1}]}{(f^{-1})^+(x_i^{p_1} \pm 0) \ldots (f^{-1})^+(x_i^{p_{n-1}} \pm 0)}$$

sau

$$g_i(x_i^{n_m}) = g_i(x_i^{n_1}) \left[1 + \frac{a_1}{(f^{-1})^+(x_i^{p_1} \pm 0)}\right] \ldots \left[1 + \frac{a_{m-1}}{(f^{-1})^+(x_i^{p_{m-1}} \pm 0)}\right].$$

După cum se ştie, produsul infinit $g_i(x_i^{n_\infty})$ este convergent dacă seria $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{(f^{-1})^+(x_i^{p_j} \pm 0)}$, ai cărei termeni sînt toţi pozitivi, este convergentă. Alegem intervalul $[\alpha, \beta]$ compact astfel ca $(x_i, y_i) \subset [\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Pe $[\alpha, \beta]$, $(f^{-1})^+$ este cu variaţie mărginită, pentru că f^+ are marginea inferioară strict pozitivă şi este cu variaţie mărginită. f^+ este mărginită, deci $(f^{-1})^+$ are marginea inferioară $b > 0$. Seria pe care am găsit-o este majorată de $\frac{1}{b} \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ care este convergentă deoarece $(f^{-1})^+$ are variaţie mărginită. Deci $\{g_i(x_i^n)\}$ este convergent către $l_i^- < \infty$.

Să arătăm acum că dacă $l_i^+ = \lim\limits_{x \to y_i} h_{i+1}(x)$ (h_{i+1} fiind definită pe $(y_i, x_{i+1}]$, deducem $x > y_i$), atunci $0 < l_i^+ < \infty$. Evident, $l_i^+ < \infty$ căci $l_i^+ \leqslant k_{i+1}^-$. Ne rămîne să arătăm că limita şirului $\{h_i(x_i^n)\}$ este strict pozitivă (am înlocuit $i+1$ prin i). Extragem în acelaşi mod subşirul$\{h_i(x_i^{n_m})\}$. Avem

$$h_i(x_i^{n_m}) = \frac{h_i(x_i^{n_{m-1}}) \cdot (f^{-1})^+(x_i^{p_m})}{(f^{-1})^+(x_i^{n_{m-1}} \pm 0)}$$

deci

$$h_i(x_i^{n_m}) = \frac{h_i(x_i^{n_1}) \cdot (f^{-1})^+(x_i^{p_2}) \cdot \ldots \cdot (f^{-1})^+(x_i^{p_m})}{(f^{-1})^+(x_i^{n_1} \pm 0) \cdot \ldots \cdot (f^{-1})^+(x_i^{n_{m-1}} \pm 0)}.$$

Se arată într-un mod analog că $\left\{\dfrac{1}{h_i(x_i^{n_m})}\right\}$ tinde către o limită finită, deci $\{h_i(x_i^{n_m})\}$ este convergent către $l_i^+ > 0$.

Se vede uşor că l_i^- (l_i^+) este proporţional cu k_i^+ (k_{i+1}^-) pentru că

$$g_i(x_i^{n_1}) = \begin{cases} k_i^+ \qquad \text{sau} \\ \dfrac{k_i^+ \cdot (f^{-1})^+(x_i^{n_1})}{(f^{-1})^+(x_i)} \end{cases}$$

(la fel pentru $h_i(x_i)$).

Alegem $k_0^+ = k_0^- = k$ arbitrar. După construcţia lui g_0 şi h_0 obţinem l_0^- şi l_{-1}^+ Dacă construcţia arătată deja pentru g_{-1} şi h_1 ne conduce, alegînd respectiv k'^+_{-1} şi k'^-_1, la l'^-_{-1} şi l'^+_0, înlocuim k'^+_{-1} prin

$$k_{-1}^+ = \frac{k'^+_{-1} \cdot l_{-1}^+}{l'^-_{-1}}$$

şi k'^-_1 prin

$$k_1^- = \frac{k'^-_1 \cdot l_0^-}{l'^+_0},$$

pentru care sîntem conduşi la $l_{-1}^- = l_{-1}^+$ şi $l_0^+ = l_0^-$. Putem prelungi astfel racordajul pe întreg intervalul (c, d). Se obţine funcţia $F_k : (c, d) \to R$, crescătoare pe (c, d) şi proporţională cu k. Evident, integrala Riemann $\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} F_k(t)\,dt$ $(x_0, x \in (c, d))$ există şi avem $\Phi' = F_k$ pe orice interval de continuitate al funcţiei F_k. Funcţia Φ este strict crescătoare şi continuă, deci inversabilă. Punem $\psi = \Phi^{-1}$. Dacă $a' = \lim\limits_{x \to c} \Phi(x)$ şi $b' = \lim\limits_{x \to d} \Phi(x)$ $(-\infty \leqslant a' < b' \leqslant \infty)$, atunci $\psi : (a', b') \to (c, d)$. Funcţia ψ este strict crescătoare şi concavă deoarece ψ este continuă şi

$$\psi'(x) = \frac{1}{\Phi'(\psi(x))} = \frac{1}{F_k(\psi(x))}$$

este definită şi descrescătoare pe reuniunea intervalelor de continuitate ale lui $F_k(\psi(x))$. Construim funcţia $\varphi(x) = \Phi(f(x))$. Această funcţie, $\varphi : (a, b) \to (a', b')$, este continuă (la fel ca f şi Φ) şi strict crescătoare; să demonstrăm că ea este convexă. Într-adevăr, construcţia lui F_k a fost astfel făcută încît funcţia $\frac{F_k}{(f^{-1})'}$ este crescătoare pe toată mulţimea de definiţie — reuniunea intervalelor de continuitate pentru $(f^{-1})^+$. Deci

$$\varphi'(x) = \Phi'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{F_k(f(x))}{(f^{-1})'(f(x))}$$

este crescătoare pe imaginea reuniunii de mai sus prin f^{-1}; rezultă convexitatea lui φ pe (a, b).

Am construit astfel funcţiile φ convexă şi strict crescătoare şi ψ concavă şi strict crescătoare astfel încît $\psi(\varphi(x)) = \Phi^{-1}(\Phi(f(x))) = f(x)$, deci f este de tip K.

Remarcînd că s-ar fi putut proceda într-un mod analog dacă s-ar fi utilizat f^- în locul lui f^+, demonstraţia teoremei este terminată.

4. EXEMPLU

Considerăm util a da un exemplu, poate cel mai simplu posibil, de funcţie care satisface condiţiile noastre, deci este de tip K, dar nu satisface condiţiile impuse de teoremele lui G. Szekeres şi S. Marcus.

O astfel de funcţie este $f : (a, b) \to R$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} m(x - \xi) & \text{dacă} \quad x \leqslant \xi, \\ m'(x - \xi) & \text{,,} \quad x > \xi, \end{cases}$$

unde $a < \xi < b$ şi $0 < m < m' < \infty$. Într-adevăr, se vede uşor că f răspunde cerinţelor teoremei 1, dar f' nu este definită în ξ, deci f'' nu este definită în acest punct din (a, b).

5. CLASELE FUNCŢIILOR φ ŞI ψ

După cum am amintit deja, vom preciza mulţimile funcţiilor φ şi ψ; nu există numai clasele restrînse de funcţii puse în evidenţă de către demonstraţia constructivă a teoremei 1.

Notaţii. În cele ce urmează semnificaţiile funcţiilor φ şi ψ vor fi cele conţinute în definiţia apartenenţei la tipul K. Considerăm funcţia F_k despre care se vorbeşte în demonstraţia teoremei 1 şi funcţia crescătoare şi strict pozitivă $h : (c, d) \to R$, altfel arbitrară. Notăm $\Psi(x) = \int_{x_0}^{x} F_k(t) \cdot h(t)\,dt + C$, unde x_0, $x \in (c, d)$ şi C este o constantă oarecare. Integrala Riemann utilizată există datorită monotoniei lui $F_k \cdot h$.

TEOREMA 2. *Dacă condițiile teoremei 1 sînt îndeplinite pentru funcția* $f: (a, b) \rightarrow (c, d)$, *deci ea este de tip* K, *atunci*

$$\psi(x) = \Psi(f(x)) \text{ şi } \psi(x) = \Psi^{-1}(x).$$

Observație. Trebuie remarcat înainte de a da demonstrația, că teorema are sens, rezultatul ei nedepinzînd de alegerea lui k întrucît clasa funcțiilor $F_k \cdot h$ coincide cu clasa funcţiilor $F_{k'} \cdot h$ căci $F_{k'} \cdot h = F_{k'} \cdot \frac{k}{k'} h$.

Demonstrație. Să arătăm mai întîi că cele două funcţii, φ şi ψ, construite în enunț sînt într-adevăr una convexă şi cealaltă concavă. Repetînd raționamentul făcut cu ocazia demonstrației teoremei 1, vom observa că avem

$$\varphi'(x) = \Psi'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{F_k(f(x)) \cdot h(f(x))}{(f^{-1})'(f(x))}$$

pe intervalul (a, b) exceptînd mulţimea numărabilă de puncte ale căror imagini prin f sînt discontinuităţile lui $f^{-1})^+$ sau h, deci φ' este crescătoare pe această mulţime şi φ este convexă. Pe de altă parte avem

$$\psi'(x) = \frac{1}{\Psi'(\psi(x))} = \frac{1}{F_k(\psi(x)) \cdot h(\psi(x))}$$

pe reuniunea intervalelor de continuitate ale funcţiei $F_k(\psi(x))$ exceptînd discontinuităţile lui $h(\psi(x))$, deci ψ' este descrescătoare pe aceeaşi mulţime iar ψ este concavă peste tot pe (c, d). Faptul că φ şi ψ sînt strict crescătoare iar $f = \psi(\varphi(x))$, este evident.

Să arătăm acum că cele două forme, despre care este vorba epuizează toate funcțiile φ și ψ posibile. Să presupunem că $\varphi(x) \neq \Psi(f(x))$. Putem atunci scrie $\varphi(x) = \overline{\Psi}(f(x))$. Urmează imediat că $\overline{\Psi}$ este continuă și convexă pe (c, d). Deci $\overline{\Psi}$ este aproape peste tot derivabilă și $\overline{\Psi}^+$ există peste tot. Putem scrie că $\overline{\Psi}(x) = \int_{x_0}^{x} \overline{\Psi}^+(t)\, dt + C'$ $(c < x_0, x < d)$ pentru o constantă C' convenabilă, deoarece pe mulțimea $(c, d) - E$ (unde E este o mulțime numărabilă) a punctelor de continuitate ale lui $\overline{\Psi}^+$ avem $\left(\int_{x_0}^{x_0} \overline{\Psi}^+(t) dt\right)' = \overline{\Psi}^+(x) = \overline{\Psi}'(x)$, deci integrala și $\overline{\Psi}(x)$ diferă printr-o constantă pe (c, d).

Din ceea ce am presupus rezultă că $\overline{\Psi}^+(x) \neq F_k(x) \cdot h(x)$. Dar putem găsi funcţia $\bar{h}$ astfel încît $\overline{\Psi}^+(x) = F_k(x) \cdot \bar{h}(x)$, pentru că $F_k > 0$. Există două puncte $x', x'' \in (c, d)$, $x' < x''$, astfel ca $\bar{h}(x') > h(x'')$. Cum $\overline{\Psi}^+$ nu are puncte de descreştere, funcţia $\bar{h}$ este susceptibilă de a avea astfel de puncte doar în punctele $\overset{n}{x}{}_i^{m}$ de discontinuitate ale lui $(f^{-1})^+$; dacă aceasta ar fi adevărat, atunci am avea

$$\frac{F_k(\overset{n}{x}{}_i^{m} - 0) \cdot h(\overset{n}{x}{}_i^{m} - 0)}{(f^{-1})^+(\overset{n}{x}{}_i^{m} - 0)} > \frac{F_k(\overset{n}{x}{}_i^{m}) \cdot h(\overset{n}{x}{}_i^{m} + 0)}{(f^{-1})^+(\overset{n}{x}{}_i^{m})}$$

deci $\overline{\Psi}^{+}(x_i^{n_m}-0)\cdot f^{+}(f^{-1}(x_i^{n_m}-0))>\overline{\Psi}^{+}(x_i^{n_m}+0)\cdot f^{+}(f^{-1}(x_i^{n_m},))$ de unde $\varphi^{+}(f^{-1}(x))$ ar poseda punctul de descreștere $x_i^{n_m}$ și φ nu ar fi convexă pe (a, b). Conchidem că $\bar{h}$ nu are puncte de descreștere (ca și $\overline{\Psi}^{+}$), deci există un interval $(x_i^{n_m}, x_i^{p_m})$ sau $(x_i^{p_m}, x_i^{n_{m+1}})$ (am utilizat notațiile introduse în cursul demonstrației teoremei 1) care conține punctele y' și y'', $y'<y''$, astfel încît $\bar{\mathrm{h}}(y')>\bar{h}(y'')$. Dacă $y', y''\in(x_i^{n_m}, x_i^{p_m})$, obținem $\overline{\Psi}^{+}(y')>\overline{\Psi}^{+}(y'')$ ceea ce este absurd. Dacă $y', y''\in(x_i^{p_m}, x_i^{n_{m+1}})$, atunci

$$\frac{F_k(y')\cdot\bar{h}(y')}{(f^{-1})^{+}(y')}>\frac{F_k(y'')\cdot\bar{h}(y'')}{(f^{-1})^{+}(y'')}$$

sau $\overline{\Psi}^{+}(y')\cdot f^{+}(f^{-1}(y'))>\overline{\Psi}^{+}(y'')\cdot f^{+}(f^{-1}(y''))$, deci $\varphi^{+}(f^{-1}(y'))>$ $>\varphi^{+}(f^{-1}(y''))$, unde $f^{-1}(y')<f^{-1}(y'')$, ceea ce este de asemenea absurd.

Rezultă că $\varphi(x)=\Psi(f(x))$. Într-un mod asemănător probăm că $\psi(x)=\Psi^{-1}(x)$; teorema este demonstrată.

6. O PROPRIETATE A FUNCȚIEI ψ

Notații. Notăm cu $\bar{\varphi}$ și $\bar{\psi}$ funcțiile folosite la definirea tipului K și făcînd parte din clasa restrînsă, după cum am calificat-o mai sus, construită în demonstrația teoremei 1. Fie $E=\{\nu\in(c, d);$ există $x\in(a'_{\psi}, b'_{\psi})$, $y\in(a'_{\bar\psi}, b'_{\bar\psi})$ astfel încît $\psi(x)=\bar{\psi}(y)=\nu$ și $\psi^{+}(x)=\bar{\psi}^{+}(y)\}$, unde $(a'_{\psi}, b'_{\psi})=\psi^{-1}((c, d))$ și $(a'_{\bar\psi}, b'_{\bar\psi})=\bar{\psi}^{-1}((c, d))$.

TEOREMA 3. *Mulțimea E este vidă sau formată dintr-un interval închis la stînga, redus eventual la un punct.*

Observație. S-ar putea da o teoremă asemănătoare schimbînd E printr-o mulțime analoagă definită cu ajutorul funcțiilor ψ^{-} și $\bar{\psi}^{-}$, și cuvîntul „stînga” prin „dreapta”.

Demonstrație. Funcția $h^{*}=\dfrac{(\psi^{-1})^{+}}{(\bar{\psi}^{-1})^{+}}$ este crescătoare pe (c, d) deoarece funcția h despre care se vorbește înaintea teoremei 2 și h^{*} coincid pe (c, d) minus mulțimea punctelor δ de discontinuitate, în care $h^{*}(\delta)=$ $=\lim\limits_{\substack{x\to\delta\\ x>\delta}} h^{*}(x)$. Atunci $h\neq 1$ (aceasta este posibil chiar în cazul cînd există $\lambda, \mu\in(c, d)$ unde $h^{*}(\lambda)<1<h^{*}(\mu)$, deoarece h^{*} nu are proprietatea lui Darboux) sau $h^{*}=1$ într-un punct sau pe un (singur) interval (ξ, η). Dar $h^{*}(\xi)=\lim\limits_{\substack{x\to\xi\\ x>\xi}} h^{*}(x)=1$, deci $h^{*}=1$ pe $[\xi, \eta)$. Dacă h^{*} este continuă (discontinuă) în η, atunci mulțimea E^{*}, unde $h^{*}=1$, este $[\xi, \eta]$ (respectiv $[\xi, \eta)$). Aceasta este mulțimea E deoarece există, pentru orice $\nu\in E^{*}$, punctele $x = \psi^{-1}(\nu)$ şi $y = \bar{\psi}^{-1}(\nu)$ astfel ca $\psi(x) = \bar{\psi}(y)$ şi $\dfrac{\psi^{+}(x)}{\bar{\psi}^{+}(y)} = \dfrac{(\bar{\psi}^{-1})^{+}(\nu)}{(\psi^{-1})^{+}(\nu)} = 1$; reciproc, se vede că $\psi^{+}(\psi^{-1}(\nu)) \neq \bar{\psi}^{+}(\bar{\psi}^{-1}(\nu))$ oricare ar fi $\nu \notin E^{\star}$.

Lăsăm în seama cititorului stabilirea unei teoreme analoage teoremei 3, referitoare la funcţiile φ şi $\bar{\varphi}$ în locul funcţiilor ψ şi $\bar{\psi}$.

7. O NOUĂ PRECIZARE A FUNCȚIILOR φ ȘI ψ

Fiind dată o funcție ψ, observăm că există întotdeauna o funcție $\bar{\varphi}_{\tau}$ astfel încît $(\psi^{-1})^{+} = (\bar{\psi}_{\tau}^{-1})^{+}$ într-un punct $\tau \in (c, d)$ arbitrar ales, deoarece $(\bar{\psi}^{-1})^{+} = F_k$ şi eventual putem schimba indicele k.

TEOREMA 4. *În condițiile teoremei 1, funcțiile ψ coincid cu funcțiile $\psi^{\times}$ avînd proprietatea că $(\psi^{\star -1})^{+}$ există și, pentru fiecare $\tau \in (c, d)$, dacă $(\psi^{\star -1})^{+}(\tau) = (\bar{\psi}_{\tau}^{-1})^{+}(\tau)$, atunci $(\psi^{\star -1})^{+}(\nu) \leqslant (\psi_{\tau}^{-1})^{+}(\nu)$ pentru $\nu < \tau$ (și $(\psi^{\star -1}_{-})^{+}(\nu) \geqslant (\bar{\psi}_{\tau}^{-1})^{+}(\nu)$ pentru $\nu > \tau$).*

Observație. Din această teoremă se deduce imediat că funcţia sign $[(\psi^{\star -1})^{+}(x) - (\bar{\psi}_{\tau}^{-1})^{+}(x)]$ este crescătoare pe (c, d). Această condiţie este și ea necesară și suficientă pentru echivalenţa claselor de funcţii ψ şi $\psi^{\star}$.

Demonstrație. Fie o funcție ψ. Amintim că $h^{\star} = \dfrac{(\psi^{-1})^{+}}{(\bar{\psi}^{-1})^{+}}$ este crescătoare; atunci $h_{\tau}^{\star} = \dfrac{(\psi^{-1})^{+}}{(\bar{\psi}^{-1})^{+}}$ este de asemenea crescătoare şi $h_{\tau}^{\star}(\tau) = 1$. Se deduc de aici relaţiile din enunţ şi că sign $[(\psi^{-1})^{+}(x) - (\bar{\psi}_{\tau}^{-1})^{+}(x)]$ este crescătoare pe (c, d).

Reciproc, considerăm o funcție $\psi^{\star}$ care se bucură de proprietăţile din enunţ. Să demonstrăm că ea este o funcție ψ. Să presupunem că $\bar{h}^{\star} = \dfrac{(\psi^{\star -1})^{+}}{(\bar{\psi}^{-1})^{+}}$ nu este crescătoare. Atunci există ξ, $\zeta \in (c, d)$ astfel încît $\xi < \zeta$ şi $\bar{h}^{\star}(\zeta) < \bar{h}^{\star}(\xi)$. Conform observaţiei care precede teoremei 3, putem decide că există $\bar{\psi}_{\zeta}$ astfel ca $(\bar{\psi}_{\zeta}^{-1})^{+}(\zeta) = (\psi^{\star -1})^{+}(\zeta)$; urmează că pentru funcția $\bar{h}_{\zeta}^{\star} = \dfrac{(\psi^{\star -1})^{+}}{(\bar{\psi}_{\zeta}^{-1})^{+}}$ avem $\bar{h}_{\zeta}^{\star}(\xi) > \bar{h}_{\zeta}^{\star}(\zeta) = 1$, deci $(\psi^{\star -1})^{+}(\xi) > (\bar{\psi}_{\zeta}^{-1})(\xi)$, ceea ce contrazice ipoteza.

Se poate demonstra într-un mod asemănător teorema următoare privind funcţia φ:

TEOREMA 4′. *Presupunem că condițiile teoremei 1 sînt îndeplinite. Funcțiile φ coincid cu funcțiile derivabile la dreapta $\varphi^{\star} : (a, b) \to R$, cu proprietatea că pentru fiecare $\rho \in (a, b)$, dacă $\varphi^{\star +}(\rho) = \bar{\varphi}^{+}(\rho)$, atunci $\varphi^{\star +}(\iota) \leqslant \bar{\varphi}^{\star}(\iota)$ pentru $\iota < \rho$ (și $\varphi^{\star +}(\iota) \geqslant \bar{\varphi}^{+}(\iota)$ pentru $\iota > \rho$).*

Lăsăm însă tot în sarcina cititorului demonstrația detaliată.

Încheiem remarcînd că subiectul acesta este departe de a fi epuizat și că stabilirea unei teoreme de necesitate și suficiență pentru apartenența la tipul K ar constitui, de exemplu, un nou și real progres.

Primită la redacție la 25 aprilie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Szekeres, *On a property of monotone and convex functions*. Proc. Amer. Math. Soc., **7**, 351–353 (1956).
2. S. Marcus, *Sur un théoreme de G. Szekeres, concernant les fonctions monotones et convexes*. Canadian Journal of Mathematics, **11**, 521–526 (1959).

MONOGENEITATEA FEDOROV ÎN PLAN

DE

DAN PASCALI

Acad. Gr. C. Moisil a arătat în [5] fecunditatea ideii de monogeneitate a lui V. S. Fedorov [3], în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale. În prezentul articol vom pune în evidenţă unele rezultate referitoare la această monogeneitate în cazul funcţiilor de o variabilă complexă, legate de generalizarea noţiunii de derivată areolară.

1. Fie funcţiile $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ şi $g(z) = r(x, y) + is(x, y)$ de clasă C^1 într-un domeniu D al planului complex, în care funcţia $g(z)$ este univalentă şi

$$J = \frac{\partial(r, s)}{\partial(x, y)} \geqslant k > 0. \tag{1}$$

DEFINIŢIA 1. Funcţia $f(z)$ este *monogenă în sens Fedorov în raport cu funcţia* $g(z)$ sau F_g*-monogenă* în punctul $z \in D$, dacă există

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{g(z + \Delta z) - g(z)}.$$

Existenţa acestei limite este echivalentă unei funcţii complexe $f_g^{(1)}(z)$, astfel ca

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_g^{(1)} \frac{\partial g}{\partial x} \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial y} = f_g^{(1)} \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Cînd $g(z) = z$, obţinem monogeneitatea obişnuită.

Acest caz particular de monogeneitate Fedorov îl întîlnim şi în teza acad. M. Nicolescu [6], în care se stabileşte:

Condiţia necesară şi suficientă ca funcţia $f(z)$ *să fie* F_g*-monogenă în punctul* $z = x + iy \in D$, *este ca*

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \left[\frac{\partial(u, r)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(v, s)}{\partial(x, y)}\right] + i\left[\frac{\partial(u, s)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, r)}{\partial(x, y)}\right] = 0. \tag{2}$$

În lucrarea [5], acad. Gr. C. Moisil arată printre altele, că dacă $f(z)$ şi $g(z)$ aparţin lui $C^2(D)$ şi $f(z)$ este F_g-monogenă în punctul z, funcţia $f_g^{1)}(z)$ este de asemenea F_g-monogenă în punctul z.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 10, P. 1231 – 1241, BUCUREŞTI, 1964

2. Se numeşte sistem *Beltrami* un sistem eliptic de ordinul întîi de forma

$$\begin{cases} \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \beta \dfrac{\partial u}{\partial x} + \gamma \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

unde α, β, γ sînt funcţii de (x, y), îndeplinind condiţia $\alpha\gamma - \beta^2 = 1$, $\alpha > 0$. Acest sistem se scrie şi sub forma

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad q = \frac{\gamma - i\beta + 1}{\gamma + i\beta - 1} \cdot f = u + iv \cdot \tag{3}$$

În teoria sistemelor Beltrami un rol esenţial îl are determinarea unei soluţii univalente a ecuaţiei (3). I. N. Vekua în [12] caută o asemenea soluţie sub forma

$$W(z) = z - \frac{1}{\pi} \iint_E \frac{\chi(t)}{t - z} \, d\,\omega_t, \tag{4}$$

unde $\chi(z) \in L^p(E)$, $p > 1$, E fiind întreg planul complex. Presupunînd că $q(z) \in L^{p'}(E)$, $p' < 2$ şi că

$$|q(z)| \leqslant q_0 < 1,$$

soluţia $W(z)$ există în tot planul, îndeplineşte condiţiile

$$W(\infty) = \infty, \quad z^{-1} W(z) \to 1 \quad \text{pentru } z \to \infty$$

şi se numeşte *omeomorfism principal* al ecuaţiei Beltrami (3).

În ipoteza suplimentară $q(z) \in C_\alpha(D)$ se demonstrează că $W(z) \in C_\alpha^1(D)$.

3. În § 1 se introduce o derivată F_g-areolară şi o derivată F_g-medie, în sens restrîns, se dă o reprezentare integrală locală, legată de aceşti operatori şi se introduce noţiunea de polinom F_g-areolar de ordinul n. În § 2 se generalizează derivata F_g-areolară, în sens Sobolev, pentru funcţii din $L^2(D)$, iar în § 3 se stabileşte legătura între monogeneitatea Fedorov şi ecuaţia lui Beltrami. Unele rezultate au fost publicate în comunicările [7] şi [8].

Ulterior M. Roşculeţ regăseşte în [9] o parte din rezultate, ocupîndu-se de funcţii monogene pe o suprafaţă bidimensională, cu ajutorul formelor exterioare. Cercetările autorului au fost continuate de V. A. Gusev, care introduce în lucrarea [4] derivate F_g-areolare parţiale.

§ 1. DERIVATA F_g-AREOLARĂ ŞI F_g-MEDIE ÎN SENS RESTRÎNS

În acest paragraf vom presupune că $f(z) \in C^1(D)$ şi $g(z) \in C^2(D)$.

1. Din condiţia (2) de F_g-monogeneitate a acad. M. Nicolescu şi din

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(g,f)}{\partial(x,y)}$$

rezultă că dacă $f(z)$ este F_g-monogenă în punctul $z \in D$, $g(z)$ este F_f-monogenă în acelaşi punct.

Pe baza formulei lui Green, enunţăm următorul criteriu:

TEOREMA 1. *Condiţia necesară şi suficientă ca funcţia $f(z)$ să fie F_g-monogenă în domeniul D este ca*

$$\int_{C'} f(z)\, \mathrm{d}g(z) = 0$$

pentru orice contur simplu, rectificabil şi închis C', trasat în D.

Într-adevăr, dacă D' este subdomeniul lui D, mărginit de C'

$$\int_{C'} f(z)\, \mathrm{d}g(z) = \iint_{D'} \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \mathrm{d}\omega_z = 0.$$

Dacă $g(z)$ este monogenă în D, F_g-monogeneitatea coincide cu monogeneitatea obişnuită.

2. Pornind de la noţiunea de F_g-monogeneitate, introducem pentru funcţia $f(z)$ o derivată F_g-areolară¹)

$$D_g f = \frac{1}{\overline{g}_x g_y - g_x \overline{g}_y} \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\overline{g}_x g_y - g_x \overline{g}_y}\left(g_y \frac{\partial}{\partial x} - g_x \frac{\partial}{\partial y}\right) f$$

şi o derivată F_g-medie

$$\overline{D}_g f = \frac{1}{2 g_x g_y}\left(g_y \frac{\partial}{\partial x} + g_x \frac{\partial}{\partial y}\right) f.$$

Cum

$$D_g \overline{g} = 1 \text{ şi } \overline{D}_g g = 1,$$

derivata F_g-areolară şi derivata F_g-medie pot fi considerate ca derivate în direcţiile $\overline{g}(z)$ şi $g(z)$

Pentru $g(z) = z$ obţinem

$$D_z = \frac{1}{2i}\left(i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \text{ şi } \overline{D}_z = \frac{1}{2i}\left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}.$$

---

¹) Pentru simplificare, vom nota

$$\frac{\partial g}{\partial x} = g_x, \ \frac{\partial g}{\partial y} = g_y, \ \frac{\partial g}{\partial z} = g_z \text{ şi } \frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = g_{\overline{z}}$$

Notînd

$$\operatorname{Arc\,tg}\left(-i\,\frac{g_y}{g_x}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\varphi(z)$$

avem

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}=D_g f+K_g\, e^{-2i\varphi}\, D_g f,$$

unde

$$K_g=\frac{\overline{g}_x g_y-g_x\overline{g}_y}{2g_x g_y}.$$

Pentru $g(z)=z$, $K_z=1$ obținem

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=\frac{\partial f}{\partial z}+\mathrm{e}^{-2i\varphi}\,\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$$

stabilită de prof. G. Călugăreanu în [2].

În consecință, pentru funcția F_g-monogenă $f(z)$

$$D_g f=0 \text{ și } \overline{D}_g f=\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}=f_g^{(1)}.$$

Derivata F_g-medie a unei funcții F_g-monogene de clasă $C^2(D)$ pe baza rezultatului acad. Gr. C. Moisil, menționat la începutul articolului, este de asemenea o funcție F_g-monogenă.

Funcția

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}g(z)=\int_{x_0}^{x} f g_x\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} f g_y\,\mathrm{d}y$$

o vom numi *g-integrala* funcției continue $f(z)$. Funcția $F(z)$ este F_g-monogenă. În adevăr

$$\frac{\partial F}{\partial x}=f g_x \text{ și } \frac{\partial F}{\partial y}=f g_y$$

de unde

$$D_g F=\frac{f}{\overline{g}_x g_y-g_x\overline{g}_y}(g_x g_y-g_x g_y)=0$$

iar

$$\overline{D}_g F(z)=f(z).$$

Din cele de mai sus rezultă imediat:

TEOREMA 2. *Seria*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (g(z))^n$$

în domeniul de convergență uniformă al ei cît și al derivatelor sale parțiale reprezintă o funcție F_g*-monogenă.*

3. Să considerăm acum soluția în fiecare variabilă

$$V(z,t)=\frac{1}{g(t)-g(z)}\qquad (t=\xi+i\eta)$$

a ecuației (2) pentru $z\neq t$ și fie subdomeniul simplu conex D' al domeniului D, care conține punctul z și în care $g(t)\neq g(z)$ pentru $z\neq t$, iar C' frontiera lui. Să aplicăm formula lui Green produsului $f(t)V(z,t)$:

$$\int_{C'} f(t)\,V(z,t)\,\mathrm{d}g(t)=\iint_{D'}\left[f\frac{\partial(V,g)}{\partial(\xi,\eta)}+\frac{\partial(f,g)}{\partial(\xi,\eta)}V\right]\mathrm{d}\,\omega_t=$$

$$=\iint_{D'}\frac{\partial(f,g)}{\partial(\xi,\eta)}V\,\mathrm{d}\,\omega_t.$$

Fie γ o curbă simplă, rectificabilă și închisă în D', care înconjoară punctul z, astfel încît pentru $t\in\gamma$, $|f(t)-f(z)|<\varepsilon$. Avem atunci

$$\int_{C'} f(t)\,V(z,t)\,\mathrm{d}g(t)-\int_{\gamma}\Big[f(t)-f(z)\Big]V(z,t)\,\mathrm{d}g(t)-$$

$$-f(z)\int_{\gamma}V(z,t)\,\mathrm{d}g(t)=\iint_{D'_\varepsilon}\frac{\partial(f,g)}{\partial(\xi,\eta)}V(z,t)\,\mathrm{d}\,\omega_t,$$

unde D'_ε este porțiunea subdomeniului D' cuprinsă între curbele C' și γ.
Dacă notăm $|g(t)-g(z)|=\rho$ și $\arg(g(t)-g(z))=\theta$, obținem

$$\int_{\gamma}V(z,t)\,\mathrm{d}g(t)=\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}g(t)}{g(t)-g(z)}=\int_{\gamma}\mathrm{d}\ln(g(t)-g(z))=$$

$$=\int_{\gamma}\Big[\mathrm{d}\ln\rho+i\,\mathrm{d}\,\theta\Big]=i\lambda(z),$$

unde $\lambda(z)$ este variația argumentului lui $\ln(g(t)-g(z))$ cînd t parcurge conturul γ. Numărul $\lambda(z)$ este același pentru orice curbă din D', care înconjoară punctul z, este același pentru orice punct al subdomeniului D' și se poate schimba după punctul z în D. Dacă $\lambda(z)\neq 0$, iar curba γ se reduce la punctul z prin deformări continue, obținem

$$f(z)=\frac{1}{i\,\lambda(z)}\int_{C'}\frac{f(t)\,\mathrm{d}g(t)}{g(t)-g(z)}-\frac{1}{i\,\lambda(z)}\iint_{D'}\frac{\partial(f,g)}{\partial(\xi,\eta)}\,\frac{\mathrm{d}\,\omega_t}{g(t)-g(z)}.\tag{5}$$

Această reprezentare generalizează formula lui Pompeiu-Teodorescu, în cazul funcțiilor nemonogene de clasă $C^1(D)$. Această formulă, în cazul funcțiilor F_0-monogene, cu alte notații, a fost dată de M. Roșculeț în [9]. În cazul $g(z)=W(z)$ dat de formula (4), reprezentarea de mai sus este dată de B. V. Boiarski în [1]. În acest caz $\lambda(z)=2\pi$.

Dacă $f(z)$ este o funcţie continuă pe conturul simplu, rectificabil şi închis C', deoarece funcţia $V(z, t)$ este F_g-monogenă în z pentru $z \neq t$, atunci funcţia

$$F(z) = \frac{1}{i\,\lambda(z)} \int_{C'} \frac{f(t)\,\mathrm{d}g(t)}{g(t) - g(z)}$$

este F_g-monogenă în tot planul complex pentru z neaparţinînd curbei C'.

Notînd atunci

$$T_g(fz) = -\frac{1}{i\,\lambda(z)} \iint_{D'} \frac{f(t)\,\mathrm{d}\,\omega_t}{g(t) - g(z)},$$

unde $f(z)$ este o funcţie continuă în D, rezultă imediat

$$\frac{\partial(T_g f, g)}{\partial(x, y)} = f(z).$$

Operatorul T_g reprezintă o generalizare a operatorului integral al lui Pompeiu. Dacă funcţia $V(z, t)$ nu posedă poli de ordin mai mare ca unu, în D funcţia $T_g f(z)$ este continuă în D.

4. Soluţia regulată în domeniul D a ecuaţiei iterate

$$D_g^{n+1} f(z) = 0$$

se numeşte funcţie *F_g-monogenă de ordinul n* sau *polinom F_g-areolar de ordinul n*. Soluţia acestei ecuaţii este de forma

$$f(z) = \varphi_0(z) + \overline{g}(z)\,\varphi_1(z) + \dots + (\overline{g}(z))^n\,\varphi_n(z),$$

unde $\varphi_j(z)$ $(j = 0, 1, 2, \dots, n)$ sînt funcţii F_g-monogene în D, pe care le numim componentele F_g-monogene ale polinomului F_g-areolar $f(z)$. La fel ca în lucrarea acad. N. Teodorescu [11], se arată că aceste componente determină în mod unic polinomul areolar $f(z)$ şi invers, ele sînt unic determinate de polinomul $f(z)$ şi de derivatele sale F_g-areolare pînă la ordinul n.

De asemenea, se demonstrează, ca în [11], următoarea generalizare a teoremei lui Morera:

TEOREMA 3. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca $(n+1)$ funcţii $f_j(z)$ $(j = 0, 1, 2, \dots, n)$ de clasă C^{n+1-j} să reprezinte un polinom F_g-areolar de ordinul n, $f(z) = f_0(z)$ şi derivatele sale F_g-areolare succesive $D_g^k f(z) = f_k(z)$ în domeniul D este ca pentru orice contur simplu, rectificabil şi închis C', trasat în D*

$$\int_{C'} \varphi_j[f]\,\mathrm{d}g(z) = 0 \qquad (j = 0,1,2,\dots,n),$$

unde

$$\varphi_j[f] = f_j(z) - \overline{g}(z) f_{j+1}(z) + \dots + \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!}\,\overline{g}^{n-j}(z) f_n(z) \cdot$$

5. Ecuaţia (2) este echivalentă cu sistemul eliptic de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi:

$$\left.\begin{aligned} a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\\ b\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{\partial v}{\partial x}\cdot \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

unde

$$a=\frac{1}{J}(r_y^2+s_y^2),\quad b=-\frac{1}{J}(r_x r_y+s_x s_y),\quad c=\frac{1}{J}(r_x^2+r_x^2)$$

şi pentru care

$$ac-b^2=1 \text{ (condiţia de elipticitate).}$$

Acest sistem determină o reprezentare cvasiconformă cu o singură pereche de caracteristici [13].

Sistemul (6) se mai poate scrie şi sub forma

$$\left.\begin{aligned} a\frac{\partial v}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial y}&=-\frac{\partial u}{\partial y},\\ b\frac{\partial v}{\partial x}+c\frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

Deoarece $g(z)\in C^2(D)$, rezultă imediat prin derivări din sistemele (6) şi (6′) că $u=u(x,y)$ şi $v=v(x,y)$ sînt soluţii ale următoarei ecuaţii liniare de ordinul al doilea:

$$a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\left(\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Sistemul (6) ne permite ca din cunoaşterea lui $u(x, y)$ în domeniul D, să determinăm funcţia $v(x,y)$, abstracţie făcînd de o constantă, astfel ca funcţia $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ să fie F_g-monogenă în D şi anume

$$v(x,y)=-\int_{x_0}^{x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}\left(b\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}y.$$

Analog, sistemul (6′) ne permite ca din cunoaşterea lui $v(x,y)$ să determinăm funcţia $u(x,y)$ în domeniul D.

§ 2. DERIVATA F_g-AREOLARĂ GENERALIZATĂ

1. În acest paragraf vom da o generalizare a determinantului funcţional

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$$

în sensul derivatelor generalizate ale lui S. L. Sobolev [10].

Fie D un domeniu bidimensional mărginit, iar $C_0^1(D)$ mulțimea funcțiilor de o variabilă complexă de clasă C^1 cu suport compact, conținut în D. Definiția se bazează pe egalitatea

$$\iint_D \left[\frac{\partial(fg_y)}{\partial x} - \frac{\partial(fg_x)}{\partial y}\right] \mathrm{d}\,\omega_z = \iint_D \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\,\mathrm{d}\,\omega_z$$

valabilă, de exemplu, în cazul $f(z) \in C^1(D)$ și $g(z) \in C^2(D)$. În acest caz avem pentru orice funcție $h(z) \in C_0^1(D)$.

$$\begin{aligned} &\iint_D \left[h\,\frac{\partial(fg_y)}{\partial x} + f\,\frac{\partial h}{\partial x}\,\frac{\partial g}{\partial y}\right]\mathrm{d}\omega_z = 0 \\ &\iint_D \left[h\,\frac{\partial(fg_x)}{\partial y} + f\,\frac{\partial h}{\partial y}\,\frac{\partial g}{\partial x}\right]\mathrm{d}\omega_z = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

unde integrarea se face numai pe suportul funcției $h(z)$. Prin scăderea relațiilor (7) obținem :

$$\iint_D \left[h\,\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} + f\,\frac{\partial(h,g)}{\partial(x,y)}\right]\mathrm{d}\,\omega_z = 0.$$

Mai departe vom presupune că $g(z)$ este o funcție continuă în D cu derivate parțiale g_x și g_y generalizate (în sens Sobolev) aparținînd lui $L^2(D)$.

DEFINIȚIA 2. Dacă $f(z) \in L^2(D)$ și $F(z) \in L^1(D)$ și dacă egalitatea

$$\iint_D \left[hF + f\,\frac{\partial(h,g)}{\partial(x,y)}\right]\mathrm{d}\,\omega_z = 0$$

are loc pentru orice $h(z) \in C_0^1(D)$, funcția $F(z)$ se numește *determinantul funcțional generalizat în raport cu funcția $g(z)$ a funcției $f(z)$*.

În general, funcția $-F(z)$ nu este determinantul funcțional generalizat în raport cu funcția $f(z)$ a funcției $g(z)$.

Atunci

$$D_g f(z) = \frac{1}{\overline{g}_x g_y - \overline{g}_y g_x}\,F(z)$$

se numește *derivată F_g-areolară generalizată* a funcției $f(z) \in L^2(D)$.

DEFINIȚIA 3. O funcție $f(z) \in L^2(D)$ se numește *F_g-monogenă generalizată* în domeniul D dacă

$$\iint_D f\,\frac{\partial(h,g)}{\partial(x,y)}\,\mathrm{d}\omega_z = 0$$

pentru orice funcție $h(z) \in C_0^1(D)$.

2. Să considerăm, ca la punctul 3 din § 1, vecinătatea simplu conexă D' a punctului z și să demonstrăm

TEOREMA 4. *Dacă $f(z) \in L^1(D')$, atunci determinantul funcțional generalizat în raport cu funcția $g(z)$ a funcției $T_g f(z)$ este funcția $f(z)$.*

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $h(z) \in C_0^1(D')$, conform formulei de reprezentare (5),

$$h(t) = -\frac{1}{i\,\lambda(z)} \iint_{D'} \frac{\partial(h,g)}{\partial(x,y)} \frac{\mathrm{d}\,\omega_z}{g(z)-g(t)} = T_g \frac{\partial(h,g)}{\partial(\xi,\eta)}.$$

Atunci

$$\iint_{D'} T_g f(z) \frac{\partial(h,g)}{\partial(x,y)} \mathrm{d}\,\omega_z = -\iint_{D'} f(t)\,\mathrm{d}\,\omega_t \left(\frac{1}{i\,\lambda(z)} \iint_{D'} \frac{\partial(h,g)}{\partial(x,y)} \frac{\mathrm{d}\omega_z}{g(t)-g(z)} \right).$$

Din $z, t \in D'$ rezultă $\lambda(z) = \lambda(t)$ și

$$\iint_{D'} T_g f(z) \frac{\partial(h,g)}{\partial(x,y)} \mathrm{d}\,\omega_z = \iint_{D'} f(t)\,\mathrm{d}\,\omega_t \left(\frac{1}{i\,\lambda(t)} \iint_{D'} \frac{\partial(h,g)}{\partial(x,y)} \frac{\mathrm{d}\,\omega_z}{g(z)-g(t)} \right) =$$

$$= -\iint_{D'} f(z)\,h(z)\,\mathrm{d}\,\omega_z$$

ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA 5. *Dacă $f(z) \in L^1(D')$ este determinantul funcțional generalizat în raport cu $g(z)$ a funcției $f(z) \in L^2(D')$, atunci*

$$f(z) = \varphi(z) + T_g F(z),$$

unde $\varphi(z)$ este o funcție F_g-monogenă generalizată în vecinătatea D'.

Demonstrație. Conform teoremei 4, determinantul funcțional generalizat în raport cu funcția $g(z)$ a diferenței $f(z) - T_g F(z)$ este nul în D'.

§ 3. MONOGENEITATEA FEDOROV ȘI ECUAȚIA LUI BELTRAMI

1. Ecuația (2) sau sistemul (6) pot fi scrise sub forma

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - A(z) \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

în care am notat

$$A(z) = \frac{c-ib-1}{c+ib+1} = \frac{(c-ib-1)(c-ib+1)}{(c+ib+1)(c-ib+1)} = \frac{c-a+2ib}{c+a+2} =$$

$$= \frac{[(r_x-s_y)+i(s_x+r_y)]\,[(r_x+s_y)(-i(s_x-r_y)]}{[(r_x+s_y)+i(s_x-r_y)]\,[(r_x+s_y)-i(s_x-r_y)]} = \frac{g_{\bar{z}}}{g_z}.$$

În virtutea relației (1), se arată ușor că

$$|A(z)| \leqslant A_0 < 1. \tag{9}$$

Prin urmare, *orice funcție* $f(z) \in C^1(D)$ *monogenă Fedorov în raport cu funcția* $g(z) \in C^1(D)$ *este soluție a ecuației lui Beltrami* (*8*) *cu* (*9*).

Ținînd seama de soluția $W(z)$, construită de I. N. Vekua pentru ecuația lui Beltrami (3), de care am vorbit în introducere, vom demonstra:

TEOREMA 4. *Orice soluție* $f(z) \in C^1(D)$ *a ecuației lui Beltrami* (*3*) *cu* $q(z) \in C_\alpha(D)$ *este o funcție monogenă Fedorov în raport cu* $W(z)$, *adică*

$$\frac{\partial(f, W)}{\partial(x, y)} = 0. \tag{10}$$

Demonstrație. Funcția $W(z)$ fiind o soluție a ecuației (3)

$$q(z) = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial \bar z}}{\dfrac{\partial W}{\partial z}}$$

putem scrie ecuația (3) sub forma

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial \bar z} = 0$$

sau

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

și prin urmare funcția $f(z)$ satisface ecuația (10).

Observație. Teorema de mai sus rămîne valabilă dacă funcția $f(z)$ admite derivate parțiale generalizate, în D, în raport cu x și y sau în raport cu z și $\bar z$.

2. În încheiere, vom stabili o reprezentare locală a funcțiilor F_g-monogene.

TEOREMA 5. *Fiecărui punct* $z \in D$ *îi corespunde o vecinătate* U, *astfel ca orice funcție* $f(z)$ *de clasă* C^1 *și* F_g*-monogenă în această vecinătate să fie de forma*

$$f(z) = \varphi(g(z))$$

unde $\varphi(z)$ *este o funcție monogenă obișnuită pe domeniul* $V = g(U)$.

Demonstrație. În virtutea condiției (1), există o vecinătate U a punctului z, astfel încît restricția aplicației $g : U \rightarrow V$ să fie biunivocă, putînd considera $g = g(z)$ ca variabilă independentă în V iar z ca funcție. Atunci funcția $f(z)$ devine funcția compusă $f(z(g))$ pe V și ținînd seama că $f(z)$ verifică ecuația (8)

$$\frac{\partial f(z(g))}{\partial \bar g} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \bar g} + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\frac{\partial \bar z}{\partial \bar g} = \frac{\partial f}{\partial z}\left[\frac{\partial z}{\partial \bar g} + A(z)\frac{\partial \bar z}{\partial \bar g}\right]\cdot \tag{11}$$

Cum funcţia $g = g(z)$ este o soluţie a ecuaţiei (8),

$$\frac{\partial g}{\partial g} = \frac{\partial g}{\partial z}\left[\frac{\partial z}{\partial g} + A(z)\frac{\partial \bar{z}}{\partial g}\right] = 1,$$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{g}} = \frac{\partial g}{\partial z}\left[\frac{\partial z}{\partial \bar{g}} + A(z)\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{g}}\right] = 0.$$

Din prima egalitate rezultă $\frac{\partial g}{\partial z} \neq 0$ şi atunci dintr-a doua

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{g}} + A(z)\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{g}} = 0.$$

Atunci din (11) rezultă

$$\frac{\partial f(z(g))}{\partial \bar{g}} = 0$$

ceea ce demonstrează teorema.

Primită la redacţie la 3 august 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Б.В. Боярски, *Общее представление решений эллиптической системы 2 m уравнений на плоскости*. Д. А. Н. 122: 4, 543—546 (1958).
2. G. Gălugăreanu, *Sur les fonctions polygènes*. (Thèse), Paris, Gauthier-Villars, 1928.
3. В.С. Федоров, *Моногеность*. Матем. сб., 18(60), 3, 353—378 (1946).
4. V. A. Gusev, *O generalizare a derivatei areolare*. Bul. Inst. Politeh. Timişoara, **7 (22)**, *2*, 223—238 (1962).
5. Gr. C. Moisil, *Asupra unei generalizări a ideii de monogeneitate datorită lui V. C. Fedorov*. Bul. ştiinţ., **1**, *10*, 959—964 (1949).
6. M. Nicolescu, *Fonctions complexes dans le plan et dans l'espace*. (Thèse), Paris, Gauthier-Villars, 1928.
7. D. Pascali, *Derivata F-areolară şi F-medie*. Com. Acad. R.P.R., **X**, *12*, 1083—1086 (1960).
8. — *Monogeneitatea F şi ecuaţia lui Beltrami*. Com. Acad. R.P.R., **XII**, *6*, 631——634 (1962).
9. M. Roşculet, *Funcţii monogene pe spaţii Riemann. I. Funcţii monogene pe o suprafaţă în spaţiu*. Studii şi cercetări matematice, **XIV**, 519—531 (1963).
10. С.Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, 1962.*
11. N. Teodorescu, *La dérivée aréolaire et ses applications dans la physique mathématique* (Thèse), Paris, Gauthier-Villars, 1931.
12. И.Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Москва, 1959.
13. И.Л.Волковыский, *Квазиконформные отображения*, Львов. 1955.

FUNCŢII SUMĂ VECTORIALE

DE

A. CREANGĂ-SÎMBOAN

I. Fie $\{\Omega, P\}$ o algebră booleană σ-aditivă măsurabilă cu o funcţie măsură finită P şi $\mathfrak{X}$ un spaţiu vectorial local convex a cărui topologie este definită de o familie suficientă de seminorme $\beta \in B$.

O funcţie $F: \Omega \rightarrow \mathfrak{X}$ se numeşte funcţie sumă vectorială dacă

1) $F(\omega_1 \vee \omega_2) = F(\omega_1) + F(\omega_2)$ oricare ar fi $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $\omega_1 \wedge \omega_2 = \emptyset$.

2) Pentru orice $V(0)$ din $\mathfrak{X}$ există $\delta_V > 0$ astfel încît pentru orice $\omega \in \Omega$ relaţia $P(\omega) < \delta_V$ implică

$$F(\omega) \in V(0).$$

Aceste condiţii implică aditivitatea completă a funcţiei F. În algebra booleană Ω să introducem semidistanţele

$$d(\omega_1, \omega_2) = P(\omega_1 \triangle \omega_2) = P(\omega_1 \wedge \omega_2' \vee \omega_1' \wedge \omega_2)$$

şi structura uniformă în care anturajele sînt definite prin mulţimile

$$\{(\omega_1, \omega_2);\ d(\omega_1, \omega_2) < \varepsilon\}.$$

Vom nota tot cu Ω algebra booleană înzestrată cu această structură uniformă.

În spaţiul $\mathfrak{X}$ vom considera structura uniformă în care anturajele sînt generate de mulţimile

$$\{(x_1, x_2);\ \beta_{i_1}(x_1 - x_2) < \varepsilon, \ldots, \beta_{i_k}(x_1 - x_2) < \varepsilon\}.$$

O funcţie vectorială F este uniform continuă pe Ω dacă pentru orice anturaj U din $\mathfrak{X}$ există un anturaj W în Ω astfel încît pentru orice $(\omega_1, \omega_2) \in W$ să avem $(F(\omega_1), F(\omega_2)) \in U$.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR 10, P. 1243–1247, BUCUREŞTI, 1964.

PROPOZIŢIA 1. *Funcţia F este continuă pe Ω.*

Într-adevăr, cunoscînd anturajele structurii uniforme se deduce vecinătatea lui ω_0:

$$V_\delta(\omega_0) = \{\omega;\quad P(\omega \,\Delta\, \omega_0) < \delta\}.$$

Atunci din 2) rezultă că pentru $V(0)$ există δ_V aşa fel încît pentru orice mulţime ω pentru care

$$P(\omega \,\Delta\, \omega_0) < \delta_V$$

să avem

$$F(\omega \,\Delta\, \omega_0) \in \frac{1}{3} V(0).$$

Să observăm însă că

$$F(\omega) = F(\omega \wedge \omega_0) + F(\omega \wedge \omega_0')$$

$$F(\omega_0) = F(\omega \wedge \omega_0) + F(\omega' \wedge \omega_0)$$

de unde

$$F(\omega) - F(\omega_0) = F(\omega \wedge \omega_0') - F(\omega' \wedge \omega_0) = F(\omega \,\Delta\, \omega_0) - 2F(\omega' \wedge \omega_0).$$

Cum

$$P(\omega' \wedge \omega_0) \leqq P(\omega \,\Delta\, \omega_0) < \delta_V$$

rezultă că

$$F(\omega' \wedge \omega_0) \in \frac{1}{3} V(0)$$

şi deci

$$F(\omega) - F(\omega_0) \in V(0).$$

PROPOZIŢIA 2. *Funcţia F este uniform continuă pe Ω şi mărginită.*

Vom observa că spaţiul Ω este mărginit, deoarece pentru orice $\varepsilon_0 > 1$, $V_{\varepsilon_0}(0) = \{\omega;\ P(\omega\Delta 0 < \varepsilon\}$ acoperă spaţiul Ω; cum Ω este închis, rezultă că este compact şi prin urmare F este uniform continuă pe Ω şi mărginită.

Variaţiile unei funcţii sumă. Pentru funcţia sumă F definim variaţiile prin

$$F_\beta(\omega) = \sup \sum_{k=1}^{n} \beta(F(\omega_k)),$$

unde $\omega = \bigvee_{k=1}^{n} \omega_k$, $\omega_k \in \Omega$, $\omega_k \wedge \omega_l = \varnothing$, $k \neq l$, iar marginea superioară este considerată faţă de mulţimea descompunerilor elementului ω.

TEOREMĂ. *Variaţiile unei funcţii sumă vectoriale sînt funcţii sumă.*

Într-adevăr, fie $\beta \in B$ fix şi vecinătatea originii din $\mathfrak{X}$

$$V(0) = \{x;\ \beta(x) < \varepsilon\};$$

atunci există δ_V astfel încît pentru orice $\omega \in \Omega$ pentru care

$$P\,(\omega) < \delta_V \text{ să avem } \beta\,(F\,(\omega)) < \frac{\varepsilon}{2n}\cdot \qquad (^*)$$

Pentru elementul ω să alegem descompunerea pentru care

$$F_\beta\,(\omega) < \sum_{k=1}^{n} \beta\,(F\,(\omega_k)) + \frac{\varepsilon}{2};$$

cum $\omega = \bigvee\limits_{k=1}^{n} \omega_k$ din $(^*)$ rezultă că

$$P\,(\omega_k) < \delta_V\,,\ \beta\,(F\,(\omega_k)) < \frac{\varepsilon}{2n}$$

şi deci

$$\sum_{k=1}^{n} \beta\,(F\,(\omega_k)) < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Prin urmare relaţia $P\,(\omega) < \delta_V$ implică $F_\beta\,(\omega) < \varepsilon$.

Vom arăta acum că F_β sînt funcţii aditive.

Fie $\omega = \omega' \vee \omega''$ cu $\omega' \wedge \omega'' = \varnothing$. Avem imediat

$$F_\beta(\omega') < \sum_{j=1}^{m} \beta\,(F\,(\omega_j)) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$F_\beta(\omega'') < \sum_{i=1}^{n} \beta\,(F\,(\omega_i'')) + \frac{\varepsilon}{2}$$

şi

$$F_\beta\,(\omega') + F_\beta(\omega'') < \sum_{j=1}^{n} \beta\,(F\,(\omega_j'\,)) + \sum_{i=1}^{m} \beta\,(F\,(\omega_i'')) + \varepsilon.$$

Cum însă $\omega = \bigvee\limits_{j=1}^{m} \omega_j' \vee \bigvee\limits_{i=1}^{n} \omega_i''$ unde $\omega_j' \wedge \omega_i'' = \varnothing$, $i \neq j$, atunci

$$F_\beta\,(\omega') + F_\beta\,(\omega'') < F_\beta\,(\omega) + \varepsilon$$

şi

$$F_\beta\,(\omega') + F_\beta\,(\omega'') \leqq F_\beta\,(\omega).$$

Pentru elementul ω să considerăm descompunerea $\sum\limits_{j=1}^{p} \omega_j$ astfel încît

$$F_\beta\,(\omega) < \sum_{j=1}^{p} \beta\,(F\,(\omega_j)) + \varepsilon.$$

Acum

$$\omega = \bigvee_{j=1}^{p} \omega_j \wedge \omega = \bigvee{}' \omega_j \wedge \omega' + \bigvee{}'' \omega_j \wedge \omega'',$$

unde $\bigvee'\omega_j \wedge \omega' = \omega'$ și $\bigvee''\omega_j \wedge \omega'' = \omega''$; atunci

$$F_\beta(\omega) < \Sigma' \beta(F(\omega_j \wedge \omega')) + \Sigma'' \beta(F(\omega_j \wedge \omega'')) + \\ + \varepsilon < F_\beta(\omega') + F_\beta(\omega'') + \varepsilon$$

și prin urmare

$$F_\beta(\omega) \leqq F_\beta(\omega') + F_\beta(\omega'').$$

Funcțiile sumă F_β sînt pozitive și mărginite pe Ω. Rezultă că funcției sumă F îi putem asocia o familie $(F_\beta)_{\beta\in B}$ de funcții sumă.

II. Variația totală a unei funcții sumă. Pentru funcția sumă vectorială definim variația totală prin

$$\Phi(\omega) = \sup \sum_{k=1}^{n} \sup_\beta \beta(F(\omega_k)),$$

unde $\omega = \bigvee_{k=1}^{n} \omega_k$, $\omega_k \wedge \omega_h = \varnothing$ și prima margine superioară este considerată pentru mulțimea descompunerilor elementului $\omega \in \Omega$.

Vom presupune familia de seminorme reticulată.

Propoziție. *Funcția* Φ *este funcție sumă pe* Ω.

Într-adevăr, Φ este funcție aditivă și absolut continuă în raport cu P.

Teoremă. *Funcția* Φ *este cea mai mică funcție sumă care verifică inegalitatea*

$$F_\beta(\omega) \leqq \Phi(\omega)$$

oricare ar fi $\beta \in B$ *și* $\omega \in \Omega$.

Faptul că $F_\beta(\omega) \leqq \Phi(\omega)$ rezultă imediat. Pentru $\varepsilon > 0$ există o descompunere a lui ω astfel încît

$$\Phi(\omega) < \sum_{k=1}^{n} \sup_\beta \beta(F(\omega_k)) + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Să notăm cu $\beta_{k,\varepsilon}$ seminorma pentru care

$$\sup_\beta \beta(F(\omega_k)) < \beta_{k,\varepsilon}(F(\omega_k)) + \frac{\varepsilon}{2n}$$

și cu $\beta_\varepsilon = \sup\limits_{1\leqq k\leqq n} \beta_{k,\varepsilon}$; atunci

$$\Phi(\omega) < \sum_{k=1}^{n} \beta_\varepsilon(F(\omega_k)) + \varepsilon < F_{\beta_\varepsilon}(\omega) + \varepsilon$$

și prin urmare

$$\Phi(\omega) = \sup_\beta F_\beta(\omega).$$

III. Să presupunem dată o σ-algebră booleană $\mathcal{A}$ cu probabilitatea strict pozitivă P; atunci dacă X este spațiul lui Stone asociat lui $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ σ-corpul generat de mulțimile închise și deschise în X și $\mathcal{I}$ σ-idealul părţilor de prima categorie în X, după teorema Loomis-Sikorski $\mathcal{A}$ este izomorf cu $\mathcal{F}/\mathcal{J}$. Pe spaţiul $(X, \mathcal{F})$ se poate introduce, vezi [2], probabilitatea $\widetilde{P}$ prin relaţia

$$\widetilde{P}\ (B) = P\,(h[B]),\ B \in \mathcal{F},$$

unde h este izomorfismul de la $\mathcal{F}/\mathcal{J}$ la $\mathcal{A}$, iar $[B]$ clasa care conţine pe B.

Pe spaţiul măsurabil $(X, \mathcal{F}, \widetilde{P})$ funcţiile sumă F_β se pot reprezenta prin

$$F_\beta(A) = \int_a f_\beta\,(\xi)\,\mathrm{d}\widetilde{P}\,(\xi),\ A \in \mathcal{A},$$

unde $a \in \overset{-1}{h}\,(A)$, f_β fiind variabilă aleatoare pe spaţiul $(X, \mathcal{F}, \widetilde{P})$. Funcţiei sumă vectoriale F îi corespunde în acest mod procesul $(f_\beta)_{\beta \in B}$.

În spaţiul măsurabil $(X, \mathcal{F}, \widetilde{P})$ să notăm cu $\mathcal{F}_B$ cel mai mic corp faţă de care toate funcţiile f_β sînt măsurabile şi cu $\widetilde{P}_B$ restricţia lui $\widetilde{P}$ la $\mathcal{F}_B$; atunci valoarea medie condiţionată de $\mathcal{F}_B$ este dată prin

$$\int_a M\ (f\,|\,\mathcal{F}_B)\,\mathrm{d}\widetilde{P}_B = \int_a f\,\mathrm{d}\widetilde{P} = \int f\varphi_a\,\mathrm{d}\widetilde{P}.$$

Funcţia sumă

$$\Phi\,(A\,|F) = \int_a M\,(f|\mathcal{F}_B)\mathrm{d}\widetilde{P}_B$$

se va numi valoare medie condiţionată a funcţiei sumă

$$\Phi\,(A) = \int f\varphi_a\,\mathrm{d}\widetilde{P}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. В.М. ДУБРОВСКИЙ, *О наилучшей мажоранте семейства вполне аддитивных функций множества*. Учёные записки, выпуск 163, математика, VI (1952).
2. *Seminar de funcţii sumă*. Sub conducerea prof. Octav Onicescu, Edit. Acad. R.P.R., 1963.

ASUPRA CONSISTENŢEI TESTULUI RAPORTULUI DE VEROSIMILITĂŢI

DE

H. COHN

Să considerăm un spaţiu măsurabil $\{\Omega, \mathcal{K}\}$, probabilităţile P şi Q definite pe $\mathcal{K}$ şi şirul de variabile aleatoare

$$\xi_1(\omega), \ldots, \xi_N(\omega)$$

definite astfel ca cel mai mic corp borelian în raport cu care aceste variabile aleatoare sînt măsurabile este $\mathcal{K}$.

Fie acum spaţiul măsurabil $\{\Omega^\infty, \mathcal{K}^\infty\}$, unde $\Omega^\infty = \Omega \times \ldots \times \Omega \times \times \ldots$ iar $\mathcal{K}^\infty$ este cel mai mic corp borelian care conţine mulţimile măsurabile de forma $A_1 \times \ldots \times A_m$, $m \in N^*$ şi $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{K}$.

Probabilităţile P şi Q se extind în mod unic pe acest corp borelian după o teoremă cunoscută, dacă le definim pe mulţimile cilindrice astfel:

$$P^\infty(A_1 \times \ldots \times A_m \times \Omega \times \ldots \times \Omega \times \ldots) = P(A_1) \ldots P(A_m)$$

$$Q^\infty(A_1 \times \ldots \times A_m \times \Omega \times \ldots \times \Omega \times \ldots) = Q(A_1) \ldots Q(A_m).$$

Vom presupune existenţa funcţiilor

$$p(x_1, \ldots, x_N)$$

$$q(x_1, \ldots, x_N)$$

măsurabile Borel cu proprietăţile:

$$P\{\omega \mid (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_N(\omega)) \in A\} = \int \ldots \int_A p(x_1, \ldots, x_N)\, \mathrm{d}x_1, \ldots \mathrm{d}x_N$$

$$Q\{\omega \mid (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_N(\omega)) \in A\} = \int \ldots \int_A q(x_1, \ldots, x_N)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N$$

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 10, P. 1249–1255, BUCUREŞTI, 1964.

unde $A \in \mathfrak{B}^N$, $\omega \in \Omega$.

Vom considera acum variabilele aleatoare coordonate definite în modul următor

$$\widetilde{\xi}_{NT+k}(\omega) = \xi_k(\omega_{NT+k}), \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n, \dots) \in \Omega^\infty, T \in N^\star, k=1, \dots, N-1.$$

În acest caz dacă considerăm restricțiile lui P^∞ și Q^∞ la mulțimile cilindrice m-dimensionale, repartițiile procesului considerat mai sus pot fi caracterizate prin relațiile

$$P^\infty \{\omega \mid \widetilde{\xi}_1(\omega) < a_1, \dots \widetilde{\xi}_N(\omega) < a_n; \dots ; \widetilde{\xi}_{Nk+1}(\omega) < a_{Nk+1}, \dots,$$

$$, \dots, \widetilde{\xi}_{N(k+1)}(\omega) < a_{N(k+1)}\} = \int_{-\infty}^{a_1} \dots \int_{-\infty}^{a_N} p(x_1 \dots x_N)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_N \dots$$

$$\dots \int_{-\infty}^{a_{Nk+1}} \dots \int_{-\infty}^{a_{N(k+1)}} p(x_1, \dots, x_N)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_N,$$

$$Q^\infty \{\omega \mid \widetilde{\xi}_1(\omega) < a_1, \dots, \widetilde{\xi}_N(\omega) < a_N, \dots, \widetilde{\xi}_{Nk+1}(\omega) < a_{Nk+1}, \dots$$

$$\dots \widetilde{\xi}_{N(k+1)}(\omega) < a_{N(k+1)}\} = \int_{-\infty}^{a_1} \dots \int_{-\infty}^{a_N} q(x_1, \dots, x_N)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_N \dots$$

$$\dots \int_{-\infty}^{a_{Nk+1}} \dots \int_{-\infty}^{a_{N(k+1)}} q(x_1, \dots, x_N)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_N.$$

În cele ce urmează vom înlocui spațiul măsurabil definit mai sus cu spațiul reprezentărilor, conform rezultatelor din [1].

Introducem acum variabilele aleatoare

$$y_n = \frac{q(x_1, \dots, x_N)}{p(x_1, \dots, x_N)} \dots \frac{q(x_{nN+1} \dots x_{N(n+1)})}{p(x_{nN+1} \dots, x_{N(n+1)})}.$$

Conform rezultatelor obținute de Doob [1], șirul de variabile aleatoare $\{-y_n\}_{n \in N}$ formează un semimartingal, cînd valoarea medie se ia în raport cu P, adică are proprietatea că

$$M(\{[y_{n+1} \mid y_1, \dots, y_n] \mid P\}) \leqslant y_n.$$

Aici și în cele ce urmează notăm cu $M(\{-\mid P\})$ și $M(\{-\mid Q\})$ valorile medii luate în raport cu P și respectiv Q.

Aplicînd proprietățile martingalelor acestui șir de variabile aleatoare se obține că există limita

$$\lim_{n \to \infty} y_n = y_\infty$$

cu probabilitate 1 în raport cu P și că

$$\dots \leqq M(\{y_n \mid P\}) \leqq \dots \leqq M(\{y_0 \mid P\}) \leqq 1$$

iar după lema lui Fatou

$$0 \leqq M(\{y_\infty | P\}) \leqq \lim_{n\to\infty} M(\{y_n | P\}) \leqq 1.$$

În cele ce urmează vom testa ipoteza H_P că adevărata probabilitate este P indusă de densitatea p, contra alternativei H_Q că adevărata probabilitate este Q indusă de densitatea q.

Pentru aceasta vom considera statistica dată de raportul de verosimilități

$$R_n(x_1, \ldots, x_{N(n+1)}) = \lg y_n .$$

Definim mulțimea critică $[R_n > K_n]$, $K_n \in R$, unde paranteza indică mulțimea din $\mathcal{B}^n$ pentru care inegalitatea de mai sus este satisfăcută. Probabilitățile erorilor asociate lui $[R_n > K_n]$ sînt $P\,[R_n > K_n]$ și $Q\,[R_n \leqq K_n] = 1 - Q\,[R_n > K_n]$, unde P și Q sînt probabilitățile corespunzătoare spațiului reprezentărilor. Să notăm prin $T(a, \alpha) = \{[R_n > n^\alpha a], n = 0, 1, 2, \ldots\}$ clasa de teste generată de a, $\alpha \in R$.

TEOREMA 1. *În condițiile considerate mai sus clasa de teste* $\{T(a, 0), a \in R\}$ *conține numai teste consistente.*

Demonstrație. Vom considera $\lim y_n = y_\infty$ întîi sub ipoteza H_P și apoi sub ipoteza H_Q.

Cînd ipoteza H_P este adevărată, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_\infty = 0$ cu probabilitate 1 în raport cu P, deoarece în caz contrar p și q ar coincide cu probabilitate 1 atît în raport cu P cît și în raport cu Q, după cum rezultă din [1], ceea ce ar duce la ipoteza că P și Q coincid.

Să presupunem acum că Q este adevărata probabilitate. În acest caz putem demonstra în mod analog ca în [1] că $\left\{-\dfrac{1}{y_n}\right\}_{n\in N^*}$ formează un semimartingal în raport cu Q.

Dacă aplicăm considerațiile de mai sus în acest caz obținem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_\infty} = 0$$

cu probabilitate 1 în raport cu Q și deci $y_\infty = \infty$ cu probabilitate 1 în raport cu Q, de unde, pentru orice $a \in R$,

$$\lim_{n\to\infty} P\,\{[R_n \geqslant a]\} = \lim_{n\to\infty} Q\,\{[R_n < a]\} = 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Această proprietate poate fi folosită pentru a demonstra că în cazul testării ipotezei simple H_0, că adevărata densitate este $p(x)$ contra alternativei H_1 că adevărata densitate este $q(x)$ cu ajutorul testului secvențial al raportului de verosimilități a lui Wald [4], probabilitatea ca acest test să se termine este 1 atît în raport cu P cît și în raport cu Q.

Această proprietate a fost demonstrată în [4] prin alte considerente.

În adevăr, să notăm cu

$$z(\omega) = \ln \frac{p(\xi(\omega))}{q(\xi(\omega))}$$

şi să definim

$$\Lambda_M = \bigcup_{n>M} \{[(\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) \mid \ln B\} \leqq \sum_{i=1}^{k} z(\omega_i) \leqq \ln A, k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$[z(\omega_1) + \ldots + z(\omega_n) \leqq \ln B] \bigcup [z(\omega_1) + \ldots + z(\omega_n) \geqq \ln A] \bigcup$$

$$\bigcup \bigcap_{n=1}^{\infty} \{[(\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) \mid \ln B] \leqslant z(\omega_1) + \ldots + z(\omega_n) \leqslant \ln A\}, A > 1, B < 1 \quad M \in N^{\star}$$

ca fiind submulţimea din Ω^{∞} pentru care criteriul secvenţial al raportului de verosimilităţi se termină după un număr de etape mai mare ca M. Dacă notăm cu

$$A_M = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) \mid \ln B \leqq z(\omega_1) + \ldots + z(\omega_M) \leqq \ln A\}$$

atunci

$$\Lambda_M \subset A_M .$$

Dar din proprietatea stabilită mai sus se obţine că

$$\lim_{M \to \infty} P(A_M) = \lim_{M \to \infty} Q(A_M) = 0$$

şi deci şi $\lim\limits_{M \to \infty} P(\Lambda_M) = \lim\limits_{M \to \infty} Q(\Lambda_M) = 0$ ceea ce trebuia demonstrat.

Vom considera acum o familie de densităţi $\{p_{\theta}(x_1, \ldots x_n), \theta \in I\}$ şi probabilităţile $\{P_{\theta}, \theta \in I\}$ induse de aceste densităţi, unde I este un interval al dreptei reale.

În cele ce urmează vom avea în vedere teste compuse constînd din ipoteza H_0 că adevărata densitate se află printre densităţile $\{p_{\theta}(x_1, \ldots x_N), \theta \in A_0\}$ contra alternativei H_1 că adevărata densitate se află printre densităţile $\{p(x_1, \ldots, x_N), \theta \in A_1\}$ A_0 şi A_1 fiind două intervale ale dreptei reale. Vom presupune că $p(x_1, \ldots, x_N)$ şi $q(x_1 \ldots, x_N)$ aparţin respectiv ipotezelor H_0 şi H_1.

LEMĂ. *Dacă* $M(\{\ln y_0 \mid P_{\theta}\})$ *există pentru orice* $\theta \in I$ *şi dacă* $M(\{\ln y_0 \mid P\})$ *şi* $M(\{\ln y_0 \mid Q\})$ *sînt diferite de zero, atunci există o funcţie* $a(\theta)$ *cu proprietatea*

$$\lim_{n \to \infty} R_n / n = a(\theta)$$

cu probabilitate 1 în raport cu P_{θ}, $\theta \in I$ *şi dacă notăm cu* $a(\theta_0)$ *şi* $a(\theta_1)$ *valorile funcţiei* $a(\theta)$ *corespunzătoare lui* P *şi respectiv* Q, *atunci*

$$a(\theta_0) < 0 < a(\theta_1).$$

Înainte de a trece la demonstrarea lemei să observăm că condiţia din enunţ ca $M(\{\ln y_0 \mid P\})$ şi $M(\{\ln y_0 (\theta\})$ să fie diferite de zero este îndeplinită, de exemplu, atunci cînd măsurile P şi Q nu sînt absolut continue una faţă de cealaltă, în presupunerea că aceste valori medii există.

În adevăr, să presupunem de exemplu că Q nu este absolut continuă în raport cu P; atunci fie Λ o mulţime pentru care $P(\Lambda) = 0$, iar $Q(\Lambda) > 0$. În acest caz

$$M(\{\ln y_0 \mid P\}) \leqq \ln \int \dots \int_{R-\Lambda} q(x_1, \dots, x_N)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_N < 0.$$

Să trecem la demonstrarea lemei. Deoarece y_m sînt independente şi identic repartizate, în condiţiile enunţate putem aplica legea tare a numerelor mari [1]

$$\frac{\ln y_1 + \dots + \ln y_n}{n} = \frac{\ln y_1 \dots y_n}{n} = \frac{R_n}{n} \to M(\{\ln y_0 \mid P_\theta\}) = a(\theta)$$

cu probabilitate 1 în raport cu P_θ, cînd θ este adevărata valoare a parametrului.

Deoarece $\ln x$ este o funcţie concavă,

$$M(\{\ln y_0 \mid P\}) \leq \ln M(\{y_0 \mid P\}) \leqq \ln \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} q(x_1, \dots, x_N)\, \mathrm{d}x_1, \dots \mathrm{d}x_N.$$

$$\leqq \ln 1 = 0$$

Aplicînd acelaşi raţionament lui $M\left(\left\{\ln \frac{1}{y_1} \mid Q\right\}\right)$ obţinem că

$$M(\{\ln y_0 \mid Q\}) \geqq 0$$

şi dacă ţinem seama de condiţiile lemei, obţinem

$$a(\theta_0) < 0 < a(\theta_1).$$

TEOREMA 2. *Dacă $a(\theta)$ este o funcţie continuă, atunci oricare ar fi intervalele $[\theta_1', \theta_2']$ şi $[\theta_1'', \theta_2'']$ care conţin respectiv valorile parametrilor θ_0 şi θ_1 corespunzătoare densităţilor $p(x_1, \dots, x_N)$* şi *$q(x_1, \dots, x_N)$, cu proprietatea că $M(\{R_0 \mid P_\theta\}) \neq 0$, există două constante λ* şi *μ care depind de aceste intervale astfel că în clasa testelor $\{T(a; \alpha), a, \alpha \in R\}$ singurele teste consistente sînt:*

a) $T(0, \alpha)$ *pentru* $\alpha > 1$

b) $T(a, 1)$ *pentru* $\lambda < a < \mu$

c) $T(a, \alpha)$ *pentru* $\alpha < 1$ şi $-\infty < a < +\infty$.

Demonstraţie. După lema de mai sus, $M(\{R_0 \mid P\}) > 0$ şi $M(\{R_0 \mid Q\}) < 0$ şi în condiţiile teoremei, $M(\{R_0 \mid P_\theta\}) > 0$ pentru $\theta \in [\theta_1', \theta_2']$ şi $M(\{R_0 \mid P_\theta\}) < 0$ pentru $\theta \in [\theta_1'', \theta_2'']$.
De aici rezultă

$$\min_{\theta \in [\theta_1', \theta_2']} M(\{R_0 \mid P_\theta\}) = \lambda < 0,$$

$$\max_{\theta \in [\theta_1'', \theta_2'']} M(\{R_0 \mid P_\theta\}) = \mu > 0.$$

Să arătăm acum că λ şi μ satisfac afirmaţiile teoremei. Punctele a) şi c) rezultă aproape evident.

Să demonstrăm punctul b). Fie $\theta \in [\theta_1', \theta_2']$. Să ne situăm în ipoteza că $\alpha > 1$. Dacă presupunem $a < 0$ şi $\varepsilon > 0$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha-1} a = -\infty$ pentru n suficient de mare, $n^{\alpha-1} a < \lambda - \varepsilon$ de unde

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta [R_n > n^\alpha a] = \lim_{n\to\infty} P_\theta [R_{n/n} > \lambda - \varepsilon] = 1.$$

În mod analog pentru $\theta \in [\theta_1'', \theta_2'']$ şi $a > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P_\theta \, [R_n \geqq n^\alpha a] = 1$ şi deci singurul test consistent pentru $\alpha > 1$ este T (0, α).

Pentru $\alpha < 1$ alegem $\varepsilon > 0$ astfel ca $\lambda + \varepsilon < 0$ ceea ce este posibil deoarece λ este negativ. Întrucît $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha-1} a = 0$ pentru n suficient de mare, $n^{\alpha-1} a < \lambda - \varepsilon$. Deci

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta [R_n > n^\alpha a] \leqq \lim_{n\to\infty} P_\theta [R_n/n > \lambda + \varepsilon] = 0$$

cînd $\theta \in [\theta_1', \theta_2']$. În mod analog se obţine că $\lim\limits_{n\to\infty} P_\theta \, [R_n \leqq n^\alpha a] = 0$ şi teorema este demonstrată.

Observăm că în cazul cînd $\theta_1' = \theta_2'$ şi $\theta_1'' = \theta_2''$, din teorema 1 se obţine teorema 2, condiţiile teoremei 2 fiind însă mai restrictive.

Vom da acum o aplicaţie a teoremei 2 în cazul distribuţiei binomiale. Fie două variabile aleatoare X_1 şi X_2 distribuite binomial după următoarea schemă

$$X_1 : \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 : \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Raportul verosimilităţii $\dfrac{q(x)}{p(x)}$ poate lua în acest caz numai valorile $\dfrac{q(x=1)}{p(x=1)} = \dfrac{q}{p}$ cu probabilitate r şi $\dfrac{q(x=0)}{p(x=0)} = \dfrac{1-q}{1-p}$ cu probabilitate $1-r$, cînd adevărata distribuţie este distribuţia binomială

$$X : \begin{pmatrix} r & 1-r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare

$$M(\{R_0 \mid r\}) = r \ln \frac{q}{p} + (1-r) \ln \frac{1-q}{1-p}.$$

Aplicînd inegalitatea lui Jessen pentru funcţii concave, obţinem

$$M(\{\ln y_0 \mid p\}) = \mathrm{p} \ln \frac{q}{p} + (1-p) \ln \frac{1-q}{1-p} < \ln 1 = 0$$

$$M(\{\ln y_0 \mid q\}) = -M\left(\left\{\ln \frac{1}{y_0} \mid p\right\}\right) > 0.$$

Funcţia $a(r) = r \ln \frac{q}{p} + (1 + r) \ln \frac{1-q}{1-p}$ este evident continuă şi dacă presupunem $q > p$, este strict crescătoare.

Ecuaţia

$$r \ln \frac{q}{p} + (1 - r) \ln \frac{1-q}{1-p} = 0$$

are soluţia unică

$$\bar{r} = \frac{\ln \frac{1-q}{1-p}}{\ln \frac{q(1-p)}{p(1-q)}}.$$

Prin urmare dacă excludem o vecinătate arbitrară a lui $\bar{r}$ şi considerăm domeniul de acceptare şi de respingere al ipotezelor ca fiind intervale situate de o parte şi de alta a acestei vecinătăţi, singurele teste consistente din clasa $\{T(a; \alpha); a, \alpha \in R\}$ sînt cele date de teorema 2.

Primit la redacţie la 18 august 1964

BIBLIOGRAFIE

1. J. L. Doob, *Stochastic Processes*. New York, 1953.
2. L. Koopmans, *Asymptotic rate of discrimination for Markov processes*. The Annals of Math. Statistics, **31** *4*, 982–995 (1960).
3. M. Loève, *Probability theory*, Princeton, 1955.
4. A. Wald, *Последовательный анализ*. Москва, 1960.

ASUPRA FORMULELOR LUI FRENET PENTRU CURBE DIN SPAŢIU CU CONEXIUNE AFINĂ L_n

DE

P. STAVRE

În lucrarea [3] folosind metoda lui Tamassy a fost studiat un sistem complet de invarianţi ai unei familii de direcţii într-un spaţiu cu conexiune afină n-dimensional L_n. S-au stabilit apoi relaţiile dintre acest sistem şi sistemul complet de invarianţi studiat în [2] de R. Miron. Dacă (C) este o curbă în L_n iar $\mu_1^\lambda(s)$ familia de direcţii pe (C), pentru acelaşi parametru afin „S" pe (C) şi aceeaşi familie de direcţii $\mu_1^\lambda = \eta_1^\lambda$ am notat sistemele de invarianţi amintite mai sus cu (K_a) respectiv χ_a $(a = 1, 2, \ldots, n-1)$ iar vectorii principali ai familiei cu $(\mu_1^\lambda = \eta_1^\lambda\, \eta_2^\lambda \ldots \eta_n^\lambda)$ respectiv $(\mu_1^\lambda \mu_2^\lambda \ldots \ldots \mu_n^\lambda)$ care satisfac condiţiile:

$$\eta_1^{[\lambda_1} \eta_2^{\lambda_2} \ldots \eta_n^{\lambda_n]} \neq 0, \tag{1}$$

$$\mu_1^{[\lambda_1} \mu_2^{\lambda_2} \ldots \mu_n^{\lambda_n]} \neq 0. \tag{2}$$

Folosind cele două sisteme de vectori (η_i^λ) şi (μ_i^λ) vom găsi noi formule ale lui Frenet. Pentru calcul vom nota indicii de covarianţă, respectiv contravarianţă cu litere greceşti, iar indicii de numerotare ai vectorilor cu litere latine.

§ 1. *Formulele lui Frenet în cazul* $\prod_{a=1}^{n-1} K_a = \varepsilon_2 \neq 0$ (*constantă*). S-au stabilit în [3] formulele:

$$\begin{aligned} t^\lambda &= \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} = \sum_{j=1}^{n} a^j\, \eta_j^\lambda \\ \frac{\delta \eta_1^\lambda}{\mathrm{d}s} &= K_1\, \eta_2^\lambda \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\frac{\delta \eta_p^\lambda}{\mathrm{d}s} = -K_{p-1}\,\eta_{p-1}^\lambda + K_p\,\eta_{p+1}^\lambda,\ p = 1, 2, \ldots (n-1) \text{ cu } K_0 = 0 \tag{1.1}$$

. . . .

$$\frac{\delta \eta_n^\lambda}{\mathrm{d}s} = \sum_{k=1}^{n} b^k\,\eta_k^\lambda$$

unde t^λ era vectorul tangent în $M \in (C)$. Presupunem curba generală în sensul că $K_a \neq 0$, $a = 1, 2, \ldots, n-1$, (δ este operatorul de diferențiere covariantă în L_n) dar $\prod_{a=1}^{n-1} K_a = \varepsilon_2$ (const $\neq 0$). Sistemul

$$\eta_i^\lambda\,\eta_\lambda^j = \delta_i^j, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.2}$$

determină n-vectori covarianți (η_λ^j) liniar independenți. Putem scrie

$$\frac{\delta \eta_\lambda^j}{\mathrm{d}s} = \sum_{i=1}^{n} a_i^j\,\eta_\lambda^i \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.3}$$

unde coeficienții $a_i^j = a_i^j(s)$ vor fi determinați. Diferențiind covariant (1.2) și ținînd seama de (1.3), (1.1) obținem relațiile:

$$\begin{gathered} -K_{p-1}\,\delta_{p-1}^j K_p\,\delta_{p+1}^j + a_p^j = 0,\ p = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ cu } K_0 = 0 \\ b^j + a_n^j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n \end{gathered} \tag{1.4}$$

care ne determină pe (a_i^j). Să considerăm n-vectori covarianți $(\bar{\eta}_\lambda^i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ definiți prin

$$\begin{gathered} \varepsilon_1\,\eta_\lambda^n = \bar{\eta}_\lambda^n \quad \frac{\delta \bar{\eta}_\lambda^p}{\mathrm{d}s} = \varepsilon\,\bar{\eta}_\lambda^{p-1},\ p = n,\ n-1, \ldots, 2,\ \varepsilon = \pm 1, \\ \varepsilon_1 = \text{const.} \neq 0. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Putem scrie în punctul curent $M \in (C)$ din L_n

$$\bar{\eta}_\lambda^i = \sum_{r=1}^{n} A_r^i\,\eta_\lambda^r, \qquad i = 1,2, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Vom găsi acum relațiile care permit calcularea coeficienților (A_r^i). Diferențiind covariant (1.6) și ținînd seama de (1.1) avem:

$$\frac{\delta \bar{\eta}_\lambda^i}{\mathrm{d}s} = \sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{\mathrm{d}A_p^i}{\mathrm{d}s} + A_{p-1}^i K_{p-1} - A_{p+1}^i K_p\right)\eta_\lambda^p + \left(\frac{\mathrm{d}A_n^i}{\mathrm{d}s} - \sum_{k=1}^{n} A_k^i b^k\right)\eta_\lambda^n. \tag{1.7}$$

Din (1.5) și (1.7) pentru $i = 2, 3, \ldots, n$ obținem

$$\begin{gathered} A_p^{i-1} = \varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}A_p^i}{\mathrm{d}s} + A_{p-1}^i K_{p-1} - A_{p+1}^i K_p\right),\ p = n-1, n-2, \ldots, 1, \\ A_n^{i-1} = \varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}A_n^i}{\mathrm{d}s} - \sum_{k=1}^{n} A_k^i b^k\right). \end{gathered} \tag{1.8}$$

Cum $A_j^n = \varepsilon_1 \delta_j^n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ din (1.8) deducem că $A_k^j = 0$ dacă $j > k$ și $A_p^p = \varepsilon.(-A_{p+1}^{p+1} K_p)$, $p = n-1, n-2, \ldots, 1)$ $(A_n^n = \varepsilon_1)$. Matricea $\|A_r^j\|$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $r = 1, 2, \ldots, n$ este o matrice triunghiulară de determinant egal cu $\prod_{r=1}^{n} A_r^r \neq 0$. Putem spune că vectorii $(\overline{\eta}_\lambda^i)$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$ sînt liniari independenți. Pentru $i = 1$ putem scrie (1.7) sub forma

$$\frac{\delta \overline{\eta}_\lambda^1}{\mathrm{d}s} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \eta_\lambda^k, \tag{1.7'}$$

unde

$$\Phi_p = \frac{\mathrm{d}A_p^1}{\mathrm{d}s} + A_{p-1}^1 K_{p-1} - A_{p+1}^1 K_p, \quad p = n-1, n-2, \ldots, 1,$$

$$\Phi_n = \frac{\mathrm{d}A_n^1}{\mathrm{d}s} - \sum_{k=1}^{n} A_k^1 b^k. \tag{1.9}$$

Dacă am dori ca elementele matricei $\|A_r^j\|$, r, $j = 1, 2, \ldots, n$, să depindă numai de K_a și derivatele lor în raport cu s, ajungem la:

(a) Cel puțin un element A_n^{i-1} al matricii $\|A_r^j\|$, j, $r = 1, 2, \ldots n$, depinde de b^k.

Sistemul

$$\overline{\eta}_i^\lambda \, \overline{\eta}_\lambda^j = \delta_i^j \tag{1.10}$$

determină n-vectori $(\overline{\eta}_i^\lambda)$ contravarianți liniari independenți pe (C). Punînd condiția ca acești vectori să fie asociați aceleiași familii de direcții $\mu_1^\lambda = \eta_1^\lambda$, adică să avem $\mu_1^\lambda = \eta_1^\lambda = \overline{\eta}_1^\lambda$ găsim următoarea

TEOREMĂ. *Condiția necesară și suficientă pentru ca* $\mu_1^\lambda = \overline{\eta}_1^\lambda = \eta_1^\lambda$ *este ca* $A_1^i = \delta_1^i$.

Cum $A_1^i = 0$ pentru $i > 1$ iar $A_1^1 = \varepsilon^{n-1}(-1)^{n-1} \varepsilon_1 \prod_{a=1}^{n-1} K_a$ dacă luăm $\varepsilon_1 = \varepsilon^{n-1}(-1)^{n-1}/\varepsilon_2$ avem $A_1^1 = 1$ și deci $A_1^i = \delta_1^i$. Așadar $\mu_1^\lambda = \eta_1^\lambda = \overline{\eta}_1^\lambda$. Avem

$$\overline{\eta}_\lambda^n = \varepsilon^{n-1}(-1)^{n-1} \frac{1}{\varepsilon_2} \eta_\lambda^n \quad \frac{\delta \overline{\eta}_\lambda^p}{\mathrm{d}s} = \varepsilon \overline{\eta}_\lambda^{p-1}, \; p = n, n-1, \ldots, 2,$$

$$\frac{\delta \overline{\eta}_\lambda^1}{\mathrm{d}s} = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j \overline{\eta}_\lambda^j, \tag{1.11}$$

unde se arată ușor că $\overline{x}_j$ sînt soluțiile sistemului algebric

$$\sum_{k=1}^{j} A_j^k \overline{x}_k = \Phi_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.12}$$

liniar neomogen al cărui determinant este diferit de zero.

Cum vectorii $(\bar{\eta}_i^\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt liniari independenţi, putem scrie

$$\frac{\delta \bar{\eta}_i^\lambda}{\mathrm{d}s} = \sum_{j=1}^{n} \overline{K}_i^j \, \bar{\eta}_j^\lambda, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.13}$$

Diferenţiind covariant (1.10) şi ţinînd seama de (1.11), (1.12), (1.13), obţinem relaţiile

$$\begin{aligned} &\overline{K}_i^p + \varepsilon\, \delta_i^{p-1} = 0, && p = 2, \ldots, n \\ &\overline{K}_i^1 + \bar{x}_i = 0, && i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{1.14}$$

care determină K. Avem deci formulele lui Frenet

$$t^\lambda = \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}^i \, \bar{\eta}_i^\lambda, \qquad (\bar{\alpha}^i = \bar{\alpha}^i\,(s))$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\delta \bar{\eta}_i^\lambda}{\mathrm{d}s} = \overline{K}_i^1 \bar{\eta}_i^\lambda - \varepsilon \bar{\eta}_{i+1}^\lambda, \qquad i = 1, 2, \ldots n-1 \tag{1.15}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\delta \bar{\eta}_n^\lambda}{\mathrm{d}s} = \overline{K}_n^1 \, \bar{\eta}_1^\lambda$$

TEOREMĂ. $\overline{K}$ *definite prin* (*1.14*) *şi vectori* $(\bar{\eta}_i^\lambda)$ *definiţi prin* (*1.11*) *asociaţi familiei* $\mu_1^\lambda = \eta_1^\lambda = \bar{\eta}_1^\lambda$ *pe curba* $(C) \in L_n$ *pentru care* $\prod_{a=1}^{n-1} K_a = \text{const.} \neq 0$ *sînt legaţi prin relaţiile* (*1.15*).

Se observă că $\overline{K}$ depind atît de familia de direcţii cît şi de direcţia curbei.

Aceste formule sînt mai simple decît formulele (1.1) la care am fi adăugat condiţia $\prod_{a=1}^{n-1} K_a = \text{const.} \neq 0$ şi deci în acest caz vor fi mai de folos în studiul curbelor pe o varietate L_{n-1} din L_n.

§ 2. Ţinînd seama de cele spuse în introducere fără a mai face vreo altă ipoteză relativă la (C) decît aceea că este generală, cu ajutorul sistemului de vectori $(\mu_1^\lambda = \eta_1^\lambda\, \mu_2^\lambda \ldots \mu_n^\lambda)$ prin

$$\mu_\lambda^k \, \mu_j^\lambda = \delta_j^k, \qquad k, j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.1}$$

putem determina n-vectori μ_λ^k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ covarianţi, liniari independenţi.Putem scrie

$$\frac{\delta \mu_\lambda^k}{\mathrm{d}s} = \sum_{r=1}^{n} C_r^k \mu_\lambda^r, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.2}$$

unde $C^k_r = C^k_r(s)$ vor fi determinaţi. Diferenţiind covariant (2.1) şi ţinînd seama de (2.2), [2], găsim relaţiile

$$C^k_p + \delta^k_{p+1} = 0, \quad p = 1\ 2, \ldots, n-1$$

$$\text{cu } x_n = 0 \tag{2.3}$$

$$C^k_n + x_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

care determină coeficienţii C^k_j, k, $j = 1, 2, \ldots, n$. Sistemul

$$\overline{\mu}^n_\lambda = \varepsilon_1\, \mu^n_\lambda \frac{\delta\overline{\mu}^p_\lambda}{ds} = \varepsilon\, \overline{\mu}^{p-1}_\lambda, \quad p = n, n-1, \ldots, 2, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon_1 = \text{const.} \neq 0 \tag{2.4}$$

determină vectorii $(\overline{\mu}^n_\lambda\, \overline{\mu}^{n-1}_\lambda \ldots \overline{\mu}^1_\lambda)$ care uşor se arată că sînt liniari independenţi. Putem scrie

$$\overline{\mu}^i_\lambda = \sum_{j=1}^{n} b^i_j\, \mu^j_\lambda, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Diferenţiind covariant (2.5) şi ţinînd seama de (2) şi (2.4) avem

$$\frac{\delta\overline{\mu}^i_\lambda}{ds} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{db^i_j}{ds} - b^i_{j+1} - \delta^j_n \sum_{k=1}^{n-1} b^i_k\, x_k\right) \mu^j_\lambda \text{ cu } b^i_{n+1} = 0. \tag{2.5'}$$

Pentru $i = n, n-1, \ldots, 2$ obţinem relaţiile

$$b^{i-1}_j = \varepsilon \left(\frac{db^i_j}{ds} - b^i_{j+1} - \delta^j_n \sum_{k=1}^{n-1} b^i_k\, x_k\right), \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.6}$$

care împreună cu $b^n_j = \varepsilon_1\, \delta^n_j$ determină elementele matricii $\|b^k_j\|$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$. Rezultă că matricea este nesingulară şi că $b^k_j = 0$ $(k > j)$. Dacă alegem $\varepsilon_1 = (-1)^{n-1}\, \varepsilon^{n-1}$ în (2.4), atunci

$$b^k_1 = \delta^k_1. \tag{2.7}$$

Sistemul

$$\overline{\mu}^\lambda_i\, \overline{\mu}^j_\lambda = \delta^j_i, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.8}$$

determină n-vectori $(\overline{\mu}^k_\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, liniari independenţi. Avem următoarea :

TEOREMĂ. *Condiţia necesară şi suficientă pentru a avea* $\mu^\lambda_1 = \eta^\lambda_1 = \overline{\mu}^\lambda_1$ *este ca* $b^i_1 = \delta^i_1$. *Adică (2.7).*

Pentru a avea (2.7) am văzut că trebuie să luăm $\varepsilon_1 = (-1)^{n-1}\, \varepsilon^{n-1}$ în (2.4). Cu această alegere putem scrie

$$\frac{\delta\overline{\mu}^1_\lambda}{ds} = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}^j_k\, \overline{\mu}^\lambda_j \tag{2.9}$$

$$\frac{\delta\overline{\mu}^1_\lambda}{ds} = \sum_{i=1}^{n} C_i\, \overline{\mu}^i_\lambda \tag{2.10}$$

şi ţinînd seama de (2.5) şi (2.5′) avem

$$\sum_{i=1}^{p} b_p^i\, C_i = \frac{\mathrm{d}b_p^1}{\mathrm{d}s} - b_{p+1}^i - \delta_n^j \sum_{k=1}^{n-1} b_k^1 x_k\,,\ p = 1, 2, \ldots, n \text{ şi } b_{n+1}^1 = 0\,. \qquad (2.11)$$

Aşadar C_i sînt soluţii ale unui sistem algebric liniar neomogen al cărui determinant este det $\|b_p^i\| \neq 0$. Avem

$$\det \|\overline{\mu}_\lambda\| \ \det \|\mu^\lambda\| = \det \|b_j^i\| = \text{constant } (\neq 0) \qquad (2.12)$$

şi det $\|\mu^\lambda\|$ este covariant constant (vezi[3]).

Diferenţiind covariant (2.12) şi ţinînd seama de (2.4), ajungem la concluzia că $\frac{\delta\overline{\mu}_\lambda^1}{\mathrm{d}s}$ este combinaţie liniară de $(\overline{\mu}_\lambda^2 \ldots \overline{\mu}_\lambda^n)$ adică $C_1 = 0$. Acest lucru mai rezultă direct din (2.6) deoarece $C_1 = b_1^0 = 0$. Diferenţiind covariant (2.8) şi ţinînd seama de (2.4) (unde $\varepsilon_1 = (-1)^{n-1}\,\varepsilon^{n-1}$), (2.9), (2.10), obţinem

$$\overline{x}_k^1 + C_k = 0,\ \ \overline{x}_k^r + \varepsilon\,\delta_k^{r-1} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.13)$$
$$r = 2, 3, \ldots, n$$

şi deci $\overline{x}_1^1 = 0$. Avem aşadar formulele lui Frenet:

$$\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} = \sum_{i=1}^{n} \beta^i\, \overline{\mu}_i^\lambda$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad (2.14)$$

$$\frac{\delta\overline{\mu}_p^\lambda}{\mathrm{d}s} = \overline{x}_p^1\, \overline{\mu}_1^\lambda - \varepsilon\, \overline{\mu}_{p+1}^\lambda\,, \qquad p = 1, 2, \ldots n-1 \text{ şi } \overline{x}_1^1 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\delta\overline{\mu}_n^\lambda}{\mathrm{d}s} = \overline{x}_n^1\, \overline{\mu}_1^\lambda\,.$$

TEOREMĂ. *$\overline{x}$ definiţi de (2.13) şi vectorii $(\overline{\mu}_i^\lambda)$ definiţi prin (2.4) asociaţi familiei $\mu_1^\lambda = \eta_1^\lambda = \overline{\mu}_1^\lambda$ pe $(C) \in L_n$ (unde $\varepsilon_1 = (-1)^{n-1}\,\varepsilon^{n-1}$) sînt legaţi prin relaţiile (2.14).*

Se poate enunţa acum şi o teoremă reciprocă de tipul teoremei (2) din [3].

Se observă asemănarea formală dintre rezultatele (1.14) şi (2.14). Aşa cum am spus şi în §1, aceste formule îşi găsesc aplicaţii în studiul curbelor pe varietăţi din L_n.

Particularizînd $\bar{\mu}_1^\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds}$ rezultatele (2.14) (pentru o alegere convenabilă a lui ε) duc la rezultatele lui Hlavaty [1].

BIBLIOGRAFIE

1. HLAVATY V., *Les courbes de la variété generale à n dimensions*, Memorial des Sci. Math., fasc. LXIII, 1934.
2. R. MIRON, *Familii de direcţii în spaţiul cu conexiune afină*, Studii şi cercetări ştiinţifice, Filiala Iaşi, 1963.
3. P. STAVRE, *Asupra invariaţiunilor unei familii de direcţii într-un spaţiu cu conexiune afină* L_n. Studii şi cercetări ştiinţifice, Filiala Iaşi, 1963.
4. G. VRĂNCEANU, *Lecţii de Geometrie diferenţială*, vol. I. Ed. Acad. R.P.R., 1963, p. 163.

DEFINIREA LATICILOR NUMAI CU AJUTORUL LEGILOR DE ASOCIATIVITATE ȘI ABSORBȚIE

DE

A. PETCU

INTRODUCERE

Lucrarea de față arată, în esență, că toate proprietățile unei latici pot fi deduse numai din legile de asociativitate și de absorbție.

Sensul mai exact al acestei afirmații reiese din cele expuse mai jos.

După cum se știe, o latice este o mulțime în care sînt definite două operații binare, $\cup$ (reuniunea) și $\cap$ (intersecția), care satisfac sistemul de axiome

$$\Sigma_0 = \{A_1^0, A_1^1, B_1^0, B_1^1, C^0, C^1\},$$

unde am notat

$$\left.\begin{array}{ll} A_1^0 & (x\cup y)\cup z = x\cup(y\cup z) \\ A_1^1 & (x\cap y)\cap z = x\cap(y\cap z) \end{array}\right\} \text{(asociativitatea)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} B_1^0 & x\cap(x\cup y) = x \\ B_1^1 & x\cup(x\cap y) = x \end{array}\right\} \text{(absorbția)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} C^0 & x\cup y = y\cup x \\ C^1 & x\cap y = y\cap x \end{array}\right\} \text{(comutativitatea)}$$

În § 1 se determină cîte 10 variante pentru fiecare lege de asociativitate A_1^0, A_1^1, obținute prin schimbarea ordinii literelor, în toate modurile posibile.

În § § 2, 3 se arată că noțiunea de latice poate fi definită folosind numai aceste variante ale legii de asociativitate împreună cu variantele legii de absorbție (deduse din absorbție și comutativitate). Mai precis se construiesc 32 de sisteme independente de axiome, fiecare din ele fiind format din 2 variante ale legii de asociativitate şi 2 variante ale legii de absorbţie, şi se arată că fiecare din aceste noi sisteme este logic echivalent cu Σ_0.

În § 4 se consideră un alt tip de axiome (pe care le numim absorbţio-asociative) obţinute prin condensarea proprietăţii de absorbţie cu cea de asociativitate. Cu aceste legi absorbţio-asociative, împreună cu legile de idempotenţă, în §§ 5, 6 se construiesc 96 de sisteme de axiome independente, fiecare sistem fiind format din cîte 3 axiome: 2 legi absorbţio-asociative şi o idempotenţă, şi se arată că oricare din aceste sisteme de axiome este logic echivalent cu Σ_0.

În felul acesta lucrarea de faţă se încadrează în linia de preocupări care urmăreşte să definească noţiunea de latice printr-un sistem cu cît mai puţine axiome-identităţi¹). În legătură cu această problemă, se ştie că există destul de multe sisteme cu cîte 7 sau 6 axiome [1]. Există apoi sistemul clasic de axiome al lui Peirce şi Ore (dat de C.S. Peirce [2] în 1880—1884 şi perfecţionat de O. Ore [3] în 1935), precum şi sistemul dat de A. A. Bennett [4] în 1930, ambele cu cîte 5 axiome care se referă la relaţia de ordine parţială a laticii. În 1962, Iu. I. Sorkin [5] a construit un sistem cu 3 axiome privind operaţiile de reuniune şi intersecţie; el a pus totodată şi problema de a se da un sistem cu numai două axiome. Se pot însă pune şi alte probleme, cum ar fi de exemplu: caracterizarea laticilor generale cu ajutorul a 4 axiome, deoarece pînă în prezent nu se cunoaşte un astfel de sistem.

După cum am arătat, în lucrarea de faţă se rezolvă afirmativ această problemă. De asemenea se poate pune problema construirii de sisteme de cîte 3 axiome, care să fie mai simple decît cel al lui Sorkin.

Credem că, prin sistemele de axiome din lucrarea de faţă, am dat un răspuns şi la această ultimă întrebare şi că cercetările viitoare se vor putea concentra asupra problemei puse de Sorkin.

§ 1. VARIANTELE LEGILOR DE ASOCIATIVITATE

Pentru legea de compoziţie $\cup$ avem următoarele posibilităţi de exprimare a proprietăţii de asociativitate:

$$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z) \tag{I$_1$}$$

$$(x \cup y) \cup z = x \cup (z \cup y) \tag{I$_2$}$$

$$(x \cup y) \cup z = y \cup (x \cup z) \tag{I$_3$}$$

$$(x \cup y) \cup z = y \cup (z \cup x) \tag{I$_4$}$$

---

[1] Prin „axiomă-identitate'' înţelegem o axiomă care afirmă că o anumită identitate are loc. Este necesar să facem această precizare, altfel problema nu ar avea sens. Într-adevăr, un sistem de axiome poate fi totdeauna înlocuit printr-o singură axiomă, dacă folosim functorul logic „şi''.

$$(x \cup y) \cup z = (y \cup z) \cup x \qquad (\mathrm{II}_1)$$
$$(x \cup y) \cup z = (z \cup y) \cup x \qquad (\mathrm{II}_2)$$
$$(x \cup y) \cup z = (x \cup z) \cup y \qquad (\mathrm{II}_3)$$
$$(x \cup y) \cup z = (z \cup x) \cup y \qquad (\mathrm{II}_4)$$

$$x \cup (y \cup z) = (x \cup z) \cup y \qquad (\mathrm{III}_1)$$
$$x \cup (y \cup z) = (z \cup x) \cup y \qquad (\mathrm{III}_2)$$
$$x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z \qquad (\mathrm{III}_3)$$
$$x \cup (y \cup z) = (y \cup x) \cup z \qquad (\mathrm{III}_4)$$

$$x \cup (y \cup z) = y \cup (x \cup z) \qquad (\mathrm{IV}_1)$$
$$x \cup (y \cup z) = y \cup (z \cup x) \qquad (\mathrm{IV}_2)$$
$$x \cup (y \cup z) = z \cup (x \cup y) \qquad (\mathrm{IV}_3)$$
$$x \cup (y \cup z) = z \cup (y \cup x) \qquad (\mathrm{IV}_4)$$

Însă III_1, III_2, III_3, III_4, II_4 şi IV_3 exprimă aceeaşi lege respectiv cu I_2, I_4, I_1, I_3 , II_1 şi IV_2. Într-adevăr, dacă în III_1 facem substituţia

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & z & y \end{pmatrix}$$

obţinem

$$x \cup (z \cup y) = (x \cup y) \cup z$$

iar IV_3 pentru substituţia

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix},$$

devine

$$y \cup (z \cup x) = x \cup (y \cup z).$$

Analog pentru celelalte.

Acelaşi raţionament rămîne valabile şi pentru legea de compoziţie $\cap$. Obţinem, deci, următoarele variante ale axiomelor de asociativitate:

$$\begin{array}{ll}
A_1^0 & (x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z) \\
A_2^0 & (x \cup y) \cup z = x \cup (z \cup y) \\
A_3^0 & (x \cup y) \cup z = y \cup (x \cup z) \\
A_4^0 & (x \cup y) \cup z = y \cup (z \cup x) \\
A_5^0 & (x \cup y) \cup z = (y \cup z) \cup x \\
A_6^0 & (x \cup y) \cup z = (z \cup y) \cup x \\
A_7^0 & (x \cup y) \cup z = (x \cup z) \cup y \\
A_8^0 & x \cup (y \cup z) = y \cup (x \cup z) \\
A_9^0 & x \cup (y \cup z) = z \cup (x \cup y) \\
A_{10}^0 & x \cup (y \cup z) = z \cup (y \cup x)
\end{array}$$

pentru legea de compoziţie $\cup$, şi

$$\begin{array}{ll}
A^1_1 & (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z) \\
A^1_2 & (x \cap y) \cap z = x \cap (z \cap y) \\
A^1_3 & (x \cap y) \cap z = y \cap (x \cap z) \\
A^1_4 & (x \cap y) \cap z = y \cap (z \cap x) \\
A^1_5 & (x \cap y) \cap z = (y \cap z) \cap x \\
A^1_6 & (x \cap y) \cap z = (z \cap y) \cap x \\
A^1_7 & (x \cap y) \cap z = (x \cap z) \cap y \\
A^1_8 & x \cap (y \cap z) = y \cap (x \cap z) \\
A^1_9 & x \cap (y \cap z) = z \cap (x \cap y) \\
A^1_{10} & x \cap (y \cap z) = z \cap (y \cap x)
\end{array}$$

pentru legea de compoziţie $\cap$.

§ 2. PROPOZIŢII PRIVITOARE LA SISTEME COMPLETE DE AXIOME

Alături de axiomele de asociativitate să mai scriem cele două legi de absorbţie împreună cu toate variantele lor, considerate pentru prima oară de către Iu. I. Sorkin [6]

$$\begin{array}{ll}
B^0_1 & x \cap (x \cup y) = x \\
B^1_1 & x \cup (x \cap y) = x \\
B^0_2 & x \cap (y \cup x) = x \\
B^1_2 & x \cup (y \cap x) = x \\
B^0_3 & (x \cup y) \cap x = x \\
B^1_3 & (x \cap y) \cup x = x \\
B^0_4 & (y \cup x) \cap x = x \\
B^1_4 & (y \cap x) \cup x = x.
\end{array}$$

Notăm

$$\Lambda = \{A^0_1, \ldots, A^0_{10},\ A^1_1, \ldots, A^1_{10},\ B^0_1, \ldots, B^0_4,\ B^1_1, \ldots, B^1_4\}.$$

Fie Σ un subsistem complet (adică un sistem logic echivalent cu Σ_0), dar arbitrar, din Λ.

PROPOZIŢIA 1^1. Σ *conţine cel puţin una din axiomele* B^1_l $(l = 1, \ldots, 4)$.

Propoziţia 1^1 va rezulta din considerarea unui model pentru care se vor verifica axiomele din Λ cu excepţia axiomelor B^1_l $(l = 1, \ldots, 4)$.

Considerăm grupul ciclic de ordinul 3[2]). Operaţia grupului o notăm „$\cdot$". Prin definiţie luăm

$$x \cup y = 1$$
$$x \cap y = x \cdot y.$$

---

[2]) Acest model este luat din [7].

Axiomele A_i^0, A_j^1 și B_k^0 sînt evident satisfăcute. Axiomele B_l^1 nu se verifică. Într-adevăr, să considerăm de exemplu axioma B_1^1. Avem

$$x \cup (x \cap y) = x \cup (x \cdot y) = 1 \neq x.$$

Datorită comutativității operațiilor $\cup$ și $\cap$ din acest model, rezultă că oricare ar fi $l = 1, \ldots, 4$, B_l^1 nu se verifică.

PROPOZIȚIA 2^1. *Σ conține cel puțin una din axiomele A_j^1 $(j = 1, \ldots, 10)$.*

Pentru demonstrație considerăm mulțimea formată din primele cinci numere naturale $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ și definim legile de compoziția astfel[3]

$$x \cup y = \begin{cases} 5, \text{ dacă } x = 3, \ y = 4 \text{ sau } x = 4, \ y = 3 \\ \max\,(x, y) \text{ în toate celelalte cazuri} \end{cases}$$

$$x \cap y = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x = 3, \ y = 4 \text{ sau } x = 4, \ y = 3 \\ \min\,(x, y) \text{ în toate celelalte cazuri} \end{cases}$$

În [7] se demonstrează că B_1^0, B_1^1 și A_1^0 sînt verificate, și că A_1^1 nu este satisfăcută, deoarece $4 \cap (3 \cap 2) = 4 \cap 2 = 2$ iar $(4 \cap 3) \cap \cap\, 2 = 1 \cap 2 = 1$. Întrucît legile comutative C^0, C^1 sînt evident satisfăcute, rezultă că sînt valabile toate axiomele B_k^0, B_k^1 $(k = 1, \ldots, 4)$, A_i^0 $(i = 1, \ldots, 10)$ și că nici una din legile A_j^1 $(j = 1, \ldots, 10)$ nu se verifică.

Aplicînd principiul dualității, rezultă că o dată cu valabilitatea propozițiilor 1^1, 2^1 sînt adevărate și dualele lor, pe care le notăm 1^0, 2^0.

§ 3. DETERMINAREA UNOR SISTEME MINIMALE ALE LUI $\wedge$

Din aplicarea succesivă a propozițiilor 1^0, 1^1, 2^0 și 2^1, rezultă că orice subsistem complet de axiome din $\wedge$ trebuie să conțină cîte patru axiome: una de tipul A_i^0, una de tipul A_j^1, una de tipul B_k^0 și una de tipul B_l^1.

Notăm cu

$$\Sigma_{ij}^{kl} = \{A_i^0, A_j^1, B_k^0, B_l^1\} \quad i, j = 1, \ldots, 10\,; \ k, l = 1, \ldots, 4$$

sistemele formate din cîte patru axiome de tipuri diferite. În total sînt $10^2 \times 4^2 = 1\,600$ asemenea sisteme.

Nu orice sistem Σ_{ij}^{kl} este însă complet.

Această afirmație va rezulta din cele ce urmează. Vom da acum o teoremă care pune în evidență un număr de 32 sisteme Σ_{ij}^{kl} *minimale* (adică sisteme complete și independente).

---

[3] Acest model este luat din [7], § 3, pp. 478–479.
În [7] axiomele A_1^0, A_1^1, B_1^0 și B_1^1 sînt notate respectiv cu L_2', L_2, L_3' și L_3.

TEOREMA 1. *Sistemele de axiome*

$$\text{a)}\ \textstyle\sum_{ij}^{12}\ (i = 3{,}4\,;\ j = 5{,}6),\quad \sum_{ij}^{31}\ (i = 3{,}4\,;\ j = 9{,}10)$$

$$\textstyle\sum_{ij}^{24}\ (i = 2{,}4\,;\ j = 5{,}6),\quad \sum_{ij}^{43}\ (i = 2{,}4\,;\ j = 9{,}10)$$

precum şi *dualele lor*

$$\text{b)}\ \textstyle\sum_{ij}^{21}\ (i = 5{,}6\,;\ j = 3{,}4),\quad \sum_{ij}^{13}\ (i = 9{,}10\,;\ j = 3{,}4)$$

$$\textstyle\sum_{ij}^{42}\ (i = 5{,}6\,;\ j = 2{,}4),\quad \sum_{ij}^{34}\ (i = 9{,}10\,;\ j = 2{,}4)$$

sînt sisteme minimale ale lui $\wedge$.

Pentru demonstraţie vom da cîteva leme.

LEMA 1. B_k^0 şi B_l^1 *implică* I^0 I^1, *unde perechea ordonată* (k,l) *ia valorile* (1, 1), (1, 2), (2, 3) (2, 4), (3, 1), (4, 3) şi (4, 4), *iar prin* I^0 *și* I^1 *am notat legile de idempotență*

$$I^0 \quad x \cup x = x,$$

$$I^1 \quad x \cap x = x.$$

Să luăm $k = 1$, $l = 1$ şi să punem $y = x \cup y'$ în B_1^1; obţinem

$$x \cup [x \cap (x \cup y')] = x.$$

Aplicînd B_1^0 în paranteza mare, avem

$$x \cup x = x.$$

Folosind acest rezultat în B_1^0, unde punem $y = x$, obţinem

$$x \cap x = x.$$

În mod similar se demonstrează şi celelalte cazuri.

LEMA 2. B_1^0, B_2^1, şi A_i^0 $(i = 3,\ 4)$ *implică* C^0.

Într-adevăr, pentru $x = y \cup x'$, B_2^1 devine

$$(y \cup x') \cup [y \cap (y \cup x')] = y \cup x'.$$

Aplicînd B_1^0 obţinem

$$(y \cup x') \cup y = y \cup x'$$

şi cu ajutorul axiomei A_3^0 sau a axiomei A_4^0, membrul întîi se transformă şi avem

$$x' \cup (y \cup y) = y \cup x',$$

deci aplicînd lema 1, obţinem

$$x' \cup y = y \cup x'.$$

LEMA 3. B_3^0, B_1^1, şi A_i^0 $(i = 3,\ 4)$ *implică* C^0.

Într-adevăr, pentru $x = y \cup x'$, B_1^1 devine

$$(y \cup x') \cup [(y \cup x') \cap y] = y \cup x'.$$

Aplicînd B_3^0 obţinem

$$(y \cup x') \cup y = y \cup x'$$

iar cu ajutorul axiomei A_3^0 sau al axiomei A_4^0 avem :

$$x' \cup (y \cup y) = y \cup x'$$

de unde, aplicînd lema 1, obţinem

$$x' \cup y = y \cup x'.$$

LEMA 4. B_2^0, B_4^1 şi A_i^0 *(i = 2, 4) implică* C^0.

Luînd $x = x' \cup y$, B_4^1 devine

$$[y \cap (x' \cup y)] \cup (x' \cup y) = x' \cup y.$$

Aplicînd B_2^0 avem

$$y \cup (x' \cup y) = x' \cup y.$$

Aplicînd membrului întîi axioma A_2^0 sau axioma A_4^0 obţinem

$$(y \cup y) \cup x' = x' \cup y$$

de unde, folosind lema 1, vom avea

$$y \cup x' = x' \cup y.$$

LEMA 5. B_4^0, B_3^1 şi A_i^0 $(i = 2, 4)$ *implică* C^0.

Luînd $x = x' \cup y$, B_3^1 devine

$$[(x' \cup y) \cap y] \cup (x' \cup y) = x' \cup y.$$

Folosind B_4^0 avem

$$y \cup (x' \cup y) = x' \cup y.$$

Transformînd membrul întîi cu ajutorul axiomei A_2^0 sau al axiomei A_4^0 obţinem

$$(y \cup y) \cup x' = x' \cup y$$

de unde, aplicînd lema 1, obţinem

$$y \cup x' = x' \cup y.$$

LEMA 6. B_1^0, B_2^1, A_i^0 $(i = 3, 4)$ şi A_j^1 $(j = 5, 6)$ *implică* C^1.

Într-adevăr, cu ajutorul lemei 2, axioma B_1^0 se poate scrie

$$x \cap (y \cup x) = x$$

de unde, luînd $x = x' \cap y$, avem

$$(x' \cap y) \cap [y \cup (x' \cap y)] = x' \cap y.$$

Aplicînd axioma B_2^1 obţinem

$$(x' \cap y) \cap y = x' \cap y.$$

Transformînd acum membrul întîi cu ajutorul axiomei A_5^1 sau al axiomei A_6^1, obţinem

$$(y \cap y) \cap x' = x' \cap y$$

de unde, aplicînd lema 1, avem

$$y \cap x' = x' \cap y.$$

Lema 7. B_3^0, B_1^1, A_i^0 $(i = 3, 4)$ şi A_j^1 $(j = 9, 10)$ *implică* C^1.

Cu ajutorul lemei 3 axioma B_3^0 se poate scrie

$$(y \cup x) \cap x = x$$

de unde, dacă luăm $x = y \cap x'$, obţinem

$$[y \cup (y \cap x')] \cap (y \cap x') = y \cap x'$$

sau, folosind B_1^1,

$$y \cap (y \cap x') = y \cap x'.$$

Transformînd acum membrul întîi cu ajutorul axiomei A_9^1 sau a axiomei A_{10}^1, obţinem

$$x' \cap (y \cap y) = y \cap x'$$

de unde, aplicînd lema 1, obţinem

$$x' \cap y = y \cap x'.$$

Lema 8. B_2^0, B_4^1, A_i^0 $(i = 2, 4)$ şi A_j^1 $(j = 5, 6)$ *implică* C^1.

Cu ajutorul lemei 4 axioma B_2^0 se poate scrie

$$x \cap (x \cup y) = x$$

de unde, luînd $x = x' \cap y$, obţinem

$$(x' \cap y) \cap [(x' \cap y) \cup y] = x' \cap y.$$

Aplicînd B_4^1 avem

$$(x' \cap y) \cap y = x' \cap y.$$

Transformînd membrul întîi utilizînd axioma A_5^1 sau axioma A_6^1, obţinem

$$(y \cap y) \cap x' = x' \cap y$$

de unde, aplicînd lema 1, obţinem

$$y \cap x' = x' \cap y.$$

Lema 9. B_4^0, B_3^1, A_i^0 $(i = 2, 4)$ şi A_j^1 $(j = 9{,}10)$ *implică* C^1.

Cu ajutorul lemei 5 axioma B_4^0 se poate scrie

$$(x \cup y) \cap x = x$$

de unde, luînd $x = y \cap x'$, obţinem

$$[(y \cap x') \cup y] \cap (y \cap x') = y \cap x'.$$

Aplicînd B_3^1 avem

$$y \cap (y \cap x') = y \cap x'.$$

Transformînd membrul întîi folosind axioma A_9^1 sau axioma A_{10}^1, obţinem

$$x' \cap (y \cap y) = x \cap x'$$

de unde, aplicînd lema 1, avem

$$x' \cap y = y \cap x'.$$

Revenim acum la demonstraţia teoremei 1.

Din lemele 2 ... 9 rezultă că fiecare sistem Σ_{ij}^{kl} de tipul a), din enunţul teoremei 1, implică C^0 şi C^1 şi deci fiecare sistem Σ_{ij}^{kl} de tipul a) implică Σ_0. Cum însă Σ_0 implică $\wedge$, rezultă că fiecare sistem Σ_{ij}^{kl} de tipul a) este logic echivalent cu Σ_0, adică este *complet*.

Independenţa axiomelor din fiecare sistem Σ_{ij}^{kl} de tipul a) rezultă din propoziţiile 1^0, 1^1, 2^0 şi 2^1. Deci am demonstrat că sistemele Σ_{ij}^{kl} de tipul a) sînt complete şi independente, adică *minimale*.

Din proprietatea sistemelor minimale duale şi anume ,,dualul unui sistem minimal este şi el minimal'' rezultă că sistemele de tipul b), din enunţul teoremei 1, sînt minimale. Cu aceasta teorema 1 este complet demonstrată.

Problema care se pune acum este : Ce putem afirma privitor la restul de 1568 de sisteme Σ_{ij}^{kl} privind completitudinea lor?

În lucrarea de faţă vom pune în evidenţă un număr de 557 sisteme Σ_{ij}^{kl}, care nu sînt complete, urmînd ca într-o cercetare viitoare să dăm un răspuns complet la problema de mai sus.

În acest scop dăm cîteva propoziţii.

PROPOZIŢIA 3°. *Sistemele de axiome* Σ_{ij}^{kl} *unde* $i = 1, 2, 7$; $j = 1, \ldots, 10$; $k = 1, 3$ *şi* $l = 1, 2$, *sînt incomplete.*

Pentru demonstraţie considerăm mulţimea $\{0, 1\}$ şi definim operaţiile $\cup$ şi $\cap$ astfel :

$$x \cup y = x \qquad \begin{array}{c|cc} \cap & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Sînt evident satisfăcute axiomele A_i^0 ($i = 1, 2, 7$), A_j^1 ($j = 1, \ldots, 10$), B_k^0 ($k = 1, 3$) şi B_l^1 ($l = 1, 2$). Axioma C^0 însă nu se verifică.

PROPOZIŢIA 4°. *Sistemele de axiome* Σ_{ij}^{kl}, *unde* $i = 1, 3, 8$; $j = 1, \ldots, 10$; $k = 2, 4$ *şi* $l = 3, 4$, *sînt incomplete.*

Considerăm mulţimea $\{0, 1\}$ şi legile de compoziţie definite astfel

$$x \cup y = y \qquad \begin{array}{c|cc} \cap & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Axiomele A_i^0 ($i = 1, 3, 8$), A_j^1 ($j = 1, \ldots, 10$), B_k^0 ($k = 2, 4$) şi B_l^1 ($l = 3, 4$) sînt evident satisfăcute. Axioma C^0 nu se verifică.

PROPOZIŢIA 5°. *Sistemele de axiome* Σ_{ij}^{kl}, *unde* $i, j = 1, 2, 7$; $k, l = 1, 2, 3$, *sînt incomplete.*

Considerăm mulţimea $\{0, 1\}$ şi definim legile de compoziţie astfel

$$x \cup y = x \cap y = x.$$

Axiomele A_i^0, A_j^1 ($i, j = 1, 2, 7$) și B_k^0, B_l^1 ($k, l = 1, 2, 3$) sînt evident satisfăcute. Axiomele C^0 și C^1 nu se verifică.

PROPOZIȚIA 6°. *Sistemele de axiome* Σ_{ij}^{kl}, *unde* $i, j = 1, 3, 8$; $k, l = 2, 3, 4$, *sînt incomplete.*

Considerăm mulțimea $\{0, 1\}$ și legile de compoziție definite astfel

$$x \cup y = x \cap y = y.$$

Axiomele A_i^0, A_j^1 ($i, j = 1, 3, 8$) și B_k^0, B_l^1 ($k, l = 2, 3, 4$) sînt evident satisfăcute. Axiomele C^0 și C^1 nu se verifică.

PROPOZIȚIA 7⁰. *Sistemele de axiome* Σ_{ij}^{kl}, *unde* $i = 1, 2, 7$; $j = 1, 3, 8$; $k = 1, 3, 4$ *și* $l = 1, 2, 4$, *sînt incomplete.*

Considerăm mulțimea $\{0, 1\}$ și legile de compoziție definite astfel:

$$x \cup y = x, \quad x \cap y = y.$$

Axiomele A_i^0 ($i = 1, 2, 7$), A_j^1 ($j = 1, 3, 8$), B_k^0 ($k = 1, 3, 4$) și B_l^1 ($l = 1, 2, 4$) sînt satisfăcute. Axiomele C^0 și C^1 nu se verifică.

PROPOZIȚIA 8⁰. *Sistemele de axiome* Σ_{ij}^{kl}, *unde* $i = 1$; $j = 1, \ldots, 10$; $k = 1, 3$ *și* $l = 1, \ldots, 4$, *sînt incomplete.*

Considerăm mulțimea $\{\alpha, \beta, \omega\}$ și definim legile de compoziție astfel[4]

$$x \cup y = \begin{cases} x & \text{dacă } x \neq \omega \\ y & \text{dacă } x = \omega \end{cases}$$

$$x \cap y = \begin{cases} x = y & \text{dacă } x = y \\ \omega & \text{dacă } x \neq y. \end{cases}$$

În [7] se demonstrează că axiomele A_1^0, A_1^1, B_1^0, B_1^1 și C^1 sînt verificate și că C^0 nu este satisfăcută. Deci și axiomele A_j^1 ($j = 1, \ldots, 10$), B_3^0 și B_2^1 sînt verificate.

Axioma B_3^1 este verificată deoarece, dacă $x \neq y$, avem $(x \cap y) \cup x = \omega \cup x = x$, iar dacă $x = y$, avem $(x \cap y) \cup x = x \cup x = x$. Din B_3^1 și C^1 rezultă valabilitatea axiomei B_4^1.

Din principiul dualității, rezultă că o dată cu valabilitatea propozițiilor $3^0 \ldots 8^0$ sînt adevărate și dualele lor, pe care le notăm $3^1 \ldots 8^1$.

§ 4. AXIOME ABSORBȚIO-ASOCIATIVE

Rezultatele din § 1 relative la variantele legilor de asociativitate ne permit considerarea de noi axiome ale laticilor. Aceste axiome le obținem condensînd la un loc, într-un anumit mod, variantele legilor de asociativitate cu variantele legilor de absorbție.

---

[4] Acest model este luat din [7].

Din axiomele B^0_1 și A^0_i $(i = 1, \ldots, 10)$ vom forma altele, după cum urmează:

$$L^0_{1;1} \quad [(x \cup y) \cup z] \cup \{[(x \cup y) \cup z] \cup t\} = x \cup (y \cup z)$$

$$L^0_{1;2} \quad [(x \cup y) \cup z] \cup \{[(x \cup y) \cup z] \cup t\} = x \cup (z \cup y)$$

. . . .

$$L^0_{1;10} \quad [x \cup (y \cup z)] \cap \{[x \cup (y \cup z)] \cup t\} = z \cup (y \cup x).$$

Din axiomele B^1_1 și A^1_j $(j = 1, \ldots, 10)$ formăm axiomele:

$$L^1_{1;1} \quad [(x \cap y) \cap z] \cup \{[(x \cap y) \cap z] \cap t\} = x \cap (y \cap z)$$

$$L^1_{1;2} \quad [(x \cap y) \cap z] \cup \{[(x \cap y) \cap z] \cap t\} = x \cap (z \cap y)$$

. . . .

$$L^1_{1;10} \quad [x \cap (y \cap z)] \cup \{[x \cap (y \cap z)] \cap t\} = z \cap (y \cap x).$$

Analog se formează și celelalte axiome condensate.

Să mai scriem axiomele obținute din condensarea axiomelor B^1_4 și A^1_j $(j = 1, \ldots, 10)$:

$$L^1_{4;1} \quad \{t \cap [(x \cap y) \cap z]\} \cup [(x \cup y) \cap z] = x \cap (y \cap z)$$

$$L^1_{4;2} \quad \{t \cap [(x \cap y) \cap z]\} \cup [(x \cap y) \cap z] = x \cap (z \cap y)$$

. . . .

$$L^1_{4;10} \quad \{t \cap [x \cap (y \cap z)]\} \cup [x \cap (y \cap z)] = z \cap (y \cap x).$$

În general, o axiomă de acest tip va fi notată $L^\alpha_{i;j}$, unde $\alpha = 0, 1$; $i = 1, \ldots, 4$; $j = 1, \ldots, 10$, indicele i arată numărul axiomei de absorbție, indicile j arată numărul axiomei de asociativitate, iar indicile α arată legea de compoziție $\cup$ dacă $\alpha = 0$ și $\cap$ dacă $\alpha = 1$.

În total există deci $2 \times 4 \times 10 = 80$ axiome $L^\alpha_{i;j}$.

Vom numi axiomele $L^\alpha_{i;j}$ *axiome absorbțio-asociative*.

Problema firească care se pune acum este:

Ce consecință au axiomele absorbție-asociative privind sistemele independente de axiome ale laticilor, sau, cu alte cuvinte: Considerarea axiomelor absorbțio-asociative conduce la sisteme de axiome ale laticilor cu un număr mai mic de axiome? Răspunsul este afirmativ și este dat în §§ 5, 6.

Să notăm cu Λ_1 sistemul de axiome format de toate axiomele $L^\alpha_{i;j}$ împreună cu I^0 și I^1 (legile de idempotență).

§ 5. PROPOZIȚII RELATIVE LA SISTEME COMPLETE DE AXIOME DIN $\wedge_1$

Să notăm cu σ un subsistem complet, dar arbitrar, din $\wedge_1$.

PROPOZIȚIA 9. *σ conține cel puțin una din axiomele* I^0, I^1.

Pentru demonstrație vom considera mulțimea $\{a, b\}$ și legile de compoziție definite de tablourile:

$$\begin{array}{c|cc} \cup & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & b & b \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cap & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & b & b \end{array}$$

Axiomele $L^{\alpha}_{i;j}$ sînt evident satisfăcute. Axiomele I^0 și I^1 nu se verifică deoarece $a \cup a = b \neq a$ și $a \cap a = b \neq a$.

PROPOZIȚIA 10^1. *σ conține cel puțin una din axiomele* $L^1_{i;j}$ $(i = 1, \ldots, 4)$, $(j = 1, \ldots, 10)$.

Pentru demonstrație vom considera modelul folosit în propoziția 2^1 din §2.

Axiomele I^0 și I^1 sînt evident satisfăcute.

În propoziția 2^1 se arată că axiomele B^0_k, B^1_k $(k = 1, \ldots, 4)$, A^0_i $(i = 1, \ldots, 10)$ sînt satisfăcute și că nici una din legile A^1_j $(j = 1, \ldots, 10)$ nu se verifică. Deci rezultă că axiomele $L^0_{i;j}$ $(i = 1, \ldots, 4)$, $(j = 1, \ldots, 10)$ se verifică, și că nici una din axiomele $L^1_{i;j}$ $(i = 1, \ldots, 4)$, $(j = 1, \ldots, 10)$ nu este satisfăcută.

Împreună cu propoziția 10^1 vom considera și duala ei, pe care o notăm 10^0, care este de asemenea adevărată.

§ 6. DETERMINAREA UNOR SISTEME MINIMALE ALE LUI $\wedge_1$

Din aplicarea succesivă a propozițiilor 9, 10^0 și 10^1, rezultă că fiecare subsistem complet din $\wedge_1$ trebuie să conțină cîte trei axiome: una de tipul $L^0_{i;j}$, una de tipul $L^1_{k;l}$ și o idempotență I^0 sau I^1.

Vom nota cu

$$\sigma^{\alpha}_{i;j;k;l} = \{L^0_{i;j},\ L^1_{k;l},\ I^{\alpha}\}, \quad (i, k = 1, \ldots, 4);\ (j, l = 1, \ldots, 10), (\alpha = 0, 1)$$

sistemele de cîte trei axiome de tipuri diferite care se pot forma din $\wedge_1$.

În total sînt $4^2 \times 10^2 \times 2 = 3\,200$ de sisteme $\sigma^{\alpha}_{i;j;k;l}$.

Nu orice sistem $\sigma^{\alpha}_{i;j;k;l}$ este complet.

Vom da o teoremă care pune în evidență 96 de sisteme $\sigma^{\alpha}_{i;j;k;l}$ minimale.

TEOREMA 2. *Sistemele de axiome*

a) $\sigma^{\alpha}_{1;i;2;j}$ $(i = 3, 4)$, $(j = 5, 6)$; $\sigma^{\alpha}_{3;i;1;j}$ $(i = 3, 4)$, $(j = 9, 10)$

$\sigma^{\alpha}_{2;i;4;j}$ $(i = 2, 4)$, $(j = 5, 6)$; $\sigma^{\alpha}_{4;i;3;j}$ $(i = 2, 4)$, $(j = 9, 10)$

$$\text{b) } \overset{\alpha}{\sigma}_{1:i;4:j}\ (i = 9,\ 10),\ (j = 5,\ 6);\ \overset{\alpha}{\sigma}_{2;i;2;j}\ (i,\ j = 5,\ 6)$$

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{3;i;3;j}\ (i,\ j = 9,\ 10)$$

precum și dualele acestora

$$\text{c) } \overset{\alpha}{\sigma}_{2;i;1;j}\ (i = 5,\ 6),\ (j = 3,\ 4);\ \overset{\alpha}{\sigma}_{1;i;3;j}\ (i = 9,\ 10), (j = 3, 4)$$

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{4;i;2;j}\ (i = 5,\ 6)\ (j = 2,\ 4);\ \overset{\alpha}{\sigma}_{3;i;4;j}\ (i = 9, 10), (j = 2,\ 4)$$

$$\text{d) } \overset{\alpha}{\sigma}_{4;i;1;j}\ (i = 5,\ 6),\quad (j = 9,\ 10),\quad (\alpha = 0,\ 1)$$

sînt sisteme minimale ale lui Λ_1.

Pentru demonstrația teoremei 2 vom da cîteva leme.

LEMA 10. B_1^0, B_4^1, A_i^0, A_j^1 *și una din axiomele* I^0, I^1 *implică* $\sum_0$ $(i = 9,\ 10)$, $(j = 5,\ 6)$.

Într-adevăr, din B_1^0 și I^0, pentru $y = x$, obținem I^1; la fel, din B_4^1 și I^1, pentru $y = x$, obținem I^0.

Luînd $x = y \cup x'$ în B_4^1, obținem

$$[y \cap (y \cup x')] \cup (y \cup x') = y \cup x'$$

sau, folosind B_1^0,

$$y \cup (y \cup x') = y \cup x'.$$

Utilizînd A_i^0 $(i = 9,\ 10)$ în membrul întîi, obținem

$$x' \cup (y \cup y) = y \cup x'$$

adică

$$x' \cup y = y \cup x'$$

deci C^0.

Luînd, în B_1^0, $x = x' \cap y$, obținem

$$(x' \cap y) \cap [(x' \cap y) \cup y] = x' \cap y$$

sau, folosind B_4^1,

$$(x' \cap y) \cap y = x' \cap y$$

de unde, transformînd membrul întîi cu A_j^1 $(j = 5,\ 6)$, obținem

$$(y \cap y) \cap x' = x' \cap y$$

sau

$$y \cap x' = x' \cap y$$

deci C^1.

Din A_i^0 $(i = 9,\ 10)$, A_j^1 $(j = 5,\ 6)$, B_4^1, C^0 și C^1 rezultă evident A_1^0, A_1^1 și B_1^1.

LEMA 11. B_2^0, B_2^1, A_i^0, A_j^1 *și una din axiomele* I^0, I^1 *implică* $\sum_0$, $(i,\ j = 5,\ 6)$.

Din B_2^0 și I^0, pentru $y = x$, obținem I^1; la fel, din B_2^1 și I^1, pentru $y = x$, obținem I^0.

Luînd, în B_2^1, $x = x' \cup y$, obținem

$$(x' \cup y) \cup [y \cap (x' \cup y)] = x' \cup y$$

de unde, aplicînd B_2^0, avem

$$(x' \cup y) \cup y = x' \cup y$$

sau transformînd membrul întîi cu A_i^0 $(i = 5, 6)$, obținem

$$(y \cup y) \cup x' = x' \cup y$$

sau încă

$$y \cup x' = x' \cup y$$

adică C^0.

Pentru $x = x' \cap y$, B_2^0 devine

$$(x' \cap y) \cap [y \cup (x' \cap y)] = x' \cap y$$

de unde, aplicînd B_2^1, obținem

$$(x' \cap y) \cap y = x' \cap y$$

și transformînd membrul întîi cu A_j^1 $(j = 5, 6)$, avem

$$(y \cap y) \cap x' = x' \cap y$$

sau

$$y \cap x' = x' \cap y$$

adică C^1.

Din A_i^0 $(i = 5, 6)$, A_j^1 $(j = 5, 6)$, B_2^0, B_2^1, C^0 și C^1 rezultă evident A_1^0, A_1^1, B_1^0, B_1^1

LEMA 12. B_3^0, B_3^1, A_i^0, A_j^1 *și una din axiomele* I^0, I^1 *implică* $\sum_0$, $(i, j = 9, 10)$.

Din B_3^0 și I^0 rezultă I^1 și analog din B_3^1 și I^1 rezultă I^0.

Luînd, în B_3^1, $x = y \cup x'$, obținem

$$[(y \cup x') \cap y] \cup (y \cup x') = y \cup x'.$$

Aplicînd B_3^0 avem

$$y \cup (y \cup x') = y \cup x'$$

de unde, transformînd membrul întîi cu A_i^0 $(i = 9, 10)$, obținem :

$$x' \cup (y \cup y) = y \cup x'$$

sau

$$x' \cup y = y \cup x'$$

adică C^0.

Luînd, în B_3^0, $x = y \cap x'$, obținem

$$[(y \cap x') \cup y] \cap (y \cap x') = y \cap x'.$$

Aplicînd B_3^1 avem

$$y \cap (y \cap x') = y \cap x'$$

sau transformînd membrul întîi după A_j^1 $(j = 9, 10)$, obținem

$$x' \cap (y \cap y) = y \cap x'$$

sau încă

$$x' \cap y = y \cap x'$$

adică C^1.

Din A_i^0 $(i = 9, 10)$, A_j^1 $(j = 9, 10)$, B_3^0, B_3^1, C^0 și C^1 rezultă evident A_1^0, A_1^1, B_1^0, B_1^1.

LEMA 13. *Orice sistem* $\overset{\alpha}{\sigma}_{i:j;k:l}$ *din mulțimea* a), *din enunțul teoremei 2, implică* Σ_0.

Să considerăm de exemplu sistemul $\overset{0}{\sigma}_{2;4;4;5}$; avem

$$\overset{0}{L}_{2:4}\quad [(x \cup y) \cup z] \cap \{t \cup [(x \cup y) \cup z]\} = y \cup (z \cup x)$$

$$\overset{1}{L}_{4:5}\quad \{t \cap [(x \cap y) \cap z]\} \cup [(x \cap y) \cap z] = (y \cap z) \cap x$$

$$I^0\quad x \cup x = x.$$

Luînd $y = z = x$ în $\overset{0}{L}_{2:4}$ și folosind I°, obținem

$$x \cap (t \cup x) = x$$

adică B_2^0. Din B_2^0 și I^0, pentru $t = x$, obținem

$$x \cap x = x$$

adică I^1. Din B_2^0 și $\overset{0}{L}_{2:4}$ obținem

$$(x \cup y) \cup z = y \cup (z \cup x)$$

adică A_4^0.

Din $\overset{1}{L}_{4:5}$ și I^1, pentru $y = z = x$, obținem

$$(t \cap x) \cup x = x$$

adică B_4^1. Din $\overset{1}{L}_{4:5}$ și B_4^1 rezultă

$$(x \cap y) \cap z = (y \cap z) \cap x$$

adică A_5^1.

Însă sistemul $\{A_4^0, A_5^1, B_2^0, B_4^1\}$, conform teoremei 1, implică Σ_0. Deci $\overset{0}{\sigma}_{2:4:4:5}$ implică Σ_0.

În mod similar se demonstrează că orice sistem din mulțimea a) implică Σ_0.

LEMA 14. *Orice sistem* $\overset{\alpha}{\sigma}_{i:j;k:l}$ *din mulțimea* b), *din enunțul teoremei 2, implică* Σ_0.

Să considerăm, de exemplu, sistemul $\overset{1}{\sigma}_{2;5;2;6}$; avem

$$\overset{0}{L}_{2:5}\quad [(x \cup y) \cup z] \cap \{t \cup [(x \cup y) \cup z]\} = (y \cup z) \cup x,$$

$$\overset{1}{L}_{2:6}\quad [(x \cap y) \cap z] \cup \{t \cap [(x \cap y) \cap z]\} = (z \cap y) \cap x,$$

$$I^1\quad x \cap x = x.$$

Din $L^{1}_{2;6}$ şi I^1, pentru $y = z = x$, obţinem

$$x \cup (t \cap x) = x$$

adică B^1_2. Din B^1_2 şi I^1, pentru $t = x$, obţinem

$$x \cup x = x$$

adică I^0.

Din $L^{1}_{2;6}$ şi B^1_2, obţinem

$$(x \cap y) \cap z = (z \cap y) \cap x$$

adică A^1_6.

Din $L^{0}_{2;5}$ şi I^0, pentru $y = z = x$, obţinem

$$x \cap (t \cup x) = x$$

adică B^0_2. Din $L^{0}_{2;5}$ şi B^0_2, obţinem

$$(x \cup y) \cup z = (y \cup z) \cup x$$

adică A^0_5.

Însă sistemul $\{A^0_5, A^1_6, B^0_2, B^1_2, I^1\}$, conform lemei 11, implică $\sum_0$. Deci sistemul $\sigma^{1}_{2;5;2;6}$ implică $\sum_0$.

În mod similar se demonstrează că orice sistem din mulţimea b) implică $\sum_0$, folosind lemele 10, 11, 12.

Revenim acum la demonstraţia teoremei 2.

Din faptul evident că $\sum_0$ implică $\wedge_1$ şi din lema 13, rezultă că fiecare sistem $\sigma^{\alpha}_{i;j;k;l}$ din mulţimea a), din enunţul teoremei 2, este logic echivalent cu $\sum_0$, adică complet.

Din faptul evident că $\sum_0$ implică $\wedge_1$ şi din lema 14, rezultă că fiecare sistem $\sigma^{\alpha}_{i;j;k;l}$ din categoria b), din enunţul teoremei 2, este logic echivalent cu $\sum_0$, adică este *complet.*

Din propoziţiile 9, 10^0 şi 10^1 rezultă că fiecare sistem din mulţimea a) şi b) este independent.

Deci sistemele a) şi b), fiind complete şi independente, sînt *minimale.*

Aplicînd acum proprietatea că ,,dualul unui sistem minimal este şi el minimal'', obţinem că sistemele din mulţimea c) şi d) fiind dualele sistemelor a) şi b) sînt şi ele minimale. Cu aceasta teorema 2 este complet demonstrată.

Primită la redacţie la 24 aprilie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Rudeanu, *Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1963.
2. C. S. Peirce, *On the Algebra of Logic.* Amer. J. Math., **3**, 15—57 (1880) şi **7**, 180—202 (1884).
3. O. Ore, *On the Foundations of Abstract Algebra.* I. Ann. Math., **36**, 406—437 (1935).
4. A. A. Bennett, *Semi-Serial Order.* Amer. Math. Monthly, **37**, 418—423 (1930).
5. Ю.И. Соркин, *Задание структур тремя аксиомами-тождествами.* Учен. Зап. Моск. Гос. пед. ин-та, *8*, 61—66 (1962).
6. Ю.И. Соркин, *Независимые системы аксиом, определяющие структуру.* Укр. Мат. Ж., **3**, 85—97 (1951).
7. S. Rudeanu, *Independent Systems of Axioms in Lattice Theory.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumaine, **3 (51)**, 475—488 (1959).

ASUPRA TRATĂRII MATEMATICE A UNOR PROBLEME DE PLANIFICAREA DEZVOLTĂRII MACROECONOMICE SOCIALISTE

DE

LADISLAU NÉMETI

1. RELAȚIILE DE BAZĂ

În lucrarea de față încercăm să formulăm într-un limbaj matematic unele probleme în legătură cu alegerea cea mai avantajoasă a cotei de acumulare în economia unui stat socialist, luată în întregime, în vederea atingerii unui nivel de trai cît mai înalt, legea de bază a economiei socialiste. O problemă înrudită a fost tratată într-o lucrare anterioară [1].

Se cunoaște împărțirea avutului național și a produsului social total [2]. Avutul național al unui stat constă din :

A) Fondurile de producție.

B) Celelalte fonduri (de circulație, de rezervă, cele neproductive).

C) Avutul personal al populației.

Suma primelor două grupe o vom numi *avuție publică* și mărimea ei, considerată funcție de timp, o vom nota cu $Y(x)$.

Din munca productivă — prin folosirea fondurilor de producție — rezultă (anual) produsul social total. Acesta se împarte în :

a) Fondul pentru înlocuirea mijloacelor de producție consumate;

b) Venitul național.

Acesta din urmă se împarte în :

b_1) fondul de acumulare;

b_2) fondul de consum.

Toate aceste fonduri le considerăm de asemenea funcții de timp și dintre ele notăm :

— venitul național cu $v(x)$

— fondul de acumulare cu $a(x)$

— fondul de consum cu $y(x)$.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 8, P. 1281–1293, BUCUREȘTI, 1964

Prima relație cantitativă va fi atunci

$$v(x) = y(x) + a(x). \tag{1.1}$$

La aceste noțiuni facem următoarea observație:

Fondurile considerate se calculează în practică nu în fiecare moment, ci în anumite perioade (de exemplu anual). Atunci mărimile acestea le putem considera ca funcții definite pe mulțimea numerelor naturale. În locul acestor funcții folosim funcții interpolatoare, potrivit alese, ale unei variabile continue. Aceste funcții din urmă pot fi definite fie pe un interval finit $[x_0, x_s]$ al variabilei independente x (= timpul), fie pe un interval infinit $[x_0,\infty)$. În alegerea tuturor acestor funcții dispunem de o libertate mare. Condiții suplimentare vor fi introduse ulterior, atunci cînd se ivește necesitatea lor.

Avuția publică crește prin folosirea fondului de acumulare, deci este valabilă relația

$$Y'(x) = a(x) \tag{1.2}$$

Mai introducem coeficientul de eficacitate a folosirii fondurilor de producție, definit prin relația

$$\alpha(x) = \frac{v(x)}{Y(x)}. \tag{1.3}$$

Înlocuind relațiile (1.2) și (1.3) în formula (1.1) obținem *ecuația de bază a dezvoltării economice*:

$$\alpha(x)Y(x) - Y'(x) = y(x). \tag{1.4}$$

Dacă coeficientul $\alpha(x)$ se consideră ca dat – de exemplu dat în mod statistic an cu an – atunci ecuația (1.4) leagă între ele avutul public $Y(x)$ și fondul de consum $y(x)$. Planificarea dezvoltării economice în perspectivă se poate face, pe baza ecuației (1.4), în două feluri. Fie că se alege $Y(x)$ în mod arbitrar, respectînd anumite condiții ce se exprimă prin niște inegalități și care vor fi formulate de îndată, atunci funcția $y(x)$ este determinată prin ecuația (1.4); fie că pornind de la o situație dată la momentul de timp x_0 și cunoscînd pe $Y(x_0)$, se alege funcția $y(x)$ în mod arbitrar, respectînd de asemenea anumite condiții exprimate prin inegalități și atunci prin integrarea ecuației (1.4) este determinată funcția $Y(x)$.

Vom avea deci:

$$Y(x) = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,\mathrm{d}s}\left[Y(x_0) - \int_{x_0}^{x} y(u)\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}u\right]. \tag{1.5}$$

Funcțiile $Y(x)$ și $y(x)$ legate prin relația (1.4) respectiv (1.5) le vom numi funcții adjuncte.

În cele ce urmează se va lucra numai cu aceste trei funcții, $\alpha(x)$, $y(x)$, $Y(x)$. În vederea ușurării tratării matematice se vor impune următoarele condiții pentru ele:

1) Toate trei funcțiile sînt definite pe intervalul $[x_0, \infty)$.
2) Toate trei funcțiile sînt pozitive.

3) Funcția $\alpha(x)$ este continuă și derivabilă pe întregul interval de definiție.

4) Funcția $Y(x)$ este continuă pe întregul interval de definiție și derivabilă pe segmente.

5) Funcția $y(x)$ este continuă și derivabilă pe segmente; în punctele de discontinuitate se admit numai salturi.

Trecem acum la formularea condițiilor suplimentare, menționate mai sus, care trebuie verificate de către funcțiile $Y(x)$ respectiv $y(x)$.

În primul rînd se solicită ca funcțiile $Y(x)$ și $y(x)$ să fie nedescrescătoare, adică în intervalele în care ele sînt derivabile are loc:

$$\begin{aligned} Y'(x) &\geqslant 0, \\ y'(x) &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Acestea sînt inegalitățile fundamentale care vor fi presupuse în tot timpul lucrării; în afară de ele se mai pot prescrie o serie de condiții care exprimă anumite deziderate economice. Menționăm că nu ne vom folosi de ele în lucrarea de față, însă pentru continuarea cercetărilor inițiate în acest articol, ele pot fi utile.

Astfel, de exemplu, pentru creșterea relativă a fondului de consum se poate prescrie o margine inferioară pozitivă dată:

$$y'(x) \geqslant \lambda(x)y(x) \text{ cu } \lambda(x) > 0, \text{ funcție dată.} \tag{1.7}$$

Această creștere relativă poate fi mărginită și superior în vederea evitării unei variații prea bruște:

$$y'(x) \leqslant \Lambda(x)y(x) \text{ cu } \lambda(x) < \Lambda(x) < \infty. \tag{1.8}$$

Această condiție implică și continuitatea funcției $y(x)$.

O altă condiție apare dacă se impune ca „salariul real mediu" să fie o funcție nedescrescătoare în timp. Se ajunge la relația

$$\frac{y'(x)}{y(x)} - \frac{[\mu(x)Y(x)]'}{\mu(x)Y(x)} \geqslant 0, \tag{1.9}$$

unde $\mu(x)$ este o funcție pozitivă dată.

Și această relație mai poate fi întărită prescriindu-se o margine inferioară pozitivă pentru creșterea relativă a salariului și se obține

$$\frac{y'(x)}{y(x)} - \frac{[\mu(x)Y(x)]'}{\mu(x)Y(x)} \geqslant \nu(x), \ \nu(x) > 0, \text{ funcție dată.} \tag{1.10}$$

O ultimă îngrădire în alegerea funcțiilor $Y(x)$ respectiv $y(x)$ se obține prin faptul că la un moment dat, fiind dat numărul cetățenilor apți pentru muncă, la un anumit nivel dat al tehnicii, cantitatea utilajelor ce pot fi deservite de către lucrători este o mărime finită. De aici se deduce condiția

$$Y(x) \leqslant S(x), \ S(x) \text{ o funcție finită dată.} \tag{1.11}$$

Repetăm că în lucrarea de față se va cere numai îndeplinirea condițiilor (1.6); vom numi *funcții admisibile*, funcțiile $Y(x)$ și $y(x)$ legate prin ecuația (1.4) care verifică și relațiile (1. 6), respectiv care sînt nedescrescătoare.

Este evident că condițiile de admisibilitate pot fi formulate și pentru $Y(x)$ respectiv $y(x)$ singure. Astfel funcția $Y(x)$ este admisibilă atunci și numai atunci cînd ea verifică inegalitățile

$$\left.\begin{aligned} &Y'(x) \geqslant 0, \\ &Y''(x) - \alpha(x)\, Y'(x) - \alpha'(x)\, Y(x) \leqslant 0. \end{aligned}\right| \qquad (1.12)$$

Este adevărat că formula a doua se aplică numai acolo unde $Y(x)$ este de două ori derivabilă.

Formulei corespunzătoare pentru $y(x)$ îi lipsește acest dezavantaj. Folosind relația (1.5) obținem condițiile necesare și suficiente pentru ca $y(x)$ să fie admisibilă:

$$\left.\begin{aligned} &y'(x) \geqslant 0 \\ &L(y,\, x_0 \,|\, x) = \frac{y(x)}{\alpha(x)}\, e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\, ds} + \int_{x_0}^{x} y(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du \leqslant Y(x_0). \end{aligned}\right\} \qquad (1.13)$$

Observăm că a doua relație (1.13) poate fi scrisă și într-o formă ușor modificată. Notînd

$$L_y = \sup_{x \geqslant x_0} L(y,\, x_0 \,|\, x),$$

a doua relație (1.13) o putem scrie

$$L_y \leqslant Y(x_0). \qquad (1.13')$$

Formula (1.13') relevă interesul problemei de a stabili valoarea variabilei independente x pentru care $L(y,\, x_0 \,|\, x)$ își atinge maximul. Derivînd formula pentru L, obținem

$$\frac{dL\,(y_1\; x_0 \,|x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{\alpha(x)}\right) e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\, ds}. \qquad (1.14)$$

Rezultă că $L(y,\, x_0 \,|\, x)$ are același sens de monotonie ca și funcția $\frac{y(x)}{\alpha(x)}$ și își atinge maximul la o valoare a lui x, unde $\frac{\alpha(x)}{y(x)}$ este minimă.

Pentru un interval de definiție finit, există întotdeauna un număr infinit de funcții admisibile. Pentru intervalul $[x_0, \infty)$ însă existența funcțiilor admisibile este asigurată numai atunci cînd $\alpha(x)$ satisface anumite relații, și anume are loc:

TEOREMA 1. *O condiție necesară și suficientă pentru existența funcțiilor admisibile este ca funcția $\alpha(x)$ să satisfacă următoarele relații :*

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_0}^{\infty} e^{-\int_{x_0}^{u}\alpha(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}u < \infty \\ &\frac{e^{-\int_{x_0}^{x}\alpha(s)\,\mathrm{d}s}}{\alpha(x)} < N. \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

Demonstrație. Condițiile (1.15) sînt necesare. Într-adevăr, întrucît $y(x)$ este o funcție nedescrescătoare, avem

$$L(y, x_0\,|x) \geqslant y(x_0)\,L(1, x_0\,|\,x) = y(x_0)\left(\frac{e^{-\int_{x_0}^{x}\alpha(s)\mathrm{d}s}}{\alpha(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{u}\alpha(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}u\right).$$

Deci dacă cel puțin una din relațiile (1.15) nu este satisfăcută, atunci $L(1, x_0\,|x)$ nu este mărginit superior și prin urmare nici $L(y, x_0\,|x)$; deci condiția (1.13) nu este verificată.

Condițiile (1.15) sînt și suficiente. Dacă ele sînt verificate, atunci există $\sup\limits_{x\geqslant x_0} L(1, x_0\,|\,x) = L_1$ finit și alegînd pentru funcția fondului de consum

$$y(x) = \text{const.} = \frac{Y(x_0)}{L_1},$$

rezultă că relațiile (1.13) sînt verificate, deci această funcție aleasă $y(x)$ este admisibilă.

Din relațiile (1.15) pot fi extrase ușor cîteva consecințe. Are loc

LEMA 1. *Din prima relație (1.15) rezultă*

$$\int_{x_0}^{\infty} \alpha(s)\,\mathrm{d}s = \infty \tag{1.16}$$

și

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x}\alpha(s)\,\mathrm{d}s}}{\alpha(x)} = 0.$$

Demonstrație. Prima formulă este evidentă. Pentru a demonstra pe cea de-a doua, notăm

$$v(x) = e^{\int_{x_0}^{x}\alpha(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Avem $v(x) > 0$, $v'(x) > 0$ și din relația (1.15), $\int_{x_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{v(x)} < \infty$; formula (1.16) devine $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\, v'(x) = \infty$.

Să presupunem acum că $v'(x) < M$; atunci urmează $v(x) < Mx+m$, deci $\frac{1}{v(x)} > \frac{1}{Mx+m}$ și $\int_{x_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{v(x)} = \infty$, în contradicție cu relația (1.15).

În posesia acestui rezultat, a doua formulă (1.15) mai poate fi scrisă şi sub o altă formă, şi anume :

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} < \infty. \tag{1.15'}$$

Acest număr poate fi într-adevăr diferit de zero, de exemplu funcţia

$$\alpha(x) = \frac{K + (1 + \sin x)}{\frac{x^2}{2} + x(K - \cos x) + 1 + \sin x}, \quad K > 0$$

care satisface condiţiile impuse pentru funcţia $\alpha(x)$, inclusiv condiţiile (1.15) şi care este crescătoare şi descrescătoare în mod alternat, dă :

$$\frac{e^{-\int_0^x \alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} = \frac{1}{K + x(1 + \sin x)},$$

deci

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} = 0, \quad \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} = \frac{1}{K}\,.$$

Dacă însă funcţia $\alpha(x)$ este monotonă, atunci are loc :

LEMA 2. *Dacă funcţia pozitivă* $\alpha(x)$ *este monotonă, atunci relaţia*

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\,ds}\,du < \infty$$

implică

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)} = 0. \tag{1.17}$$

Demonstraţie. Evident, $\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,ds}}{\alpha(x)}$ poate fi diferit de zero numai atunci cînd avem $\underline{\lim_{x\to\infty}}\, \alpha(x) = 0$. Din această cauză lema este nebanală numai în cazul cînd funcţia monotonă $\alpha(x)$ este necrescătoare şi are loc condiţia :

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0.$$

Punînd în relaţia (1.14) : $y(x) \equiv 1$, rezultă că pentru $\alpha(x)$ necrescătoare, $L(1, x_0 \mid x)$ este nedescrescătoare, ea are deci o limită finită pentru $x \to \infty$, sau $\lim\limits_{x\to\infty} L\,(1,\, x_0 \mid x) = \infty$. Întrucît al doilea termen din expresia pentru $L\,(1,\, x_0 \mid x)$ are o limită finită, primul termen are şi el o limită finită sau avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,ds}}{\alpha\,(x)} = \infty .$$

Deoarece însă în virtutea lemei 1 limita inferioară este zero, rezultă justeţea conţinutului lemei 2.

2. VALOAREA UNEI DEZVOLTĂRI ECONOMICE

Pentru a putea compara două dezvoltări economice caracterizate de exemplu prin funcţiile respective ale fondului de consum $y\,(x)$ şi $y_1(x)$, introducem noţiunea de valoare a dezvoltării pe intervalul $[x_0, x]$, definită prin

$$V\,(x,\, x_0) = \int_{x_0}^{x} y\,(u)\, q\,(u)\, \mathrm{d}\, u, \tag{2.1}$$

unde

$$q\,(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} \beta(s)\,ds} \tag{2.2}$$

este o funcţie de ponderă cu funcţia de „dobîndă" $\beta\,(x)$ pentru care se mai prescrie

$$0 \leqslant \beta\,(x) \leqslant \alpha\,(x), \quad (\beta\,(x) \not\equiv \alpha\,(x)). \tag{2.3}$$

Valoarea $V\,(x)$ este deci, din punctul de vedere economic, valoarea actualizată în momentul de timp x_0 al fondurilor de consum obţinute în intervalul $[x_0,\, x]$. Justificarea relaţiei (2.3) rezultă din formula (1.3) dacă o scriem sub forma

$$v\,(x) = \alpha\,(x)\, Y\,(x)$$

în care venitul naţional apare ca venitul net, obţinut prin „folosirea" avuţiei publice cu dobînda α; atunci dobînda β de actualizare nu poate fi mai mare decît factorul α.

Condiţia (2.3) mai poate fi caracterizată şi altfel. Ea este echivalentă cu dezideratul ca $\beta\,(x)$ să aibă următoarea însuşire:

Fie $Y(x)$ (şi cu $y\,(x)$ adjunctă) şi $Y_1(x)$ (cu $y_1\,(x)$ adjunctă) două dezvoltări economice date. Fie $x_1 > x_0$ şi $Y(x_0) = Y_1\,(x_0)$, $Y\,(x_1) = Y_1\,(x_1)$ şi $Y\,(x) \geqslant Y_1\,(x)$ pentru $x \in [x_0,\, x_1]$, $(Y\,(x) \not\equiv Y_1\,(x))$.

Se cere ca $\beta(x)$ să fie astfel definită încît pentru două funcţii admisibile oarecare $Y\,(x)$ şi $Y_1(x)$ ce satisfac relaţiile de mai sus, însă de altfel sînt arbitrare, să avem, punînd

$$V = \int_{x_0}^{x_1} y\,(x)\, q\,(x)\, \mathrm{d}x \text{ şi } V_1 = \int_{x_0}^{x_1} y_1\,(x)\, q\,(x)\, \mathrm{d}x,$$

$$V > V_1. \tag{2.4}$$

Într-adevăr, întrucît

$$y(x) = \alpha(x)\, Y(x) - Y'(x),$$

se poate scrie

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \alpha(x)\, Y(x)\, q(x)\, \mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x_1} Y'(x)\, q(x)\, \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} [\alpha(x)\, q(x) + q'(x)]\, Y(x)\, \mathrm{d}x - Y(x_1)\, q(x_1) + Y(x_0)\, q(x_0)$$

şi o formulă analogă pentru V_1. Formînd diferenţa lor obţinem :

$$V - V_1 = \int_{x_0}^{x_1} e^{-\int_{x_0}^{x} \beta(s)\mathrm{d}s} [\alpha(x) - \beta(x)]\, [Y(x) - Y_1(x)]\, \mathrm{d}x.$$

Dintre cei trei factori ai funcţiei de sub integrală, primul este pozitiv, al treilea nenegativ şi *arbitrar*, deci pentru ca integrala să fie pozitivă, trebuie să fie

$$\alpha(x) - \beta(x) \geqslant 0.$$

3. AMELIORAREA UNEI DEZVOLTĂRI PLANIFICATE

Cu ajutorul noţiunii de valoare a dezvoltării, introdusă în punctul precedent, sîntem în măsură de a compara două funcţii admisibile. Vom numi funcţia admisibilă $\bar{y}(x)$ o ameliorare a funcţiei admisibile $y(x)$ — cu punctul de plecare x_0 — dacă există un număr $\bar{x} \geqslant x_0$ astfel încît pentru orice $x \geqslant \bar{x}$,

$$\bar{V}(x, x_0) \geqslant V(x, x_0) \tag{3.1}$$

cu

$$\bar{V}(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} \bar{y}(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s)\mathrm{d}s}\, du \quad \text{şi} \quad V(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} y(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s)\mathrm{d}s}\, du.$$

Relaţia (3.1) se mai scrie

$$\int_{x_0}^{x} [\bar{y}(u) - y(u)]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s)\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}u \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Cu ajutorul expresiei (3.2) funcţiile admisibile formează o mulţime dintr-un spaţiu semiordonat.

Se pune întrebarea, dacă pentru orice funcţie admisibilă $y(x)$ există o ameliorare $\bar{y}(x)$, sau, din contră, dacă există funcţii admisibile ce nu pot fi ameliorate. Dacă astfel de funcţii există, ele ar reprezenta dezvoltări economice optime.

Vom demonstra un rezultat parţial :

TEOREMA 2. *Dacă coeficientul de eficacitate* $\alpha(x)$ *este o funcţie monotonă pentru orice* $x > x_1 \geqslant x_0$ *(*x_1 *fiind un număr dat), atunci orice funcţie admisibilă* $y(x)$ *poate fi ameliorată.*

Demonstrația o vom duce prin indicarea construcției efective a ameliorării, separat pentru cazul cînd funcția $\alpha(x)$ este nedescrescătoare pentru $x \geqslant x_1$ și separat cînd ea este necrescătoare.

I. Dacă $\alpha(x)$ este nedescrescătoare, atunci funcția ameliorată $\overline{y}(x)$ se va construi în felul următor: se alege un număr $\xi \geqslant x_1$ și un număr $y_0 > 0$, satisfăcînd condițiile $y_0 < y(\xi)$ și $y_0 \leqslant y(x_0)$. Se va pune

$$\begin{cases} \text{pentru } x_0 \leqslant x < \xi: & \overline{y}(x) = y_0 \\ \text{pentru } x \geqslant \xi: & \overline{y}(x) = y(x) + \lambda\, \alpha(x), \ (\lambda > 0). \end{cases} \tag{3.3}$$

Funcția $\overline{y}(x)$ prezintă deci la $x = \xi$ un salt.

Vom arăta că λ poate fi ales astfel încît funcția $\overline{y}(x)$ să fie și ea admisibilă și concomitent să se verifice și condiția (3.2).

Funcțiile $y(x)$ și $\overline{y}(x)$ fiind nedescrescătoare, ele vor fi admisibile, dacă satisfac condiția (1.13); adică se cere

$$\frac{y(x)}{\alpha(x)}\, e^{-\int_{\xi}^{x}\alpha(s)\mathrm{d}s} + \int_{\xi}^{x} y(u)\, e^{-\int_{\xi}^{u}\alpha(s)\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}u \leqslant Y(\xi),$$

sau

$$\frac{y(x)}{\alpha(x)}\, e^{-\int_{x_0}^{x}\alpha(s)\mathrm{d}s} + \int_{\xi}^{x} y(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u}\alpha(s)\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}u \leqslant Y(\xi)\, e^{-\int_{x_0}^{\xi}\alpha(s)\mathrm{d}s} \tag{3.4}$$

și

$$\frac{y(x)}{\alpha(x)}\, e^{-\int_{x_0}^{x}\alpha(s)\mathrm{d}s} + \int_{\xi}^{x} y(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u}\alpha(s)\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}u + \lambda\Big[e^{-\int_{x_0}^{x}\alpha(s)\mathrm{d}s} + \int_{\xi}^{x} \alpha(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u}\alpha(s)\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}u \Big] \leqslant \overline{\mathrm{Y}}(\xi)\, e^{-\int_{\alpha_0}^{\xi}\alpha(s)\mathrm{d}s}.$$

Relația aceasta se transcrie în

$$\frac{y(x)}{\alpha(x)}\, e^{-\int_{x_0}^{x}\alpha(s)\mathrm{d}s} + \int_{\xi}^{x} y(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u}\alpha(s)\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}u + \lambda e^{-\int_{x_0}^{\xi}\alpha \mathrm{d}s} \leqslant \overline{\mathrm{Y}}(\xi)\, e^{-\int_{x_0}^{\xi}\alpha \mathrm{d}s}. \tag{3.5}$$

O condiție suficientă pentru satisfacerea condiției (3.5) este

$$\lambda \leqslant \overline{\mathrm{Y}}(\xi) - Y(\xi), \tag{3.6}$$

căci din relațiile (3.4) și (3.6) rezultă (3.5).

Pe de altă parte, avem

$$Y(\xi) = e^{\int_{x_0}^{\xi}\alpha(s)\mathrm{d}s}\Big[Y(x_0) - \int_{x_0}^{\xi} y(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u}\alpha(s)\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}u \Big]$$

și

$$\overline{\mathrm{Y}}(\xi) = e^{\int_{x_0}^{\xi}\alpha(s)\mathrm{d}s}\Big[\mathrm{Y}(x_0) - y_0 \int_{x_0}^{\xi} e^{-\int_{\alpha_0}^{u}\alpha(s)\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}u \Big].$$

Relația (3.6) se transformă deci în

$$\lambda \leqslant e^{\int_{x_0}^{\xi} \alpha ds} \int_{x_0}^{\xi} [y\ (u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s) ds}\, du. \tag{3.7}$$

Trecem acum la compararea valorilor dezvoltărilor.
Avem

$$V = \int_{x_0}^{x} y\ (u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du$$

$$\overline{V} = y_0 \int_{x_0}^{\xi} e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du + \int_{\xi}^{x} y\ (u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du + \lambda \int_{\xi}^{x} \alpha\ (u)\, e^{-\int_{\alpha_0}^{u} \beta(s) ds}\, du$$

$$\Delta\ (x) = \overline{V} - V = \lambda \int_{\xi}^{x} \alpha\ (u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du - \int_{x_0}^{\xi} [y\,(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s) ds}\, du, (x > \xi).$$

Condiția necesară și suficientă pentru existența unui număr $\overline{x}$, astfel ca pentru orice $x > \overline{x}$ să fie $\Delta\ (x) \geqslant 0$, este

$$\lambda \int_{\xi}^{\infty} \alpha\ (u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta\ (s)\ ds}\, du > \int_{x_0}^{\xi} [y\,(x) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta\ (s)\ ds}\, du. \tag{3.8}$$

Condițiile (3.7) și (3.8) le îmbinăm într-una singură :

$$\frac{\int_{x_0}^{\xi} [y\ (u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta\ (s)\ ds}\, du}{\int_{\xi}^{\infty} \alpha\,(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta\ (s)\ ds}\, du} < \lambda \leqslant e^{\int_{x_0}^{\xi} \alpha\ (s)\ ds} \int_{x_0}^{\xi} [y\,(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha\ (s)\ ds}\, du.$$

Vom putea alege λ în mod convenabil, dacă

$$e^{\int_{x_0}^{\xi} \alpha\ (s)\ ds} \int_{\xi}^{\infty} \alpha\,(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta\ (s)\ ds}\, du > \frac{\int_{x_0}^{\xi} [y\,(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta\ (s)\ ds}\, du}{\int_{x_0}^{\xi} [y\,(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha\ (s)\ ds}\, du} \cdot \tag{3.9}$$

Dacă există un număr ξ care verifică relația (3.9), atunci factorul λ poate fi ales astfel încît $V\ (x) > V\ (x)$ pentru orice $x > \overline{x}$, unde $\overline{x}$ este un număr finit (și mai mare ca ξ), $\overline{y}\ (x)$ rămînînd o funcție admisibilă, deci teorema va fi demonstrată.

Membrul întîi al relației (3.9) se transformă. Avînd în vedere prima relație (1.16), este valabilă formula

$$e^{-\int_{x_0}^{\xi} \alpha\ (s)\ ds} = \int_{\xi}^{\infty} \alpha\,(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha\ (s)\ ds}\, du.$$

Cu acest rezultat, relația (3.9) devine

$$\frac{\int_{\xi}^{\infty} \alpha(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s)\, ds}\, du}{\int_{\xi}^{\infty} \alpha(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du} > \frac{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s)\, ds}\, du}{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du}. \tag{3.10}$$

Înmulțim întreaga relație cu factorul $\dfrac{e^{\int_{x_0}^{\xi} \beta(s)\, ds}}{e^{\int_{x_0}^{\xi} \alpha(s)\, ds}}$ și obținem

$$\frac{\int_{\xi}^{\infty} \alpha(u)\, e^{-\int_{\xi}^{u} \beta(s)\, ds}\, du}{\int_{\xi}^{\infty} \alpha(u)\, e^{-\int_{\xi}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du} > \frac{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - (y_0)]\, e^{\int_{u}^{\xi} \beta(s)\, ds}\, du}{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{\int_{u}^{\xi} \alpha(s)\, ds}\, du}. \tag{3.10a}$$

Inegalitatea aceasta este însă adevărată pentru orice $\xi \in (x_0, \infty)$; într-adevăr, dacă se ține cont de relația

$$\beta(x) \leqslant \alpha(x) \quad (\beta(x) \not\equiv \alpha(x)),$$

atunci se vede imediat că membrul întîi este mai mare decît 1, iar membrul doi este mai mic decît 1.

II. Dacă $\alpha(x)$ este necrescătoare, demonstrația decurge în mod analog. Funcția de ameliorare se construiește în felul următor :

$$\begin{cases} \text{pentru } 0 \leqslant x < \xi: & \bar{y}(x) = y_0 \\ \text{pentru } x \geqslant \xi: & \bar{y}(x) = y(x) + \lambda, \quad (\lambda > 0). \end{cases} \tag{3.11}$$

Și aici este valabilă relația (3.4), iar în locul lui (3.5) obținem

$$\frac{y(x)}{\alpha(x)}\, e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\, ds} + \int_{\xi}^{x} y(u)\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du + \lambda \left[\frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\, ds}}{\alpha(x)} + \right.$$

$$\left. + \int_{\xi}^{x} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du \right] \leqslant \overline{Y}(\xi)\, e^{-\int_{x_0}^{\xi} \alpha(s)\, ds}. \tag{3.12}$$

O condiție suficientă pentru îndeplinirea acestei relații este :

$$\lambda \left[\frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\, ds}}{\alpha(x)} + \int_{\xi}^{x} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du \right] \leqslant [\overline{Y}(\xi) - Y(\xi)]\, e^{-\int_{x_0}^{\xi} \alpha(s)\, ds} \tag{3.13}$$

fiindcă din condițiile (3.4) și (3.13) rezultă (3.12). Analog cu cazul I obținem

$$\lambda \leqslant \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du}{\dfrac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\, ds}}{\alpha(x)} + \displaystyle\int_{\xi}^{x} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du}$$

care trebuie să fie verificată pentru orice $x \geqslant \xi$.

Pentru aceasta trebuie ca λ să fie ales în modul următor:

$$\lambda \leqslant \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du}{\sup\limits_{x \geqslant \xi} \left[\dfrac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\, ds}}{\alpha(x)} + \displaystyle\int_{\xi}^{x} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du \right]}. \tag{3.14}$$

Din formula (1.14) rezultă că în cazul de față funcția de la numitor este nedescrescătoare, în plus lema 2 enunță că

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\, ds}}{\alpha(x)} = 0.$$

În consecință obținem

$$\sup_{x \geqslant \xi} \left[\frac{e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\, ds}}{\alpha(x)} + \int_{\xi}^{x} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du \right] = \int_{\xi}^{\infty} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du.$$

Condiția (3.14) se transformă deci în

$$\lambda \leqslant \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du}{\displaystyle\int_{\xi}^{\infty} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du}. \tag{3.15}$$

Comparînd valorile $V(x)$ și $V(x)$, obținem condiția pentru ca $\bar{y}(x)$ să fie o ameliorare a lui $y(x)$ cu totul analog cu partea întîi a demonstrației:

$$\lambda > \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s)\, ds}\, du}{\displaystyle\int_{\xi}^{\infty} e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s)\, ds}\, du}. \tag{3.16}$$

Contopirea condițiilor (3.15) și (3.16) ne dă

$$\frac{\int_{\xi}^{\infty} e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s)\, ds}\, du}{\int_{\xi}^{\infty} e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du} > \frac{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \beta(s)\, ds}\, du}{\int_{x_0}^{\xi} [y(u) - y_0]\, e^{-\int_{x_0}^{u} \alpha(s)\, ds}\, du}, \tag{3.17}$$

relație cu totul analogă cu inegalitatea (3.10) și care se demonstrează exact în același fel ca și aceasta. Astfel teorema este demonstrată.

Concluzii. La punctul precedent s-a demonstrat că, dacă funcția coeficientului de eficacitate a folosirii fondurilor $\alpha(x)$ este monotonă, nu există planificări de perspectivă optime, adică la orice dezvoltare economică se poate găsi o ameliorare a ei, în sensul definiției de la punctele 2 și 3. Nu s-a reușit să se clarifice care este situația în cazul unei funcții $\alpha(x)$ care își schimbă mereu sensul de monotonie, funcție ce putem să o numim funcție oscilatoare. Se poate însă bănui că afirmația teoremei 2 este adevărată și în cazul acesta. Problema aceasta mai trebuie cercetată și pentru cazul cînd pentru definiția admisibilității se folosesc și una sau mai multe din condițiile suplimentare (1.7)... (1.11). S-ar părea că circumstanța enunțată în teorema 2 rămîne valabilă și în aceste condiții.

Dacă conjectura aceasta se va adeveri, atunci s-ar ajunge la concluzia că la orice dezvoltare economică se poate găsi una ameliorată. Acest lucru se referă la funcții $y(x)$ și $Y(x)$ care satisfac ecuația (1.4) și condițiile (1.6)... (1.11), iar sensul ameliorării este acela definit prin inegalitatea (3.2), deci s-ar ajunge la o teoremă matematică.

În ce măsură pot fi aplicate aceste adevăruri matematice la realitatea economică foarte complexă? Acest lucru depinde de măsura în care abstracțiunile și simplificările inerente tratării matematice constituie în lucrarea de față o aproximare justă și folosibilă a realității, aproximare care să redea esența realității fără a o deforma.

Dacă presupunem că premisele matematice ale acestei lucrări sînt juste și din punctul de vedere economic — în sensul expus în aliniatul precedent — atunci adevărurile matematice enunțate aici constituie afirmații aplicabile la realitatea economică.

Primită la redacție la 29 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. L. NÉMETI, *Metodele analizei matematice în planificarea socialistă.* Studii și cercetări de matematică (Cluj) VIII, *3–4*, 369–390 (1957).
2. *Manual de economie politică*, București, 1954, ed. II. Editura politică.

RECENZIE

G. MARINESCU, *Spaţii vectoriale pseudotopologice şi teoria distribuţiilor*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963, 232 pag.

Scopul acestei cărţi este de a da o privire de ansamblu asupra diverselor probleme de analiză funcţională care apar pe marginea teoriei distribuţiilor. Cartea serveşte şi ca o excelentă introducere în această ultimă teorie. Deşi se ţine seama de tratatele care au precedat această carte (ca cele ale lui L. Schwartz, Ghelfand şi Şilov, N. Bourbaki etc.), ea diferă esenţial prin utilizarea mijloacelor celor mai directe legate de structurile pseudotopologice şi pseudonormate cît şi prin aceea că conţinutul cărţii este foarte variat ceea ce a fost posibil datorită faptului că autorul s-a rezumat ca în fiecare problemă să prezinte doar faptele fundamentale fără dezvoltările ulterioare deosebit de tehnice. De altfel, acesta este chiar spiritul cărţii care după autorul ei se adresează îndeosebi începătorilor şi practicienilor. Cartea conţine cinci capitole. În primul capitol se introduc noţiunile fundamentale ca : spaţii topologice, spaţii Banach, Hilbert, spaţii local convexe, reuniuni pseudotopologice, spaţii polinormate, spaţii de funcţii derivabile. Să remarcăm că noţiunea de spaţiu perfect diferă puţin de cea a lui Ghelfand şi Şilov şi că alături de spaţiile D, E, S ale lui L. Schwartz se consideră şi spaţiul Z al lui Ghelfand şi Şilov. Să remarcăm de asemenea că noţiunea de spaţiu polinormat a fost definită de autori în 1955, ea a fost ulterior considerată de Waelbroeck, Mikuşinski, S. da Silva etc. în formulări echivalente.

Capitolul II este consacrat studiului operaţiilor liniare în spaţii normate (ca introducere), în spaţii local convexe sau polinormate (unde se pune în evidenţă că spaţiile de operaţii liniare continue în aceste spaţii sînt înzestrate cu o structură naturală de spaţiu polinormat etc.) şi al funcţionalelor liniare în spaţiile local convexe, unde se dau teorema Hahn-Banach şi consecinţele sale, proprietăţile spaţiilor bornologice şi Frechet, coincidenţa structurii polinormate cu cea a convergenţei slăbite pentru spaţiile perfecte. De altfel, în întreaga carte nu se utilizează altă convergenţă în spaţiile de operaţii liniare în afară de cea slabă şi cea polinormată. În fine, în ultimul paragraf se introduc distribuţiile şi operaţiile elementare cu ele. (Să menţionăm că L. Schwartz a remarcat că corolarul de la pag. 78 nu este complet demonstrat. Valabilitatea consecinţei sale dată la pag. 79 privind spaţiile D şi D' nu este încă cunoscută şi constituie o problemă foarte importantă pentru analiză). Aceasta nu împietează expunerea ulterioară în carte, deoarece nu se utilizează de loc aceste două proprietăţi. Capitolul III conţine o prezentare a elementelor fundamentale de teoria produselor tensoriale anume : produsele tensoriale inductive şi proiective ale spaţiilor local convexe, transformările integrale, cele nucleare şi spaţiile nucleare. Se ia în mod constant ca punct de plecare cazul spaţiilor normate şi se utilizează structura polinormată a spaţiilor operaţiilor liniare continue. Aceasta dă un caracter elementar şi unitar expunerii. Acest capitol (care conţine de altfel şi teorema nucleelor a lui L. Schwartz) permite iniţierea în teoria produselor tensoriale a spaţiilor vectorial topologice datorită lui Grothendieck fără utilizarea memoriilor excelente dar deosebit de dificile ale acestuia.

Capitolul IV reface într-un cadru funcţional cîteva din noţiunile analizei clasice ca : integrala Stieltjes vectorială, integrala Cauchy, diferenţiala Gateaux, diferenţiale Fréchet (în sensul autorului) şi integrala în raport cu o măsură vectorială (teorie dezvoltată de N. Dinculeanu şi de autor luînd ca punct de plecare măsurile operaţionale cu variaţia mărginită). Un ultim paragraf este consacrat distribuţiilor vectoriale (definiţii, derivări, convoluţii etc.).

Ultimul capitol prezintă (cu scopul de a trezi interesul cititorului) cîteva fapte privind măsurile vectoriale, descompunerea spaţiilor nucleare în funcţii proprii, ecuaţiile cu derivate parţiale şi procesele stocastice.

Cartea este scrisă într-un stil curgător dar concis. Ea va fi desigur utilă matematicienilor care fără a fi specialişti în teoria distribuţiilor sau în teorii adiacente de Analiză funcţională, au nevoie de acestea în cercetările lor sau în formarea lor ştiinţifică generală.

C. Foiaş

[illegible] Berlin, 1962, [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 39 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici și automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferențială neeuclidiană**, 1964, 387 p., 13 lei.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoreme de descompunere ale algebrei)**, 1960, 619 p., 25, 50 lei (epuizat).

D. BARBILIAN, **Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)**, 1956, 380 p., 7 lei.

IANKŐ BÉLA, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații liniare**, 1961, 223 p., 8,85 lei.

N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU și A. CORNEA, **Seminar S. Stoilow** (1959—1960),**Teoria potențialului pe suprafețe riemanniene**, 1962, 160 p., 5 lei.

G. CIUCU și R. THEODORESCU, **Procese cu legături complete**, 1960, 232 p., 9,85 lei (epuizat).

C. CONSTANTINESCU, **Seminar M. Neculce, Teoria mulțimilor**, 1962, 108 p., 3,25 lei (epuizat).

C. CORDUNEANU, **Funcții aproape-periodice**, 1961, 191 p., 8, 30 lei (epuizat).

ROMULUS CRISTESCU, **Spații liniare ordonate**, 1959, 332 p., 11,10 lei.

I. CUCULESCU, **Seminar O. Onicescu, Algebre Lie**, 1962, 148 p., 5,15 lei.

C. FOIAȘ, **Seminar M. Nicolescu 1959—1960, Teoria spectrală în algebre Banach** (**necomutative**) **axată pe noțiunea de rezolventă**, 1962, 82 p., 2,85 lei.

ALEXANDRU FRODA, **Algebra superioară, fundamente** : **mulțimi și operații, divizibilitate, spații liniare, forme patratice**, 1958, 455 p., 24,50 lei.

GH. GALBURĂ, **Corpuri de funcții algebrice și varietăți algebrice**, 1961, 180 p., 7,85 lei.

M. GHERMĂNESCU, **Ecuații funcționale**, 1960, 523 p., 25,60 lei (epuizat).

A. HALANAY , **Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

CAIUS IACOB, **Introduction mathématique à la mécanique des fluides**, 1959, 1288 p., 66,50 lei (epuizat).

TRAIAN LALESCU, **Introducere în teoria ecuațiilor integrale**, 1956, 135 p., 5,90 lei.

LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice și hidraulice**, 1963, 52 p., 18,50 lei.

* * * **Lucrările celui de-al IV-lea Congres al matematicienilor romîni**, 1960, 228 p., 8,55 lei (epuizat).

* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie și topologie Iași 2—5 iunie 1958**, 1962, 264 p., 9,75 lei.

* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie diferențială din 9—12 iunie 1955, organizată de Secția de științe matematice și fizice a Academiei R.P.R.**, 1956, 368 p., 9,50 lei.

G. MARINESCU, **Spații vectoriale normate**, 1956, 295 p., 6 lei.

G. MARINESCU, **Spații vectoriale topologice și pseudotopologice**, 1959, 219 p., 8,80 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometria neeuclidiană**, 1954, 144 p., 4,30 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă**, 1958, 496 p., 25,90 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă, Teoria corespondenței**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

GH. MIHOC și V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 1962, 732 p., 34,70 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 1961, 142 p., 8,55 lei (epuizat), vol. II, 1962, 155 p., 8,25 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Funcționarea în mai mulți timpi a schemelor cu relee ideale**, 1960, 279 p., 12 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Introducere în algebră, I. Inele și ideale**, vol. I, 1954, 256 p., 9,10 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Matricele asociate sistemelor de ecuații cu derivate parțiale. Introducere în studiul cercetărilor lui I. N. Lopatinschi**, 1950, 64 p., 1,20 lei.

GR. C. MOISIL, **Scheme cu comandă directă cu contacte și relee**, 1959, 205 p., 9,65 lei (epuizat).

ALEXANDRU MYLLER, **Scrieri matematice**, 1959, 595 p., + 1 pl., 30,40 lei.

VERA MYLLER-LEBEDEV, **Lecții de algebră**, 1953, 396 p., 8,75 lei (epuizat).

MIRON NICOLESCU, **Analiza matematică**, vol. II, 1953, 420 p., 11,90 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU, **Numere și sisteme aleatoare**, 1962, 260 p., 11,20 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU, **Strategia jocurilor, Cu aplicații la programarea liniară**, 1961, 228 p., 8,45 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU și colab., **Calculul probabilităților și aplicații**, 1956, 788 p., 15 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU și R. THEODORESCU, **Seminar de funcții sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

* * * **Opera matematică a lui Alexandru Pantazi**, 1956, 496 p., 24,20 lei.

DIMITRIE POMPEI, **Opera matematică**, 1959, 535 p. + 1 pl., 30, 20 lei.

N. RANCU și L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicații în producție**, 1963, 898 p. + 20 pl., 45 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor și ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Teoria funcțiilor de o variabilă complexă**, vol. I, 1954, 308 p., 10 lei (epuizat), vol. II în colaborare cu Cabiria Andreian-Cazacu, 1958), 379 p., 25,70 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticității**, vol. I, 1961, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.

GHEORGHE ŢIŢEICA, **Geometria diferențială proiectivă a rețelelor**, 1956, 287 p., 8 lei.

DRAGOŞ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 1961, 76 p., 3,15 lei.

SERGIU VASILACHE, **Elemente de teoria mulțimilor și structurilor algebrice**, 1956, 235 p., 5 lei.

GH. VRĂNCEANU, **Leçons de géometrie différentielle**, vol. I, 1957, 407 p., 26,50 lei; vol. II, 1957, 428 p., 27,60 lei.

GH. VRĂNCEANU, **Lecții de geometrie diferențială**, vol. III, 1960, 454 p., 15 lei.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
7883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Citarea bibliografiei în text se va face în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihail Eminescu, nr. 47, Bucureşti.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, Nr. 10, P. 1187—1296, BUCUREŞTI, 1964

I. P. „Informația" – c. 4058

43831 **Lei 12. —**